На правах рукописи

Владимиров Антон Алексеевич

Некоторые вопросы теории обыкновенных дифференциальных операторов в тройках пространств Соболева

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва, 2018

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Научный консультант: **Шкаликов Андрей Андреевич,**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Пенкин Олег Михайлович,**
доктор физико-математических наук, профессор

Степанов Владимир Дмитриевич,
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук, профессор

Султанаев Яудат Талгатович,
доктор физико-математических наук, профессор

Ведущая организация: **Санкт-Петербургское отделение Математического института имени В. А. Стеклова Российской академии наук (ПОМИ РАН)**

Защита диссертации состоится 5 октября 2018 г. в 16 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д.212.025.08 во Владимирском государственном университете имени А. Г. и Н. Г. Столетовых по адресу: 600024, Владимир, проспект Строителей, 11, ауд. 230.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ВлГУ имени А. Г. и Н. Г. Столетовых, а также по электронному адресу `http://diss.vlsu.ru`.

Автореферат разослан ___ августа 2018 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д.212.025.08
кандидат физико-математических наук,
доцент Наумова С. Б.

Общая характеристика работы

Основной целью исследований, проведённых в диссертации, является развитие ряда аспектов теории обыкновенных дифференциальных операторов, связанных с линейными отображениями „нижней“ компоненты $\mathfrak{D}$ тройки

$$\mathfrak{D} \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{D}^*$$

гильбертовых пространств (оснащённого гильбертова пространства) в сопряжённую к ней „верхнюю“ компоненту $\mathfrak{D}^*$. Такого рода операторы достаточно хорошо известны в математике. Например, в случае вещественности рассматриваемых пространств к ним приводит двукратное дифференцирование гладких функционалов $f\colon \mathfrak{D} \to \mathbb{R}$. Это наблюдение сразу показывает значение операторов указанного вида для механики систем с бесконечным числом степеней свободы[1]. В терминах операторов в оснащённых пространствах легко переформулируются также обычно трактуемые в терминах полуторалинейных форм теоремы о представлении[2,3]. Широкой известностью обладает также полностью опирающаяся на оснащённые пространства теория разложения по обобщённым собственным функциям самосопряжённых операторов[4,5]. Несмотря на сказанное, определение и изучение свойств обыкновенных дифференциальных операторов с коэффициентами–обобщёнными функциями, допускающих естественное понимание именно как операторы в оснащённых пространствах, представляет собой сравнительно новое направление математического анализа. Начало его современному развитию было положено, по всей видимости, в работах А. А. Шкаликова и его школы[6,7].

Актуальность темы. Тематика, связанная с изучением свойств обыкновенных дифференциальных операторов с коэффициентами–обобщёнными функциями, в настоящее время активно развивается. Наибольшее количество публикаций посвящено при этом изучению задач второго порядка с обобщённой функцией в качестве потенциала. Вопросы, на которые обращено основное внимание в диссертации, изучены существенно более слабо. В частности, интерес к проблеме общего определения граничной задачи для

---

[1] Ф. Рисс, Б. Сёкефальви–Надь. Лекции по функциональному анализу, изд. 2. М.: Мир, 1979, пп. 99, 100.

[2] Т. Като. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972, § VI.2.

[3] А. А. Владимиров. Теоремы о представлении и вариационные принципы для самосопряжённых операторных матриц // Матем. заметки. — 2017. — Т. 101, № 4. — С. 516–530.

[4] Ю. М. Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряжённых операторов. Киев: Наукова думка, 1965.

[5] Ф. А. Березин, М. А. Шубин. Уравнение Шрёдингера. М.: Изд-во МГУ, 1983, Дополнение 1.

[6] М. И. Нейман-заде, А. А. Шкаликов. Операторы Шрёдингера с сингулярными потенциалами из пространств мультипликаторов // Матем. заметки. — 1999. — Т. 66, № 5. — С. 599–609.

[7] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов. Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями // Труды Моск. матем. общества. — 2003. — Т. 64. — С. 159–212.

дифференциального уравнения произвольного порядка с сингулярными коэффициентами не иссякает до настоящего времени[8,9,10].

Задача Штурма–Лиувилля, содержащая обобщённую плотность конечной борелевской меры (или, что то же самое, неотрицательную обобщённую функцию) не в качестве потенциала, а в качестве веса, равносильна хорошо известной задаче о колебаниях неоднородной струны[11]. Значение этой задачи для механики сплошной среды, таким образом, является несомненным. Однако этим объём приложений данной задачи не исчерпывается. А именно, задача о спектре струны естественным образом возникает в теории случайных процессов при оценивании вероятностей малых уклонений винеровского процесса[12]. Определённый интерес представляет также то обстоятельство, что на таком пути придаётся смысл и ряду индефинитных спектральных задач[13], непосредственного механического значения очевидным образом не имеющих.

Изучение задачи о спектре струны с самоподобным распределением массы представляет собой отдельное направление исследований[14,15,16,17]. Последнее существенное продвижение в этой области было связано с разработкой в начале 1990-х годов метода теории восстановления, не позволяющего, однако, получать ответ на ряд естественных вопросов о характере исследуемых спектральных асимптотик.

Наконец, следует отметить, что ряд известных направлений исследований, по первоначальной постановке соответствующих задач представляющихся не связанными с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами–обобщёнными функциями, в действительности до-

---

[8] К. А. Мирзоев, А. А. Шкаликов. Дифференциальные операторы чётного порядка с коэффициентами–распределениями // Матем. заметки. — 2016. — Т. 99, № 5. — С. 788–793.

[9] G. Meng, P. Yan. Optimal lower bound for the first eigenvalue of the fourth order equation // Journ. Diff. Equat. — 2016. — V. 261. — P. 3149–3168.

[10] Р. Ч. Кулаев. К вопросу об осцилляционности функции Грина разрывной краевой задачи четвёртого порядка // Матем. заметки. — 2016. — Т. 100, № 3. — С. 375–387.

[11] И. С. Кац, М. Г. Крейн. О спектральных функциях струны / В кн.: Ф. Аткинсон. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968, С. 648–733.

[12] А. И. Назаров. Логарифмическая асимптотика малых уклонений для некоторых гауссовских процессов в L_2-норме относительно самоподобной меры // Записки науч. семинаров ПОМИ. — 2004. — Т. 311. — С. 190–213.

[13] А. А. Владимиров. Некоторые замечания об интегральных характеристиках винеровского процесса // Дальневост. матем. журнал. — 2015. — Т. 15, № 2. — С. 156–165.

[14] T. Uno, I. Hong. Some consideration os asymptotic distibution of eigenvalues for the equation $d^2u/dx^2 + \lambda\rho(x)u = 0$ // Japan. journ. of Math. — 1959. — V. 29. — P. 152–164.

[15] J. Kigami, M. L. Lapidus. Weyl's problem for the spectral distributions of Laplacians on p. c. f. self-similar fractals // Comm. Math. Phys. — 1993. — V. 158. — P. 93–125.

[16] M. Solomyak, E. Verbitsky. On a spectral problem related to self-similar measures // Bull. London Math. Soc. — 1995. — V. 27, № 3. — P. 242–248.

[17] U. Freiberg. Refinement of the spectral asymptotics of generalized Kerin Feller operators // Forum Math. — 2011. — V. 23, № 2. — P. 427–445.

пускает переформулировку на языке этой теории. В первую очередь здесь должны быть указаны многоточечные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Широкий класс таких задач допускает равносильное понимание в качестве двухточечных задач для дифференциальных уравнений, коэффициенты которых содержат особенности типа дельта-функции. Осцилляционной теории именно такого рода задач посвящена серия недавних работ[18,19], основные результаты которой на основе развитой в представленной диссертации точки зрения допускают[20] существенное расширение и упрощение (см. также далее Предложение 6).

Цель работы заключается в развитии основных представлений теории обыкновенных дифференциальных операторов в тройках пространств Соболева и приложении их к исследованию ряда конкретных задач теории дифференциальных уравнений и смежных дисциплин.

Научная новизна. Результаты, представленные в диссертации, являются новыми. Основные из них состоят в следующем:

1. Дана строгая характеризация граничных задач для широкого класса дифференциальных уравнений произвольного чётного порядка с коэффициентами–обобщёнными функциями.

2. Построена теории осцилляции собственных функций как для содержащих коэффициенты–обобщённые функции задач Штурма–Лиувилля, так и для положительно определённых (или сводящихся к ним) граничных задач высокого чётного порядка с распадающимися граничными условиями.

3. Показан естественный характер возникновения задач Штурма–Лиувилля с коэффициентами–обобщёнными функциями при изучении вопроса о неулучшаемых априорных оценках спектра задач Штурма–Лиувилля с суммируемыми коэффициентами.

4. Развит основанный на изучении осцилляционных свойств собственных функций новый подход к исследованию асимптотических свойств спектра граничных задач для дифференциальных уравнений с самоподобными весами. На основе этого подхода проведено существенное уточнение указанных свойств в ряде важных для приложений ситуаций.

Методы исследования. Основными методами, применяемыми в диссертации, являются методы спектральной теории операторов в гильбертовом пространстве. При изучении вопросов осцилляции собственных функций применяются методы теории знакорегулярных операторов в вещественных функциональных пространствах. При изучении задач с самоподобными

---

[18] Р. Ч. Кулаев. Об осцилляционности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвёртого порядка // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 4. — С. 445–458.

[19] Р. Ч. Кулаев. К вопросу об осцилляционности функции Грина разрывной краевой задачи четвёртого порядка // Матем. заметки. — 2016. — Т. 100, № 3. — С. 375–387.

[20] А. А. Владимиров. К вопросу об осцилляционных свойствах положительных дифференциальных операторов с сингулярными коэффициентами // Матем. заметки. — 2016. — Т. 100, № 6. — С. 800–806.

коэффициентами применяется техника вещественного анализа и теории интеграла. В приложении используются также (в действительности тесно связанные с основной для всей работы идеологией теории операторов в гильбертовом пространстве) представления L_2-теории случайных процессов.

Основные результаты, выносимые на защиту. Центральные результаты диссертационной работы состоят в следующем.

1. Развиты основанные на представлении об оснащённых пространствах и действующих в таких пространствах операторах теория расширений и вариационные принципы для широкого класса симметрических операторных матриц.

2. Определён класс вполне регулярных граничных задач для дифференциальных уравнений чётного порядка с коэффициентами-обобщёнными функциями.

3. Построена теории осцилляции собственных функций для задач Штурма–Лиувилля с коэффициентами–обобщёнными функциями, а также для положительно определённых вещественных задач высокого чётного порядка с распадающимися граничными условиями.

4. Установлена достижимость на обобщённых функциях экстремальных значений наименьшего собственного значения третьей граничной задачи Штурма–Лиувилля с потенциалом, пробегающим положительный сектор единичной сферы пространства $L_1[0,1]$. Установлена достижимость на обобщённых функциях экстремальных значений наименьшего собственного значения первой граничной задачи Штурма–Лиувилля с потенциалом, пробегающим положительный сектор единичной сферы пространства $L_1(r;\,[0,1])$ с равномерно внутри интервала $(0,1)$ положительным весом $r \in C(0,1)$. Указана связь задач описанного вида с задачей об априорных оценках спектра лапласиана на геометрическом графе.

5. Уточнены характеристики асимптотик спектра струны (и её обобщений высших порядков) в случае незнакоопределённости весовой самоподобной обобщённой функции, а также случае равенства спектрального порядка самоподобной обобщённой первообразной такой функции нулю.

6. Развит основанный на изучении осцилляционных свойств собственных функций метод исследования асимптотических свойств спектра струн с самоподобными плотностями.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Значимость её результатов обусловлена как даваемым в ней решением ряда известных проблем спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов, так и осуществляемым проведением новых точек зрения на классические задачи теории дифференциальных уравнений — в частности, проблематику, связанную с изучением осцилляционных свойств собственных функций граничных задач — позволяющих в ряде случаев существенно упростить исследование по сравнению с известными подходами.

Результаты и методы работы уже стали основой для ряда дальнейших исследований[21], и эта деятельность может быть продолжена и далее.

Достоверность результатов работы. Результаты диссертации являются достоверными и получены в рамках общепринятых в современной математической науке стандартов строгости.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах: конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённой 103-летию со дня рождения И. Г. Петровского (Москва, 2004); Воронежской весенней математической школе «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения–XV» (Воронеж, 2004); 15-й ежегодной международной конференции КРОМШ-2004 (Севастополь, 2004); конференции «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ», посвящённой 100-летию С. М. Никольского (Москва, 2005); конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённой 106-летию со дня рождения И. Г. Петровского (Москва, 2007); Украинском математическом конгрессе (Киев, 2009); конференции «Спектральные задачи и смежные вопросы» (Москва, 2009); конференции «Асимптотические методы и математическая физика» (Москва, 2010); конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённой 110-летию со дня рождения И. Г. Петровского (Москва, 2011); 22rd International Workshop on Operator Theory and its Applications (Sevilla, 2011); Conference on Differential and Difference Equations and Applications (Terchovà, 2012); 23-ей ежегодной международной конференции КРОМШ-2012 (Севастополь, 2012); конференции «Спектральная теория и дифференциальные уравнения», посвящённой 100-летию со дня рождения Б. М. Левитана (Москва, 2014); конференции «Функциональные пространства и теория приближений», посвящённой 110-летию со дня рождения С. М. Никольского (Москва, 2015); городском семинаре по математической физике им. В. И. Смирнова (Санкт-Петербург, ПОМИ им. В. А. Стеклова РАН, 2015); Воронежской зимней математической школе–2016 (Воронеж, 2016); семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра дифференциальных уравнений, 2016) под руководством проф. И. В. Асташовой, проф. А. В. Боровских, проф. Н. Х. Розова и проф. И. Н. Сергеева; семинаре по теории функций многих действительных переменных и её приложениям к задачам математической физики (Москва, МИ им. В. А. Стеклова РАН, 2016, 2017) под руководством член-корр. РАН О. В. Бесова; конференции «Теория операторов и её приложения», посвящённой 85-летию со дня рождения А. Г. Костюченко (Москва, 2016); научном семинаре кафедры прикладной математики факультета физико-математических и естественных наук РУДН (Москва, 2017) под

[21] Н. В. Растегаев. Об асимптотике спектра задачи Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с самоподобным весом обобщённого канторовского типа // Записки науч. семинаров ПОМИ. — 2014. — Т. 425. — С. 86–98.

руководством проф. А. Л. Скубачевского, семинаре по операторным моделям и спектральному анализу (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра ТФФА, многократно) под руководством проф. А. А. Шкаликова.

Указанные результаты явились предметом 15 публикаций, осуществлённых в рецензируемых периодических изданиях из списка ВАК.

Краткое содержание работы

Диссертация занимает 224 страницы текста и состоит из введения, шести разбитых на параграфы глав, приложения и списка литературы, содержащего 103 наименования.

В диссертации использована система ссылок, восходящая к работам А. А. Маркова[22,23,24] и состоящая в следующем. Главы, обозначаемые римскими цифрами, делятся на параграфы, нумерация которых ведётся отдельно внутри каждой главы. Аналогичным образом производится деление параграфов на пункты. Утверждения и формулы нумеруются отдельно внутри пунктов. Полная ссылка на утверждение состоит из номера главы, номера параграфа (предшествуемого знаком «§»), номера пункта и номера утверждения, отделяемых друг от друга точками. При ссылке на утверждение из той же главы, внутри которой даётся ссылка, номер главы опускается. Аналогичным образом, при ссылке на утверждение из того же параграфа, внутри которого даётся ссылка, опускается номер этого параграфа.

Ссылки на формулы делаются аналогичным ссылкам на утверждения образом. При этом номер формулы заключается в круглые скобки, точка перед открывающей номер формулы скобкой не ставится, и при ссылке на формулу того же пункта, внутри которого даётся ссылка, этот номер пункта опускается.

Введение содержит краткую характеристику целей и основных результатов диссертации, а также приводит сведения об апробации.

Первая глава посвящена изложению ряда общих фактов о представлении неограниченных операторов (главным образом — операторных матриц) в гильбертовых пространствах при помощи ограниченных отображений „нижних“ компонент троек пространств в верхние. Основные результаты здесь состоят в следующем:

Предложение 1. *Пусть в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ задана симметрическая операторная матрица*

$$T^\circ = \begin{pmatrix} T_{11}^\circ & T_{12}^\circ \\ T_{21}^\circ & T_{22}^\circ \end{pmatrix}$$

---

[22] А. А. Марков. Теория алгорифмов // Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1954. — Т. 42. — С. 3–375

[23] А. А. Марков. О нормальных алгорифмах, связанных с вычислением булевых функций // Известия АН СССР. Серия математическая. — 1967. — Т. 31, № 1. — С. 161–208

[24] А. А. Марков, Н. М. Нагорный. Теория алгорифмов. Изд. 2. — М.: ФАЗИС, 1996.

с областью определения $\mathrm{dom}\,T_{11}^{\circ}\oplus\mathrm{dom}\,T_{22}^{\circ}$*. Пусть при этом симметрический оператор* T_{11}° *ограничен снизу, а симметрический оператор* T_{22}° *ограничен сверху. Тогда может быть построено оснащённое пространство*

$$\mathfrak{D} \overset{I}{\hookrightarrow} \mathfrak{H} \overset{I^*}{\hookrightarrow} \mathfrak{D}^*,$$

для которого оператор $I^*T^{\circ}I$ *будет допускать однозначное продолжение по непрерывности до некоторого ограниченного оператора* $T\colon\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}^*$*. Соответствующий неограниченный оператор* $T^{\bullet} = (I^*)^{-1}TI^{-1}$ *при этом будет представлять собой некоторое самосопряжённое расширение исходной операторной матрицы* T°*.*

Предложение 2. *Пусть отрезок* $[\zeta^-,\zeta^+]$ *вложен в резольвентное множество расширения оператора* T_{22}° *по Фридрихсу, и пусть значение* $S(\zeta^+)$ *передаточной оператор-функции*

$$S(\lambda) \eqqcolon T_{11} - \lambda I_1^*I_1 - T_{12}\cdot(T_{22}-\lambda I_2^*I_2)^{-1}T_{21}$$

описанной в предыдущем предложении ограниченной операторной матрицы T *представляет собой вполне непрерывное возмущение некоторого равномерно положительного оператора. Тогда спектр соответствующего оператора* $T^{\bullet}$ *на полуинтервале* $[\zeta^-,\zeta^+)$ *чисто дискретен, причём его суммарная кратность равна величине* $\mathrm{ind}\,S(\zeta^+) - \mathrm{ind}\,S(\zeta^-)$*.*

Здесь и далее символом $\mathrm{ind}\,A$ обозначается отрицательный индекс инерции самосопряжённого оператора A, то есть максимально возможная размерность подпространства с отрицательно определённой квадратичной формой этого оператора. Указанные предложения содержат как частные случаи ряд известных результатов[25], ранее устанавливавшихся независимо один от другого.

Вторая глава посвящена определению граничных задач, отвечающих содержащим в качестве коэффициентов p_k некоторые обобщённые функции дифференциальным уравнениям

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\left(p_k y^{(n-k)}\right)^{(n-k)} = f. \tag{1}$$

Оно осуществляется следующим образом. Следуя известным[26] принципам теории обыкновенных дифференциальных операторов, функциям $y\in W_2^n[0,1]$

[25] M. Kraus, M. Langer, C. Tretter. Variational principles and eigenvalue estimates for unbounded block operator matrices and applications // Journ. of Comput. and Appl. Math. — 2004. — V. 171. — P. 311–334.

[26] Ф. С. Рофе–Бекетов, А. М. Холькин. Спектральный анализ дифференциальных операторов. Связь спектральных и осцилляционных свойств. Мариуполь, 2001.

сопоставляются векторы граничных значений

$$y^{\wedge} \rightleftharpoons \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(0) \\ y(1) \\ y'(1) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(1) \end{pmatrix}, \qquad y^{\vee} \rightleftharpoons \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} (p_k y^{(n-k)})^{(n-k-1)}(0) \\ \sum\limits_{k=0}^{n-2} (-1)^{n-k-2} (p_k y^{(n-k)})^{(n-k-2)}(0) \\ \dots \\ [p_0 y^{(n)}](0) \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} (p_k y^{(n-k)})^{(n-k-1)}(1) \\ \sum\limits_{k=0}^{n-2} (-1)^{n-k-1} (p_k y^{(n-k)})^{(n-k-2)}(1) \\ \dots \\ -[p_0 y^{(n)}](1) \end{pmatrix},$$

среди которых вторые являются, вообще говоря, формальными, поскольку требуют более сильных ограничений на вид функции $y \in W_2^n[0,1]$, нежели предполагаемые. Запишем граничные условия в форме

$$By^{\wedge} + Cy^{\vee} = 0, \tag{2}$$

где $B, C \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ суть некоторые комплексные матрицы. Тогда в случае достаточной гладкости коэффициентов p_k и выполнения условия *полной регулярности*

$$B^{-1} \operatorname{im} C \subseteq \mathbb{C}^{2n} \ominus \ker C \tag{3}$$

обычным образом понимаемая граничная задача (1), (2) определяет ограниченное отображение некоторого плотного линейного подмножества пространства

$$W_{2,B,C}^n[0,1] \rightleftharpoons \{y \in W_2^n[0,1] \ : \ By^{\wedge} \in \operatorname{im} C\}$$

в двойственное пространство $W_{2,B,C}^{-n}[0,1]$. Продолжая это отображение по непрерывности, мы получаем возможность связать с рассматриваемой граничной задачей некоторый ограниченный оператор $T\colon W_{2,B,C}^n[0,1] \to W_{2,B,C}^{-n}[0,1]$. Граничные задачи для сингулярных дифференциальных уравнений могут теперь быть определены на основе предельного перехода в равномерной (либо сильной) операторной топологии. При этом используются вспомогательные функциональные пространства

$$W_{2,B,C}^k[0,1] \rightleftharpoons \{y \in W_2^k[0,1] \ : \ (\exists z \in W_{2,B,C}^n[0,1]) \quad z^{(n-k)} = y\},$$

где $k \in 0\,..\,n-1$, а также связанные с ними пространства мультипликаторов $\mathfrak{M}_{B,C,k} \subseteq \mathcal{B}(W_{2,B,C}^k[0,1], W_{2,B,C}^{-k}[0,1])$, получаемые пополнением относительно сильной операторной топологии множеств операторов умножения на непрерывные функции:

Предложение 3. *Пусть фиксировано некоторое направленное множество $\mathfrak{A}$, а также даны n направленностей $\{p_{k,\alpha}\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ функций классов*

$C^{n-k}[0,1]$, *и две матричные направленности* $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$, $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$. *Пусть также при этом выполнены следующие условия:*

1. *Каждая из направленностей* $\{p_{k,\alpha}\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ *сильно (либо равномерно) сходится к некоторому мультипликатору* $p_k \in \mathfrak{M}_{B,C,k}$.
2. *Матричные направленности* $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ *и* $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ *сходятся к матрицам* B *и* C, *соответственно.*
3. *При любом выборе индекса* $\alpha \in \mathfrak{A}$ *выполняются соотношения*

$$B_\alpha^{-1}\operatorname{im} C_\alpha = \mathbb{C}^{2n} \ominus \ker C_\alpha = B^{-1}\operatorname{im} C.$$

Тогда направленность $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ *ограниченных линейных операторов* $T_\alpha\colon W^n_{2,B,C}[0,1] \to W^{-n}_{2,B,C}[0,1]$, *порождённых дифференциальными выражениями*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(p_{k,\alpha}y^{(n-k)})^{(n-k)}$$

и граничными условиями $B_\alpha y^\wedge + C_\alpha y^\vee = 0$, *сильно (либо равномерно) сходится к оператору* $T\colon W^n_{2,B,C}[0,1] \to W^{-n}_{2,B,C}[0,1]$ *вида*

$$\langle Ty, z\rangle \equiv \sum_{k=0}^{n}\langle p_k y^{(n-k)}, z^{(n-k)}\rangle + \langle Vy^\wedge, z^\wedge\rangle_{\mathbb{C}^{2n}},$$

где оператор $V\colon B^{-1}\operatorname{im} C \to \mathbb{C}^{2n} \ominus \ker C$ *сопоставляет каждому вектору* $\xi \in B^{-1}\operatorname{im} C$ *принадлежащее подпространству* $\mathbb{C}^{2n} \ominus \ker C$ *решение* $\eta = V\xi$ *уравнения* $C\eta = -B\xi$.

Каждому ограниченному оператору $T\colon W^n_{2,B,C}[0,1] \to W^{-n}_{2,B,C}[0,1]$ очевидным образом может быть сопоставлен (вообще говоря, неограниченный) оператор $T^\bullet \rightleftharpoons (I^*)^{-1}TI^{-1}$, где символом I обозначен оператор вложения пространства $W^n_{2,B,C}[0,1]$ в пространство $L_2[0,1]$. Такие неограниченные операторы допускают характеризацию при помощи обычным образом понимаемых граничных задач для дифференциальных уравнений на абсолютно непрерывные вектор-функции:

Предложение 4. *Пусть* $n = 2$, B *невырождена, а* $C = 1$. *Тогда для любых функций* $y, f \in L_2[0,1]$ *равенство* $T^\bullet y = f$ *равносильно совпадению функции* y *почти всюду с первой компонентой решения* $Y \in W^1_2[0,1] \times \{W^1_1[0,1]\}^3$ *граничной задачи*

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u_2/p_0 & u_1/p_0 & 1/p_0 & 0 \\ u_1u_2/p_0 & 2u_2 - (u_1^2/p_0) & -u_1/p_0 & -1 \\ -u_2^2/p_0 & u_1u_2/p_0 & u_2/p_0 & 0 \end{pmatrix} \cdot Y - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix},$$

$$\hat{B} \cdot \begin{pmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \\ Y_1(1) \\ Y_2(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_4(0) \\ Y_3(0) \\ -Y_4(1) \\ -Y_3(1) \end{pmatrix} = 0,$$

$$\hat{B} \rightleftharpoons \begin{pmatrix} B_{11} + u_2'(0) & B_{12} - u_2(0) & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} - u_2(0) & B_{22} + u_1(0) & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} - u_2'(1) & B_{34} + u_2(1) \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} + u_2(1) & B_{44} - u_1(1) \end{pmatrix}.$$

Именно такого рода граничные задачи применяются в так называемом „регуляризационном“ подходе к определению дифференциальных операторов с коэффициентами–обобщёнными функциями[27,28]. Результаты типа Предложения 4 (легко обобщаемого и на более широкую ситуацию) указывают естественную связь „регуляризационного“ и аппроксимативного подходов.

Для определённых указанным образом граничных задач второго порядка с вещественными коэффициентами–обобщёнными функциями и произвольными самосопряжёнными распадающимися граничными условиями развивается аналог теории Штурма:

Предложение 5. *Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}$ есть некоторый отрезок вещественной прямой, а $L\colon \Gamma \to \mathcal{B}(W^1_{2,B,C}[0,1], W^{-1}_{2,B,C}[0,1])$ — операторнозначная функция, отвечающая параметрическому семейству граничных задач*

$$\begin{gathered} -\bigl(p(\lambda)y'\bigr)' + q(\lambda)y = f, \\ B(\lambda)y^{\wedge} + C(\lambda)y^{\vee} = 0, \end{gathered}$$

где диагональные вещественные матрицы $B(\lambda)$ и $C(\lambda)$ удовлетворяют соотношениям

$$[B(\lambda)]^{-1} \operatorname{im} C(\lambda) = \mathbb{C}^2 \ominus \ker C(\lambda) = \mathbb{C}^2 \ominus \ker C$$

и зависят от параметра непрерывным образом. Пусть также функция L дифференцируема относительно сильной операторной топологии и подчиняется условию

$$(\forall \lambda \in \Gamma)\ (\forall y \in W^1_{2,B,C}[0,1] \setminus \{0\}) \qquad \langle L'(\lambda)y, y\rangle < 0.$$

Тогда спектр оператор-функции L состоит из изолированных собственных значений геометрической кратности 1, причём равенство $\operatorname{ind} L(\lambda_n) = n$ определяет собственное значение $\lambda_n \in \sigma(L)$ однозначно. При этом справедливы следующие факты:

1. *Интервал $(0,1)$ содержит ровно n нулей отвечающей собственному значению λ_n собственной функции y_n, в каждом из которых указанная функция меняет знак.*
2. *Расположенные на интервале $(0,1)$ нули функций y_n и y_{n+1} перемежаются.*

---

[27] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки. — 1999. — Т. 66, № 6. — С. 897–912.

[28] К. А. Мирзоев, А. А. Шкаликов. Дифференциальные операторы чётного порядка с коэффициентами-распределениями // Матем. заметки. — 2016. — Т. 99, № 5. — С. 788–793.

Заключительный параграф главы посвящается изучению знакорегулярных свойств положительно определённых дифференциальных операторов произвольного чётного порядка и опирается на следующее представление о числе перемен знака (обобщённой) функции: вещественную обобщённую функцию $f \in W^{-n}_{2,B,C}[0,1]$ мы называем *имеющей менее N перемен знака*, если она может быть с произвольной точностью приближена в пространстве $W^{-n}_{2,B,C}[0,1]$ имеющими менее N перемен знака непрерывными функциями. Основные результаты здесь состоят в следующем:

Предложение 6. *Пусть отвечающий распадающимся граничным условиям дифференциальный оператор $T\colon W^2_{2,B,C}[0,1] \to W^{-2}_{2,B,C}[0,1]$ четвёртого порядка положительно определён, а его функция Грина*

$$\mathcal{G}(t,s) \rightleftharpoons \overline{\langle \boldsymbol{\delta}_t, T^{-1}\boldsymbol{\delta}_s\rangle}$$

положительна внутри открытого квадрата $(0,1)\times(0,1)$. Тогда оператор T не уменьшает числа перемен знака.

Предложение 7. *Пусть имеющему порядок $2n \geqslant 6$ положительно определённому оператору $T\colon W^n_2[0,1] \to W^{-n}_2[0,1]$ сопоставлены функции $\sigma_k \rightleftharpoons (-1)^k T^{-1}\boldsymbol{\delta}^{(k)}_0$, где $k \in 0\,..\,n-2$. Тогда равномерная положительность всех вронскианов $W(\sigma_0,\dots,\sigma_k)$ даёт достаточное условие знакорегулярности оператора T.*

В *третьей главе* приводятся примеры естественного возникновения операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами-обобщёнными функциями в экстремальных спектральных задачах, изначально упоминания таких потенциалов не содержащих. А именно, устанавливается справедливость следующего факта:

Предложение 8. *При пробегании потенциалом $q \in L_1[0,1]$ класса*

$$A_r \rightleftharpoons \left\{ q \in L_1[0,1] \ :\ (q \geqslant 0)\ \&\ \left(\int_0^1 rq\,dx = 1\right)\right\},$$

заданного некоторой равномерно внутри интервала $(0,1)$ положительной весовой функцией $r \in C(0,1)$, максимум $M_{r,1} \rightleftharpoons \sup_{q\in A_r}\lambda_0(q)$ наименьшего собственного значения граничной задачи

$$\begin{gathered} -y'' + qy = \lambda y,\\ y(0) = y(1) = 0 \end{gathered}$$

достигается на единственном потенциале $\hat{q} \in \Gamma_r$, принадлежащем замыканию Γ_r класса A_r в пространстве $\mathring{W}^{-1}_{2,loc}(0,1)$ и подчиняющемся характеристическому условию

$$\sup_{x\in(0,1)} \frac{y^2_{\hat{q}}(x)}{r(x)} = \langle \hat{q}, y^2_{\hat{q}}\rangle.$$

Символом y_q здесь обозначена знакоопределённая собственная функция рассматриваемой граничной задачи. Предложение 8 обобщает и задаёт общую теоретическую основу для известного результата[29], относящегося к частному случаю $r \equiv 1$.

Кроме сказанного, устанавливается также, что при пробегании функцией $q \in L_1[0,1]$ неотрицательного сектора A единичной сферы экстремальные значения $m^{\pm} \rightleftharpoons \inf_{q\in A} \lambda_0(\pm q)$ и $M^{-} \rightleftharpoons \sup_{q\in A} \lambda_0(-q)$ наименьшего собственного значения граничной задачи

$$-y'' + qy = \lambda y,$$
$$y'(0) - k_0^2 y(0) = y'(1) + k_1^2 y(1) = 0,$$

где $k_1 \geqslant k_0 \geqslant 0$, достигаются, вообще говоря, на сингулярных потенциалах (представляющих собой дельтаобразные возмущения некоторых регулярных):

Предложение 9. *В случае $k_0^2 + k_1^2 \leqslant 1$ величина M^- удовлетворяет равенству $M^- = k_0^2 + k_1^2 - 1$ и достигается на потенциале $\hat{q} \rightleftharpoons -k_0^2\boldsymbol{\delta}_0 - k_1^2\boldsymbol{\delta}_1 - (1 - k_0^2 - k_1^2)$.*

В случае $k_0^2 + k_1^2 \geqslant 1$ и $k_1^2 - k_0^2 \leqslant 1$ величина M^- представляет собой наименьшее собственное значение граничной задачи

$$-y'' = \lambda y,$$
$$2y'(0) - [k_0^2 + k_1^2 - 1]\, y(0) = 2y'(1) + [k_0^2 + k_1^2 - 1]\, y(1) = 0$$

и достигается на потенциале $\hat{q} \rightleftharpoons -(1 + k_0^2 - k_1^2)\, \boldsymbol{\delta}_0/2 - (1 - k_0^2 + k_1^2)\, \boldsymbol{\delta}_1/2$.

В случае $k_1^2 - k_0^2 \geqslant 1$ величина M^- представляет собой наименьшее собственное значение граничной задачи

$$-y'' = \lambda y,$$
$$y'(0) - k_0^2 y(0) = y'(1) + (k_1^2 - 1) y(1) = 0$$

и достигается на потенциале $\hat{q} \rightleftharpoons -\boldsymbol{\delta}_1$.

Предложение 10. *Величина m^+ представляет собой наименьшее собственное значение граничной задачи*

$$-y'' = \lambda y,$$
$$y'(0) - k_0^2 y(0) = y'(1) + (k_1^2 + 1) y(1) = 0$$

и достигается на потенциале $\hat{q} \rightleftharpoons \boldsymbol{\delta}_1$.

Предложение 11. *В случае, когда для некоторых значений $\mu \geqslant -k_0^4$ и $\zeta \in (0,1)$ существует непрерывное положительное решение граничной задачи*

$$-y'' = \mu y \qquad \text{на } (0,\zeta) \cup (\zeta, 1), \tag{4}$$

[29] Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев. Об оценках первого собственного значения задачи Штурма-Лиувилля // Успехи матем. наук. — 1984. — Т. 39, № 2. — С. 151–152.

$$(5)\qquad y'(0)-k_0^2y(0)=2y'(\zeta-0)-y(\zeta)=\\ =2y'(\zeta+0)+y(\zeta)=y'(1)+k_1^2y(1)=0,$$

величина m^- удовлетворяет равенству $m^-=\mu$ и достигается на потенциале $\hat q\rightleftharpoons-\boldsymbol{\delta}_\zeta$. В противном случае она является наименьшим собственным значением граничной задачи

$$-y''=\lambda y,$$
$$y'(0)-(k_0^2-1)y(0)=y'(1)+k_1^2y(1)=0$$

и достигается на потенциале $\hat q\rightleftharpoons-\boldsymbol{\delta}_0$.

Развитая при установлении предыдущих результатов техника применяется также к задаче об оценке минимального собственного значения задачи Штурма–Лиувилля на геометрическом графе:

Предложение 12. *Пусть Γ — связный геометрический граф с непустым списком концевых вершин $\mathfrak{b}$. Пусть также $W_2^1(\Gamma,\mathfrak{b})$ есть пространство непрерывных на Γ функций, имеющих на рёбрах графа квадратично суммируемую производную и обращающихся в нуль в точках из $\mathfrak{b}$. Тогда наименьшее собственное значение пучка $L\colon W_2^1(\Gamma,\mathfrak{b})\to W_2^{-1}(\Gamma,\mathfrak{b})$ вида*

$$\langle L(\lambda)y,y\rangle\equiv\int_\Gamma|y'|^2\,dx-\lambda\langle(1+m\rho),y^2\rangle,$$

где $m\geqslant 0$ есть фиксированный параметр, а $\rho\in W_2^{-1}(\Gamma,\mathfrak{b})$ есть обобщённая плотность заданной на Γ вероятностной борелевской меры, заведомо минорируется решением λ уравнения

$$\sqrt{\lambda}/\theta=\operatorname{arcctg}\left(m\sqrt{\lambda}/\theta\right).$$

Здесь $\theta=1$ в общем случае, и $\theta=2$ в случае возможности включения каждого ребра графа Γ в некоторую бесповторную цепь, связывающую две вершины из списка $\mathfrak{b}$.

Последнее предложение усиливает недавние аналогичные результаты[30], в которых соответствующая априорная миноранта имела вид $\pi^2\theta^2\cdot(2+2m)^{-2}$.

Четвёртая и *пятая* главы посвящены задаче об асимптотике спектра струны, то есть операторного пучка $T_\rho\colon\mathbb{C}\to\mathcal{B}(\mathring{W}_2^1[0,1],\mathring{W}_2^{-1}[0,1])$, отвечающего задаче Дирихле для уравнения

$$(6)\qquad -y''-\lambda\rho y=0,$$

в котором вес $\rho\in W_2^{-1}[0,1]$ представляет собой обобщённую производную некоторой самоподобной функции $P\in L_2[0,1]$. В отличие от ряда предшествующих работ по близкой тематике (использующих для постановки задачи

[30] А. Т. Диаб, П. А. Кулешов, О. М. Пенкин. Оценка первого собственного значения лапласиана на графе // Матем. заметки. — 2014. — Т. 96, № 6. — С. 885–895.

отличную от употребляемой в диссертации терминологию), при этом не исключается возможность незнакоопределённости весовой обобщённой функции.

Основу для распределения материала между указанными двумя главами составляет понятие *спектрального порядка* нетривиальной (то есть отличной от кусочно-постоянной) самоподобной функции $P \in L_2[0,1]$. Под таковым понимается решение $D \in \mathbb{R}^+$ уравнения

$$\sum_{k=1}^{N} (a_k\,|d_k|)^D = 1,$$

где N, a_k и d_k суть *параметры самоподобия* рассматриваемой функции, то есть величины, для которых при каждом $k \in 1\,..\,N$ функция $P_k \in L_2[0,1]$ вида

$$P_k(x) \rightleftharpoons d_k P(\alpha_{k-1} + a_k x)$$

почти всюду совпадает с исходной функцией P с точностью до некоторой аддитивной постоянной β_k. Здесь нами использованы обозначения $\alpha_0 \rightleftharpoons 0$ и $\alpha_k \rightleftharpoons \alpha_{k-1} + a_k$ при $k > 0$. К четвёртой главе относится материал, касающийся случая положительности спектрального порядка, а к пятой — равенства этого спектрального порядка нулю.

Важным с точки зрения указываемых далее результатов понятием является также понятие *арифметического характера* самоподобия функции $P \in L_2[0,1]$. О таком характере идёт речь в том случае, когда найдётся значение $\nu > 0$, для которого при всяком $k \in 1\,..\,N$ будет справедливо соотношение

$$(a_k\,|d_k|) \cdot (a_k\,|d_k| - e^{-l_k\,\nu}) = 0$$

с некоторым коэффициентом $l_k \in \mathbb{N}$. Максимальное среди чисел $\nu > 0$ с указанным свойством называется *шагом* самоподобия рассматриваемой функции.

Хрестоматийным примером самоподобной функции является канторова лестница, параметры самодобия которой суть $N = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $d_1 = d_3 = 1/2$, $d_2 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \beta_3 = 1/2$. Характер самоподобия этой функции является арифметическим, её порядок самоподобия есть $D = \log_6 2$, а шаг самоподобия есть $\nu = \ln 6$.

Результаты четвёртой (а также характеризуемой далее шестой) главы группируются вокруг асимптотических представлений

$$\operatorname{ind} T_\rho(\lambda) = |\lambda|^D \cdot [s_\pm(\ln|\lambda|) + o(1)] \tag{7}$$

для считающих функций линейного операторного пучка T_ρ. Справедливость этих представлений как таковых не выносится на защиту, так как установлена совместно с И. А. Шейпаком[31,32], а для того частного случая, когда функ-

[31] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак. Самоподобные функции в пространстве $L_2[0,1]$ и задача Штурма–Лиувилля с сингулярным индефинитным весом // Матем. сборник. — 2006. — Т. 197, № 11. — С. 13–30.

[32] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак. Индефинитная задача Штурма–Лиувилля для некоторых классов самоподобных сингулярных весов // Труды. матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2006. — Т. 255. — С. 88–98.

ция $P \in L_2[0,1]$ непрерывна и монотонна, была известна даже ранее[33,34]. Из развиваемой в ходе доказательства представлений (7) теории следует, что в случае арифметического характера самоподобия функции $P \in L_2[0,1]$ коэффициенты $s_\pm \in C(\mathbb{R})$ являются периодическими функциями, некоторый период которых явным образом выражается через упомянутый выше шаг самоподобия ν. Основные результаты автора в части, касающейся материала четвёртой главы, состоят в проводимой на основе машинных вычислений демонстрации возможности для указанного периода являться действительно наименьшим периодом рассматриваемых функций.

Формулировка основных результатов пятой главы использует представление о связанных с параметрами самоподобия функции $P \in L_2[0,1]$ величинах ζ_k, где $k \in 1\,..\,N-1$, вида

$$\zeta_k \rightleftharpoons \begin{cases} \beta_m - \beta_{m-1} + d_m\beta_1 & \text{при } k = m-1, \\ \beta_{m+1} - \beta_m - d_m\beta_N & \text{при } k = m, \\ \beta_{k+1} - \beta_k & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь под m понимается однозначно (в рамках изучаемой в пятой главе ситуации $D = 0$) определённый номер со свойством $d_m \neq 0$. Эти вновь введённые параметры представляют собой величины скачков рассматриваемой самоподобной функции в точках α_k. С параметрами ζ_k связываются также параметры

$$\mathrm{Z}_\pm \rightleftharpoons \#\{k \in 1\,..\,N-1 \;:\; \pm\zeta_k > 0\}.$$

Центральными результатами пятой главы выступают следующие три факта:

Предложение 13. *Пусть выполняются соотношения $d_m > 0$, $\mathrm{Z}_+ > 0$ и $\mathrm{Z}_+ + \mathrm{Z}_- = N-1$. Тогда существуют вещественные числа $\mu_l > 0$, где $l \in 0\,..\,\mathrm{Z}_+ - 1$, для которых последовательность $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$ занумерованных в порядке возрастания положительных собственных значений пучка $T_{\rho,n}\colon \overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1] \to \overset{\circ}{W}{}_2^{-n}[0,1]$, отвечающего дифференциальному уравнению*

$$(-1)^n y^{(2n)} - \lambda\rho y = 0,$$

удовлетворяет при $k \to \infty$ асимптотикам

$$\lambda_{l+k\mathrm{Z}_+} = \mu_l \cdot (a_m^{2n-1} d_m)^{-k} \cdot (1 + o(1)).$$

Предложение 14. *Пусть выполняются соотношения $d_m > 0$, $\mathrm{Z}_- > 0$ и $\mathrm{Z}_+ + \mathrm{Z}_- = N-1$. Тогда существуют вещественные числа $\mu_l > 0$, где $l \in 0\,..\,\mathrm{Z}_- - 1$, для которых последовательность $\{\lambda_{-k}\}_{k=0}^\infty$ занумерованных*

[33] J. Kigami, M. L. Lapidus. Weyl's problem for the spectral distributions of Laplacians on p. c. f. self-similar fractals // Comm. Math. Phys. — 1993. — V. 158. — P. 93–125.

[34] M. Solomyak, E. Verbitsky. *On a spectral problem related to self-similar measures* // Bull. London Math. Soc. — 1995. — V. 27, № 3. — P. 242–248.

в порядке убывания отрицательных собственных значений пучка $T_{\rho,n}$ удовлетворяет при $k \to \infty$ асимптотикам

$$\lambda_{-(l+k\mathrm{Z}_-)} = -\mu_l \cdot (a_m^{2n-1} d_m)^{-k} \cdot (1 + o(1)).$$

Предложение 15. *Пусть выполняются соотношения $d_m < 0$ и $\mathrm{Z}_+ + \mathrm{Z}_- = N - 1$. Тогда существуют вещественные числа $\mu_l > 0$, где $l \in 0\,..\,N-2$, для которых последовательность $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ занумерованных в порядке возрастания положительных собственных значений пучка $T_{\rho,n}$ удовлетворяет при $k \to \infty$ асимптотикам*

$$\lambda_{l+k\cdot(N-1)} = \mu_l \cdot (a_m^{2n-1}|d_m|)^{-2k} \cdot (1 + o(1)),$$

а последовательность $\{\lambda_{-k}\}_{k=0}^{\infty}$ занумерованных в порядке убывания отрицательных собственных значений того же пучка удовлетворяет при $k \to \infty$ асимптотикам

$$\lambda_{-(l+\mathrm{Z}_-+k\cdot(N-1))} = -\mu_l \cdot (a_m^{2n-1}|d_m|)^{-2k-1} \cdot (1 + o(1)).$$

В завершающей части главы дополнительно проводится обсуждение статуса коэффициентов μ_l полученных асимптотических формул с точки зрения конструктивного математического анализа.

Последняя, *шестая глава* диссертации посвящается изучению некоторого подкласса рассмотренных ранее в четвёртой главе задач на основе нового метода, базирующегося на исследовании осцилляционных свойств собственных функций. Говоря более точно, здесь вводятся в рассмотрение самоподобные функции $f \in C[0,1]$ так называемого *канторовского типа*, определяемые наборами параметров $\varkappa > 1$, $a \in (0, 1/\varkappa)$ и $b \rightleftharpoons (1 - \varkappa a)/(\varkappa - 1)$ согласно следующим правилам:

1. При любом выборе индекса $k \in 1\,..\,\varkappa - 1$ функция f постоянна на интервале $(\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k})$, где положено $\alpha_{2k} \rightleftharpoons k(a+b)$ и $\alpha_{2k+1} \rightleftharpoons \alpha_{2k} + a$.
2. При любом выборе индекса $k \in 0\,..\,\varkappa - 1$ функция $f_k \in C[0,1]$ вида

$$f_k(x) \rightleftharpoons \varkappa f(\alpha_{2k} + ax)$$

совпадает с функцией f с точностью до аддитивной постоянной.

Хрестоматийным примером функции такого вида является уже упоминавшаяся ранее канторова лестница, определяемая значениями $\varkappa = 2$ и $a = b = 1/3$. Всякая самоподобная функция канторовского типа является арифметически самоподобной, причём её шаг самоподобия равен $\ln(\varkappa/a)$, а спектральный порядок равен $\nu^{-1} \ln \varkappa$.

Для струн с канторовски самоподобным распределением массы устанавливается справедливость следующих двух фактов о *спектральной периодичности*:

Предложение 16. *Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений отвечающей уравнению*

(6) *граничной задачи* $y'(0) = y'(1) = 0$. *Тогда независимо от выбора индекса* $n \in \mathbb{N}$ *выполняется равенство* $\lambda_{\varkappa n} = (\varkappa/a)\,\lambda_n$.

Предложение 17. *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений отвечающей уравнению* (6) *граничной задачи* $by'(0) - 2y(0) = by'(1) + 2y(1) = 0$, *а* $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— аналогичная последовательность для отвечающей тому же уравнению граничной задачи* $by'(0) - 2ay(0) = by'(1) + 2ay(1) = 0$. *Тогда независимо от выбора индекса* $n \in \mathbb{N}$ *выполняется равенство* $\lambda_{\varkappa(n+1)-1} = (\varkappa/a)\,\mu_n$.

Эти факты кладутся далее в основу доказательства следующего окончательного результата, дающего, в частности, положительное решение известного в литературе[35,36] вопроса о непостоянности коэффициентной функции s_+ из асимптотического соотношения (7):

Предложение 18. *Коэффициент* s_+ *из соотношения* (7) *допускает в случае канторовски самоподобного веса представление*

$$(\forall t \in [0,\nu]) \qquad s_+(t) = e^{-Dt}\,\sigma(t),$$

где σ *— некоторая чисто сингулярная неубывающая функция.*

Центральную роль в получении данного результата, кроме сформулированных выше предложений о спектральной периодичности, играет следующий простой признак сингулярности функции вещественной переменной:

Предложение 19. *Ограниченная неубывающая функция* $f \in L_2[0,1]$ *является сингулярной в том и только том случае, когда найдётся последовательность* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *неубывающих ступенчатых функций, удовлетворяющая асимптотическому соотношению*

$$(\#\mathfrak{A}_n + 2) \cdot \|f - f_n\|_{L_2[0,1]} = o(1),$$

где символами $\mathfrak{A}_n$ *обозначены множества точек разрыва функций* f_n.

Результаты, аналогичные предложениям 16–18, устанавливаются также для случая весовых граничных задач четвёртого порядка.

Наконец, в *приложении* иллюстрируется связь между спектральными свойствами граничных задач, отвечающих уравнению $-y'' = \lambda\rho y$ с незнакоопределённым весом $\rho \in W_2^{-1}[0,1]$, и распределением отвечающих указанному весу интегральных характеристик

$$\int_0^1 \rho \cdot \xi^2 \, dt$$

[35] А. И. Назаров. Логарифмическая асимптотика малых уклонений для некоторых гауссовских процессов в L_2-норме относительно самоподобной меры // Записки науч. семинаров ПОМИ. — 2004. — Т. 311. — С. 190–213.

[36] U. Freiberg. Refinement of the spectral asymptotics of generalized Kerin Feller operators // Forum Math. — 2011. — V. 23, № 2. — P. 427–445.

винеровского процесса ξ. Последний интеграл при этом понимается как предел (в гильбертовом пространстве случайных величин с конечными моментами первых и вторых степеней) последовательности обычных (бохнеровских или римановских) интегралов

$$\int_0^1 \rho_n \cdot \xi^2\,dx,$$

где $\rho_n \in C[0,1]$ и $\lim_{n\to\infty} \rho_n = \rho$ в пространстве $W_2^{-1}[0,1]$.

Предложение 20. *Пусть обобщённая функция $\rho \in W_2^{-1}[0,1]$ определяет ядерный мультипликатор класса $\mathcal{B}(W_2^1[0,1], W_2^{-1}[0,1])$. Пусть также последовательность $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ перечисляет без повторений всевозможные собственные значения граничной задачи*

$$-y'' - \lambda\rho y = 0,$$
$$y(0) = y'(1) = 0.$$

Тогда найдётся последовательность $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ независимых стандартных нормальных случайных величин, удовлетворяющая (с точки зрения сходимости по вероятности) равенству

$$\int_0^1 \rho \cdot \xi^2\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-1} \xi_n^2.$$

Будучи хорошо известной в случае знакоопределённости веса $\rho \in W_2^{-1}[0,1]$, указанная связь представляет собой один из центральных источников интереса к соответствующим спектральным задачам.

Основные публикации по теме диссертации

По тематике диссертационного исследования автором опубликовано 15 работ:

1. А. А. Владимиров. О сходимости последовательностей обыкновенных дифференциальных операторов // Матем. заметки. — 2004. — Т. 75, № 6. — С. 941–943.
2. А. А. Владимиров, И. А. Шейпак. Самоподобные функции в пространстве $L_2[0,1]$ и задача Штурма–Лиувилля с сингулярным индефинитным весом // Матем. сборник. — 2006. — Т. 197, № 11. — С. 13–30.
3. А. А. Владимиров, И. А. Шейпак. Индефинитная задача Штурма–Лиувилля для некоторых классов самоподобных сингулярных весов // Труды. матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2006. — Т. 255. — С. 88–98.
4. А. А. Владимиров. О вычислении собственных значений задачи Штурма–Лиувилля с фрактальным индефинитным весом // Журнал выч. матем. и матем. физ. — 2007. — Т. 47, № 8. — С. 1350–1355.

5. А. А. Владимиров. К осцилляционной теории задачи Штурма–Лиувилля с сингулярными коэффициентами // Журнал выч. матем. и матем. физ. — 2009. — Т. 49, № 9. — С. 1609–1621.
6. А. А. Владимиров, И. А. Шейпак. Асимптотика собственных значений задачи Штурма–Лиувилля с дискретным самоподобным весом // Матем. заметки. — 2010. — Т. 88, № 5. — С. 662–672.
7. А. А. Владимиров, И. А. Шейпак. Асимптотика собственных значений задачи высшего чётного порядка с дискретным самоподобным весом // Алгебра и анализ. — 2012. — Т. 24, № 2. — С. 104–119.
8. E. S. Karulina, A. A. Vladimirov. The Sturm–Liouville problem with singular potential and the extrema of the first eigenvalue // Tatra Mountains Math. Publ. — 2013. — V. 54. — P. 101–118.
9. А. А. Владимиров, И. А. Шейпак. О задаче Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с самоподобным весом канторовского типа // Функциональный анализ и его приложения. — 2013. — Т. 47, № 4. — С. 18–30.
10. А. А. Владимиров. Осцилляционный метод в задаче о спектре дифференциального оператора четвёртого порядка с самоподобным весом // Алгебра и анализ. — 2015. — Т. 27, № 2 — С. 83–95.
11. А. А. Владимиров. Замечания о минорантах лапласиана на геометрическом графе // Матем. заметки. — 2015. — Т. 98, № 3. — С. 467–469.
12. А. А. Владимиров. Некоторые замечания об интегральных характеристиках винеровского процесса // Дальневост. матем. журнал. — 2015. — Т. 15, № 2. — С. 156–165.
13. А. А. Владимиров. К вопросу об осцилляционных свойствах положительных дифференциальных операторов с сингулярными коэффициентами // Матем. заметки. — 2016. — Т. 100, № 6. — С. 800–806.
14. А. А. Владимиров. Теоремы о представлении и вариационные принципы для самосопряжённых операторных матриц // Матем. заметки. — 2017. — Т. 101, № 4. — С. 516–530.
15. А. А. Владимиров. О мажорантах собственных значений задач Штурма–Лиувилля с потенциалами из шаров весовых пространств // Матем. сборник. — 2017. — Т. 208, № 9. –С. 42–55.

В совместной работе [2] автору целиком принадлежит содержание пункта 5.2. Результаты § 4 являются общими с И. А. Шейпаком.

В совместной работе [3] автору целиком принадлежит содержание § 5. Результаты § 4 являются общими с И. А. Шейпаком.

В совместной работе [6] автору целиком принадлежит содержание § 5.

В совместной работе [7] автору принадлежит содержание §§ 3–5.

В совместной работе [8] автору принадлежат теоремы 1.3.2–1.3.4. Результаты пункта 3.6 являются общими с Е. С. Карулиной.

В совместной работе [9] автору принадлежат утверждения § 3.1.1, § 3.1.2, а также содержание §§ 4–6.