На правах рукописи

Тельнова

Тельнова Мария Юрьевна

Оценки первого собственного значения задачи Штурма — Лиувилля с условиями Дирихле и весовым интегральным условием

Специальность: 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Владимир — 2015

Работа выполнена на кафедре высшей математики
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Московский государственный университет
экономики, статистики и информатики (МЭСИ)»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Асташова Ирина Викторовна**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Прикладная математика» Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ) **Братусь Александр Сергеевич**
	кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН **Сурначёв Михаил Дмитриевич**
Ведущая организация:	Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Защита состоится 16 июня 2015 года в 16^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 212.025.08 при Владимирском государственном университете имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых по адресу: 600024, г. Владимир, проспект Строителей, д. 11, корп. 7 ВлГУ, ауд. 237. Факс (4922) 53-25-75, 33-13-91; e-mail: oid@vlsu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на официальном сайте www.vlsu.ru Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, с авторефератом – на сайте http://diss.vlsu.ru.

Автореферат разослан «___» __________2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.025.08
при ВлГУ, к.ф.м.н. Наумова С.Б.

Общая характеристика работы

Представленная работа является исследованием в области качественной теории дифференциальных уравнений и спектрального анализа.

Актуальность темы. В диссертации рассматривается задача, основополагающей для которой послужила задача, известная как задача Лагранжа[1] или задача о наиболее прочной колонне заданного объема. Эту задачу в более общей постановке решали ученые разных стран мира более чем 200 лет: Keller J.B.[2], Tadjbakhsh I.[3], А. С. Братусь[4 5], А. П. Сейранян[5 6], S. J. Cox[7 8], M. L. Overton[8], Ю. В. Егоров и В. А. Кондратьев[9 10] и др. Для решения задачи Лагранжа потребовались практически все разделы вариационного исчисления, включая современные достижения. В свою очередь эта задача стимулирует развитие новых математических дисциплин, таких как теория экстремальных задач с недифференцируемыми функционалами. Механическая сущность задачи о колонне позволила выбрать среди возможных экстремалей оптимальные решения, имеющие явный физический смысл.

В 1773 году Ж.-Л. Лагранж, развивая работы Л. Эйлера[11] об устойчивости упругих стержней, поставил задачу об оптимальной форме колонны, нагруженной продольной силой P: найти форму колонны, максимизирующую критерий «прочности»

$$\max \frac{P_c}{V^2},$$

где P_c – критическая сила потери устойчивости, V – объем колонны. Колонна является телом вращения плоской кривой вокруг некоторой прямой, расположенной в ее плоскости.

---

[1]Lagrange J.L. Sur la figure des colonnes // In: Ouevres de Lagrange (Publ. de M.J.-A. Serret), V.2. Paris: Gauthier–Villars, 1868, P. 125–170.

[2]Keller J.B. The shape of the strongest column // Arch. Rat. Mech. Anal., 1960, V.5, №4, P. 275–285.

[3]Tadjbakhsh I., Keller J.B. Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues // Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1962, V. 29, №1, P. 159–164.

[4]Братусь А.С. Кратные собственные значения в задачах оптимизации. Спектральные свойства систем с конечным числом степеней свободы// Журнал Вычисл. Матем. и Мат. Физики, 1986, Т.26, С. 1–7.

[5]Братусь А.С., Сейранян А.П. Бимодальные решения в задачах оптимизации собственного значения // Прикл. Мат. Мех., 1983, Т. 47, С. 451–457.

[6]Сейранян А.П. Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны // Институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова, 2003, Т. 2, №2, С. 45-96.

Механика твердого тела, 1984, Т. 19, С. 101–111.

[7]Cox S.J. The shape of ideal column // The Mathematical Intelligencer, 1992, V. 14, P. 16–24.

[8]Cox S.J., Overton M.L. On optimal design of columns against buckling //SIAM J. Math. Anal., 1992, Vol. 23, P. 287–325.

[9]Egorov Yu.V., Kondratiev V.A. On Spectral theory of elliptic operators // Operator theory: Advances and Applications, Birkhauser, Basel, 1996, V. 89, P. 1–325.

[10]Егоров Ю.В., Кондратьев В.А. Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма–Лиувилля // Успехи математических наук, 1996, Т. 51(3), С. 73–144.

[11]Эйлер Л. Об упругих кривых. В кн.: Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума или решение изопериметрической задачи , взятой в самом широком смысле // М.-Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1934, С. 447–572.

Потеря устойчивости колонны описывается уравнением изгиба тонких стержней Бернулли – Эйлера

$$(EI(x)y'')'' + Py'' = 0, \quad 0 < x < L, \tag{1}$$

где $y(x)$ – функция прогиба, E – модуль Юнга, $I(x) = \pi R^4(x)/4$ – момент инерции стержня круглого сечения радиуса R.

Ж.-Л. Лагранж рассматривал условия шарнирного опирания колонны на обоих концах

$$y(0) = (EI(x)y'')_{x=0} = 0, \quad y(L) = (EI(x)y'')_{x=L} = 0. \tag{2}$$

Объем колонны задается интегралом

$$V = \int_0^L A(x)dx, \tag{3}$$

где $A(x) = \pi R^2(x)$ – площадь поперечного сечения.

После введения безразмерных переменных $x^0 = x/L$, $y^0 = y/L$, $S(x^0) = A(Lx^0)L/V$, введя обозначения $\lambda = 4\pi PL^4/(EV^2)$, $Q(x) = S^2(x)$, уравнение (1) и условия (2), (3) примут вид (нули в символах x^0 и y^0 опускаем)

$$(Q(x)y'')'' + \lambda y'' = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{4}$$

$$y(0) = (Q(x)y'')_{x=0} = 0, \quad y(1) = (Q(x)y'')_{x=1} = 0. \tag{5}$$

$$\int_0^1 \sqrt{Q(x)}dx = 1. \tag{6}$$

Задача (4) – (5) представляет собой задачу на собственные значения и сводится к максимизации первого собственного значения λ при изопериметрическом условии (6).

Приведем постановку задачи Лагранжа, рассматриваемой в работах [2 3 10], и связанной с ней вариационной задачи при жестком закреплении колонны с обоих концов:

$$y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0. \tag{7}$$

Потенциальная энергия колонны единичной длины выражается функционалом

$$T = \int_0^1 Q(x)y''(x)^2dx - \lambda \int_0^1 y'(x)^2dx.$$

При малых значениях λ минимальное значение T в классе $H_0^2(0,1)$ равно 0. *Критической нагрузкой* λ_0 называется максимальное значение λ, при котором $\inf_{y\in H_0^2(0,1)} T = 0$. Пусть

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y\in H_0^2(0,1)} L[Q,y], \quad \text{где} \quad L[Q,y] = \frac{\int_0^1 Q(x)y''(x)^2dx}{\int_0^1 y'(x)^2dx}.$$

Задача Лагранжа состоит в отыскании такой неотрицательной функции площади поперечного сечения $\sqrt{Q_0(x)}$, что $\lambda_0 = \lambda_1(Q_0)$ и $\int_0^1 \sqrt{Q_0(x)}dx = 1$. Уравнение (4) является уравнением Эйлера – Лагранжа для функционала $L[Q, y]$ при условии, что выполняются граничные условия (5) или (7).

Если колонна имеет сечения произвольной формы, подобные одному из них, и неоднородна, то есть составлена из слоев с различными упругими свойствами, то условие на функцию Q можно заменить условием

$$\int_0^1 Q^\gamma(x)dx = 1 \tag{8}$$

при некотором $\gamma \in (0, 1]$.

В работах [2 3 10] рассматривается задача для уравнения (4), граничных условий (7) и интегрального условия (8), которая сводится к нахождению экстремальных значений функционала $L[Q, y]$ при условиях, что функция y принадлежит пространству $H_0^2(0, 1)$ и функция Q – неотрицательная ограниченная измеримая функция, удовлетворяющая условию (8) (в работах [2 3] $\gamma = 1/2$). Авторами [10] используются пространства Соболева ${W_p}^l(0, 1)$, $l = 1, 2$, с любыми вещественными значениями $p \neq 0$, что интересно также и вне рамок задачи Лагранжа.

В работе [10] приводится эквивалентная задаче (4) – (7) – (8) вариационная задача об экстремуме функционала

$$F[Q, y] = \frac{\int_0^1 Q(x)y'(x)^2dx}{\int_0^1 y(x)^2dx}$$

при условии, что функция $y \in H_0^1(0, 1)$ удовлетворяет условию $\int_0^1 y(x)dx = 0$, и функция Q удовлетворяет условию (8).

Задача Лагранжа послужила источником для различных постановок экстремальных задач на собственные значения, в том числе для уравнений второго порядка с интегральным условием на потенциал. Одной из первых задач такого типа для уравнения второго порядка и нулевых граничных условий

$$y'' + \lambda Q(x)y = 0, \ \ x \in (0, 1)\,, \tag{9}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{10}$$

была поставлена и изучена Ю. В. Егоровым и В. А. Кондратьевым [9 10] при условии, что функция Q принадлежит множеству R_γ действительных положительных измеримых на (0, 1) функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1 Q^\gamma(x)dx = 1, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \ \ \gamma \neq 0. \tag{11}$$

Из вариационного принципа следует, что

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y \in C_0^\infty(0,1)} \frac{\int_0^1 y'^2dx}{\int_0^1 Q(x)y^2dx}.$$

Оценивались значения

$$m_\gamma = \inf_{Q \in R_\gamma} \lambda_1(Q), \qquad M_\gamma = \sup_{Q \in R_\gamma} \lambda_1(Q).$$

Точные оценки снизу наименьшего собственного значения задачи (9) – (11) при $\gamma = 1$ были получены также и И. М. Рапопортом[12].

Среди экстремальных задач на собственные значения с интегральным условием на потенциал для уравнений второго порядка выделим задачу на нахождение оценок $\lambda_1(P, Q)$ задачи

$$y'' - Q(x)y + \lambda P(x)y = 0, \;\; x \in (0,1)\,,$$

$$y(0) = y(1) = 0,$$

где Q и P – такие измеримые неотрицательные функции, что выполняются условия

$$\int_0^1 Q^\gamma(x)dx = 1 \quad \text{и} \quad \int_0^1 P^\alpha(x)dx < \infty, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \;\; \gamma \neq 0.$$

Одним из первых эту задачу поставил A. Ramm[13]. Его формулировка задачи дана в случае $Q(x) \equiv 1$ и $\alpha = 1$. В этом частном случае задача была решена G. Talenti[14] и M. Essen[15]. В общем случае данная задача была решена Ю. В. Егоровым[16] и S. Karaa [16] [17].

В. А. Винокуровым и В. А. Садовничим[18] рассматривалась задача

$$y'' + (\lambda - Q(x))y = 0, \;\; x \in (0, \pi)\,, \quad y(0) = y(\pi) = 0, \tag{12}$$

где Q – вещественная интегрируемая по Лебегу на $(0, \pi)$ функция.

Для произвольной функции $Q \in L_1(0, \pi)$ n–ое собственное значение обозначалось $\lambda = \lambda_n(Q)$, для $Q \equiv 0$ n–ое собственное значение, равное n^2, обозначалось $\lambda_{n,0}$:

$$\lambda_n(Q) = n^2 = \lambda_{n,0}.$$

[12]Рапопорт И.М. Об одной вариационной задаче в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями// Докл. АН СССР, 1950, Т. 73, №5, С. 889–890.

[13]Ramm A.G. Question 5 (Part 2) // Notices Amer. Math. Soc., 29, 1982, P. 328–329.

[14]Talenti G. Estimates for eigenvalues of Sturm–Liouville problems// General inequalities, 4, in W. Walter ed., Birkhauser, Boston, 1984, P. 341–350.

[15]Essen M. On estimating eigenvalues of a second order linear differential operator // ISNM, 80, Birkhauser, 1987, P. 347–366.

[16]Egorov J.V., Karaa S. Optimization of the first eigenvalue of Sturm-Liouville operator // C. R. Acad. Sci. Paris, T. 319. Serie I, 1994, P. 793–798.

[17]Karaa S. Valeurs propres extremales dans problems de Sturm–Liouville// C. R. Acad. Sci. Paris, T. 321. Serie I, 1995, P. 265–270.

[18]Винокуров В.А., Садовничий В.А. О границах изменения собственного значения при изменении потенциала // Доклады Академии наук, 2003, Т. 392, №5, С. 592–597.

Исследовался вопрос: как сильно можно изменить (увеличить или уменьшить) собственное значение, если Q меняется в пределах некоторого множества

$$U_p[t] \equiv \{Q \in L_p(0,\pi),\ \|Q\|_p \leqslant t\},\ \ t \geqslant 0,\ \ p \in [1,+\infty].$$

Рассматривались следующие величины:

$$\overline{\lambda}_{n,p}(t) = \sup_{Q\in U_p[t]} \lambda_n(Q), \qquad \underline{\lambda}_{n,p}(t) = \inf_{Q\in U_p[t]} \lambda_n(Q),$$

соответственно точная верхняя и точная нижняя грани собственного значения на множестве $U_p[t]$;

$$v_{n,p}(t) = \overline{\lambda}_{n,p}(t) - \lambda_{n,0}, \qquad w_{n,p}(t) = \lambda_{n,0} - \underline{\lambda}_{n,p}(t),$$

соответственно верхний сдвиг и нижний сдвиг собственного значения на множестве $U_p[t]$.

В работе [18] приводятся оценки снизу и сверху собственных значений задачи (12) при $p \geqslant 1$ и результат о достижимости оценок при $p > 1$. Отметим, что случай $p < 1$ авторами [18] не рассматривался.

Для сдвига $v_{n,1}(t)$ $n-го$ собственного значения в пространстве $L_1(0,\pi)$ приводится теорема, утверждающая, что для любых $n \in N$ и $t \in [0,+\infty)$ верно неравенство

$$v_{n,1}(t) \leqslant t + \frac{\lambda_{n,0}}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4t}{\lambda_{n,0}}} - 1\right).$$

Из данной теоремы следует, что для точной верхней грани первого собственного значения задачи (12), рассмотренной на отрезке $[0,1]$, справедлива оценка

$$M_1 \leqslant \frac{\pi^2}{2} + 1 + \frac{\pi}{2}\sqrt{\pi^2+4},$$

где M_1 – точная верхняя грань первого собственного значения задачи при $p = 1$ и $t = 1$. Достижимость данной оценки была доказана С. С. Ежак в работах[19 20 21].

С. С. Ежак [19 20 21] рассматривалась задача

$$y'' + \delta Q(x)y + \lambda y = 0,\ \ x \in (0,1)\,, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

[19]Ежак С.С. Об оценках минимального собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с интегральным условием // Современная математика и ее приложения, 2005, Т. 36, С. 56–69.

[20]Ezhak S.S. On the estimates for the minimum eigenvalue of the Sturm–Liouville problem with integral condition. (English) *J. Math. Sci.*, New York, 145, №5, 5205–5218 (2007); translation from *Sovrem. Mat. Prilozh.* 36, 56–69 (2005)

[21]Ежак С.С. Оценки первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле,с. 517–559. // Часть 4 в сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: научное издание под ред. И. В. Асташовой. М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012, 647 с. (ISBN 978-5-238-02368-7)

где $\delta = \pm 1$, Q принадлежит множеству A_γ неотрицательных ограниченных на $[0,1]$ функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1 Q^\gamma(x)dx = 1, \quad \gamma \in \mathbb{R},\ \gamma \neq 0.$$

Согласно вариационному принципу

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y \in H_0^1(0,1)} R[Q,y], \quad \text{где } R[Q,y] = \frac{\int_0^1 y'^2 dx - \delta \int_0^1 Q(x) y^2 dx}{\int_0^1 y^2 dx}.$$

Оценивались значения $m_\gamma = \inf\limits_{Q \in A_\gamma} \lambda_1(Q), \quad M_\gamma = \sup\limits_{Q \in A_\gamma} \lambda_1(Q).$

Для $\delta = -1$ доказана следующая

Теорема[21]. *Пусть* $\delta = -1$. *Если* $\gamma > 1$, *то* $m_\gamma = \pi^2$, $M_\gamma = const < \infty$, *причем существуют такие функции* $u \in H_0^1(0,1)$ *и* $Q \in A_\gamma$, *что* $\inf\limits_{y \in H_0^1(0,1)} R[Q,y] = R[Q,u] = M_\gamma$.

Если $\gamma = 1$, *то* $m_1 = \pi^2, \quad M_1 = \frac{\pi^2}{2} + 1 + \frac{\pi}{2}\sqrt{\pi^2+4}$, *причем существуют такие функции* $u \in H_0^1(0,1)$ *и* $Q \in A_\gamma$, *что* $\inf\limits_{y \in H_0^1(0,1)} R[Q,y] = R[Q,u] = M_1$.

Если $0 < \gamma < 1$, *то* $m_\gamma = \pi^2, \quad M_\gamma = \infty$.

Если $\gamma < 0$, *то* $m_\gamma = const > \pi^2, \quad M_\gamma = \infty$, *причем существуют такие функции* $u \in H_0^1(0,1)$ *и* $Q \in A_\gamma$, *что* $\inf\limits_{y \in H_0^1(0,1)} R[Q,y] = R[Q,u] = M_\gamma$.

К. З. Куралбаевой[22] [23] впервые рассматривалась задача

$$y'' + \lambda Q(x) y = 0,\ x \in (0,1), \quad y(0) = y(1) = 0,$$

при условии, что функция Q принадлежит множеству $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ действительных положительных измеримых на $(0,1)$ функций, удовлетворяющих весовому интегральному условию

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta Q^\gamma(x) dx = 1, \quad \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R},\ \gamma \neq 0, \tag{13}$$

при дополнительном условии

$$\int_0^1 x(1-x)Q(x)dx < \infty. \tag{14}$$

[22]Куралбаева К.З. Некоторые оптимальные оценки собственных значений задач Штурма-Лиувилля // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.02, 116 с., 1996.

[23]Куралбаева К.З. Об оценках первого собственного значения оператора Штурма–Лиувилля // Дифференциальные уравнения, 1996, Т. 32(6), С. 852–853.

Автором [22] показано, что требование выполнения условия (14) существенно, поскольку существуют такие значения параметров α, β, γ, при которых вариационный принцип не выполняется только при выполнении условия (13), хотя в некоторых случаях это требование оказывается лишним, а именно, при $\gamma \geqslant 1$, $\alpha, \beta < 2\gamma - 1$ из того, что $Q(x)$ удовлетворяет (13), следует, что для $Q(x)$ выполнено (14). Однако введение условия (14) сужает множество значений параметров α, β, γ, при которых множество $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ непусто.

Вопрос об оценках первого собственного значения задачи с условиями Дирихле для уравнения

$$y'' - Q(x)y + \lambda y = 0, \;\; x \in (0,1)\,,$$

при условии, что потенциал имеет разные порядки особенностей внутри и на концах отрезка $[0,1]$, оставался открытым. При этом требовалось ввести такое функциональное пространство, чтобы получить оценки первого собственного значения при всех значениях параметров интегрального условия.

В диссертации рассматривается задача

$$y'' - Q(x)y + \lambda y = 0, \;\; x \in (0,1)\,, \tag{15}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{16}$$

при условии, что Q – действительная неотрицательная локально интегрируемая на интервале $(0,1)$ функция, для которой выполняется интегральное условие

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta Q^\gamma(x)dx = 1, \;\; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \, \gamma \neq 0. \tag{17}$$

Множество всех таких функций Q обозначим через $T_{\alpha,\beta,\gamma}$.

Цель работы. Получить оценки для

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} = \inf_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q) \quad \text{и} \quad M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q)$$

при всех значениях параметров интегрального условия и доказать достижимость точных оценок.

Методы исследований. В диссертации используются методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, функционального анализа и спектральной теории дифференциальных операторов, в частности, вариационный метод нахождения первого собственного значения краевой задачи.

Задача Штурма–Лиувилля сводится к задаче нахождения экстремума некоторого функционала, уравнение Эйлера–Лагранжа для которого совпадает с уравнением Штурма–Лиувилля в классе функций, удовлетворяющих граничным условиям.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Основные результаты состоят в следующем:

1. Для всех значений параметров α, β, γ интегрального условия получены оценки сверху и снизу первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с нулевыми граничными условиями и с весовым интегральным условием на потенциал.

2. При $\gamma > 1$ для всех значений параметров α, β интегрального условия получены точные оценки сверху первого собственного значения поставленной задачи и доказана их достижимость.

3. Для всех значений параметров α, β, γ интегрального условия получены точные оценки снизу первого собственного значения поставленной задачи.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер и может представлять интерес для специалистов в области качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и спектральной теории дифференциальных операторов.

Апробация работы. Результаты работы обсуждались и докладывались на следующих научных семинарах:

- научный семинар по качественной теории дифференциальных уравнений кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством проф., д.ф.м.н. И.В. Асташовой, проф., д.ф.м.н. А.В. Боровских, проф., д.ф.м.н. Н.Х. Розова, проф., д.ф.м.н. И.Н. Сергеева (2012, 2014 гг.);

- научный семинар по проблемам механики сплошной среды Института проблем механики РАН под руководством проф., д.ф.м.н. Д.В. Георгиевского, проф., д.ф.м.н. С.В. Нестерова (2015 г.);

- межвузовский научный семинар по качественной теории дифференциальных уравнений МЭСИ, МГУ им. М.В. Ломоносова, МГТУ им. Н.Э. Баумана под руководством проф., д.ф.м.н. И.В. Асташовой, проф., д.ф.м.н. А.В. Филиновского, проф., к.ф.м.н. В.А. Никишкина (неоднократно, 2007–2015 гг.).

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- 14-ая Саратовская зимняя школа "Современные проблемы теории функций и их приложения", 2008 г.

- Международная миниконференция "Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения" Москва, МЭСИ, 2008, 2010, 2011, 2013, 2014 гг.

- Международная конференция "Дифференциальные уравнения и топология", посвященная 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина, Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2008 г.

- Международный Российско–Абхазский симпозиум "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики", Нальчик–Эльбрус, 2009 г.

- "Equadiff 12" – Международная конференция по дифференциальным уравнениям и их приложениям, Брно, Чехия, 2009 г.

- Международная конференция по дифференциальным и разностным уравнениям и их приложениям, Азорский университет, Понта Дельгада, Португалия, 2011 г.

- Международная конференция "Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования", Воронеж, 2011, 2012 гг.

- Всероссийская научная конференция с международным участием "Спектральная теория операторов и ее приложения", г. Архангельск, Институт математики и компьютерных наук САФУ имени М.В. Ломоносова, 2012 г.

- Международная научная конференция "Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования", Архангельск, САФУ, 2014 г.

- Всероссийская научная конференция "Понтрягинские чтения" в рамках Воронежской весенней математической школы "Современные методы теории краевых задач", Воронеж, 2013, 2014 гг.

- International Conference on Applied Mathematics and Scientific Computing, Sibenik, Croatia, 2013 г.

- Международная конференция по дифференциальным и разностным уравнениям и приложениям, Ясна, Словакия, 2014 г.

- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 2014 г.

- European Advanced Studies Conference 2014, Symposium on Differential and Difference Equations 2014, Homburg/Saar, Germany, 2014.

Публикации автора. Результаты диссертации опубликованы в **25** работах, **3** из которых опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК, в том числе **7** статей, **14** тезисов докладов, **1** глава в монографии. Их список приведен в конце реферата. Работ в соавторстве нет.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего **57** наименований, включая работы автора. Объем диссертации составляет **93** страницы. Диссертация содержит **6** рисунков и **6** таблиц.

Краткое изложение содержания работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в данной диссертационной работе, приводится краткий обзор работ по данной проблеме, формулируется цель исследования, приводятся основные результаты исследований.

В **первой главе** диссертации приводится постановка задачи, определяется, какая функция называется решением задачи, какая функция называется обобщенным решением рассматриваемой задачи.

Для получения оценок для $m_{\alpha,\beta,\gamma}$ и $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ вводится следующее функциональное пространство. Для произвольной функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ через H_Q обозначается замыкание множества $C_0^\infty(0,1)$ по норме

$$\|y\|_{H_Q} = \left(\int_0^1 y'^2 dx + \int_0^1 Q(x) y^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В первой главе через Γ_1 обозначается множество таких функций y из H_Q, что

$$\int_0^1 y^2 dx = 1.$$

Доказывается, что

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y \in H_Q \setminus \{0\}} R[Q,y] = \inf_{y \in \Gamma_1} F[Q,y],$$

где

$$R[Q,y] = \frac{\int_0^1 y'^2 dx + \int_0^1 Q(x) y^2 dx}{\int_0^1 y^2 dx}, \quad F[Q,y] = \int_0^1 y'^2 dx + \int_0^1 Q(x) y^2 dx.$$

Результатом первой главы являются следующие теоремы:

Теорема 1.1. *Пусть $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и $m = \inf\limits_{y \in \Gamma_1} F[Q,y]$. Тогда существует такая функция $y \in \Gamma_1$, что $F[Q,y] = m$.*

Теорема 1.2. *Пусть функция y удовлетворяет условиям теоремы 1.1. Тогда y является решением уравнения*

$$-y'' + Q(x)y - \lambda y = 0,$$

где $\lambda = m$ – минимальное собственное значение задачи (15), (16).

Во **второй главе** диссертации получены оценки для $m_{\alpha,\beta,\gamma}$. Результатом **первого параграфа** второй главы является

Теорема 2.1. *Для $m_{\alpha,\beta,\gamma}$ имеют место следующие оценки.*

1. Если $\gamma > 0$, то $m_{\alpha,\beta,\gamma} = \pi^2$.

2. Если $\gamma < 0$, то $\pi^2 \leqslant m_{\alpha,\beta,\gamma} < \infty$, причем

1) если $\gamma < 0$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, то справедливо неравенство

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \min\left\{\pi^2+1, \left(1+4(\alpha-2\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\pi^2, \left(1+4(\beta-2\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\pi^2\right\};$$

2) если $\gamma < 0$, $2\gamma - 1 < \alpha < 0 \leqslant \beta$, то справедливо неравенство

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \left(1+4(\alpha-2\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\pi^2;$$

3) если $\gamma < 0$, $2\gamma - 1 < \beta < 0 \leqslant \alpha$, то справедливо неравенство

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \left(1+4(\beta-2\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\pi^2;$$

4) если $\gamma \leqslant \alpha, \beta < 0$ или $2\gamma - 1 < \beta < \gamma \leqslant \alpha < 0$ или $2\gamma - 1 < \alpha < \gamma \leqslant \beta < 0$, то справедливо неравенство

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \left(1+\theta^{\frac{1}{\gamma}} \cdot 2^{\frac{\theta+4\gamma-2}{\gamma}}\right)\pi^2,$$

где $\theta = \min\{\alpha, \beta\} - 2\gamma + 1$;

5) если $\gamma < 0$ и $2\gamma - 1 < \alpha, \beta < \gamma$, то справедливо неравенство

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \min\left\{\left(1+\theta^{\frac{1}{\gamma}} \cdot 2^{\frac{\theta+4\gamma-2}{\gamma}}\right)\pi^2, R\left[\frac{1}{y_1^2}, y_1\right]\right\},$$

где $y_1(x) = x^{\frac{\alpha}{2\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{2\gamma}}$ и $\theta = \min\{\alpha, \beta\} - 2\gamma + 1$;

6) если $\gamma < 0$ и $\alpha \leqslant 2\gamma - 1$, то

а) при $\beta \geqslant \gamma$ справедливо неравенство $m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant R[Q_{\alpha,\beta,\gamma}, y_\theta]$,

б) при $\beta < \gamma$ справедливо неравенство

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \min\left\{R[Q_{\alpha,\beta,\gamma}, y_\theta], R\left[\frac{1}{y_1^2}, y_1\right]\right\},$$

где

$$y_1(x) = x^{\frac{\alpha}{2\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{2\gamma}},$$

$$Q_{\alpha,\beta,\gamma}(x) = A\,x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}x^{\frac{A^{\gamma}-1}{\gamma}},$$

$$y_\theta(x) = \begin{cases} x^\theta, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}; \\ (1-x)^\theta, & \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1, \end{cases}$$

и θ *– некоторое действительное число, при некотором* $A > 0$ *удовлетворяющее неравенству* $\theta > \frac{\alpha-|\beta|-\gamma-A^\gamma+1}{2\gamma}$*;*

7) если $\gamma < 0$ *и* $\beta \leqslant 2\gamma - 1$*, то имеют место результаты пункта 6, где* α *и* β *меняются местами и*
$Q_{\alpha,\beta,\gamma}(x) = A\,x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}(1-x)^{\frac{A^{\gamma}-1}{\gamma}}$.

Замечание. Отметим, что если рассмотреть при $\gamma > 0$ обобщенное решение задачи (15) – (17) с потенциалом $Q_*(x) = x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}\delta(x-1)$ (или с потенциалом $Q_*(x) = x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}\delta(x)$) в виде δ – функции с носителем в точке 1 (0), то

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} = \pi^2 = \lambda_1(Q_*).$$

Результаты теоремы 2.1 представлены с помощью рисунков 1, 2, 3 и таблиц 1, 2, 3. В последнем столбце таблицы либо указано значение $m_{\alpha,\beta,\gamma}$, либо номер неравенства для $m_{\alpha,\beta,\gamma}$ в теореме 2.1.

При $\beta < -1$

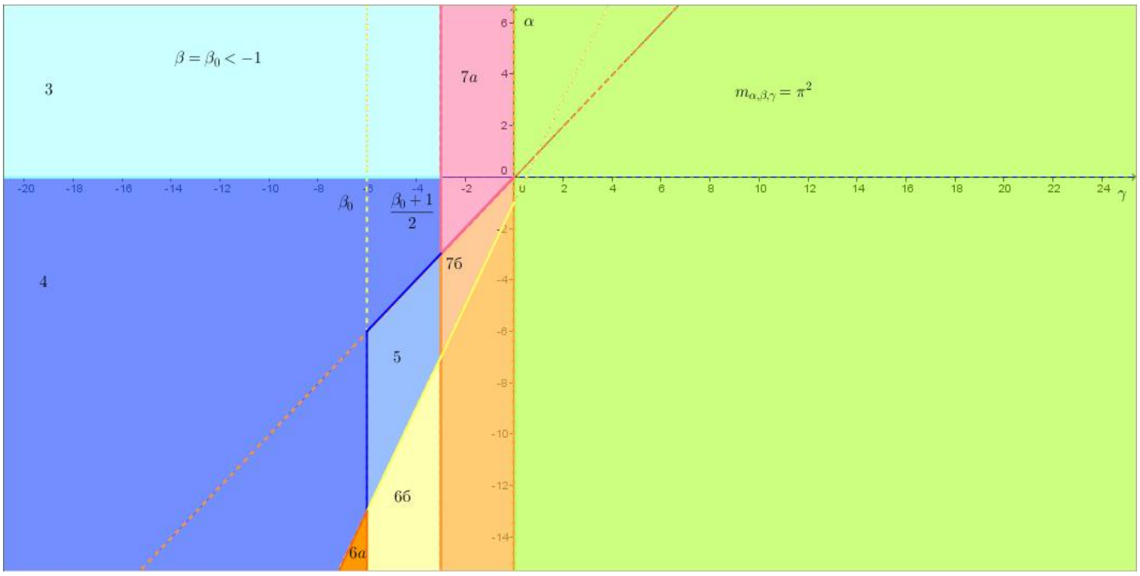

Рисунок 1

γ	α	$m_{\alpha,\beta,\gamma}$
$\gamma \leqslant \beta$	$\alpha \leqslant 2\gamma - 1$	6 *а*
	$2\gamma - 1 < \alpha < 0$	4
	$\alpha \geqslant 0$	3
$\beta < \gamma < \frac{\beta+1}{2}$	$\alpha \leqslant 2\gamma - 1$	6 *б*
	$2\gamma - 1 < \alpha < \gamma$	5
	$\gamma \leqslant \alpha < 0$	4
	$\alpha \geqslant 0$	3
$\frac{\beta+1}{2} \leqslant \gamma < 0$	$\alpha \leqslant 2\gamma - 1$	6 *б*, 7 *б*
	$2\gamma - 1 < \alpha < \gamma$	7 *б*
	$\alpha \geqslant \gamma$	7 *а*
$\gamma > 0$	$-\infty < \alpha < +\infty$	$m_{\alpha,\beta,\gamma} = \pi^2$

Таблица 1

При $-1 \leqslant \beta < 0$

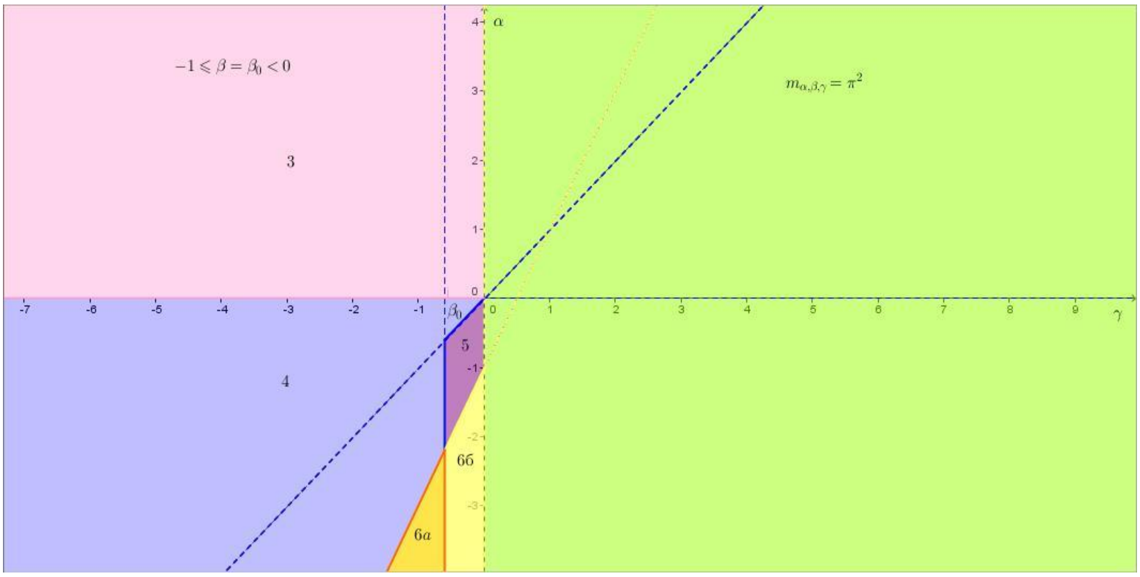

Рисунок 2

γ	α	$m_{\alpha,\beta,\gamma}$
$\gamma \leqslant \beta$	$\alpha \leqslant 2\gamma - 1$	6 *а*
	$2\gamma - 1 < \alpha < 0$	4
	$\alpha \geqslant 0$	3
$\beta < \gamma < 0$	$\alpha \leqslant 2\gamma - 1$	6 *б*
	$2\gamma - 1 < \alpha < \gamma$	5
	$\gamma \leqslant \alpha < 0$	4
	$\alpha \geqslant 0$	3
$\gamma > 0$	$-\infty < \alpha < +\infty$	$m_{\alpha,\beta,\gamma} = \pi^2$

Таблица 2

При $\beta \geqslant 0$

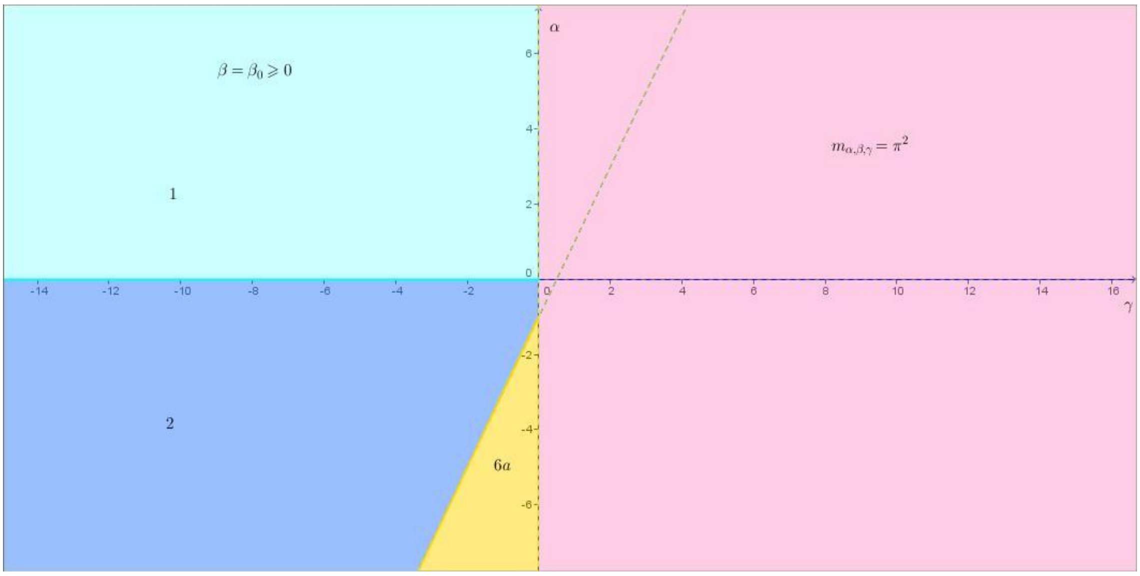

Рисунок 3

γ	α	$m_{\alpha,\beta,\gamma}$
$\gamma < 0$	$\alpha \leqslant 2\gamma - 1$	6 a
	$2\gamma - 1 < \alpha < 0$	2
	$\alpha \geqslant 0$	1
$\gamma > 0$	$-\infty < \alpha < +\infty$	$m_{\alpha,\beta,\gamma} = \pi^2$

Таблица 3

В **третьей главе** получены оценки для $M_{\alpha,\beta,\gamma}$. Результатом **первого параграфа** третьей главы является

Теорема 3.1. *Для $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ имеют место следующие оценки.*

1. Если $\gamma < 0$ или $0 < \gamma < 1$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty$.

2. Если $\gamma \geqslant 1$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} < \infty$, причем

1) если $\gamma > 1$ и $0 < \alpha, \beta \leqslant 2\gamma - 1$, то справедливо неравенство

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \left(1 + 2^{\frac{3\gamma-2}{\gamma}} \left(\frac{2\gamma-1}{\gamma}\right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}}\right) \pi^2;$$

2) если $\gamma > 1$ и $\beta \leqslant 0 < \alpha \leqslant 2\gamma - 1$ или $\alpha \leqslant 0 < \beta \leqslant 2\gamma - 1$, то справедливо неравенство

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \left(1 + \left(\frac{2\gamma-1}{\gamma}\right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}}\right) \pi^2;$$

3) если $\gamma > 1$ *и* $\alpha, \beta \leqslant 0$*, то* $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant 2\pi^2$*;*

4) если $\gamma \geqslant 1$ *и* $\alpha, \beta > \gamma$*, то* $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant R\left[\frac{1}{y_1^2}, y_1\right]$*, где*

$$y_1(x) = x^{\frac{\alpha}{2\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{2\gamma}};$$

5) если $\gamma \geqslant 1$*, то*

а) при $\beta \leqslant \gamma < \alpha$ *и* $y_2(x) = x^{\frac{\alpha}{2\gamma}} \sin \pi(1-x)$ *справедливо неравенство*

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \frac{\int_0^1 {y_2'}^2 dx + \pi^2 \left(\frac{\gamma-1}{3\gamma-\beta-1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\int_0^1 y_2^2 dx} \quad \textit{при} \quad \gamma > 1,$$

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \frac{\int_0^1 {y_2'}^2 dx + \pi^2}{\int_0^1 y_2^2 dx} \quad \textit{при} \quad \gamma = 1;$$

б) при $\alpha \leqslant \gamma < \beta$ *имеют место результаты пункта 5. а), где в формулах для* $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ *вместо функции* y_2 *стоит функция*

$$y_3(x) = (1-x)^{\frac{\beta}{2\gamma}} \sin \pi x;$$

6) если $\gamma \geqslant 1$*, то*

а) при $\alpha > \gamma$*,* $\beta \leqslant 0$ *и* $y_2(x) = x^{\frac{\alpha}{2\gamma}} \sin \pi(1-x)$ *справедливо неравенство*

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant R\left[\frac{1}{y_2^2}, y_2\right];$$

б) при $\beta > \gamma$*,* $\alpha \leqslant 0$ *имеет место результат пункта 6. а), где в формуле для* $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ *вместо функции* y_2 *стоит функция*

$$y_3(x) = (1-x)^{\frac{\beta}{2\gamma}} \sin \pi x;$$

7) если $\gamma = 1 \geqslant \alpha > 0 \geqslant \beta$ *или* $\gamma = 1 \geqslant \beta > 0 \geqslant \alpha$*, то*

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant 2\pi^2;$$

8) если $\gamma = 1 \geqslant \alpha, \beta > 0$*, то* $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant 3\pi^2$*;*

9) если $\gamma = 1$*,* $\alpha, \beta \leqslant 0$*, то* $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \frac{5}{4}\pi^2$*.*

Результаты теоремы 3.1 представлены с помощью рисунков 4, 5, 6 и таблиц 4, 5, 6. В последнем столбце таблицы либо указано значение $M_{\alpha,\beta,\gamma}$, либо номер неравенства для $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ в теореме 3.1.

При $\beta > 1$

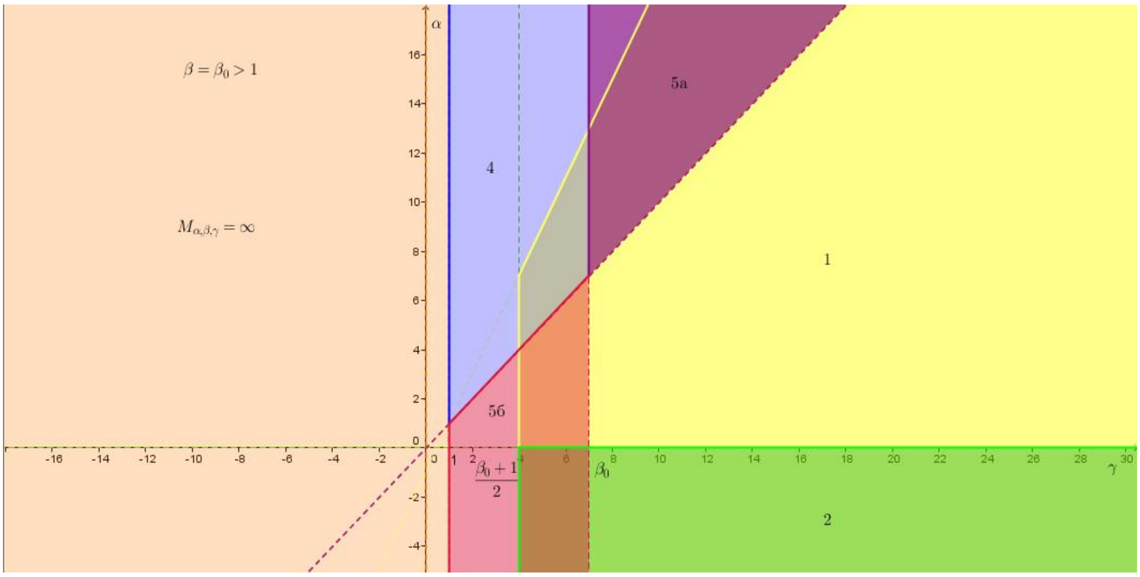

Рисунок 4

γ	α	$M_{\alpha,\beta,\gamma}$
$\gamma < 0$	$-\infty < \alpha < +\infty$	$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty$
$0 < \gamma < 1$	$-\infty < \alpha < +\infty$	$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty$
$1 \leqslant \gamma < \frac{\beta+1}{2}$	$\alpha \leqslant \gamma$	5 *б*
	$\alpha > \gamma$	4
$\frac{\beta+1}{2} \leqslant \gamma < \beta$	$\alpha \leqslant 0$	5 *б*, 2
	$0 < \alpha \leqslant \gamma$	5 *б*, 1
	$\gamma < \alpha \leqslant 2\gamma - 1$	4, 1
	$\alpha > 2\gamma - 1$	4
$\gamma \geqslant \beta$	$\alpha \leqslant 0$	2
	$0 < \alpha \leqslant \gamma$	1
	$\gamma < \alpha \leqslant 2\gamma - 1$	5 *a*, 1
	$\alpha > 2\gamma - 1$	5 *a*

Таблица 4

При $0 < \beta \leqslant 1$

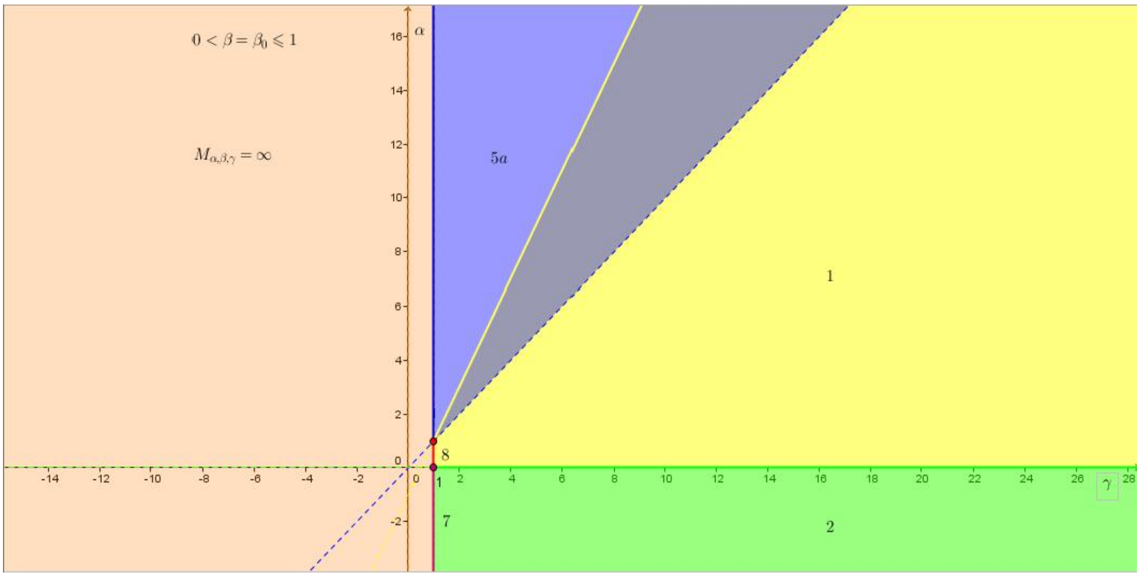

Рисунок 5

γ	α	$M_{\alpha,\beta,\gamma}$
$\gamma < 0$	$-\infty < \alpha < +\infty$	$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty$
$0 < \gamma < 1$	$-\infty < \alpha < +\infty$	$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty$
$\gamma = 1$	$\alpha \leqslant 0$	7
	$0 < \alpha \leqslant 1$	8
	$\alpha > 1$	5 a
$\gamma > 1$	$\alpha \leqslant 0$	2
	$0 < \alpha \leqslant \gamma$	1
	$\gamma < \alpha \leqslant 2\gamma - 1$	5 a, 1
	$\alpha > 2\gamma - 1$	5 a

Таблица 5

При $\beta \leqslant 0$

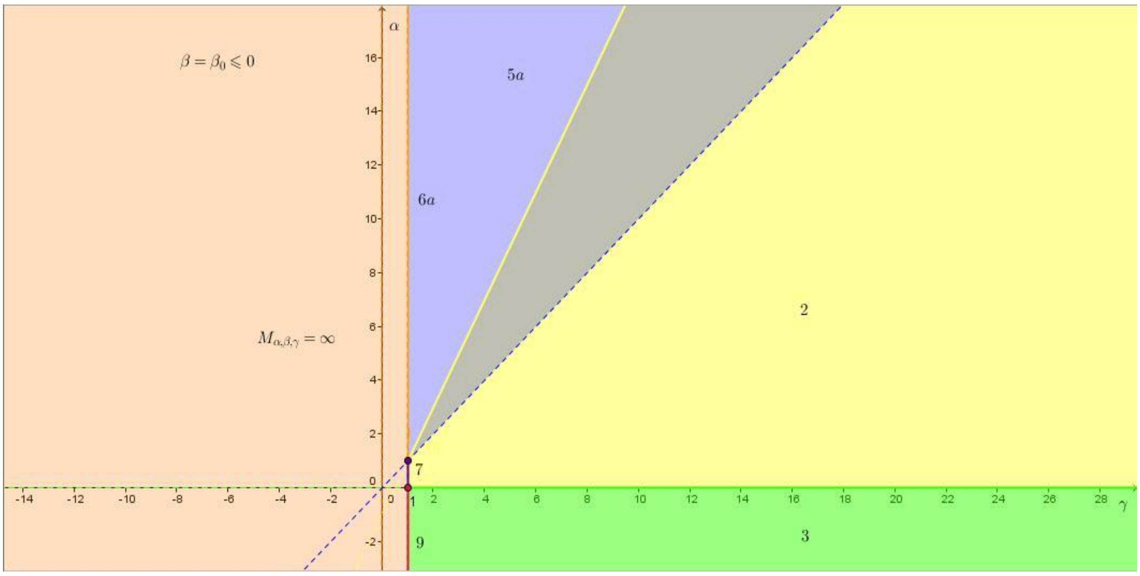

Рисунок 6

γ	α	$M_{\alpha,\beta,\gamma}$
$\gamma < 0$	$-\infty < \alpha < +\infty$	$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty$
$0 < \gamma < 1$	$-\infty < \alpha < +\infty$	$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty$
$\gamma = 1$	$\alpha \leqslant 0$	9
	$0 < \alpha \leqslant 1$	7
	$\alpha > 1$	6 a
$\gamma > 1$	$\alpha \leqslant 0$	3
	$0 < \alpha \leqslant \gamma$	2
	$\gamma < \alpha \leqslant 2\gamma - 1$	5 a, 2
	$\alpha > 2\gamma - 1$	5 a

Таблица 6

Во **втором параграфе второй главы** получены точные оценки $m_{\alpha,\beta,\gamma}$ при $\gamma < 0$ (при $\gamma > 0$ в теореме 2.1 доказано, что $m_{\alpha,\beta,\gamma} = \pi^2$).

Во **втором параграфе третьей главы** получены точные оценки $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ при $\gamma > 1$ (при $\gamma < 0$ и при $0 < \gamma < 1$ в теореме 3.1 доказано, что $M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty$), доказывается их достижимость.

В случае $\gamma = 1$ достижимость точной оценки $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ доказана А. А. Владимировым[24]. Достижимость точной оценки $M_{0,0,1}$ доказана С. С. Ежак [19] [20] [21].

[24]Владимиров А.А. О мажорантах собственных значений задач Штурма–Лиувилля с потенциалами из шаров весовых пространств // arXiv:1412.7992v2 [math.SP] 19 March 2015

Для получения точных оценок для $m_{\alpha,\beta,\gamma}$ при $\gamma < 0$ и точных оценок для $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ при $\gamma > 1$ рассматривается функционал

$$G[y] = \frac{\int_0^1 {y'}^2 dx + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\int_0^1 y^2\, dx}$$

и вводится новое пространство $B_{\alpha,\beta,\gamma}$ функций из $H_0^1(0,1)$ с конечной нормой

$$\|y\|_{B_{\alpha,\beta,\gamma}} = \left(\int_0^1 {y'}^2 dx + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $\Gamma_2 = \{y \mid y \in B_{\alpha,\beta,\gamma}, \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx = 1\}$,

$$m = \inf_{y\in B_{\alpha,\beta,\gamma}\setminus\{0\}} G[y].$$

Результатом второго параграфа второй главы являются следующие теоремы.

Теорема 2.2. *Пусть $\gamma < 0$; тогда существует такая неотрицательная на интервале $(0,1)$ функция $u \in \Gamma_2$, что $G[u] = m$, причем при $\gamma < -1$ функция u является слабым решением уравнения*

$$u'' + mu = x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}\, u^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}.$$

Теорема 2.3. *Пусть $\gamma < 0$ и функция u удовлетворяет условиям теоремы 2.2. Тогда существует такая последовательность функций $Q_n(x) \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$, что $R[Q_n, u] \to G[u] = m$ при $n \to \infty$, и $m_{\alpha,\beta,\gamma} = m$.*

Результатом второго параграфа третьей главы является

Теорема 3.2. *Пусть $\gamma > 1$; тогда существуют такая функция $Q_* \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и такая положительная на $(0,1)$ функция $u \in H_{Q_*}$, что $R[Q_*, u] = G[u] = m$, и $M_{\alpha,\beta,\gamma} = m$, при этом функция u удовлетворяет уравнению*

$$u'' + mu = x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}\, u^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

и условию

$$\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}\, u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\, dx = 1.$$

Замечание. При $\gamma > 1$ справедливо неравенство $M_{\alpha,\beta,\gamma} > \pi^2$.

В заключение автор выражает глубокую признательность научному руководителю И. В. Асташовой за постановку задачи, руководство и постоянное внимание к работе. Автор благодарен А. В. Филиновскому за обсуждение результатов работы и полезные советы.

Публикации автора по теме диссертации

Издания из списка ВАК.

[1] Тельнова М.Ю. Оценки первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с нулевыми граничными условиями и весовым интегральным условием на потенциал // Дифференциальные уравнения, 2012, Т. 48, №11, С. 1570–1571.

[2] Тельнова М.Ю. Об оценках первого собственного значения одной задачи Штурма-Лиувилля // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2014, №1(1), С. 209–217.

[3] Тельнова М.Ю. О задаче минимизации функционала, порожденного задачей Штурма-Лиувилля с весовым интегральным условием (Tel'nova M.Yu. Minimization problem for a functional generated by a Sturm–Liouville problem with weighted integral condition // Differential equations, 2014, Vol. 50, №12, pp. 1688–1689) // Дифференциальные уравнения, 2014, Т. 50, №12, С. 1683–1684.

Монография.

[4] Тельнова М.Ю. Оценки первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле и весовым интегральным условием, с. 608–647.// Часть 4 в сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: научное издание под ред. И. В. Асташовой. М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012, 647 с. (ISBN 978-5-238-02368-7)

Статьи.

[5] Telnova M.Yu. Some estimates for the first eigenvalue of the Sturm–Liouville problem with a weight integral condition // Mathematica Bohemica, 2012, V. 137, № 2, P. 229–238.

[6] Telnova M.Yu. On some estimates of the first eigen-value of a Sturm–Liouville problem with a weight integral condition // Materials of International miniconference "Qualitative theory of differential equations and applications", M.: MESI, 2009, p. 131–145. (ISBN 978-5-7764-0563-1)

[7] Тельнова М.Ю. Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с весовым интегральным условием // Материалы Международной миниконференции "Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения", М.: МЭСИ, 2011, с. 45–63. (ISBN 978-5-7764-0607-2)

[8] Telnova M.Yu. On estimates for the first eigenvalue of one Sturm–Liouville problem // Материалы Международной миниконференции "Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения" , М.: МЭСИ, 2011, с. 78–87. (ISBN 978-5-7764-0637-9)

[9] Тельнова М.Ю. Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле и весовым интегральным условием // Материалы Международной миниконференции "Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения", М.: МЭСИ, 2013, с. 208–266.

[10] Тельнова М.Ю. Об оценке снизу первого собственного значения одной задачи Штурма–Лиувилля с весовым интегральным условием на потенциал // Материалы Международной научной конференции "Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования", Архангельск, САФУ, 2014, с. 204–216.

[11] Тельнова М.Ю. Об одной оценке сверху первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле и весовым интегральным условием // Материалы Международной миниконференции "Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения", М.: МЭСИ, 2014, с. 126–140. (ISBN 978-5-7764-0983-7)

Тезисы докладов.

[12] Тельнова М.Ю. Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с весовым интегральным условием // Тезисы докладов 14-й Саратовской зимней школы "Современные проблемы теории функций и их приложения", Издательство Саратовского университета, 2008, с. 185–186.

[13] Telnova M.Yu. On some estimates of the first eigen-value of a Sturm–Liouville problem with a weight integral condition // Тезисы Международной конференции "Дифференциальные уравнения и топология", посвященной 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина. Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2008, с. 80–81.

[14] Тельнова М.Ю. Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с весовым интегральным условием печатный // Тезисы Международного Российско–Абхазского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики", Нальчик–Эльбрус, 2009, с. 212–213.

[15] Telnova M.Yu. Some estimates of the first eigen-value of a Sturm–Liouville problem with a weight integral condition // Abstracts of International Conference on Differential Equations and their Applications Equadiff 12, Brno, Czech Republic, 2009, p. 136.

[16] Telnova M.Yu. Some estimates for the first eigenvalue of one Sturm–Liouville problem // Abstracts of International Conference on Differential and Difference Equations and Applications, Department of Mathematics, Azores University, Ponta Delgada, Portugal, 2011, p. 121–122.

[17] Тельнова М.Ю. Об оценках первого собственного значения одной задачи Штурма–Лиувилля // Материалы IV Международной конференции "Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования", Воронеж, 2011, с. 288–290.

[18] Тельнова М.Ю. Оценки первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле и с весовым интегральным условием нам потенциал // Материалы V Международной конференции "Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования", 2012, Воронеж, с. 276–277.

[19] Тельнова М.Ю. Об оценках первого собственного значения одной задачи Штурма–Лиувилля с весовым интегральным условием на потенциал // Материалы Всероссийской научной конференции с международным участием "Спектральная теория операторов и ее приложения", г. Архангельск, Институт математики и компьютерных наук САФУ имени М.В. Ломоносова, 2012, с. 118–122.

[20] Тельнова М.Ю. Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле и весовым интегральным условием // Материалы Всероссийской научной конференции "Понтрягинские чтения – XXIV" в рамках XXIV Воронежской весенней математической школы "Современные методы теории краевых задач", Воронеж, 2013 , с. 190–192.

[21] Telnova M.Yu. Some estimates for the first eigenvalue of one Sturm–Liouville problem // Abstracts of International Conference on Applied Mathematics and Scientific Computing, Sibenik, Croatia, 2013, p. 61–62.

[22] Тельнова М.Ю. Об одной оценке минимального собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с интегральным условием // Материалы Всероссийской научной конференции "Понтрягинские чтения – XXV"в рамках XXV Воронежской весенней математической школы "Современные методы теории краевых задач", Воронеж, 2014, с. 170–172.

[23] Telnova M. On some lower estimate for the first eigenvalue of a Sturm–Liouville problem with a weight singular integral condition // Abstracts of International Conference on Differential and Difference Equations and Applications, Jasna, Slovak Republic, 2014, p. 53–54.

[24] Тельнова М.Ю. Об одной оценке сверху первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с интегральным условием на потенциал // Материалы Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 2014, с. 166–167.

[25] Telnova M. Estimates for the First Eigenvalue of a Sturm–Liouville Problem // Abstracts of European Advanced Studies Conference 2014, Symposium on Differential and Difference Equations 2014, Homburg/Saar, Germany, p. 71.