На правах рукописи

Бенараб Сарра

Теоремы об операторных неравенствах в исследовании краевых задач и задач управления для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Тамбов — 2021

Работа выполнена на кафедре функционального анализа федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»

Научный руководитель: *Жуковский Сергей Евгеньевич*
доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник НОЦ «Фундаментальные математические исследования» ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»

Официальные оппоненты: *Жабко Алексей Петрович*
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Провоторов Вячеслав Васильевич
доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»

Ведущая организация: Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук»

Защита диссертации состоится 22 апреля 2022 г. в 16 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.025.08 при ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых» по адресу: 600024, г. Владимир, проспект Строителей, 11, ауд. 237, ВЛГУ, педагогический институт.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Владимирского государственного университета и на сайте http : //diss.vlsu.ru

Автореферат разослан «___» марта 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.025.08,
кандидат физико-математических наук, доцент Наумова С.Б.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. В исследованиях различных вопросов теории дифференциальных и интегральных уравнений часто требуются оценки решений. Одним из основных источником таких оценок являются утверждения о неравенствах типа теоремы Чаплыгина.

Теорема Чаплыгина[1]. *Пусть функция* $f : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна,* $A \in \mathbb{R}$. *Если для некоторой дифференцируемой функции* ϑ *выполнено*

$$\dot{\vartheta}(t) > f(t,\vartheta(t)) \text{ при всех } t \geq 0, \text{ и } \vartheta(0) \geq A, \tag{1}$$

то любое решение $x(t)$ *задачи Коши*

$$\dot{x} = f(t,x), \ \ t \geq 0, \ \ x(0) = A, \tag{2}$$

удовлетворяет при всех $t > 0$ *неравенству* $x(t) < \vartheta(t)$.

В теореме Чаплыгина существенно, что уравнение скалярное, а функция f непрерывна. Уже в случае, когда f удовлетворяет условиям Каратеодори, такое утверждение оказывается неверным, и возникает вопрос об условиях, позволяющих получать из неравенства (1) оценку решения задачи Коши (2). Кроме проблемы распространения теоремы Чаплыгина на системы уравнений, в которых левые части определяются разрывными функциями, актуальными являются задачи о получении аналогичных оценок для краевых задач, систем управления, интегральных, интегро-дифференциальных и других функциональных уравнений, а также уравнений неявного вида. Литература, посвященная распространению и обобщению теоремы Чаплыгина, обширна, этим вопросам начиная с 50-х годов XX века посвящены многочисленные публикации (см., например, монографии[2]). Привлечению авторов к этой тематике во многом способствовала статья Н.Н. Лузина[3], в которой поставлены важные проблемы, связанные с дифференциальными неравенствами. Общие утверждения об интегральных и дифференциальных неравенствах, включая неравенства для краевых задач получены Н.В. Азбелевым[4]. Неравенства типа Чаплыгина вхо-

[1] *Чаплыгин С.А.* Основания нового способа приближённого интегрирования дифференциальных уравнений. М., 1919 (Собрание сочинений. Т. I. Гостехиздат, 1948. С. 348–368).

[2] *Lakshmikantham V., Leela S.* Differential and Integral Inequalities. Theory and applications. V. 1. Academic Press, N.Y., 1969.

Rabczuk R. Elementy nierownosci rozniczkowych. PWN, Warszawa, 1976.

Szarski J. Differential Inequalities. PWN, Warszawa, 1967.

Walter W. Differential and Integral Inequalities. Springer Verlag, Berlin e.a., 1970.

Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.: Мир, 1965.

Мамедов Я.Д., Аширов С., Атдаев С. Теоремы о неравенствах. Ашхабад: Ылым, 1980.

[3] *Лузин Н.Н.* О методе приближённого интегрирования акад. С. А. Чаплыгина // УМН. 1951. Т. 6. № 6(46). С. 3–27.

[4] Избранные труды Н.В. Азбелева (ред. *Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.*) М.-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2012, раздел 1.

дят в базовые разделы современной теории дифференциальных и интегральных уравнений, находят многочисленные приложения[5] в теории устойчивости, теории управления, теории оптимального управления и теории игр, в приближенных методах и в математических моделях, остаются актуальным объектом многих исследований[6].

Несмотря на обилие публикаций по дифференциальным неравенствам, в литературе практически отсутствуют утверждения типа теоремы Чаплыгина для неявных дифференциальных уравнений (т. е. не разрешенных относительно производной искомой функции). Дифференциальные неравенства могли бы играть в теории неявных уравнений такую же важную роль, как и в теории уравнений, разрешенных относительно производной. Отметим, что изучение неявных дифференциальных уравнений актуально и для теории дифференциальных уравнений, и для смежных разделов анализа, и для приложений[7].

---

[5] *Agarwal R.P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A.* Nonoscillation theory of functional differential equations with applications. Springer, New York-Dordrecht-Heidelberg-London, 2012.

Camlibel M., Pang J., Shen J. Lyapunov stability of complementarity and extended systems // SIAM J. Optim. 2006. V. 17. № 4. P. 1056–1101.

Furati K.M., Tatar N.-E. Some fractional differential inequalities and their applications // Mathematical Inequalities and Applications. 2006. V. 9. № 4. P. 577–598.

Галахов Е.И., Салиева О.А. Ситуация blow-up для некоторых нелинейных дифференциальных неравенств // Труды МФТИ. 2014. Т. 6. № 3. С. 37–42.

[6] *Khan Z.* On Some Fundamental Integrodifferential Inequalities // Applied Mathematics. 2014. V. 5. № 19. P. 2968–2973.

Takamura H. Improved Kato's lemma on ordinary differential inequality and its application to semilinear wave equations // Nonlinear Analysis. 2015. V. 125. P. 227–240.

Uhl R. Ordinary differential inequalities and quasimonotonicity in ordered topological vector spaces // Proceedings of the American Mathematical Society. 1998. V. 126. № 7. P. 1999–2003.

Кротов Н.В. Модифицированный метод Чаплыгина в частично упорядоченном B-пространстве // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2010. Т. 3. № 1. с. 165–167.

Мамий К.С. О колеблемости решений нелинейных дифференциальных неравенств и уравнений второго порядка // Труды ФОРА. 2009. № 14. С. 55–61.

[7] *Tokens F.* Constrained equations; a study of imphcit differential equations and their discontinuous solutions. Lect. Notes Math. 1976. № 525. P. 143–234.

А.А. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит. 1959.

Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Знание. Сер. мат., кибернетика. 1981. № 9.

Богаевский И.А. Неявные обыкновенные дифференциальные уравнения: перестройки и усиление эквивалентности // Изв. РАН. Сер. матем. 2014. Т. 78. № 6. С. 5–20.

Власенко Л.А., Руткас А.Г. О дифференциальной игре в системе, описываемой неявным дифференциально-операторным уравнением // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 6. С. 785–795.

Гришина Ю.А., Давыдов А.А. Структурная устойчивость простейших динамических неравенств // Труды МИАН. 2007. Т. 256. С. 89–101.

Давыдов А.А. Особенности предельных направлений типичных неявных ОДУ высших порядков // Дифференц. уравнения и динамические системы. Сб. статей. К 80-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко. Тр. МИАН, 2002. Т. 236, С. 134–141.

Давыдов А.А. Особенности типичного дохода в модели Арнольда циклических процессов // Дифференц. уравнения и динамические системы, Сб. статей. Тр. МИАН. 2005. Т. 250. С. 79–94.

Давыдов А.А. Мена Матош Е. Типичные фазовые переходы и особенности выгоды в модели Арнольда // Матем. сб. 2007. Т. 198. № 1. С. 21–42.

Пилия А.Д., Федоров В.И. Особенности поля электромагнитной волны в холодной анизотропной плазме с двумерной неоднородностью // ЖЭТФ. 1971. Т. 60. № 1. С. 389–399.

Распространение утверждений о неравенствах типа теоремы Чаплыгина на неявные дифференциальные уравнения в диссертации основано на результатах об операторных неравенствах с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в произвольное множество. Эти результаты представляют интерес для анализа, могут использоваться также и для краевых задач, и для систем управления, и для других видов неявных уравнений. Некоторые из таких приложений демонстрируются в диссертации.

Степень разработанности темы исследования. Получению теорем типа Чаплыгина, нахождению оценок решений дифференциальных и интегральных уравнений посвящены многочисленные исследования[2]. Фундаментальные результаты о границах применимости теоремы Чаплыгина для дифференциальных и интегральных уравнений получены в работах Н.В Азбелева, З.Б. Цалюка[8]. Результаты о дифференциальных и интегральных неравенствах широко используются[9] в исследованиях динамических систем, различных вопросов управления и оптимального управления, при построении численных алгоритмов. Исследование функционально-дифференциальных, дифференциально-алгебраических, гибридных дифференциально-разностных и др. типов уравнений потребовало изучения операторных неравенств в различных функциональных пространствах[10]. Соответствующие утверждения о вольтерровых неравенствах были получены для пространства L_p, $1 \leqslant p < \infty$, упорядоченного «естественным конусом» неотрицательных функций[11,12], а затем распространены на абстрактные «вольтеррово упорядоченные» пространства[13]. В работах

---

[8] *Азбелев Н.В.* О границах применимости теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах // Мат. сборник. 1956. Т. 39. № 2. С. 161–178.

Азбелев Н.В., Цалюк З.Б. Об интегральных неравенствах // Мат. сборник. 1962. Т. 56. № 3. С. 325–342.

[9] *Ramm A.G.* Dynamical systems method for solving operator equations. Amsterdam: Elsevier, 2007.

Васильева А.Б., Нефедов Н.Н. Теоремы сравнения. Метод дифференциальных неравенств Чаплыгина. М.: МГУ, 2007.

Трубников Ю.В., Перов А.И. Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. Минск: Наука и техника, 1986. 199 с.

Перегудова О.А. Метод сравнения в задачах устойчивости и управления движениями механических систем. Ульяновск, 2009.

Berezansky L., Braverman E. On oscillations of equations with distributed delay // Z. Anal. Anwend. 2001. № 20. P. 489–504.

Hoang N.S., Ramn A.G. Nonlinear differential inequality // Math. Inequal. Appl. 2011. V. 14. № 4. P. 967–976.

Lukoyanov N.Yu. Functional Hamilton—Jacobi type equations in ci-derivatives for systems with distributed delays // Nonlinear Funct. Anal. and Appl. 2003. V. 8. № 3. P. 365–397.

[10] *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

[11] *Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф.* К вопросу о функционально-дифференциальных неравенствах и монотонных операторах // Функц.-дифференц. уравнения. 1986. С. 3–9.

[12] *Жуковский Е.С.* Об интегральных неравенствах в пространствах суммируемых функций // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 4. С. 580–584.

[13] *Жуковский Е.С.* Неравенства Вольтерра в функциональных пространствах // Матем. сб. 2004. Т. 195. № 9. С. 3–18.

Е.С. Жуковского[12,13] получены утверждения об интегральных, дифференциальных и функционально-дифференциальных неравенствах в случае, когда порождающие уравнения функции могут иметь разрывы по фазовой переменной (но должны быть возрастающими по фазовой переменной).

Большинство перечисленных результатов используют теоремы о неподвижных точках монотонных операторов частично упорядоченных пространств. Развитию теории неподвижных точек монотонных операторов, другим вопросам анализа отображений частично упорядоченных пространств и его применениям в изучении уравнений различных классов посвящена многочисленная современная литература. Однако, теоремы о неподвижных точках оказываются неэффективными при исследовании неявных уравнений. Новые возможности в получении теорем типа Чаплыгина для неявных уравнений открыли исследования А.В. Арутюнова, Е.С. Жуковского, С.Е. Жуковского[14] накрывающих отображений частично упорядоченных пространств, прежде всего — полученные ими утверждения о точках совпадения упорядоченно накрывающего и монотонного отображений, действующих из частично упорядоченного пространства X в частично упорядоченное пространство Y. В частном случае, когда $X = Y$, а одно из отображений тождественное, из этих утверждений следуют известные теоремы Тарского–Канторовича, Биркгофа–Тарского, Кнастера–Тарского, Смитсона о неподвижных точках монотонных отображений. Также в работах А.В. Арутюнова, Е.С. Жуковского, С.Е. Жуковского[14] рассмотрен метод введения порядка в метрических пространствах, позволяющий применить утверждения об отображениях частично упорядоченных пространств к уравнениям в метрических пространствах и, в частности, получить классические теоремы существования неподвижных точек однозначных и многозначных отображений метрических пространств (теоремы Банаха, Надлера и теоремы об обобщенном сжатии), а также их обобщения, в том числе, утверждения о точках совпадения накрывающих и липшицевых отображений. В дальнейших исследованиях эти результаты распространены на более общие уравнения и включения и получены приложения к интегральным, дифференциальным и

[14] *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. V. 179. № 1. P. 13–33.

Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2016. V. 201. P. 330–343.

Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Caristi-like condition and the existence of minima of mappings in partially ordered spaces // J. Optim. Theory Appl. 2019. V. 180. P. 48-61.

Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. № 5. С. 475–478.

Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады академии наук. 2013. Т. 453. № 6. С. 595–598.

Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. О мощности множества точек совпадения отображений метрических, нормированных и частично упорядоченных пространств // Матем. сб. 2018. Т. 209. № 8. С. 3–28.

функционально-дифференциальным уравнениям[15]. В частности, с использованием утверждений об упорядоченно накрывающих отображениях получены условия разрешимости и оценки решений задачи Коши для неявного дифференциального уравнения (в виде теорем типа Чаплыгина).

Цели и задачи. Основной целью диссертационной работы является распространение результатов о точках совпадения на отображения, действующие из частично упорядоченного пространства в неупорядоченное множество, и разработка на этой основе методов исследования задачи Коши, краевых задач и систем управления для неявных дифференциальных уравнений.

Основными задачами работы являются:

– получение теорем о точках совпадения отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в неупорядоченное множество;

– исследование разрешимости и получение оценок решений функциональных уравнений в пространствах измеримых функций;

– исследование разрешимости и получение оценок решений задачи Коши для неявного дифференциального уравнения (в форме утверждений типа теоремы Чаплыгина);

– исследование разрешимости и получение оценок решений периодической краевой задачи для неявного дифференциального уравнения (в форме утверждений типа теоремы Чаплыгина);

– исследование разрешимости и получение оценок решений задачи управления для неявного дифференциального уравнения (в форме утверждений типа теоремы Чаплыгина).

---

[15] *Fomenko T.N., Podoprikhin D.A.* Fixed points and coincidences of mappings of partially ordered sets // J. Fixed Point Theory Appl. 2016. V. 18. № 4. P. 823–842.

Жуковская Т.В., Жуковский Е.С., Серова И.Д. Некоторые вопросы анализа отображений метрических и частично упорядоченных пространств // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 132. С. 345–358.

Жуковская Т.В., Забродский И.А., Серова И.Д. О функциональных неравенствах // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2016. Т. 21. № 6. С. 1963–1968.

Жуковский Е.С. Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. № 1. С. 96–127.

Жуковский Е.С. Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1610–1627.

Жуковский Е.С., Плужникова Е.А., Якубовская Е.М. Об устойчивости упорядоченного накрывания многозначных отображений при антитонных возмущениях // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2016. Т. 21. № 6. С. 1969–1973.

Жуковский Е.С., Якубовская Е.М. О существовании и оценках решений функциональных включений // Труды ИММ УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 45–54.

Подоприхин Д.А. Неподвижные точки и совпадения отображений упорядоченных множеств. Дисс. канд. физ.-мат. н. М., 2018.

Подоприхин Д.А., Фоменко Т.Н. Многозначные гомотопии в упорядоченном множестве, неподвижные точки и совпадения отображений, применения в теории игр // Мат. заметки. 2019. Т. 106. № 4. С. 565–577.

Фоменко Т.Н. Неподвижные точки и совпадения семейств отображений упорядоченных множеств и некоторые метрические следствия // Изв. РАН. Сер. матем. 2019. Т. 83. № 1. С. 168–191.

Научная новизна. Выносимые на защиту положения являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты значимы для общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложений, теории интегральных уравнений, теории управления и для смежных разделов анализа.

Методология и методы исследования. При исследовании уравнений с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в неупорядоченное множество, вводятся специальные бинарные отношения на подмножествах рассматриваемых пространств и используются результаты теории частично упорядоченных пространств (в частности, теорема Хаусдорфа о максимальной цепи). В случае секвенциальной полноты соответствующих пространств используются итерационные методы доказательства существования решений уравнений. Для отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в произвольное множество, вводится и исследуется понятие устойчивости точек совпадения к изменениям отображений. В исследовании функциональных уравнений в пространствах измеримых функций используются методы теории функций, результаты многозначного анализа (в том числе, лемма Филиппова о неявной функции) и полученные в диссертации утверждения о точках совпадения отображений. В исследовании задачи Коши для неявного дифференциального уравнения определяется эквивалентное интегральное уравнение в пространстве суммируемых функций (производных решения исходного дифференциального уравнения), и к этому уравнению применяются полученные в диссертации результаты об уравнениях с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в произвольное множество. В исследовании периодической краевой задачи для неявного дифференциального уравнения используется редукция с помощью функции Грина вспомогательной задачи к интегральному уравнению в пространстве суммируемых функций, затем также применяются полученные в диссертации результаты об операторных уравнениях. При исследовании управляемых систем применяются полученные в диссертации утверждения о задаче Коши и периодической краевой задаче.

Положения, выносимые на защиту.

1. Утверждения о существовании и оценках точек совпадения двух отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в множество с бинарным отношением; утверждения о существовании и оценках точек совпадения двух отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в множество, на котором не задано бинарное отношение; условия устойчивости точек совпадения двух отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в множество, на котором не задано бинарное отношение.

2. Утверждения о существовании и оценках решений операторных уравнений с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в множество с бинарным отношением; утверждения о существовании и оценках решений операторных уравнений с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в множество, на котором не задано бинарное отношение.
3. Утверждения (типа теоремы Чаплыгина) о существовании и оценках решений системы функциональных уравнений в пространстве измеримых функций.
4. Утверждения (типа теоремы Чаплыгина) о существовании и оценках решений задачи Коши для системы неявных дифференциальных уравнений.
5. Утверждения (типа теоремы Чаплыгина) о существовании и оценках решений периодической краевой задачи для системы неявных дифференциальных уравнений.
6. Утверждения (типа теоремы Чаплыгина) о существовании и оценках решений системы управления для неявных дифференциальных уравнений.

Степень достоверности и апробация. Все результаты диссертации снабжены подробными доказательствами и опубликованы в рецензируемых научных изданиях. Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

– Тамбовский городской семинар по теории функционально-дифференциальных уравнений и включений, Тамбов, Россия (2019, 2020, 2021).

– Международная научная конференция «Колмогоровские чтения – VIII. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ-2018)», посвященная 115-летию со дня рождения А.Н. Колмогорова и 100-летию Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина, Тамбов, Россия (2018).

– Summer school «Identification and Control: some challenges», Monastir, Tunisia (2019).

– Международная Воронежская весенняя математическая школа «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXX», Воронеж, Россия (2019).

– Международная конференция «Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019), посвященная 95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского, Екатеринбург, Россия (2019).

– International scientific OTHA online workshop on operator theory and harmonic analysis and their applications, Online, Russia (2020).

– Всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование (СТММ 2020)», посвященная памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова, Ижевск, Россия (2020).

– International e-Conference on Nonlinear Analysis and its Application (ICNAA 2020), Online, India.

– Международная научная конференция «Колмогоровские чтения – IX. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ-2020)», посвященная 70-летию профессора А.И. Булгакова, Тамбов, Россия (2020).

– III Международный семинар «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби (CGS'2020)», Екатеринбург, Россия (2020).

– Научный семинар «Нелинейный анализ и его приложения» кафедры «Функциональный анализ и его приложения» ВлГУ, Владимир, Россия (2021).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 12 работах, из которых 7 работ опубликовано в журналах из перечня ВАК (в том числе работы $[3, 4, 7]$ — в изданиях, входящих в системы цитирования Web of Science Core Collection и Scopus, работы $[1, 2]$ — в издании, индексирующемся в Web of Science Russian Science Citation Index).

Личный вклад автора. Все основные результаты диссертации получены автором лично. Из работ, выполненных в соавторстве, в диссертацию вошли только результаты, принадлежащие автору.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, каждая из которых содержит 2 параграфа, разбитых на пункты, заключения, списка обозначений и списка литературы. Общий объем работы составляет 119 страниц. Список литературы содержит 117 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Приведем основные положения и результаты диссертации, сохраняя нумерацию утверждений и формул из основного текста.

Во введении описаны актуальность темы исследования и степень ее разработанности, поставлены цели и задачи, аргументирована научная новизна, достоверность, теоретическая и практическая значимость результатов, перечислены использованные методы, выносимые на защиту положения, публикации и доклады по теме диссертации, кратко изложена структура работы.

В **главе 1** получены условия существования и оценки решений абстрактных уравнений с отображениями, определенными на частично упорядоченных пространствах. При этом область значений рассматриваемых отображений может быть либо алгебраической системой с рефлексивным бинарным отношением, либо произвольным множеством. В первом случае на рассматриваемые отображения удается перенести определения упорядоченного накрывания[16] и монотонности. Во втором случае используется другой подход, позволяющий определить цепь последовательных приближений к искомому решению.

В параграфе 1.1 предлагается распространение теорем о точках совпадения на отображения ψ, φ, действующие из частично упорядоченного пространства X в множество Y, не являющееся упорядоченным. Параграф содержит три пункта. В пункте 1.1.1 понятия упорядоченного накрывания и монотонности распространены на отображения, действующие из частично упорядоченного пространства в множество с рефлексивным отношением, получены условия существования точек совпадения таких отображений (теорема 1.1.1). Из этого утверждения выводятся теоремы[16] о точках совпадения накрывающего и монотонного отображений.

Сформулируем основные утверждения, представленные в пункте 1.1.2. Пусть $X = (X, \preceq)$ — частично упорядоченное пространство, $Y \neq \emptyset$. Для произвольного $u \in X$ обозначим $\mathcal{O}_X(u) := \big\{x \in X \ : \ x \preceq u\big\}$. *Точкой совпадения отображений* $\psi, \varphi : X \to Y$ называют элемент $\xi \in X$ такой, что

$$\psi(\xi) = \varphi(\xi).$$

Пусть задано непустое множество $\mathcal{X} \subset X$. Определим множество $\Sigma(\mathcal{X}, \psi, \varphi)$ цепей S в пространстве X, $S \subset \mathcal{X}$, для которых выполнены соотношения

$$\forall x \in S \ \ \exists x' \in \mathcal{O}_X(x) : \ \begin{cases} \psi(x') = \varphi(x), \\ \forall u \in S \ \ u \prec x \ \Rightarrow \ u \preceq x'. \end{cases}$$

Теорема 1.1.2. *Пусть выполнены следующие условия:*

(a) *существуют $x_0, x_0' \in X$ такие, что $x_0' \preceq x_0$ и $\psi(x_0') = \varphi(x_0)$;*

(b) *для любых $x, x' \in \mathcal{O}_X(x_0)$ таких, что $x' \prec x$, $\psi(x') = \varphi(x)$, существуют элементы $u, u' \in X$, для которых справедливы соотношения $u' \preceq u \preceq x'$ и $\psi(u') = \varphi(u)$;*

(c) *для любой бесконечной цепи $S \in \Sigma(\mathcal{O}_X(x_0), \psi, \varphi)$ существуют элементы $w, w' \in X$ такие, что $w' \preceq w \preceq x$ при всех $x \in S$ и $\psi(w') = \varphi(w)$.*

Тогда в $\mathcal{O}_X(x_0')$ существует точка совпадения отображений ψ, φ.

В пункте 1.1.2 также демонстрируется, как из теоремы 1.1.2 выводятся утверждения о точках совпадения накрывающего и монотонного отображений, действующих из частично упорядоченного пространства X в пространство Y с рефлексивным бинарным отношением ϑ, включая теоремы А.В. Арутюнова, Е.С. Жуковского, С.Е. Жуковского[16].

[16] *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. V. 179. № 1. P. 13–33.

В пункте 1.1.3 определяется понятие устойчивости точек совпадения к изменениям отображений. Пусть $P(\mathbb{N})$ — совокупность всех возрастающих последовательностей натуральных чисел. Полагаем, что задана точка совпадения $\xi \in X$ отображений $\psi, \varphi : X \to Y$. Пусть также заданы отображения $\psi_i, \varphi_i : X \to Y,\ i \in \mathbb{N}$. Рассмотрим последовательность уравнений

$$\psi_i(x) = \varphi_i(x), \quad i \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Сформулируем условия, обеспечивающие существование при каждом i решения $\xi_i \in X$ уравнения (3) — точки совпадения отображений ψ_i, φ_i и «сходимость» последовательности $\{\xi_i\}$ к ξ, которая понимается следующим образом:

$$\forall \{i_n\} \in P(\mathbb{N}) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\xi_{i_n}\} = \xi. \tag{4}$$

Теорема 1.1.4. *Пусть в частично упорядоченном пространстве* $(X, \preceq)$ *множество из любых двух элементов имеет точную нижнюю границу*[17]*, при каждом* $i \in \mathbb{N}$ *выполнены следующие условия:*

($\mathrm{a_i}$) *существует* ${\xi'}_i \in \mathcal{O}_X(\xi)$ *такой, что* $\psi_i({\xi'}_i) = \varphi_i(\xi)$;

($\mathrm{b_i}$) *для любых* $x, x' \in \mathcal{O}_X(\xi)$ *таких, что* $x' \prec x$ *и* $\psi_i(x') = \varphi_i(x)$, *существуют* $u, u' \in X$, *для которых справедливы соотношения* $u' \preceq u \preceq x'$ *и* $\psi_i(u') = \varphi_i(u)$;

($\mathrm{c_i}$) *для любой бесконечной цепи* $S \in \Sigma(\mathcal{O}_X(\xi), \psi_i, \varphi_i)$ *существуют такие* $w_i, w_i' \in X$, *что* $w_i' \preceq w_i \preceq x$ *при всех* $x \in S$ *и* $\psi_i(w_i') = \varphi_i(w_i)$.

Пусть также для любого $x \prec \xi$ *существует такое* N, *что при всех* $i > N$ *во множестве* $\mathcal{O}_X(x)$ *нет точек совпадения отображений* ψ_i, φ_i. *Тогда при любом* i *существует точка совпадения* ξ_i *отображений* ψ_i, φ_i *такая, что для последовательности* $\{\xi_i\}$ *имеет место соотношение* (4).

В параграфе 1.2 рассматриваются различные операторные уравнения с отображениями, определенными на частично упорядоченных пространствах. В первых двух пунктах для заданных отображений $\Phi : X \times X \to Y$ и элемента $\tilde{y} \in Y$ рассматривается уравнение вида

$$\Phi(x, x) = \tilde{y} \tag{5}$$

с неизвестным $x \in X$. Как и выше, пространство X предполагается упорядоченным. В пункте 1.2.1 рассматривается ситуация, когда на Y определено рефлексивное бинарное отношение, отображение Φ по первому аргументу является упорядоченно накрывающим, а по второму — антитонным. Полученная

[17]Такое пространство называют полурешеткой (см. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М.: Наука, 1984).

здесь теорема 1.2.1 о существовании решения уравнения (5) означает, что свойство накрывания устойчиво к антитонным возмущениям. В более ранних работах[18] устойчивость свойства накрывания исследовалась в случае, когда оба пространства X, Y частично упорядоченные. Такие утверждения восходят к теореме Милютина[19] о липшицевых возмущениях накрывающих отображений.

В пункте 1.2.2 определяются множества накрывания и антитонности отображений, действующих из частично упорядоченного пространства $(X, \preceq)$ в пространство Y с рефлексивным бинарным отношением $\vartheta \subset Y \times Y$. Эти определения распространяют определения, предложенные ранее[16,18] для отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в частично упорядоченное пространство. На основании введенных понятий в этом пункте доказываются теорема 1.2.2 о разрешимости уравнения (5), позволяющая несколько ослабить предположения теоремы 1.2.1. Сформулируем это утверждение.

Для произвольного отображения $f : X \to Y$ определим множества:

$$\mathrm{Cov}[f] := \big\{(u, y) \in X \times Y : \ y \,\vartheta\, f(u) \ \Rightarrow \ \exists x \in X \ \ f(x) = y, \ \ x \preceq u\big\},$$
$$\mathrm{Dcr}[f] := \big\{(u, y) \in X \times Y : \ \forall x \in X \ \ f(x) = y, \ \ u \preceq x \ \Rightarrow \ y \,\vartheta\, f(u)\big\},$$

первое из которых называем *множеством (упорядоченного) накрывания отображения* f, а второе — *множеством антитонности* f. Отметим, что соотношения $\mathrm{Cov}[f] = X \times Y$, $\mathrm{Dcr}[f] = X \times Y$ равносильны, соответственно, упорядоченному накрыванию и антитонности f. Приведенное определение множества $\mathrm{Cov}[f]$ аналогично определению[18] множества накрывания отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в частично упорядоченное пространство.

Пусть $\mathcal{X} \subset X$. Определим совокупность $\widetilde{\Xi}(\mathcal{X}, \Phi, \tilde{y})$ всех цепей $S \subset X$, удовлетворяющих условию

$$\begin{cases} \forall x \in S \ \ \tilde{y} \,\vartheta\, \Phi(x, x), \\ \forall x, u \in S \ \ x \prec u \ \Rightarrow \ \exists \zeta \in [x, u] \ \ \tilde{y} \,\vartheta\, \Phi(\zeta, \zeta), \ \ \Phi(x, \zeta) = \tilde{y}. \end{cases}$$

Теорема 1.2.2. *Пусть существует* $x_0 \in X$ *такой, что* $\tilde{y} \,\vartheta\, \Phi(x_0, x_0)$, *и пусть любая цепь* $S \subset \widetilde{\Xi}(\mathcal{O}_X(x_0), \Phi, \tilde{y})$ *имеет нижнюю границу* $v \in X$, *для которой* $\tilde{y} \,\vartheta\, \Phi(v, v)$. *Предположим также, что для любого* $x \in \mathcal{O}_X(x_0)$ *справедливы включения* $(x, \tilde{y}) \in \mathrm{Cov}[\Phi(\cdot, x)]$, $(x, \tilde{y}) \in \mathrm{Dcr}[\Phi(x, \cdot)]$. *Тогда существует решение* $x = \xi \in \mathcal{O}_X(x_0)$ *уравнения* (5).

---

[18] *Жуковский Е.С.* Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. № 1. С. 96–127.

Жуковский Е.С. Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1610–1627.

[19] *Дмитрук А.В., Милютин А.А., Осмоловский Н.П.* Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. 1980. Т. 35. № 6(216). С. 11–46.

Далее в пункте 1.2.2 показано, что из теоремы 1.2.2 выводятся полученные в параграфе 1.1 утверждения о точках совпадения отображений $\psi, \varphi : X \to Y$ (а следовательно, и утверждения цитированной выше работы[16]).

В пункте 1.2.3 исследуются уравнения более общего вида чем (5) с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства $(X, \preceq)$ в множество $Y \neq \emptyset$, на котором не задано никакое бинарное отношение. Получены условия существования решений, установлена связь доказанного утверждения с теоремами 1.2.1 и 1.2.2 об уравнении (5), теоремами 1.1.2 и 1.1.3 о точках совпадения, а также с известными результатами о неподвижных точках. Сформулируем основные результаты этого пункта.

Пусть определены отображения $F, G : X \times X \to Y$. Рассмотрим уравнение

$$F(x, x) = G(x, x). \tag{6}$$

Частными случаями уравнения (6) являются уравнение для точки совпадения отображений $\psi, \varphi : X \to Y$ и уравнение (5). Пусть задано непустое множество $\mathcal{X} \subset X$. Определим совокупность $\Xi(\mathcal{X}, F, G)$ цепей $S \subset \mathcal{X}$ таких, что

$$\forall u \in S \ \exists x \in X \quad x \preceq u, \quad F(x, u) = G(x, u).$$

Теорема 1.2.3. *Пусть выполнены следующие условия:*

(a) *существуют* $u_0 \in \mathcal{X}$, $x_0 \in X$ *такие, что* $x_0 \preceq u_0$, $F(x_0, u_0) = G(x_0, u_0)$;

(b) *для любых* $u \in \mathcal{X}$, $x \in X$ *таких, что* $x \prec u$, $F(x, u) = G(x, u)$, *найдутся элементы* $v \in \mathcal{X}$, $w \in X$, *для которых* $w \preceq v \prec u$ *и* $F(w, v) = G(w, v)$;

(c) *для произвольной бесконечной цепи* $S \in \Xi(\mathcal{X}, F, G)$ *существуют такие* $\widetilde{v} \in \mathcal{X}$, $\widetilde{w} \in X$, *что* $\widetilde{w} \preceq \widetilde{v} \preceq u$ *при всех* $u \in S$ *и* $F(\widetilde{w}, \widetilde{v}) = G(\widetilde{w}, \widetilde{v})$.

Тогда существует решение $x = \xi \in \mathcal{X}$ *уравнения* (6) *такое, что* $\xi \preceq u_0$.

Полученные в параграфе 1.2 утверждения иллюстрируются примерами. В частности, приведен пример 1.2.2 действительной функции, к которой не применимы известные теоремы[16] о неподвижной точке, а существование неподвижной точки устанавливается с помощью приведенных здесь утверждений.

Глава 2 посвящена исследованию разрешимости и свойств решений функциональных и дифференциальных уравнений. Глава разбита на два параграфа.

Параграф 2.1 содержит два пункта. В пункте 2.1.1 доказана теорема о разрешимости и оценках решений системы неявных функциональных уравнений. Сформулируем это утверждение. Обозначим через M^n пространство измеримых (по Лебегу) функций $x : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ с «обычным» порядком. Пусть задана функция $h : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $h(t, u, x) := \big(h_i(t, u_1, \ldots, u_n, x_i)\big)_{i=\overline{1,n}}$ (здесь $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$). Будем предполагать, что для её компонент — функций $h_i : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, при п.в. $t \in [0,1]$, любых $u \in \mathbb{R}^n$ и $x_i \in \mathbb{R}$ выполнено условие

(H$\downarrow$) *функция* $h_i(\cdot, u, x_i) : [0,1] \to \mathbb{R}$ *является измеримой, функция* $h_i(t, \cdot, x_i) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *убывает и непрерывна справа по каждому аргументу* $u_1, \ldots, u_n$, *функция* $h_i(t, u, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна.*

Рассмотрим систему уравнений

$$h_i\big(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), x_i(t)\big) = 0, \quad t \in [0,1], \quad i = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Решением этой системы будем называть измеримую функцию, удовлетворяющую всем её уравнениям п.в. на $[0,1]$.

Теорема 2.1.1. *Пусть для некоторых функций* $\vartheta, \varsigma \in M^n$, $\vartheta \geq \varsigma$, *при п.в.* $t \in [0,1]$ *выполнены неравенства* $h_i(t, \vartheta(t), \vartheta_i(t)) \geq 0$, $h_i\big(t, \varsigma(t), \varsigma_i(t)\big) \leq 0$. *Тогда уравнение* (7) *имеет решение* $x \in M^n$ *такое, что* $\varsigma \leq x \leq \vartheta$; *и среди решений уравнения* (7), *принадлежащих множеству* $\{x \in M^n : \varsigma \leq x \leq \vartheta\}$ *существует наименьшее.*

В пункте 2.1.2 аналогичный результат получен для системы функциональных уравнений, разрешенных относительно неизвестной функции вида

$$x_i(t) = \widetilde{h}_i\big(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), x_i(t)\big), \quad t \in [0,1], \quad i = \overline{1,n}.$$

Демонстрируется, что доказанное утверждение не выводится из известных теорем о неподвижных точках Банаха, Шаудера, Кнастера-Тарского.

Параграф 2.2 посвящен изучению неявных дифференциальных уравнений (т. е. не разрешенных относительно производной искомой функции) методами, основанными на полученных в первой главе результатах об уравнениях с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в произвольное множество. Использование этих утверждений позволило получить теоремы типа Чаплыгина для систем неявных дифференциальных уравнений. Более того, удалось ещё и ослабить «традиционные» предположения непрерывности или монотонности по фазовым переменным на функции, порождающие уравнения. Параграф разбит на три пункта. В пункте 2.2.1 доказана теорема типа Чаплыгина о дифференциальном неравенстве для задачи Коши, в пункте 2.2.2 — для периодической краевой задачи, и в пункте 2.2.3 — для задач управления. Сформулируем основные из представленных в параграфе 2.2 результатов.

Обозначим через L^n пространство суммируемых (по Лебегу) на $[0,1]$ n-мерных функций, являющееся подпространством частично упорядоченного пространства M^n, а через AC^n пространство абсолютно непрерывных n-мерных функций.

Пусть заданы функции $f_i : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$f_i(t, x, \dot{x}, \dot{x}_i) = 0, \quad t \in [0,1], \quad i = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Ее решением будем называть функцию $x \in AC^n$, удовлетворяющую всем уравнениям (8) при п.в. $t \in [0,1]$. Определим условие

(F↓) *При всех $i = \overline{1,n}$, п.в. $t \in [0,1]$, любых $x, v \in \mathbb{R}^n$ и $y_i \in \mathbb{R}$ функция $f_i(\cdot, x, v, y_i) : [0,1] \to \mathbb{R}$ измерима, функция $f_i(t, \cdot, \cdot, y_i) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ убывает и непрерывна справа по каждому из аргументов $x_1, \ldots, x_n$ и $v_1, \ldots, v_n$, функция $f_i(t, x, v, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна.*

Теорема 2.2.1. *Пусть выполнено условие* **(F↓)**, *для некоторых функций $\nu, \eta \in AC^n$ таких, что $\nu(0) \geq \eta(0)$ и $\dot{\nu} \geq \dot{\eta}$, при п.в. $t \in [0,1]$ справедливы неравенства*

$$f_i(t, \nu(t), \dot{\nu}(t), \dot{\nu}_i(t)) \geq 0, \quad f_i(t, \eta(t), \dot{\eta}(t), \dot{\eta}_i(t)) \leq 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Тогда для любого $A \in \mathbb{R}^n$, для которого $\eta(0) \leq A \leq \nu(0)$, существует решение $x \in AC^n$ задачи Коши для системы (8) *с начальным условием*

$$x(0) = A, \tag{10}$$

удовлетворяющее неравенствам

$$\dot{\eta} \leq \dot{x} \leq \dot{\nu}; \tag{11}$$

кроме того, во множестве решений задачи (8), (10), *удовлетворяющих неравенствам* (11), *существует решение с наименьшей производной.*

Теперь приведем условия разрешимости периодической краевой задачи для дифференциального уравнения (8). Пусть задана диагональная $n \times n$ матрица $\lambda := \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, где $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. По функциям f_i определим функции $g_i^\lambda : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, формулой

$$g_i^\lambda(t, x, v, y_i) := f_i(t, x, v + \lambda x, y_i + \lambda_i x_i), \quad i = \overline{1,n},$$

и для этих функций определим условие

(G↓) *При всех $i = \overline{1,n}$, п.в. $t \in [0,1]$, любых $x, v \in \mathbb{R}^n$ и $y_i \in \mathbb{R}$ функция $g_i^\lambda(\cdot, x, v, y_i) : [0,1] \to \mathbb{R}$ измерима, функция $g_i^\lambda(t, \cdot, v, y_i) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ возрастает и непрерывна справа по каждому аргументу $x_1, \ldots, x_n$, функция $g_i^\lambda(t, x, \cdot, y_i) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ убывает и непрерывна справа по каждому аргументу $v_1, \ldots, v_n$, функция $g_i^\lambda(t, x, v, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна.*

Теорема 2.2.2. *Пусть выполнено условие* **(G↓)**, *для некоторых функций $\nu, \eta \in AC^n$ таких, что $\nu(0) - \nu(1) \geq \eta(0) - \eta(1)$, $\dot{\nu} - \lambda\nu \geq \dot{\eta} - \lambda\eta$, справедливы* *неравенства* (9). *Тогда для любого* $A \in \mathbb{R}^n$, *если* $\eta(0)-\eta(1) \le A \le \nu(0)-\nu(1)$, *то существует решение* $x \in AC^n$ *краевой задачи для системы* (8) *с условием*

$$x(0) - x(1) = A, \tag{12}$$

удовлетворяющее неравенствам

$$\dot{\eta} - \lambda\eta \le \dot{x} - \lambda x \le \dot{\nu} - \lambda\nu; \tag{13}$$

кроме того, среди функций $z := \dot{x} - \lambda x$, *где* x *— решение задачи* (8), (12), *существует наименьшая функция, удовлетворяющая неравенствам* (13).

В заключительном пункте 2.2.3 рассматривается задача управления для системы дифференциальных уравнений вида

$$f_i(t, x, \dot{x}, \dot{x}_i, u) = 0, \quad t \in [0,1], \quad i = \overline{1,n}, \tag{14}$$

где $f_i : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$. Управление u предполагается измеримой функцией. Теоремы 2.2.1 и 2.2.2 позволяют показать, что при соответствующих предположениях для каждого u из некоторого заданного множества управлений существует решение $x = x_u \in AC^n$ этой системы с начальным условием (10) или с краевым условием (12).

Итак, пусть для заданных управлений $\underline{u}, \overline{u} \in M^m$ система (14) разрешима, ее решениями являются абсолютно непрерывные функции $x_{\underline{u}} = \eta$, $x_{\overline{u}} = \nu$.

Теорема 2.2.4. *Пусть функции* $f_i(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,u) : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, *для любого* $u \in \mathbb{R}^m$ *удовлетворяет условию* $(\mathbf{F}{\downarrow})$, *а функции* $f_i(t, x, v, y_i, \cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, *при п.в.* $t \in [0,1]$, *любых* $x, v \in \mathbb{R}^n$ *и* $y_i \in \mathbb{R}$ *возрастают и непрерывны справа по каждому аргументу* $u_1, \ldots, u_n$. *Тогда, если имеют место неравенства* $\underline{u} \le \overline{u}$, $\eta(0) \le \nu(0)$, $\dot{\eta} \le \dot{\nu}$, *то для любого* $A \in \mathbb{R}^n$ *такого, что* $\eta(0) \le A \le \nu(0)$, *и любого управления* $u \in M^m$, *для которого* $\underline{u} \le u \le \overline{u}$, *существует решение* $x \in AC^n$ *системы* (14) *с начальным условием* (10), *удовлетворяющее неравенствам* (11); *кроме того, во множестве решений задачи* (14), (10), *удовлетворяющих неравенствам* (11), *существует решение с наименьшей производной.*

В заключение сформулируем условия существования решения управляемой системы (14) с периодическим краевым условием (12). Пусть задана диагональная $n \times n$ матрица $\lambda := \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, где $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. По функциям f_i определим функции $g_i^\lambda : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, формулой

$$g_i^\lambda(t, x, v, y_i, u) := f_i(t, x, v + \lambda x, y_i + \lambda_i x_i, u), \quad i = \overline{1,n}.$$

Теорема 2.2.5. *Пусть функции* $g_i^\lambda(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,u) : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, *для любого* $u \in \mathbb{R}^m$ *удовлетворяют условию* $(\mathbf{G}{\downarrow})$, *а функции*

$g_i^\lambda(t,x,v,y_i,\cdot):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$, при п.в. $t\in[0,1]$, любых $x,v\in\mathbb{R}^n$ и $y_i\in\mathbb{R}$ возрастают и непрерывны справа по каждому аргументу $u_1,\ldots,u_n$. Тогда, если $\underline{u}\le\overline{u}$, $\nu(0)-\nu(1)\ge\eta(0)-\eta(1)$, $\dot{\nu}-\lambda\nu\ge\dot{\eta}-\lambda\eta$, то для любого $A\in\mathbb{R}^n$ такого, что $\eta(0)-\eta(1)\le A\le\nu(0)-\nu(1)$, и любого управления $u\in M^m$, для которого $\underline{u}\le u\le\overline{u}$, существует решение $x\in AC^n$ системы (14) *с краевым условием* (12), *удовлетворяющее неравенствам* (13)*; кроме того, среди функций $z:=\dot{x}-\lambda x$, где x — решение задачи* (14), (12), *существует наименьшая функция, удовлетворяющая неравенствам* (13).

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах, рекомендованных ВАК

1. *Бенараб С.* Двусторонние оценки решений краевых задач для неявных дифференциальных уравнений // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 134. С. 216–220.

2. *Бенараб С.* О теореме Чаплыгина для неявного дифференциального уравнения n-го порядка // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 216–220.

3. *Бенараб С., Жуковская З.Т., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О функциональных и дифференциальных неравенствах и их приложениях к задачам управления // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1471–1482.

В работе [3] Бенараб С. принадлежат доказательства следующих утверждений: теоремы 1 (о точке совпадения отображений частично упорядоченного пространства в неупорядоченное множество), теоремы 2 (о дифференциальном неравенстве для задачи Коши), теоремы 3 (о дифференциальном неравенстве для периодической краевой задачи), предложений 3 и 4 (о дифференциальном неравенстве для задачи управления).

4. *Бенараб С., Жуковский Е.С.* О точках совпадения двух отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в произвольное множество // Известия вузов. Математика. 2020. № 5. С. 11–21.

В работе [4] Бенараб С. принадлежат: определение 1 свойства накрывания отображения из частично упорядоченного пространства в множество с рефлексивным отношением, доказательство теорем 2,3 (о существовании точки совпадения отображений частично упорядоченного пространства в неупорядоченное множество) и теоремы 4 (об устойчивости точек совпадения отображений частично упорядоченного пространства в неупорядоченное множество).

5. *Бенараб С., Жуковский Е.С.* О накрывающих отображениях со значениями в пространстве с рефлексивным бинарным отношением // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. 2018. Т. 23. № 122. С. 210–215.

В работе [5] Бенараб С. принадлежат доказательство теоремы 1 (об операторном уравнении с отображением частично упорядоченного пространства в неупорядоченное множество) и пример 1 уравнения, удовлетворяющего предположениям теоремы 1, но не удовлетворяющего условиям известных теорем[16].

6. *Бенараб С., Жуковский Е.С.* Об условиях существования точек совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. 2018. Т. 23. № 121. С. 10–16.

В работе [6] Бенараб С. принадлежат доказательство теоремы 1.1 (о точке совпадения отображений частично упорядоченного пространства в множество с рефлексивным отношением) и пример 2.2 отображений, удовлетворяющих предположениям теоремы 1.1, но не удовлетворяющих условиям известных теорем[16].

7. *Бенараб С., Жуковский Е.С., Мерчела В.* Теоремы о возмущениях накрывающих отображений в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. С. 52–63.

В работе [7] Бенараб С. принадлежат все результаты раздела 2 (об антитонных возмущениях накрывающих отображений в пространствах с бинарными отношениями).

Другие публикации автора по теме диссертации

8. *Бенараб С.* Интегральные неравенства в пространстве измеримых функций // Колмогоровские чтения. общие проблемы управления и их приложения (ОПУ–2020). Материалы IX Международной научной конференции, посвященной 70-летию со дня рождения А.И. Булгакова и 90-летию Института математики, физики и информационных технологий Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина.Тамбов, 2020. С. 25–27.

9. *Бенараб С.* Теорема типа Чаплыгина о неявном интегральном неравенстве в пространстве суммируемых функций // Теория управления и математическое моделирование. Материалы Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Ижевск, 2020. С. 45–46.

10. *Бенараб С.* Дифференциальное неравенство для периодической краевой задачи // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби (CGS'2020). Материалы III Международного семинара, посвященного 75-летию акад. А.И. Субботина. Екатеринбург, 2020. С. 115–116.

11. *Бенараб С., Жуковская Т.В.* О накрывающем отображении, действующем из упорядоченного множества в неупорядоченное // Современные методы теории краевых задач. Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа Понтрягинские чтения - XXX. Воронеж, 2019. С. 58–59.

В работе [11] Бенараб С. принадлежит теорема 1 (о точках совпадения отображений упорядоченного пространства в неупорядоченное множество).

12. *Бенараб С., Жуковский Е.С., Мерчела В.* Распространение теорем о возмущениях накрывающих отображений // Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019). Материалы Международной конференции, посвященной 95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского. Екатеринбург, 2019. С. 67–70.

В работе [12] Бенараб С. принадлежат результаты пункта 2 (об антитонных возмущениях накрывающих отображений в пространствах с бинарными отношениями).