

ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации И. А. Богаевского «Фронты стратифицированных лежандровых подмногообразий в задачах теории дифференциальных уравнений и оптимизации», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Лежандровы подмногообразия и их фронты суть фундаментальные геометрические объекты при описании распространения волн и решений разнообразных вариационных задач. Одним из замечательных достижений школы Владимира Игоревича Арнольда является характеристика типичных особенностей фронтов гладких лежандровых многообразий и их полная классификация для небольших размерностей.

К сожалению, применения этой красивой и уже ставшей классической теории сильно ограничены требованием гладкости исходного лежандрова многообразия. Дело в том, что в большинстве актуальных задач математической физики и во многих оптимизационных задачах, связанных с решением дифференциальных уравнений, приходится иметь дело с несколькими пространственными и временными шкалами, что ведёт к необходимости учёта не только степенных, но и логарифмических членов возникающих асимптотических разложений. Соответствующие геометрические объекты не допускают разумной гладкой параметризации.

Сказанное хорошо понимал сам Владимир Игоревич Арнольд, который наметил программу исследования особенностей фронтов лежандровых подмногообразий в случае, когда сами лежандровы подмногообразия имеют особенности, характерные для задач распространения волн. Впрочем, по-настоящему реализовать эту программу пришлось уже ученику Владимира Игоревича Илье Александровичу Богаевскому.

Эта реализация потребовала изобретения новых технических средств и преодоления серьёзных аналитических трудностей, с чем Илья Александрович Богаевский блестяще справился. Его многолетние исследования по данной теме подытожены в представленной диссертации.

Диссертация состоит из введения и четырёх глав, которые разбиты на 12 разделов. Диссертационная работа изложена на 155 страницах. Библиография включает 92 наименования.

Во введении обсуждается история рассматриваемых вопросов, дан краткий обзор предшествовавших данной работе результатов, описаны основные методы исследования и сформулированы научные результаты диссертации.

В главе 1 разработан метод приведения стратифицированного лежандрова подмногообразия к локальной нормальной форме. Центральный результат здесь – теорема 1.20 о достаточной квазиструе. Этот теорема – технический стержень всей работы, она позволяет эффективно проверять, когда остаточный член асимптотического разложения может быть нейтрализован подходящей заменой переменных.

В главе 2 диссертации дана полная классификация типичных особенностей фронта важного двумерного стратифицированного лежандрова подмногообразия, возникающего при изучении внутреннего рассеяния коротких волн. Это стратифицированное лежандрово подмногообразие было ранее описано Владимиром Игоревичем Арнольдом, оно встречается и в других важных задачах, отмеченных в настоящей главе. Классификация содержит восемь основных типов особенностей, зависящих от одного или двух параметров (см. Теорему 2.3).

В главе 3 рассматривается классическая задача классификации типичных особенностей выпуклых оболочек гладких гиперповерхностей. Эта красивая и весьма важная в вопросах оптимизации задача была решена Владимиром Михайловичем Закалюкиным в размерности три. Аналоги найденных Закалюкиным двух типов особенностей имеются и в высших размерностях, но они не исчерпывают всех возможностей уже в размерности четыре. Более того, только в размерности четыре оставался шанс найти нормальные формы всех типичных особенностей, зависящие от конечного числа параметров; начиная с размерности пять, классификация обязана содержать нормальные формы, зависящие от произвольных функций и становится, по-существу, необозримой. Илье Александровичу Богаевскому удалось, с помощью техники, развитой в первой главе диссертации, найти недостающие два типа особенностей в размерности четыре, завершив, таким образом, классификацию в этой размерности и, по-существу, исчерпав общую многомерную задачу (см. теоремы 2.6, 2.7).

Последняя глава 4 посвящена исследованию особенностей, встречающихся в типичных однопараметрических семействах неявных дифференциальных уравнений и быстро-медленных систем. Методы, развитые автором, позволяют добиться существенного прогресса в этой важной и чрезвычайно сложной задаче, в частности, перейти от контактной классификации к гораздо более точной орбитальной (см. теорему 1.14).

Основные результаты диссертации Ильи Александровича Богаевского заключаются в следующем:

1. Разработан оригинальный метод приведения фронта стратифицированного лежандрова подмногообразия к локальной нормальной форме, основанный на представлении лежандрова расслоения с помощью семейства производящих функций, на пространстве которых действует группа контактных диффеоморфизмов, сохраняющих исходное стратифицированное лежандрово подмногообразие.

2. Получена классификация особенностей типичного фронта стратифицированного лежандрова подмногообразия, описывающего геометрическую оптику внутреннего рассеяния волн в неоднородных анизотропных средах; фазу квазиклассической асимптотики решения уравнения Дирака для графена; решение задачи быстрогодействия для некоторых управляемых систем.

3. Завершена классификация особенностей выпуклой оболочки типичной гладкой замкнутой гиперповерхности в четырёхмерном пространстве. Доказана гипотеза, утверждающая отсутствие функциональных модулей в их нормальных формах. Найденны нормальные формы ростков стратифицированного лежандрова подмногообразия, фронтом которого является граница рассматриваемой выпуклой оболочки.

4. Доказана теорема об усилении контактной эквивалентности до орбитальной для особого ростка неявного дифференциального уравнения, квадратичного по производной, а также для ростка семейства таких уравнений. Как следствие, получена формальная орбитальная

классификация конических точек неявных дифференциальных уравнений, встречающихся в их типичных однопараметрических семействах.

В диссертации используется богатый арсенал методов теории особенностей гладких отображений и дифференциальных операторов: теоремы о конечной определённости и версальности, подготовительная теорема Мальгранжа, гомотопический метод и другие.

Работа выполнена на высоком научном уровне. Диссертация написана хорошим языком, изложение ясное.

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях по особенностям распространения волн, структуре множеств достижимости, локальной классификации неявных дифференциальных уравнений, а также дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Результаты диссертации могут быть интересны специалистам, работающим в МГУ, МФТИ, МИ РАН, Институте Проблем Механики РАН, Институте Проблем Управления РАН и других российских и зарубежных научных центрах.

Результаты диссертации являются новыми, снабжены полными доказательствами и получены автором самостоятельно. Они своевременно опубликованы в центральных российских и международных математических журналах, а также прошли апробацию на международных конференциях и научных семинарах в России и за рубежом.

Автореферат диссертации соответствует ее содержанию.

Я считаю, что данная работа соответствует всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор Богаевский Илья Александрович безусловно заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент,
доктор физ.-мат. наук



А.А. Аграчев

The human resources office of SISSA confirms the signature of Prof. Andrey Agrachev.
March 15, 2019

