На правах рукописи

Елецких Константин Сергеевич

В-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ ПО ВРЕМЕНИ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Владимир — 2019

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического и прикладного анализа факультета прикладной математики, информатики и механики ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» **Ляхов Лев Николаевич**.

Официальные оппоненты:

Кожанов Александр Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математики факультета информационных технологий ФГАОУ ВО «Новосибирский государственный университет».

Солдатов Александр Павлович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник отдела прикладной математической физики ВЦ имени А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН.

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», факультет ВМК.

Защита состоится « 6 » декабря 2019 года в 16 ч 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.025.08 при ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых» по адресу: 600024, г. Владимир, проспект Строителей, 11, ауд. 230, ВлГУ, педагогический институт

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Владимирского государственного университета и на сайте http://diss.vlsu.ru

Автореферат разослан «   »   2019.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.025.08
кандидат физико-математических наук,
доцент Наумова С.Б.

Общая характеристика работы

Актуальность темы диссертации. В 1923 г. французский математик и механик Ж. Адамар вывел простой критерий отсутствия диффузии волн или, что то же самое, критерий справедливости принципа Гюйгенса (ПГ). Однако критерий Адамара не срабатывал в теории общих гиперболических уравнений. Соответствующие примеры приведены в работах Гюнтера (1965) и Ибрагимова—Мамонтова (1970).

Но ранее существование уравнений с нечетным числом пространственных переменных, не удовлетворяющих ПГ, обнаружил К. Штельмахер (1955), построивший уравнение с волновым оператором в главной части и с сингулярными коэффициентами при младших производных. Д. Фокс (1959) привел более простые примеры сингулярных дифференциальных уравнений второго порядка, для которых принцип Адамара не выполнен. Простой пример. Два уравнения

$$u_{tt} = u_{rr} + \frac{1}{r}\, u_r + u_{zz,}\,, \quad u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\,, \tag{1}$$

первое из которых содержит волновой оператор в главной части и четное число пространственных переменных и одновременно является следствием (цилиндрической симметрии) второго уравнения — волнового в нечетномерном евклидовом пространстве. Более того, и К. Штельмахер, и Д. Фокс выяснили, что и зависящие от переменной, по которой ставятся начальные условия (т.е. от времени), коэффициенты сингулярных B-гиперболических уравнений типа уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу (ЭПД) также влияют на гюйгенсовость решения соответствующей задачи Коши. Более четко это проявилось в совместных работах И.А. Киприянова и Л.А. Иванова (1970-1980-е годы), установивших соответствующий «сингулярный принцип Гюйгенса» для уравнения типа ЭПД, содержащего особенность только по временной переменной или только по пространственным переменным. Полученный ими результат уточнил и сократил формулировку гюйгенсовости решений, открытую Д. Фоксом.

В работе И.А. Киприянова и Ю.В. Засорина (1991) построенные решения задачи Коши для уравнения $u_{tt} = \sum\limits_{1}^{n} \left(u_{x_i x_i} + \frac{\gamma_i}{x_i}\, u_{x_i} \right)$, $\gamma_i > 0$ позволили уточнить формулировку гюйгенсовости Киприянова—Иванова.

Еще отметим работы Г.М. Кагана, выполненные под руководством И.А. Киприянова. В одной из них исследовалось модельное сингулярное уравнение типа уравнения Ибрагимова—Мамонтова, которое по одной из пространственных переменных включало сингулярный дифференциальный оператор Бесселя. Полученное решение позволило обобщить результат

Ибрагимова—Мамонтова о гюйгенсовости решения соответствующей задачи Коши, но только для одной особой переменной. В другой работе на основе киприяновских весовых распределений определено решение задачи Коши для уравнений ЭПД с дробными (в общем случае) размерностями операторов Бесселя, входящих в уравнение. Установлено, что принцип Гюйгенса выполнялся только при целой (нечетной или четной) размерности оператора Бесселя по времени и с четными (как и в предшествующих работах) размерностями операторов Бесселя по пространственным переменным, что, как видно из приведенного выше примера (1), лишь подтвердило классическую теорему Адамара о возможности выполнения ПГ решений задачи Коши для уравнения ЭПД с целыми размерностями операторов Бесселя. Осталась не выяснена возможность выполнения ПГ решения задачи Коши для дробных размерностей операторов Бесселя по пространственным переменным.

Задача о возможности выполнения ПГ решения задачи Коши для уравнения ЭПД с дробными размерностями операторов Бесселя по пространственным переменным осталась не исследованной. Более того, создалось впечатление, что гюйгенсовость решения возможна лишь в случае целых размерностей операторов Бесселя.

Ясно, что такие задачи исследуются на основе формул решения соответствующей задачи Коши, поэтому исследования диссертации актуальны для теории сингулярных дифференциальных уравнений.

Актуальность темы диссертации вытекает также из некоторых проблем фундаментальной физики, из-за необходимости привлекать дополнительные размерности пространства для объяснения физических явлений микромира и макромира. Вводимые физиками новые переменные всегда оказывались связанными симметриями. Но если симметрия воображаемых переменных сферическая, а аргумент исследуемой функции приходится считать дробным, то требуется соответствующий критерий, чтобы отличать диффузионные процессы от гюйгенсовых. Таким образом, тема диссертации интересна и актуальна для исследования некоторых проблем фундаментальной физики.

В диссертации построены решения сингулярного гиперболического (B-гиперболического) уравнения в общем случае, включающего и целые и дробные размерности операторов Бесселя, действующих и по времени, и по пространственным переменным. Получены формулы решения, обобщающие ранее известные формулы из работ И.А. Киприянова и его учеников. Как следствие полученных формул исследован вопрос о диффузии и гюйгенсовости решения задачи Коши для уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу с дробными размерностями операторов Бесселя. Оказалось, что гюйгенсовость процессов, описываемых уравнениями ЭПД, возможна и в случаях, когда некоторые из размерностей операторов Бесселя дробные. Но при условии, что сумма всех размерностей пространственных операторов Бесселя есть целое число.

В диссертации так же рассмотрены начально-граничные задачи для пространственного уравнения ЭПД со сферически симметричными граничными условиями (глава 3). Последнее позволило свести их к простейшему уравнению ЭПД с граничными условиями первого, второго и третьего рода, решения которых, вообще говоря, известны (например, см.недавнюю работу К.Б. Сабитова и Н.В. Зайцевой в журнале *Изв.вузов. Математика, 2019, № 10*). Но в представленной диссертации решения этих задач приведены в терминах j-фукций Бесселя, что позволило получить обобщение известной формулы Пуассона, полученную ранее Б.М. Левитаном (1951).

Таким образом, тема исследований актуальна для проблем сингулярных дифференциальных уравнений и фундаментальных проблем физики.

Цель работы состоит в изучении следующих проблем.

1. Построение решения задачи Коши для сингулярного аналога уравнения Ибрагимова—Мамонтова и исследование области зависимости полученного решения.

2. Нахождение весовых распределений Киприянова и получение на их основе решения задачи Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу для дробных и целых индексов размерности операторов Бесселя, входящих в уравнение.

3. Исследовать гюйгенсовость полученных решений.

4. Построение решения начально-граничной (краевой) задачи первого, второго и третьего рода для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу с разными индексами размерности операторов Бесселя, в том числе для B-гиперболического уравнения с оператором Бесселя по времени с отрицательной размерностью. Получено представления решений в виде соответствующей формулы Пуассона, порожденной специального рода сдвигом, возникающем от произведения j-цилиндрических функций разных порядков.

Научная новизна и значимость полученных результатов. Следующие результаты работы являются новыми.

1. Новым является сингулярный аналог уравнения Ибрагимова—Мамонтова. Найден новый признак гюйгенсовости решения задачи Коши для этого уравнения.

2. На основе весовых распределений, названных в работе «функционалами Киприянова», получены формулы смешанного F_{B_γ}-преобразования радиальной j-функции Бесселя порядка $\mu = \frac{\beta-1}{2} \geq -\frac{1}{2}$. Эти формулы оказались новыми по сравнению с полученными ранее формулами решений Киприянова—Кагана. Найдены обобщенные весовые решения соответствующей задачи Коши, которыетак же являются новыми.

3. Сформулированный в работе признак гюйгенсовости решения задачи Коши для уравнения ЭПД является новым и обобщает известные приззнаки Д.Фокса, Киприянова—Иванова и Киприянова—Засорина, Киприянова—Кагана.

4. Новыми являются формулы, названные в работе «формулами Пуассона» решения краевой (начально -граничной) задачи (первого, второго, и третьего рода) для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу с различными размерностями операторов Бесселя (в том числе с отрицательной размерностью оператора Бесселя по времени).

Методы исследования. В работе используются интегральные преобразования Фурье и Бесселя (Левитана, Киприянова—Катрахова), а также методы теории функций, функционального анализа, дифференциальных уравнений и методы, развитые в работах научной школы И. А. Киприянова при исследовании сингулярных дифференциальных уравнений.

Теоретическое и практическое значение полученных результатов. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы при исследовании проблем сингулярных дифференциальных уравнений и приложений к различным проблемам естествознания, порожденным центральной и многоосевой сферической симметриями. Возможно использование результатов диссертационного исследования при чтении курсов по выбору в университетах для магистрантов и аспирантов физико-математических специальностей.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на конференциях: Международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения"в г. Ростове-на-Дону в 2017, 2018 и 2019 гг., на Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы"в г. Самаре в 2017 г., в Воронежской зимней математической школе в 2018 г., на Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы"в г. Стерлитамаке в 2018 г., на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам в г. Суздале в 2018 г., на Международном семинаре AMADE в г. Минске в 2018 г., на Международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В. А. Садовничего г. Москве в 2019 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] — [17]. В совместных работах [1] —[6] Л. Н. Ляхову принадлежит постановка задач. В работе [6] Е. Л. Саниной принадлежат доказательства ортогональности систем В-цилиндрических функций и сходимости рядов Фурье—Бесселя и Дини по j-функциям Бесселя. Доказательства основных результатов по построению и исследованию решений получены лично диссертантом. Работы [1] — [3] опубликованы в журналах из перечня ВАК Министерства науки и высшего образования РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка цитируемой литературы, включающего 66 наименований. Общий объем диссертации 137 стр.

Краткое содержание диссертации.

Во **введении** дается обоснование актуальности выбранной темы, приводится методика исследования, дан краткий обзор содержания диссертации и приведены основные научные результаты.

Нумерация изложенных ниже утверждений совпадает с нумерацией в диссертации.

В **главе 1** вводятся основные определения, известные соотношения и формулы, используемые во второй и третьей главах.

Положим $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^+_N = \mathbb{R}^+_n \times \mathbb{R}_{N-n}$, где $x' \in \mathbb{R}^+_n = \{x' : \ x_1 > 0, ..., x_n > 0\}$, $x'' = (x_{n-1}, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}_{N-n}$. Считаем, что натуральные числа n и N фиксированы и связаны условием $n \le N$.

Через S_{ev} обозначим подпространство пространство Шварца, состоящее из x'-четных функций. Двойственное пространство используемых обобщенных функций, порожденное весовой линейной формой

$$(u\,,\, v)_\gamma = \int_{\mathbb{R}_N} u(x)\, v(x)\ (x')^\gamma\, dx\,, \quad (x')^\gamma = \prod_{i=1}^{n} (x_i^2)^{\frac{\gamma_i}{2}},$$

будем обозначать $S'_{ev} = S'_{ev}(\mathbb{R}^+_N)$ и называть пространством умеренных весовых распределений. К регулярным весовым распределениям относим локально интегрируемые с весом $(x')^\gamma$ функции, не более чем степенного роста.

Рассматриваются интегральные преобразования Фурье и два вида преобразований Бесселя, введенные Б.М. Левитаном (далее F_B-преобразование) и И.А. Киприяновым, В.В. Катраховым (далее $\mathcal{F}_B$-преобразование). Вводится смешанное преобразование Фурье—Левитана—Киприянова—Катрахова. Ядром этого смешанного преобразования являются функции

$$e_\gamma(x,\xi)=\prod_{k=1}^{n}\left[j_{\frac{\gamma_k-1}{2}}(x_k\xi_k)-i\frac{x_k\xi_k}{\gamma+1}j_{\frac{\gamma_k+1}{2}}(x_k\xi_k)\right]\ e^{-i\langle x'',\xi''\rangle},$$

где $\gamma=(\gamma_1,\,\dots\,,\gamma_n)$ — фиксированный мультииндекс из положительных чисел; j_ν — четная j-функция Бесселя порядка ν, связанная с функцией Бесселя первого рода (и того же порядка) равенством $j_\nu(s)=C(\nu)\frac{J_\nu(s)}{s^\nu}$, $\nu>-\frac{1}{2}$; $\frac{s}{\gamma+1}j_\nu(s)$ — нечетная j-функция Бесселя; $\langle x'',\xi''\rangle$ — скалярное произведение векторов из $\mathbb{R}_{N-n}$. Смешанное прямое и обратное преобразования Фурье—Левитана—Киприянова—Катрахова (смешанное $\mathcal{F}_B$-преобразования) определяются выражениями

$$\mathcal{F}_B[f](\xi)=\int_{\mathbb{R}_N}f(x)\,e_\gamma(x,\xi)\,(x')^\gamma\,dx\,,\quad \mathcal{F}_B^{-1}[f](x)=\frac{C(\gamma)}{(2\pi)^{\frac{N-n}{2}}}\ \mathcal{F}_B[f](-x). \tag{1.1.1}$$

Известно (Киприянов, Катрахов), что эти преобразования обратимы на классе основных функций S_{ev+}, состоящем из функций S_{ev} и их первых производных по направлениям x_i, $i=1,\,\dots\,,n$ от этих функций. При $\gamma\to0$ это преобразование стремится к классическому преобразованию Фурье. Многомерное преобразование Левитана и преобразование Киприянова—Катрахова определяется по формулам (1.1.1) с ядрами $\prod_1^n j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}$ и $\prod_1^n \frac{x_i\xi_i}{\gamma_i+1}\,j_{\frac{\gamma_i+1}{2}}$ соответственно.

В первой главе также приведены сведения о рядах Фурье—Бесселя и Дини по четным и нечетным j-функциям Бесселя. B-цилиндрические функции — это решения сингулярного уравнения Бесселя

$$B_\gamma u(\lambda x)+\lambda^2u(\lambda x)=0\,,\quad B_\gamma=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\gamma}{x}\,\frac{d}{dx}\,,\quad \gamma\in\mathbb{R}_1. \tag{1.2.2}$$

Пусть $\gamma>0$. Тогда фундаментальный набор решений этого уравнения состоит из B-цилиндрических функций j_ν, и $\mathbb{Y}_\nu$, $\nu=\frac{\gamma-1}{2}$. Первая из них называется j-функцией Бесселя, вторая — j-функцией Неймана. В качестве спектральной функции рассматривается первая из них. Спектральный параметр $\lambda=\lambda_k$ является корнем одного из уравнений

$$\begin{array}{lll} i) & j_\nu(\lambda_n)=0, & n=1,2,\,\dots\,;\\ ii) & j\,'_\nu(\lambda_n){=}0\ (j_{\nu+1}(\lambda_n){=}0), & n=1,2,\,\dots\,;\\ iii) & \lambda_n\,j'_\nu(\lambda_n)+Hj_\nu(\lambda_n)=0, & n=1,2,\,\dots\,, \end{array}$$

где H — некоторая данная постоянная. Следуя классическим канонам, системы функций i) и ii) будем называть системами Фурье—Бесселя, а iii) — системой Дини.

При $\gamma = -\beta$, $0 < \beta < 1$ для разложения функций в ряды Фурье по решениям уравнения (1.2.2) мы используем ограниченное решение $j_{-\mu}$, получающееся формальной заменой индекса порядка j-функции Бесселя j_ν на индекс $-\mu = -\frac{\beta+1}{2}$.

При $\gamma = -\beta$ и $\beta > 1$ для разложения функций в ряды Фурье по решениям уравнения (1.2.2) мы используем неограниченное (при $t \to \infty$) решение $\mathbb{J}^*_\mu$ положительного порядка $\mu = \frac{\beta+1}{2}$ следующего вида

$$\mathbb{J}^*_\mu(t) = t^\mu \ J_\mu(t) = t^\mu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\mu+m+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+\mu}, \quad \mu{=}\frac{\beta+1}{2}\,.$$

В **главе 2** изучается действие на j-функцию Бесселя вещественного порядка $\mu = \frac{\beta-1}{2} \geq -\frac{1}{2}$ смешанного F_B-преобразования (Левитана). Находятся явные представления таких преобразований (в зависимости от значений порядка μ), которые используются при изучении задачи Коши для уравнений B-гиперболического типа с операторами Бесселя по временной и пространственным переменным. Формулы решений строятся с помощью интегральных преобразований Левитана и Левитана—Киприянова—Катрахова. Исследуются области зависимости решений, а также выделяются условия справедливости принципа Гюйгенса.

Теорема 2.1.1 *Пусть $N \geq 2$, $n \geq 1$ — фиксированные натуральные числа и $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ — мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел. F_{B_γ}-преобразование определено на основе j-функций Бесселя j_ν, порядков $\nu_i = \frac{\gamma_i-1}{2}$, а j_μ —j-функция Бесселя порядка $\mu = \frac{\beta-1}{2}$ и индексы $\beta \geq 0$ и $\gamma_i \geq 0$ являются размерностью соответствующих операторов Бесселя.*

При $\mu > \frac{N+|\gamma|-1}{2}$, $(\beta > N+|\gamma|)$ обратное F_B-преобразование от финитной радиальной функции

$$\psi_{a,\mu}(|\xi|) = \begin{cases} (a^2-|\xi|^2)^{\mu-\frac{N+|\gamma|}{2}}, & \xi \in \{|\xi|<a\}^+\,, \\ 0, & \xi \notin \{|\xi|<a\}^+\,. \end{cases}$$

выражается формулой

$$F_B^{-1}[\psi_{a,\mu}](x) = A(N,n,\mu,\gamma)\ \ a^{2\mu}\, j_\mu(a|x|). \qquad (2.1.5)$$

Следствие 2.1.1 *Пусть $N \geq 2$, $n \geq 1$ — фиксированные натуральные числа и γ — мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел, $\{|\xi| < a\}^+ = \{\xi: \ |\xi|<a, \ \xi_1 > 0, \ \ldots, \xi_n > 0\}$ — n-полушар в $\mathbb{R}^+_{n,N}$.*

При $\mu > \frac{N+|\gamma|-1}{2}$ ($\beta > N + |\gamma|$) справедливо равенство

$$F_B[j_\mu(a\,|x|)](\xi) = F_B[j_\mu(a\,|x|)](|\xi|) =$$

$$= \begin{cases} \frac{(a^2-|\xi|^2)^{\mu-\frac{N+|\gamma|}{2}}}{a^{2\mu}\ A(\mu,N,n,\gamma)} & , \ \xi \in \{|\xi| < a\}^+ , \\ \\ 0 & , \ \xi \notin \{|\xi| < a\}^+ , \end{cases} \tag{2.1.9}$$

где

$$A(N,n,\mu,\gamma) = \frac{\pi^{\frac{n-N}{2}}}{2^{N-n+|\gamma|}}\ \frac{\Gamma\left(\mu+1-\frac{N+|\gamma|}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)\ \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}.$$

При $-\frac{1}{2} \leq \mu \leq \frac{N+|\gamma|-1}{2}$ F_B-преобразование функции $j_\mu(a\,|x|)$ в классическом смысле не существует, однако, оно может быть вычислено в рамках теории обобщенных весовых функций.

Предположим, что размерности γ_i таковы, что $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ — натуральное число. Введем распределения Киприянова I^α_a на сфере , которые определим при четных и нечетных $N+|\gamma|$ в виде сингулярных обобщенных функций из S', носители которых сосредоточены на N-полусфере в $\mathbb{R}^+_N$, и которые действуют на основные функции $\varphi \in S_{ev}$ по формулам

a) при четном $N+|\gamma|$

$$\left(I^k_a, \varphi\right)_\gamma = \frac{1}{a^{2k}}\left(\frac{1}{a}\frac{d}{da}\right)^{\frac{N+|\gamma|}{2}-k-1}\left[a^{N+|\gamma|-2}\int\limits_{S^+_1(N)} \varphi(a\xi)\,(\xi')^\gamma\ dS(\xi)\right], \tag{2.1.10}$$

b) при нечетном $N+|\gamma|$

$$\left(I^{k-\frac{1}{2}}_a, \varphi\right)_\gamma = \frac{1}{a^{2k-1}}\left(\frac{1}{a}\frac{d}{da}\right)^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}-k}\left[a^{N+|\gamma|-2}\int\limits_{S^+_1(N)} \varphi(a\xi)\,(\xi')^\gamma\, dS(\xi)\right]. \tag{2.1.11}$$

Теорема 2.1.3 *Пусть $|\gamma|$ — натуральное число. F_{B_γ}-Преобразование функции $j_\mu(a\,|x|)$, понимаемое в смысле пространства S'_{ev}, при $\mu = k$ или $\mu = k - \frac{1}{2}$, где k целое, $0 \leq k \leq \frac{N+|\gamma|-1}{2}$ ($0 \leq \beta \leq N + |\gamma|$), имеет вид*

а) при четном $N+|\gamma| \geq 2$ и $\mu = \frac{\beta-1}{2} = k$ (т.е. $\beta = 2k+1$ — нечетное число)

$$F_{B_\gamma}[j_k(a|x|)](\xi) = A_k(N,n,\gamma)\cdot I^k_a, \tag{2.1.12}$$

где

$$A_k(N,n,\gamma)=2^{k+\frac{N+|\gamma|}{2}-n}\Gamma(k+1)\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right);$$

b) при нечетном $N+|\gamma|\geq 3$ *и* $\mu=\frac{\beta-1}{2}=k-1/2$ *(т.е.* $\beta=2k$ *— четное число)*

$$F_{B_\gamma}[j_{k-\frac{1}{2}}(a|x|)](\xi)=A_{k-\frac{1}{2}}(N,n,\gamma)\cdot I_a^{k-\frac{1}{2}}. \tag{2.1.13}$$

где

$$A_{k-\frac{1}{2}}(N,n,\gamma)=2^{k-\frac{1}{2}+\frac{N+|\gamma|}{2}-n}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right).$$

Введем обобщенные функции вида $I_a^{k-\frac{1}{2}-\delta}$ в случае нечетного $N+|\gamma|\geq 3$ и $I_a^{k-\delta}$, $I_a^{-\delta_1}$ в случае четного $N+|\gamma|\geq 2$. Их действие на основные функции $\varphi\in S_{ev}$ определим по правилам

$$(I_a^{k-\delta},\varphi)=\frac{2}{\Gamma(1-\delta)}\int\limits_0^1 z^{2k-1}(1-z^2)^{-\delta}\times$$

$$\times\ \frac{1}{a^{2k-2}}\left(\frac{1}{a}\frac{d}{da}\right)^{\frac{N+|\gamma|}{2}-k}\left[a^{N+|\gamma|-2}\int\limits_{S_1^+(N)}\varphi(az\xi)\,(\xi')^\gamma\,dS(\xi)\right]dz\,; \tag{2.1.17}$$

$$(I_a^{-\delta_1},\varphi)=\frac{2}{\Gamma(1-\delta_1)}\int\limits_0^1 z(1-z^2)^{-\delta_1}\times$$

$$\times\ (a\frac{d}{da}+2-2\delta_1)\left(\frac{1}{a}\frac{d}{da}\right)^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}\left[a^{N+|\gamma|-2}\int\limits_{S_1^+(N)}\varphi(az\xi)\,(\xi')^\gamma\,dS(\xi)\right]dz\,; \tag{2.1.18}$$

$$(I_a^{k-\frac{1}{2}-\delta},\varphi)=\frac{2}{\Gamma(1-\delta)}\int\limits_0^1 z^{2k-2}(1-z^2)^{-\delta}\ \times$$

$$\times\ \frac{1}{a^{2k-3}}\left(\frac{1}{a}\frac{d}{da}\right)^{\frac{N+|\gamma|+1}{2}-k}\left[a^{N+|\gamma|-2}\int\limits_{S_1^+(N)}\varphi(az\xi)\,(\xi')^\gamma\,dS(\xi)\right]dz\,. \tag{2.1.19}$$

В отличие от обобщенных функций (2.1.10) и (2.1.11), носители которых расположены на сфере $|x|{=}a$, эти обобщенные функции имеют носители в шаре $|x|<a$.

Теорема 2.1.4 *Пусть* $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ *— натуральное число и* k *— натуральное число, удовлетворяющее условию* $1 \le k \le \frac{N+|\gamma|+1}{2}$ *и пусть правильные дроби* δ *и* δ_1 $(\delta \in [0,1), \delta_1 \in [0,\frac{1}{2}])$ *определены так, чтобы для числа* μ, $-\frac{1}{2} < \mu \le \frac{N+|\gamma|}{2}$ *имело место одно из представлений (2.1.17)—(2.1.19).* F_B*-Преобразование функции* $j_\mu(a\,|x|)$*, понимаемое в смысле пространства обобщенных функций* S'_{ev}*, имеет вид*

1) при четном $N + |\gamma| \ge 2$, $-\frac{1}{2} < k-\delta \le \frac{N+|\gamma|}{2}$, $k\in\mathbb{N}$

$$F_B[j_{k-\delta}(a|x|)](|\xi|) = A_{k-\delta}(N,n,\gamma) \cdot I_a^{k-\delta}\,, \tag{2.1.20}$$

где

$$A_{k-\delta}(N,n,\gamma) = 2^{k-1+\frac{N+|\gamma|}{2}-n}\Gamma(k+1-\delta)\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right),$$

$$\mu = -\delta_1\,, \quad F_B[j_\mu(a|x|)](|\xi|) = A_{-\delta_1}(N,n,\gamma) \cdot I_a^{-\delta_1}, \tag{2.1.21}$$

где

$$A_{-\delta_1}(N,n,\gamma) = 2^{\frac{N+|\gamma|}{2}-n-1}\Gamma(1-\delta_1)\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right);$$

2) при нечетном $N + |\gamma| \ge 3$

$$\mu = k-\frac{1}{2}-\delta\,, \quad F_B[j_\mu(a|x|)](\xi) = A_{k-\frac{1}{2}-\delta}(N,n,\gamma) \cdot I_a^{k-\frac{1}{2}-\delta}, \tag{2.1.22}$$

где

$$A_{k-\frac{1}{2}-\delta}(N,n,\gamma) = 2^{k-\frac{3}{2}+\frac{N+|\gamma|}{2}-n}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-\delta\right)\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right).$$

В пункте 2.2 рассмотрен полный сингулярный аналог уравнения Ибрагимова—Мамонтова, а именно

$$u_{tt}-u_{xx}-\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{i,j}(x-t)\ (D_B)_{ij}u = 0, \quad (D_B)_{ij} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_i}\,\frac{\partial}{\partial y_j}, & i \ne j, \\ \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+\frac{\gamma_i}{y_i}\ \frac{\partial}{\partial y_i}, & i = j \end{cases} \tag{2.2.3}$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = f(x,y). \tag{2.2.5}$$

т.е это точная копия уравнения Ибрагимова— Мамонтова, лишь роль вторых производных выполняют различные операторы Бесселя. Решение этого уравнения находится по схеме Ибрагимова—Мамонтова применением смешанного

$\mathcal{F}_B$-преобразования (Фурье—Левитана—Киприянова—Катрахова). В результате получим

$$u(t,x,y)=\frac{1}{2c_\gamma}\int\limits_{x-t}^{x+t}\Big(F_{B_{\bar\lambda\to\zeta}}[j_0(k|\bar\lambda|)](\zeta)\,,\,T^y_{P\zeta}f(\xi,P\zeta)\Big)_\gamma\,d\xi\,,\tag{2.2.9}$$

где T^y_x — обобщенный сдвиг Пуассона. Формулы F_B-преобразования радиальной функции Бесселя произвольного порядка $\mu>-\frac{1}{2}$ получены в теоремах 2.1.3 и 2.1.4.

a) В случае нечетного $n+|\gamma|$ решение задачи Коши (2.2.3), (2.2.5) имеет вид

$$u(t,x,y)=\frac{2^{n-3}}{\prod_{i=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\int\limits_{x-t}^{x+t}d\xi\times$$

$$\times\left(\frac{d}{ds}\right)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}\left[s^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}\int\limits_{S_1^+(n-1)}T^y_{\sqrt{s}\,P\,\zeta}f(\xi,\sqrt{s}\,P\,\zeta)\,\zeta^\gamma dS(\zeta)\right]\Bigg|_{s=x+t-\xi}.$$

b) В случае четного $n+|\gamma|$

$$u(t,x,y)=\frac{2^{n-2}}{\sqrt{\pi}\,\prod_{i=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\int\limits_{x-t}^{x+t}d\xi\int\limits_0^1(1-z^2)^{-1/2}\sqrt{s}\,\times$$

$$\times\left(\frac{d}{ds}\right)^{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}\left[s^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}\int\limits_{S_1^+(n-1)}T_y^{\sqrt{s}\,zP\zeta}f(\xi,\sqrt{s}\,zP\zeta)\,\zeta^\gamma\,dS(\zeta)\right]\Bigg|_{s=x+t-\xi}dz.$$

Как видим, в случае нечетного $n+|\gamma|$ носитель обобщенной функции $F_B[j_0(b|\bar\lambda|)]$ принадлежит сфере $|y|=1$. В случае четного $n+|\gamma|$ в представлении функционала $F_B[j_0(b|\bar\lambda|)]$ появился интеграл по радиальной переменной z, т.е. носитель $F_B[j_0(b|\bar\lambda|)]$ принадлежит шару $|y|<1$. Следовательно, в первом случае для решений задачи Коши (2.2.3), (2.2.5) принцип Гюйгенса выполняется, а во втором нет.

В пункте 2.3 рассматривается более общий случай, когда по времени действует оператор Бесселя с размерностью $\beta\geq 0$, а по пространственным переменным действуют сингулярные операторы Бесселя с размерностью $\gamma_i\geq 0$. Итак, в полупространстве $\mathbb{R}^+_{N+1}=\{(t,x)\,:\,t>0,\,x\in\mathbb{R}_N,\,N\geq 1\}$ рассмотрим следующую задачу Коши

$$B_{\beta,t}u=\Delta_{\gamma,x}u,\quad u|_{t=0}=f(x),\quad u_t|_{t=0}=0.\tag{2.3.1}$$

Для получения представления решения задачи (2.3.1) используем прямое и обратное смешанное F_B-преобразование с порядками j-функций Бесселя равными $\nu_i = \frac{\gamma_i - 1}{2}$ (i=1, 2, … , n).

В результате получим

$$u(x,t) = c(N,n,\gamma)\left(F_{B_\gamma}[j_{\frac{\beta-1}{2}}(t|\xi|)],\, T_y^x f\right)_\gamma . \tag{2.3.4}$$

По следствию 2.1.1 при больших значениях $\beta > N + |\gamma|$

$$F_{B_\gamma}^{-1}\left[j_{\frac{\beta-1}{2}}(t|\cdot|)\right] = \psi_{t,\frac{\beta-1}{2}}(x)$$

и представляет собой финитную функцию с носителем в области $|x| < t$:

$$\psi_{t,\frac{\beta-1}{2}}(|x|) = \begin{cases} (t^2 - |x|^2)^{\frac{\beta-1}{2} - \frac{N+|\gamma|}{2}}, & x \in \{|x| < t\}^+ , \\ 0, & x \notin \{|x| < t\}^+ . \end{cases}$$

Решение задачи Коши (2.3.1) в этом случае имеет вид

$$u(x,t) = c(N,n,\gamma)\left(F_{B_\gamma}[j_{\frac{\beta-1}{2}}(t|\cdot|)](y),\, T_y^x f\right)_\gamma =$$

$$= \frac{c(N,n,\gamma)}{A(N,n,\beta,\gamma)} \int\limits_{\{|y|<t\}_N^+} \frac{(t^2 - |y|^2)^{\frac{\beta-1-N-|\gamma|}{2}}}{t^{\beta-1}}\, T_y^x f(y)\, y^\gamma\, dy ,$$

где

$$A(N,n,\beta,\gamma) = \frac{1}{\pi^{\frac{N-n}{2}}\, 2^{N+|\gamma|-n}}\; \frac{\Gamma\left(\frac{\beta-N-|\gamma|+1}{2}\right)}{\Gamma(\frac{\beta+1}{2})\, \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}$$

А при значениях размерности $\beta \le N + |\gamma|$ выражение $F_{B_\gamma}^{-1}\left[j_{\frac{\beta-1}{2}}(t|\cdot|)\right] = I_t^{\frac{\beta-1}{2}}$ представляет собой распределение Киприянова из S'_{ev}, которое определяется по формулам, полученным в теоремах 2.1.3 и 2.1.4,

В обоих из этих случаев можем выписать явный вид решения $u(t,x)$. При этом отдельно рассматриваются случаи четной $N + |\gamma|$ и нечетной $N + |\gamma|$ размерности пространства.

Среди найденных решений этой задачи Коши только в двух случаях решение представляется сферическим интегралом — это решения описанные в пункте 2.3.2.

Случай **A1**: $\beta = 2k + 1$ — нечетное число и $1 \le \beta \le N + |\gamma|$ ($0 \le k \le \frac{N+|\gamma|-1}{2}$), $N + |\gamma| \ge 2$ — четное число. Решение в этом случае имеет вид:

$$u(t,x) = \frac{2^{k - \frac{N+|\gamma|}{2} + n}\Gamma(k+1)}{\pi^{\frac{N-n}{2}} \prod\limits_{i=1}^n \left(\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\right)} \times$$

$$\times\ \frac{1}{t^{2k}}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{N+|\gamma|}{2}-k-1}\left[t^{-1}\int\limits_{S_{x,t}(N)} T_x^y f(x)\,(y')^\gamma\ dS(y)\right].$$

Случай **A3**: $\beta=2k$ — четное число, $N+|\gamma|\geq 3$ — нечетное число. При этом $0\leq\beta\leq N+|\gamma|-1$ $\left(0\leq k\leq\frac{N+|\gamma|-1}{2}\right)$.

$$u(t,x)=\frac{2^{k-\frac{N+|\gamma|+1}{2}+n}\ \Gamma(k+\frac{1}{2})}{\pi^{\frac{N-n}{2}}\ \prod\limits_{i=1}^{n}\left(\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\right)}\times$$

$$\times\ \frac{1}{t^{2k-1}}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}-k}\left[t^{-1}\int\limits_{S_{x,t}(N)} T_x^y f(x)\,(y')^\gamma\ dS(y)\right].$$

В остальных случаях решение представляется в виде интеграла по шару.

Случай **A2**: $\beta=2k$ и $N+|\gamma|\geq 2$ — четные числа. При этом число $\mu=\frac{\beta-1}{2}$ — дробное (полуцелое). Этот случай изучен при условии дробного μ. Это случай B1.

Случай **B1**: $N+|\gamma|\geq 2$ — четное число, $\frac{\beta-1}{2}=k-\delta$, $k\in\mathbb{N}$, $\delta\in[0,1)$, $1\leq k<\frac{N+|\gamma|+1}{2}$, $1<\beta\leq N+|\gamma|$.

$$u(t,x)=\frac{2^{k-\frac{N+|\gamma|}{2}+n}\Gamma(k+1-\delta)}{\pi^{\frac{N-n}{2}}\ \Gamma(1-\delta)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\times$$

$$\times\frac{1}{t^{2k-2}}\left(\frac{d}{tdt}\right)^{\frac{N+|\gamma|}{2}-k}\frac{1}{t^{2k-N-|\gamma|-2\delta+2}}\int\limits_{|y|<t}|y|^{2k-N-|\gamma|}(t^2-|y|^2)^{-\delta}\times$$

$$\times\ T_y^x f(y)\,(y')^\gamma\,dy.$$

Случай **B2**: Пусть $(N+|g|\geq 2)$ — четное $\frac{\beta-1}{2}=-\delta_1$, где $\delta_1\in[0,\frac{1}{2}]$, $0\leq\beta\leq 1$.

$$u(t,x)=\frac{2^{n-\frac{N+|\gamma|}{2}}}{\pi^{\frac{N-n}{2}}\ \prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}(t\frac{d}{dt}+2-2\delta_1)\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}t^{N+|\gamma|+2\delta_1-4}\times$$

$$\times\ \int\limits_{|y|<t}|y|^{2-N-|\gamma|}(t^2-|y|^2)^{-\delta_1}T_y^x f(y)\,(y')^\gamma\ dy\,.$$

Случай **B3**: Пусть $N+|\gamma|\geq 3$ — нечетное и $0\leq\beta\leq N+|\gamma|$,

$$k{\in}\mathbb{N},\;\; 1\leq k<\frac{N+|\gamma|+1}{2},\;\; \frac{\beta-1}{2}=k-\delta-\frac{1}{2},\;\; \delta\in[0,1).$$

$$u(t,x)=\frac{2^{k-\frac{N+|\gamma|+1}{2}+n}\Gamma(k+\frac{1}{2}-\delta)}{\pi^{\frac{N-n}{2}}\,\Gamma(1-\delta)\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\right)}\times$$

$$\times\frac{1}{t^{2k-3}}\left(\frac{d}{tdt}\right)^{\frac{N+|\gamma|+1}{2}-k}\frac{1}{t^{2k-N-|\gamma|-2\delta+1}}\int\limits_{|y|<t}|y|^{2k-1-N-|\gamma|}(t^2-|y|^2)^{-\delta}\times$$

$$\times\, T_y^x f(y)\,(y')^{\gamma}\,dy.$$

А также в случае дробного $N+|\gamma|$ решение представляется в виде интеграла по шару.

Поэтому можем утверждать следующий достаточный принцип Гюйгенса для решения B-гиперболического уравнения с оператором Бесселя по времени.

Обобщенный сингулярный принцип Гюйгенса *Решение задачи (2.3.1) удовлетворяет «обобщенному принципу Гюйгенса», если числа β и $|\gamma|$ целые, а числа $1+\beta$ и $N+|\gamma|$ обладают одинаковой четностью и удовлетворяют неравенству $\beta+1\leq N+|\gamma|$.*

Глава 3 посвящена нахождению решения задачи Коши с граничными условиями для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу с оператором Бесселя по времени. Рассматриваемые операторы Бесселя в уравнении могут иметь различные параметры.

Пусть $\alpha=(\alpha_1,...,a_n)$ — фиксированные положительные числа. Рассматривается уравнение

$$B_{\beta,t}u(x,t)=\Delta_{B_{\alpha,x}}u(x,t),\;\text{где}\;\Delta_{B_{\alpha,x}}{=}\sum_{i=1}^{n}B_{\alpha_i}{+}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

с начальными условиями

$$u(x,0)=\varphi(r),\;\; u_t(x,0)=\psi(r),\;\; r=|x|$$

и одним из граничных условий:

i) граничное условие первого рода $u(x,t)|_{|x|=1}=f_1(t)$;

ii) граничное условие второго рода $\left.\frac{\partial u}{\partial\vec{\omega}}\right|_{|x|=1}=f_2(t)$, $\vec{\omega}$ — вектор внешней нормали к сфере $|x|=1$;

iii) граничное условие третьего рода $\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{\omega}} + Hu\right)\Bigg|_{|x|=1} = 0$, H — заданная постоянная.

Начально-граничные условия позволяют считать решение уравнения радиальным. Тогда сферическая замена переменных $x = r\theta$, $|\theta| = 1$ приводит к следующим задачам

$$B_{\beta,t}u = B_{N+|\alpha|-1,r}u, \ \ u(r,0) = \varphi(r), \ \ u_t(r,0) = \psi(r),$$

$$i)\, u|_{r=1} = 0; \ \ ii)\, u_r|_{r=1} = 0; \ \ iii)\, (u_r + Hu)|_{r=1} = 0.$$

Далее полагаем $N + |\alpha| - 1 = \gamma$.

Получены решения краевых задач для уравнения ЭПД с оператором Бесселя по времени для различных случаев размерности оператора $B_{\beta,t}$, а именно $\beta > 0$, $-1 < \beta < 0$ и $\beta < -1$. Доказаны существование и единственность полученных решений. Записаны их представления в виде формулы, аналогичной формуле Пуассона, определяемой специальным «$\binom{\mu}{\nu}$—сдвигом», порожденным произведением j-функций Бесселя первого рода разных порядков μ и ν

$$\overset{\nu,\mu}{V_x^t}\, f(x) = \frac{2^{\nu+\mu}\,\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)}{\pi\;\Gamma(\nu+\mu)} \times$$

$$\times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\theta(\mu-\nu)} \cos^{\nu+\mu}\theta\, f(\sqrt{2\cos\theta(x^2 e^{i\theta} + t^2 e^{-i\theta})})\, d\theta\,.$$

В заключение автор выражает благодарность профессору Л. Н. Ляхову за постановку задачи и помощь, оказанную при работе над диссертацией.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Yeletskikh K.S. The Mixed Fourier–Bessel Transform of a Radial Bessel j-Function / Л.Н. Ляхов, К.С. Елецких // Jornal Of Mathematical Sciences. – Springer. – 2017. – Vol. 226. – № 4. – P. 388-401.

[2] Yeletskikh K.S. Singular Ibragimov—Mamontov Type Equations / Л.Н. Ляхов, К.С. Елецких, С.А. Рощупкин // Jornal Of Mathematical Sciences. – Springer. – 2018. – Vol. 232. – № 4. – P. 437-446.

[3] Yeletskikh K.S. Poisson Formulas for Boundary Value Problems for the Euler–Poisson–Darboux Equation / Л.Н. Ляхов, К.С. Елецких, Е.Л. Санина // Jornal Of Mathematical Sciences. – Springer. – 2019. – Vol. 239. – № 3. – P. 329-339.

[4] Елецких К.С. О смешанном преобразование Фурье—Бесселя радиальной j-функций Бесселя / Л.Н. Ляхов, К.С. Елецких // Проблемы математического анализа. –2017. – Выпуск 89. – С. 52-63.

[5] Елецких К.С. О сингулярном уравнении типа уравнения Ибрагимова—Мамонтова / Л.Н. Ляхов, К.С. Елецких, С.А. Рощупкин // Проблемы математического анализа. – 2018. – Выпуск 92. – С. 31-39.

[6] Елецких К.С. О формулах Пуассона для краевых задач уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу / Л.Н. Ляхов, К.С. Елецких, Е.Л. Санина // Проблемы математического анализа. –2019. – Выпуск 97. – С. 83-91.

[7] *Елецких К.С.* О среднем по окружности радиальной j-функции Бесселя / К.С. Елецких // Вестник ПММ Воронежского государственного университета. – Воронеж: Научная книга. – 2016. – Выпуск 13. — С. 66-75.

[8] *Елецких К.С.* О смешанном преобразовании Фурье-Бесселя целого и полуцелого индекса в пространстве $\mathbb{R}_2$ / К.С. Елецких // Вестник ПММ Воронежского государственного университета. – Воронеж: Научная книга. – 2017. – Выпуск 14. — С. 30-37.

[9] *Yeletskikh K.S.* On the mixed fourier-bessel transformation of a radial Bessel j-function of integer and half-integral index / К.С. Елецких // Материалы докладов международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VII"в г. Ростове-на-Дону. – Тезисы докладов. – Ростов н/Д: ДГТУ, 2017. – С. 81-82.

[10] *Елецких К.С.* Преобразование Фурье-Бесселя радиальной j-функции Бесселя / К.С. Елецких // Материалы международной конференции Дифференциальные уравнения и смежные проблемы. - Тезисы докладов. – Самара. – 2017. – С. 53-55.

[11] *Елецких К.С.* О среднем по окружности радиальной j-функции Бесселя / К.С. Елецких // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2018". – Воронеж: ВГУ. – 2018. – С. 205-206.

[12] *Yeletskikh K. S.* On a particular class of singular equations / К.С. Елецких // Материалы докладов международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их при-

ложения – VIII"в г. Ростове-на-Дону. – Тезисы докладов. – Ростов н/Д: ДГТУ, 2018. – С. 75-76.

[13] Елецких К. С. Сингулярное уравнение типа Ибрагимова-Мамонтова / К.С. Елецких // Материалы международной конференции Дифференциальные уравнения и смежные проблемы. – Тезисы докладов.– Стерлитамак. – 2018. – Т. 1. – С. 69-71.

[14] *Елецких К. С.* О принципе Гюйгенса в задачах сингулярных дифференциальных уравнений / К.С. Елецких // Материалы международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам в г. Суздаль. – Тезисы докладов. – Суздаль. – 2018. – С. 86.

[15] *Елецких К. С.* О фундаментальном решении D_B-гиперболического оператора / К.С. Елецких // Материалы 9-го международного семинара AMADE . – Тезисы докладов.– Минск. – 2018. – 30-31.

[16] *Yeletskikh K. S.* On boundary value problems for the Euler—Poisson—Darboux equationss / К.С. Елецких // Материалы докладов международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – IX"в г. Ростове-на-Дону. – Тезисы докладов. – Ростов н/Д: ДГТУ, 2019. – С. 73-74.

[17] *Елецких К.С.* Псевдообобщенный $\binom{\mu}{\nu}$-сдвиг и формула Пуассона решения краевой задачи для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу / К.С. Елецких // Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В. А. Садовничего. – Тезисы докладов. – Москва : МАКС Пресс, 2019. – С. 50.