На правах рукописи

Гаргянц Лидия Владимировна

Разрывные энтропийные решения одномерных законов сохранения с неограниченными начальными условиями

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва — 2019

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова

Научный руководитель: **Горицкий Андрей Юрьевич,**
кандидат физико-математических наук,
доцент

Официальные оппоненты: **Панов Евгений Юрьевич,**
доктор физико-математических наук, профессор, Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, главный научный сотрудник

Рыков Юрий Германович,
кандидат физико-математических наук, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук, старший научный сотрудник

Ведущая организация: Российский университет транспорта (МИИТ)

Защита состоится «12» апреля 2019 г. в 17 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д212.025.08 при Владимирском государственном Университете им. А.Г. и Н.Г. Столетовых по адресу: 600024, РФ, Владимир, проспект Строителей, 11.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Владимирского государственного университета им. А.Г. и Н.Г. Столетовых и на сайте http://diss.vlsu.ru.

Автореферат разослан «   » марта 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д212.025.08 при ВлГУ им. А.Г. и
Н.Г. Столетовых,
кандидат физико-математических наук,
доцент Наумова С.Б.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Представленная работа является исследованием в области качественной теории уравнений с частными производными.

Важную роль в качественной теории таких уравнений играют законы сохранения в связи с многочисленными приложениями к задачам гидродинамики, газовой динамики и т.д. (см., например, [12]).

Рассмотрим в полосе $\Pi_T = \{(t,\, x) \mid t \in (0,\, T),\ x \in \mathbb{R}\}$, где $0 < T \leqslant \leqslant +\infty$, задачу Коши

$$u_t + (f(u))_x = 0,\ (t,\, x) \in \Pi_T, \qquad u\Big|_{t=0} = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

При гладком начальном условии u_0 и гладкой функции потока f задача (1) имеет в некоторой окрестности каждой точки прямой $t = 0$ единственное гладкое решение [13], которое может быть найдено методом характеристик [15, 18].

Однако у классических решений квазилинейного уравнения с частными производными первого порядка, даже при сколь угодно гладких начальном условии и функции потока, с ростом времени могут сформироваться особенности. Природа реальных физических процессов такова, что время, за которое протекают эти процессы, значительно превышает время существования гладкого решения. Поэтому возникает необходимость рассматривать так называемые *обобщённые* решения в классах, включающих разрывные функции.

Обобщённое решение задачи Коши (в смысле соответствующего интегрального тождества) неединственно (соответствующие примеры можно найти, например, в [15, 18]). Теория обобщенных *энтропийных* решений квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка была построена в работах Е. Хопфа [17], О. А. Олейник [8, 9, 10] и (в наиболее полной форме) С. Н. Кружкова [5, 6] (введение в теорию обобщенных энтропийных решений задачи (1) можно найти в пособиях [3, 7]). При $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ существование и единственность *ограниченного* обобщенного энтропийного решения $u \in L^\infty(\Pi_T)$ задачи (1) установлены в работах

С. Н. Кружкова [5, 6] в общем случае многих пространственных переменных. В этих работах также доказано свойство *монотонной зависимости* решения от начальных данных:

если u, $v \in L^\infty(\Pi_T)$ — обобщенные энтропийные решения задачи (1) с начальными условиями $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ и $v_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ соответственно, причем $u_0(x) \leqslant v_0(x)$ п. в. на $\mathbb{R}$, то $u(t,x) \leqslant v(t,x)$ п. в. на Π_T.

Из этого свойства вытекает *принцип максимума/минимума*: если $a \leqslant |u_0| \leqslant b$ почти всюду на $\mathbb{R}$ и u — ограниченное обобщенное энтропийное решение задачи (1), то $a \leqslant |u| \leqslant b$ почти всюду на Π_T. Из него, в частности, следует единственность постоянного решения в классе ограниченных измеримых функций. Отметим, что все классические определения обобщенных решений легко переносятся и на класс локально ограниченных функций.

Локально ограниченные обобщенные энтропийные решения изучались в работах А. Ю. Горицкого и Е. Ю. Панова [2, 4, 16]. В них приведены примеры построения неограниченных обобщенных энтропийных решений задачи Коши (1) со степенной функцией потока $f(u) = |u|^{\alpha-1}u/\alpha,\ \alpha > 1$ и степенным начальным условием $u_0(x) = |x|^\beta,\ \beta(\alpha-1) > 1$. Эти обобщённые энтропийные решения определены во всей полуплоскости $t > 0$, имеют счётное число линий сильного разрыва (ударных волн) и меняют знак при переходе через каждую из этих линий.

В этих работах, в частности, показано, что в классе локально ограниченных функций постановка задачи Коши некорректна в том смысле, что ни один из положительных результатов (существование и единственность решения, свойство монотонной зависимости решения от начальных данных), справедливых для *ограниченных* обобщенных энтропийных решений, вообще говоря, неверен для *локально ограниченных* решений.

В работе Е. Ю. Панова [11] доказана теорема существования и единственности локально ограниченного обобщенного энтропийного решения задачи (1) в общем случае многих пространственных переменных в классе функций, удовлетворяющих некоторому степенному ограничению на рост по пространственным переменным. Все решения, рассмотренные в настоящей диссертации, а также в работах А. Ю. Горицкого и Е. Ю. Панова [2, 4, 16], выпадают из установленных Пановым классов корректности.

Таким образом, актуальной является задача изучения локально ограниченных решений задачи Коши (1), не удовлетворяющих степенному ограничению на рост по пространственным переменным.

Цель работы. Целью настоящей диссертационной работы является построение локально ограниченных обобщенных энтропийных решений задачи (1) при различных функциях потока и начальных условиях.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные научные результаты:

- построено знакочередующееся обобщенное энтропийное решение задачи (1) со степенной функцией потока и экспоненциальным начальным условием, определенное во всей полуплоскости $t > 0$, а также изучены свойства этого решения;
- показано, что такая задача Коши не имеет положительного обобщенного энтропийного решения ни в какой полосе Π_T;
- приведен новый пример неединственности обобщенного энтропийного решения задачи Коши (1) со степенной функцией потока и нулевым начальным условием в классе локально ограниченных функций;
- описаны все обобщенные энтропийные решения задачи Коши (1) со степенной функцией потока и экспоненциальным начальным условием, имеющие специальное представление.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях специалистами по качественной теории уравнений с частными производными.

Апробация работы. Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

- семинар по качественной теории дифференциальных уравнений кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством проф. И. В.

Асташовой, проф. А. В. Боровских, проф. Н. Х. Розова и проф. И. Н. Сергеева в 2016 г.

- научно-методический семинар МГТУ им. Н. Э. Баумана под руководством проф. В. И. Ванько, проф. В. В. Феоктистова и доц. И. К. Марчевского в 2016 г.
- семинар «Уравнения в частных производных» кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством проф. Е. В. Радкевича, проф. А. С. Шамаева и проф. Т. А. Шапошниковой в 2017 г.
- семинар «Задачи дифференциальных уравнений, анализа и управления: теория и приложения» кафедры ОПУ механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством проф. М. И. Зеликина, проф. В. Ю. Протасова, проф. В. М. Тихомирова и проф. А. В. Фурсикова в 2018 г.
- семинар «Уравнения математической физики» под руководством проф. Г. А. Чечкина в 2018 г.
- семинар по математическим моделям экономики кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством проф. А. С. Шамаева и проф. О. С. Розановой в 2018 г.

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих конференциях:

- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (г. Москва, апрель 2014 г. и апрель 2018 г.);
- Международная научная конференция «Дни студенческой науки МЭСИ» (г. Москва, апрель 2015 г.);
- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (г. Суздаль, июль 2016 г. и июль 2018 г.);
- Международная научная конференция «Современные методы и проблемы математической гидродинамики — 2018» (г. Воронеж, 3–8 мая 2018 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 работ, в том числе 3 статьи в журналах, рекомендованных ВАК. Список работ приведен в конце автореферата. Работ в соавторстве нет.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 71 страницу. Библиография включает 39 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации, определяется цель работы и кратко излагаются основные результаты диссертации.

В первой части **первой главы** диссертации вводятся основные определения, среди которых понятие обобщенного энтропийного решения задачи (1), обобщенного энтропийного суб- и суперрешения задачи (1), а также приводятся формулировки известных утверждений, необходимых для последующего изложения.

Для заданных $f \in C^1(\mathbb{R})$ и $u_0 \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ рассмотрим задачу (1).

Определение 1 [5, 6]**.** Функция $u\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$, $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Pi_T)$, называется *обобщённым энтропийным решением* задачи (1), если:

1) для любого $k \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$|u-k|_t + \left(\operatorname{sign}(u-k)(f(u)-f(k))\right)_x \leqslant 0 \quad \text{в} \;\; \mathcal{D}'(\Pi_T);$$

2) $\operatorname*{esslim}\limits_{t\to 0+} u(t,\cdot) = u_0(\cdot)$ в $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, т.е. существует множество $\mathcal{E} \subset (0,T)$ полной меры Лебега, такое что $u(t,\cdot) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, $t \in \mathcal{E}$, и $u(t,\cdot) \to u_0$ в $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ при $t \to 0+$, $t \in \mathcal{E}$.

Обозначим $f^+ = \max(f,0)$; $f^- = \max(-f,0)$; $\operatorname{sign}^+(f) = \operatorname{sign}(f^+)$; $\operatorname{sign}^-(f) = -\operatorname{sign}^+(-f)$.

Определение 2 [1, 14]**.** Функция $u\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$, $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Pi_T)$, называется *обобщенным энтропийным субрешением* задачи (1), если:

1) для любого $k \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$[(u-k)^+]_t + \big[\operatorname{sign}^+(u-k)(f(u)-f(k))\big]_x \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\Pi_T);$$

2) $\operatorname*{esslim}\limits_{t\to 0+}((u(t,x)-u_0(x))^+ = 0$ в $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Определение 3 [1, 14]. Функция $u\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$, $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Pi_T)$, называется *обобщенным энтропийным суперрешением* задачи (1), если:

1) для любого $k \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$[(u-k)^-]_t + \big[\operatorname{sign}^-(u-k)(f(u)-f(k))\big]_x \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(\Pi_T);$$

2) $\operatorname*{esslim}\limits_{t\to 0+}((u(t,x)-u_0(x))^- = 0$ в $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Основу первой главы диссертации составляет построение обобщенного энтропийного решения задачи Коши (1) со степенной функцией потока и экспоненциальным начальным условием

$$u_t + |u|^{\alpha-1}u_x = 0, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}, \qquad u\big|_{t=0} = \exp\left(-\frac{x}{\alpha-1}\right),\ x\in\mathbb{R}. \quad (2)$$

Теорема 1. *У задачи Коши* (2) *существует обобщенное энтропийное решение* u, *которое*

1) определено во всей полуплоскости $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$;

2) имеет счетное число ударных волн Γ_n, $n\in\mathbb{N}_0$, *являющихся графиками функций*

$$\gamma_n(t) = \ln t + 1 - nC, \quad C = C(\alpha); \quad (3)$$

3) удовлетворяет соотношениям

$$u(t,x) = (-1)^n U(t, x+nC), \quad (t,x)\in D_n, \quad n\in\mathbb{N}_0,$$

где $D_n = \{(t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R} \mid \gamma_{n+1}(t) < x < \gamma_n(t)\}$ *и* $U = u|_{D_0}$.

Построение такого решения проводится методом характеристик, а линии разрыва получаются как огибающие семейств характеристик. Для нахождения огибающих семейств характеристик используется преобразование Лежандра.

Построенное обобщённое энтропийное решение определено при всех $t > > 0$, имеет счётное число линий сильного разрыва (ударных волн) и меняет знак при переходе через каждую из этих линий. Следовательно, для него не справедлив принцип максимума, что может вести к неединственности указанного решения (в третьей главе показано, что указанное решение действительно не является единственным). Во второй части первой главы доказано следующее следствие теоремы 1.

Следствие 1. *Обобщенное энтропийное решение задачи* (2), *построенное в теореме 1, является знакочередующимся. Кроме того, для любых $t > 0$ и $x \in \mathbb{R}$ справедлива оценка*

$$|u(t,\, x)| \leqslant w t^{-1/(\alpha-1)}, \qquad w = w(\alpha) > 0,$$

откуда следует ограниченность построенного решения при любом $t > 0$ и равномерное по $x \in \mathbb{R}$ стремление к нулю при $t \to +\infty$.

В третьей части первой главы приведены достаточные условия несуществования положительного обобщенного энтропийного решения задачи Коши (1) ни в какой полосе Π_T.

Теорема 2. *Если $f, u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, $g(x) = (f(x) - f(0))/x$ — возрастающая при $x > 0$ функция, u_0 — неотрицательная неограниченная убывающая на $\mathbb{R}$ функция, причем выполнено соотношение $-u_0^{-1}(x) = o(g(x))$ при $x \to +\infty$, то не существует неотрицательного обобщенного энтропийного решения задачи* (1) *ни в какой полосе Π_T.*

Для доказательства данного утверждения использован принцип сравнения для ограниченных обобщенных суб- и суперрешений, а также тот факт, что минимум конечного множества обобщенных энтропийных суперрешений задачи Коши также является ее обобщенным энтропийным суперрешением. Как следствие доказано, что исследуемая в этой главе задача Коши (2) не имеет положительного обобщенного энтропийного решения ни в какой полосе Π_T.

Во **второй главе** построены обобщенные энтропийные решения задачи Коши для более широкого класса функций потока и начальных условий. Построение таких решений, как и в первой главе, проводится методом характеристик, а линии разрыва получаются как огибающие семейств характеристик при помощи преобразования Лежандра. Основу первой части второй главы составляет выявление достаточных условий существования во всей полуплоскости $t > 0$ обобщенного энтропийного решения задачи (1) с неограниченным начальным условием. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $g_0\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ — гладкая, возрастающая, строго выпуклая вверх сюръективная функция, причем тем же свойством обладает любая из функций $g_n\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, определенных рекуррентной формулой*[1]

$$g_{n+1}(w^{\alpha-1}k) = g_n(k) + g_n'(k)(w^{\alpha-1} - 1)k.$$

Тогда существует обобщенное энтропийное решение уравнения $u_t + |u|^{\alpha-1}u_x = 0$ с начальным условием

$$u_0(x) = ((-g_0)^{-1}(x))^{1/(\alpha-1)},$$

обладающее счетным числом непересекающихся ударных волн $\Gamma_n, n \in \mathbb{N}_0$, являющихся графиками функций $\mathcal{L}(g_n)$ (здесь $\mathcal{L}(g_n)$ есть преобразование Лежандра функции g_n).

На основе этого результата приведены примеры задач Коши для скалярных законов сохранения с неограниченными положительными начальными условиями, для которых существуют знакочередующиеся обобщенные энтропийные решения со счетным числом ударных волн, определенные во всей полуплоскости $t > 0$. Кроме того, на основе теоремы 2 доказано, что указанные задачи Коши не имеют положительных решений ни в какой полосе Π_T.

В **третьей главе** вновь исследуется задача Коши для скалярного закона сохранения со степенной функцией потока и экспоненциальным начальным условием. В первой части третьей главы находится группа симметрий указанной задачи, что позволяет искать ее решение в специальном виде $u(t, x) = t^{-1/(\alpha-1)}v(x - \ln t)$. На основе найденной группы симметрий

[1] Число w определяется как корень уравнения $|v|^{\alpha-1}v - \alpha v + \alpha - 1 = 0$, отличный от 1.

во второй части третьей главы приводится альтернативное доказательство теоремы 1.

На основе построенного в этой теореме решения в третьей части третьей главы приводится новый пример неединственности нулевого решения задачи (1) со степенной функцией потока и нулевым начальным условием в классе локально ограниченных функций.

Теорема 4. *Уравнение $u_t + |u|^{\alpha-1}u_x = 0$ имеет нетривиальное обобщенное энтропийное решение $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ со счетным числом ударных волн γ_n, являющихся графиками функций* (3) *при $n \in \mathbb{N}$ и $\gamma_0(t) = \ln t + 1 - S$ $(S = \mathrm{const})$, периодическое по x в области, где $x < \gamma_1(t)$, и равное нулю в области, где $x > \gamma_0(t)$.*

В последней части третьей главы описаны все обобщенные энтропийные решения уравнения $u_t + |u|^{\alpha-1}u_x = 0$, имеющие вид $u(t,x) = t^{-1/(\alpha-1)}v(x - \ln t)$.

Теорема 5. *Пусть обобщенное энтропийное решение $u(t, x) = t^{-1/(\alpha-1)}v(x - \ln t)$ уравнения $u_t + |u|^{\alpha-1}u_x = 0$ определено при всех $t > 0$ (функция $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v \not\equiv 0$, — кусочно гладкая). Тогда выполнено одно из двух утверждений.*

1. Функция v является $2S$-периодической с $S = |w|^{\alpha-1} - (\alpha-1)\ln|w| + 1$; более того, S-антипериодической, то есть $v(\xi + S) = -v(\xi)$ для любого $\xi \in \mathbb{R}$, гладкой лишь на полупериоде. Соответствующее ($2S$-периодическое по x) знакочередующееся решение u удовлетворяет двусторонней оценке

$$t^{-1/(\alpha-1)} \leqslant |u(t, x)| \leqslant wt^{-1/(\alpha-1)}, \quad w = w(\alpha) > 1,$$

а, значит, $\lim\limits_{t\to+0} u(t, x) = \infty$.

2. Для некоторого $\mu_0 \in \mathbb{R}$ функция u совпадает в области $\{(t,x) \mid x < \ln t + \mu_0\}$ с одной из функций, описанных в п. 1, а кривая $x(t) = \ln t + \mu_0$ является еще одной линией разрыва решения. В области же $D = \{(t, x) \mid x > \ln t + \mu_0\}$ функция u является гладкой, при этом выполнено одно из двух утверждений:

i) функция u удовлетворяет в области D неравенству $|u(t,x)| \geqslant$

$\geqslant t^{-1/(\alpha-1)}$, *и, следовательно,* $\lim\limits_{t\to+0} u(t,x) = \pm\infty$*;*

ii) функция u удовлетворяет в области D неравенству $|u(t,x)| \leqslant \leqslant t^{-1/(\alpha-1)}$ *при этом существует*

$$\lim_{t\to+0} u(t,x) = A\exp\left(-\frac{x}{\alpha-1}\right)$$

для некоторой константы A. В частности, при $A = 0$ *будем иметь* $u \equiv 0$ *в области D.*

Как следствие, доказано, что задача Коши (2) имеет бесконечно много обобщенных энтропийных решений, определенных при $t > 0$, для каждого из которых не выполнен принцип максимума. Однако все эти решения после первого разрыва выходят на фактически однозначный периодический режим, и вся неединственность состоит лишь в выборе первой ударной волны.

Работы автора по теме диссертации в научных журналах, находящихся в перечне ВАК

[1] *Гаргянц Л. В.* Локально ограниченные решения одномерных законов сохранения // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 4. С. 481–489.

[2] *Гаргянц Л. В.* О локально ограниченных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка со степенной функцией потока // Мат. заметки. 2018. Т. 104. № 2. С. 191–199.

[3] *Gargyants L. V.* Example of Nonexistence of a Positive Generalized Entropy Solution of a Cauchy Problem with Unbounded Positive Initial Data // Russian Journal of Mathematical Physics. 2017. V. 24. № 3. P. 412–414.

Работы автора в прочих научных журналах и материалах научных конференций

[4] *Гаргянц Л. В.* О локально ограниченных решениях квазилинейных уравнений первого порядка со степенной функцией потока // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 6. С. 854–855.

[5] *Гаргянц Л. В.* О локально ограниченных решениях одномерных законов сохранения со степенной функцией потока // Материалы конференций, проходивших в рамках «Дней студенческой науки МЭСИ. Осень-2014». Сборник научных трудов. Часть 2. Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, М., 2014. С.231–233.

[6] *Гаргянц Л. В.* О локально ограниченных решениях квазилинейных уравнений первого порядка // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Суздаль. 2016. С. 47–48.

[7] *Гаргянц Л. В.* О неединственности неограниченных решений задачи Коши для скалярного закона сохранения с экспоненциальным начальным условием // Материалы международной научной конференции «Современные методы и проблемы математической гидродинамики — 2018». Воронеж. 2018. С. 109–118.

[8] *Гаргянц Л. В.* Примеры неединственности неограниченных обобщенных энтропийных решений скалярных законов сохранения // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Суздаль. 2018. С. 67–68.

Список литературы

[1] *Бенилан Ф., Кружков С. Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка с непрерывными нелинейностями // Докл. РАН. 1994. Т. 339, № 2. С. 151–154.

[2] *Горицкий А. Ю.* Построение неограниченного энтропийного решения задачи Коши со счетнымм числом ударных волн // Вестник Московского Университета. Сер. 1, Математика, механика. 1999. №2. С. 3–6.

[3] *Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А.* Уравнения с частными производными первого порядка (Учебное пособие) // М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 1999.

[4] *Горицкий А. Ю., Панов Е. Ю.* О локально ограниченных обобщенных энтропийных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка // Тр. МИРАН им. В. А. Стеклова. 2002. Т. 236. № 5. С. 120–133.

[5] *Кружков С. Н.* Обобщенные решения задачи Коши в целом для нелинейных уравнений первого порядка // ДАН СССР . 1969. Т. 187. № 1. С. 29–32.

[6] *Кружков С. Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Мат. сб. 1970. Т. 81. № 2. С. 228–255.

[7] *Кружков С. Н.* Нелинейные уравнения с частными производными. Ч. 2. Уравнения первого порядка. М.: МГУ. 1970.

[8] *Олейник О. А.* О задаче Коши для нелинейных уравнений в классе разрывных функций // ДАН СССР. 1954. Т. 95. № 3. С. 451–454.

[9] *Олейник О. А.* Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. № 3. С. 3–73.

[10] *Олейник О. А.* О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14. № 2. С. 165–170.

[11] *Панов Е. Ю.* О классах корректности локально ограниченных обобщенных энтропийных решений задачи Коши для квазилинейных уравнений первого порядка // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12. № 5. С. 175–188.

[12] *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. 2-ое изд. М.: Наука, 1978.

[13] *Сергеев И. Н.* Дифференциальные уравнения. Академия: 2013.

[14] *Benilan Ph., Kruzhkov S. N.* Conservation laws with continuous flux functions // Nonlin. Diff. Equat. and Appl. 1996. V. 3. P. 395—419.

[15] *Evans L. C.* Partial Differential Equations. Providence: AMS, 1998.

[16] *Goritsky A. Yu., Panov E. Yu.* Example of nonuniqueness of entropy solutions in the class of locally bounded functions // Russian Journal of Mathematical Physics. 1999. V. 6. № 4. P. 492–494.

[17] *Hopf E.* The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. on pure and appl. Math. 1950. V. 3. № 3. P. 201–230.

[18] *Lax P.* Hyperbolic Partial Differential Equations. Providence: AMS, 2006.