

На правах рукописи



Горюнов Владимир Евгеньевич

**ДИФФУЗИОННАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ
РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА РАСПРЕДЕЛЕННЫХ
БИОФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ С САМООРГАНИЗАЦИЕЙ**

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2021

Работа выполнена на кафедре математического моделирования федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

Научный руководитель: *Глызин Сергей Дмитриевич*
доктор физико-математических наук,
профессор, зав. кафедрой компьютерных сетей
ФГБОУ ВО «Ярославский государственный
университет им. П.Г. Демидова»

Официальные оппоненты: *Нестеров Андрей Владимирович*
доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры информатики
ФГБОУ ВО «Российский экономический
университет им. Г.В. Плеханова»

Костин Дмитрий Владимирович
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического
моделирования ФГБОУ ВО «Воронежский
государственный университет»

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова»,
физический факультет

Защита состоится «18» июня 2021 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета Д 212.025.08 при ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых» по адресу: 600024, г. Владимир, проспект Строителей, 11, ауд. 237, ВлГУ, Педагогический институт.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Владимирского государственного университета и на сайте <http://diss.vlsu.ru>.

Автореферат разослан « » мая 2021 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.025.08,
кандидат физико-математических наук,
доцент

 Наумова С.Б.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования

В системах самой разнообразной природы возникает феномен самоорганизации. В классическом определении Г. Николиса, И.Р. Пригожина¹ и Г. Хакена² это процесс рождения некоей упорядоченной структуры из хаоса без специфического воздействия.

Самоорганизующиеся структуры можно наблюдать в математических моделях популяционной динамики. Построению таких моделей посвящены работы ряда отечественных и зарубежных ученых, в том числе Т. Мальтуса, В. Вольтерра, П. Ферхюльста, Р. Пирла, Д. Хатчинсона, Р. Мэя, С.Д. Глызина, С.А. Кащенко, Ю.С. Колесова^{3,4}. Вместе с тем, в этой области исследований образовался ряд серьезных проблем. В частности, при изучении различных пространственных режимов динамики популяций в двухмерной области авторы часто переходили от непрерывной модели к ее дискретному аналогу из-за существовавших ограничений вычислительных мощностей, что влияло на качество получаемых результатов; рассматривали узкие диапазоны изменения параметра диффузионной связи, отчего не наблюдалось цельности общей картины происходящих в таких моделях процессов; выбирали слишком крупный шаг разбиения по пространству, что позволяло получать режимы лишь с укрупненными неоднородными структурами; не проводили обширных исследований с целью выявления возможных классов устойчивых режимов.

Кроме того, эффект самоорганизации свойственен окислительно-восстановительным колебательным химическим реакциям, в основе которых лежит широко известный механизм реакции Белоусова–Жаботинского^{5,6} (Б.П. Белоусов, А.М. Жаботинский, R.J. Field, R.M. Noyes), изученный в большом числе работ. Некоторыми авторами (С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Ю.С. Колесов, Н.Х. Розов) предлагается особый подход к рассмотрению таких процессов, заключающийся в разработке упрощенной математической модели, феноменологически близкой к экологической задаче «хищник – хищник – жертва»⁷. При этом, такая модель не была должным образом исследована аналитически, не были определены возможные сценарии при крити-

¹ Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации — М.: Мир. 1979.

² Хакен Г. Информация и самоорганизация: Макроскопический подход к сложным системам — М.: Мир. 1991. 240 с.

³ Колесов Ю.С. Проблема адекватности экологических уравнений — Деп. в ВИНТИ № 1901-85. 1985.

⁴ Кащенко С.А., Фролов В.Е. Асимптотика установившихся режимов конечно-разностных аппроксимаций логистического уравнения с запаздыванием и с малой диффузией // Модел. и анализ информ. систем. 2014. Т. 21, № 1. С. 94–114.

⁵ Белоусов Б.П. Периодически действующая реакция и ее механизм // Сборник рефератов по радиационной медицине за 1958 г., Медгиз. 1959. С. 145–147.

⁶ Жаботинский А.М. Концентрационные автоколебания — М.: Наука, 1974.

⁷ Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Релаксационные колебания и диффузионный хаос в реакции Белоусова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51, № 8. С. 1400–1418.

ческих значениях параметров, а численными методами изучались режимы только в случае, когда пространственная область — отрезок $[0, 1]$. Таким образом, оставался неизученным вопрос о возможном сосуществовании в двумерной области хаотических колебательных режимов разных типов, в том числе режимов с самоорганизацией.

При исследовании систем с запаздывающими аргументами, особенно моделей нейродинамики и генных сетей, в настоящее время крайне актуальна проблема вычисления спектра показателей Ляпунова. Для таких моделей не удается доказать теорему Оселедеца⁸, которая позволяет в конечномерном случае эффективно вычислять показатели Ляпунова. Существует ряд работ (А.А. Балякин, Е.В. Блохина, А.Д. Колоскова, А.А. Короновский, О.И. Москаленко, Н.М. Рыскин), в которых оцениваются спектры ляпуновских показателей в моделях, состоящих из одного уравнения с запаздыванием, однако авторы не приводят ни обоснования предложенного алгоритма, ни тестирующего примера, для которого спектр может быть вычислен каким-либо иным способом. Кроме того, в этих работах, как и в статье С.В. Алешина⁹, рассмотрен случай лишь одного запаздывания, а также предусмотрено задание для возмущенных систем только дискретных начальных условий, что не является естественным для непрерывных математических моделей.

Вышесказанное определило актуальность настоящей работы и ее цели.

Целью диссертационной работы является исследование динамических систем с распределенными параметрами из популяционной биологии и биофизики, у которых обнаруживаются режимы самоорганизации, с использованием современных асимптотических и согласованных с ними численных методов. Также целью диссертации является разработка и тестирование алгоритма оценки спектра ляпуновских показателей для исследования систем дифференциальных уравнений с произвольным количеством запаздывающих аргументов с возможностью задания дискретных либо непрерывных начальных условий для векторов возмущения.

Методология и методы исследования

Для изучения поведения динамических систем, рассматриваемых в работе, применяются теория бифуркаций, стандартные замены метода нормальных форм, методы теории усреднения, а также численные методы исследования пространственно распределенных моделей и моделей с запаздывающим аргументом. Алгоритм оценки спектра ляпуновских показателей динамических систем с запаздывающими аргументами основан на базовых принципах вычисления ляпуновских показателей систем, правильных по Ляпунову, и разложении в ряды Фурье.

⁸ *Оселедец В.И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Труды ММО. 1968. Т. 19. С. 179–210.

⁹ *Алешин С.В.* Оценка инвариантных числовых показателей аттракторов систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Вычисл. технологии в естеств. науках: методы суперкомп. модел. 1–3 окт. 2014, Россия, Таруса: сб. тр. / Под ред. Р.Р. Назирова, Л.Н. Щура. М.: ИКИ РАН, 2014. С. 10–17.

Научная новизна результатов работы:

1. Получены условия возникновения пространственно неоднородных режимов в плоской области, наследующих свойства пространственно однородных, в модели динамики популяций, основанной на логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией, и модели реакции Белоусова–Жаботинского, феноменологически близкой к экологической задаче «хищник – жертва», с использованием современных асимптотических методов.

2. Предложен новый алгоритм оценки спектра ляпуновских показателей для систем дифференциальных уравнений с произвольным количеством запаздывающих аргументов и возможностью задания базиса импульсных функций либо базиса тригонометрических функций.

3. Проиллюстрирована обоснованность вычисления оценок показателей Ляпунова в случае систем из нейродинамики, у которых наблюдается эффект квазиустойчивого поведения.

4. Проведен обширный численный эксперимент для модели динамики популяций в квадратной области, в результате чего обнаружены три типа устойчивых режимов с эффектом самоорганизации вблизи критического значения диффузионного параметра; в широком диапазоне изменения диффузионного параметра исследованы устойчивые сосуществующие пространственно неоднородные режимы, одни из которых обладают эффектом самоорганизации, а другие наследуют свойства пространственно однородного режима.

Достоверность и обоснованность научных результатов работы

Достоверность полученных результатов подтверждается соответствием данных, полученных с помощью аналитических методов, с данными численного моделирования, а также с результатами исследований, опубликованными другими авторами.

Теоретическая и практическая значимость работы

1. Исследованы режимы самоорганизации в узком биологическом смысле, возникающие как в популяционной динамике, основанной на логистической модели с запаздыванием и диффузией, так и в химических процессах, описываемых упрощенной биологической моделью, в основе которой лежит реакция Белоусова–Жаботинского; для этих моделей проведен локальный анализ, основанный на современных асимптотических методах и подтверждающий критические значения параметров, полученные численным путем.

2. Разработаны алгоритмы вычисления оценок показателей Ляпунова для дифференциальных уравнений с запаздыванием, позволяющие проводить качественный анализ динамических систем из активно развивающихся областей математического моделирования.

Положения и результаты, выносимые на защиту:

1. Доказаны бифуркационные теоремы о фазовых перестройках в плоской области при критическом значении коэффициента диффузии для модели динамики популяций, основанной на логистическом уравнении с запаз-

дыванием и диффузией, и феноменологической модели реакции Белоусова–Жаботинского.

2. Доказана бифуркационная теорема о рождении устойчивого цикла в точечной феноменологической модели реакции Белоусова–Жаботинского.

3. Получены условия существования и устойчивости пространственно однородного орбитально асимптотически устойчивого предельного цикла в феноменологической модели реакции Белоусова–Жаботинского.

4. Построены сложные устойчивые пространственно неоднородные режимы, возникающие в плоской области в модели динамики популяций, основанной на логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией, численно определены границы их сосуществования, среди них выделены режимы с эффектом самоорганизации.

5. Показано сосуществование двух классов хаотических колебательных режимов, один из которых обладает релаксационными свойствами, а другой — эффектом самоорганизации, в феноменологической модели реакции Белоусова–Жаботинского в случае плоской области.

6. Разработаны и протестированы алгоритмы вычисления оценок показателей Ляпунова для дифференциальных уравнений с запаздыванием, основанных на разных наборах базисных функций, что позволило проиллюстрировать эффект квазистойчивости в нейродинамических моделях.

Личный вклад автора. Все основные результаты получены автором самостоятельно. Постановка задач и интерпретация результатов, представленных в диссертационной работе, выполнялись совместно с научным руководителем и соавторами опубликованных научных работ.

Апробация работы. Результаты работы были представлены на следующих научных конференциях:

1. Международная конференция «Нелинейные методы в физике и механике», 1–3 октября 2015 г., Ярославль;

2. Научная конференция «Методы суперкомпьютерного моделирования» на базе «Интеркосмос» ИКИ РАН, 17–19 ноября 2015 г., Таруса;

3. International Conference «Supercomputer Simulations in Science and Engineering», 6–10 сентября 2016 г., Москва;

4. Международная конференция «Новые тенденции в нелинейной динамике», 5–7 октября 2017 г., Ярославль;

5. International Conference on Computer Simulation in Physics and beyond, 9–12 октября 2017 г., Москва;

6. International Conference on Computer Simulation in Physics and beyond, 24–27 сентября 2018 г., Москва;

7. Международная конференция «Интегрируемые системы и нелинейная динамика», 1–5 октября 2018 г., Ярославль;

8. Международная конференция «Воронежская зимняя математическая школа: Современные методы теории функций и смежные проблемы», 28 января – 2 февраля 2019 г., Воронеж;

9. Международная школа-конференция «Хаотические автоколебания и образование структур» (ХАОС-2019), 1–6 октября 2019 г., Саратов;

10. Международная научная конференция «Динамика. 2019. Ярославль», 10–12 октября 2019 г., Ярославль.

Кроме того, результаты диссертации неоднократно докладывались на семинаре «Нелинейная динамика и синергетика» кафедры математического моделирования Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова и на семинаре «Нелинейный анализ и его приложения» кафедры ФАиП Владимирского государственного университета им. А.Г. и Н.Г. Столетовых.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 16 печатных работ, в том числе 5 статей в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ, из них 4 статьи в зарубежных изданиях, индексируемых в Scopus.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, содержащего 129 наименований, и трех приложений. Диссертация содержит 63 рисунка, 16 таблиц. Общий объем диссертации — 110 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** приводится общая характеристика работы, обосновывается актуальность выбранного направления исследования, приводится краткий обзор литературы по исследуемой в работе тематике, описываются цели и постановки основных задач работы, отмечается научная новизна и значимость результатов, выносимых на защиту, а также описывается общая структура диссертационной работы.

В **первой главе** изучаются устойчивые сосуществующие режимы, в том числе с эффектом самоорганизации, возникающие в модели динамики популяций, в основе которой лежит классическое уравнение Д. Хатчинсона¹⁰, дополненное диффузионным слагаемым и краевыми условиями Неймана:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\Delta N + r(1 - N_{t-1})N, \quad \frac{\partial N}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1)$$

где $N(t, x)$ — плотность популяции в момент времени t в точке x выпуклой ограниченной плоской области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$, Δ — оператор Лапласа, D — коэффициент диффузии, r — мальтузианский коэффициент линейного роста ($r > 0$), $N_{t-1} \equiv N(t-1, x)$, ν — направление внешней нормали к границе $\partial\Omega$. Здесь и далее $\text{mes } \Omega = 1$, что достигается подходящей заменой пространственных переменных.

В работе исследуется самоорганизация в более узком биофизическом смысле, описанном в работах С.Д. Глызина, А.Ю. Колесова, Ю.С. Колесова, В.В. Майорова, Н.Х. Розова: количественная величина структуры, под которой в данном случае подразумевается численность популяции, в среднем по

¹⁰ *Hutchinson G.E.* Circular causal systems in ecology // *Ann. N.Y. Acad. Sci.* 1948. V. 50. P. 221–246.

пространству всегда отделена от значений, экстремально близких к нулю. Это означает, что не может сложиться такая ситуация, при которой структуре не хватит внутренних ресурсов на восстановление до прежних нетривиальных значений. В связи с этим изучаются различные устойчивые сосуществующие режимы, в том числе обладающие эффектом самоорганизации.

Для определения условий потери устойчивости пространственно однородного режима и ответвления от него пространственно неоднородных режимов, сохраняющих основные качественные свойства, предварительно применяется локальный анализ. Применение асимптотических методов в данной задаче возможно при r , близком к критическому значению $\pi/2$ (поскольку при $r \in (0, \pi/2)$ в уравнении без диффузионного слагаемого асимптотически устойчиво единичное состояние равновесия, а при $r > \pi/2$ образуется устойчивый цикл¹¹) и достаточно малых значениях коэффициента диффузии.

Таким образом, локальный анализ проводится при $r = \pi/2 + \varepsilon$, $D = \varepsilon d$, где ε — положительный малый параметр.

В дальнейшем будем пользоваться следующими определениями.

Определение 1. *Периодическое решение $\phi(t)$ дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$ является асимптотически орбитально устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, что для всех $x(t)$, удовлетворяющих неравенству $\|x(t_0) - \phi(t_0)\| < \delta$, выполнены условия $\inf_{\tau} \|x(t) - \phi(\tau)\| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\tau} \|x(t) - \phi(\tau)\| = 0$.*

Определение 2. *Периодическое решение $\phi(t)$ дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$ является экспоненциально орбитально устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, что для всех $x(t)$, удовлетворяющих неравенству $\|x(t_0) - \phi(t_0)\| < \delta$, выполнены условия $\inf_{\tau} \|x(t) - \phi(\tau)\| < \varepsilon$ и $\inf_{\tau} \|x(t) - \phi(\tau)\| \leq \alpha \|x(t_0) - \phi(t_0)\| e^{-\beta(t-t_0)}$ для всех $t \geq t_0$, где α и β — положительные константы.*

Сначала проводится локальный анализ уравнения

$$\dot{N} = \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) (1 - N_{t-1}) N, \quad (2)$$

в результате чего доказывается следующая теорема¹², являющаяся отправной точкой для дальнейших действий.

Теорема 1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ уравнение (2) имеет орбитально асимптотически устойчивый цикл с асимптотикой вида*

$$N_*(t) = 1 + \sqrt{\frac{10\varepsilon}{3\pi - 2}} \left(\exp\left(i\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{2}{3\pi - 2}\varepsilon t + \gamma\right)\right) + \text{к.с.} \right) + \frac{10\varepsilon}{3\pi - 2} \left(\frac{2-i}{5} \exp\left(i\left(\pi t - \frac{4}{3\pi - 2}\varepsilon t + 2\gamma\right)\right) + \text{к.с.} \right) + O(\varepsilon^{3/2}), \quad (3)$$

¹¹ Hale J. Theory of functional differential equations — New York. 1977.

¹² Глызин С.Д., Кащенко С.А., Полстъянов А.С. Пространственно-неоднородные периодические решения в распределенном уравнении Хатчинсона // Модел. и анализ информ. систем. 2009. Т. 16, № 4. С. 77–85.

где под к.с. подразумевается комплексно сопряженное к данному в той же скобке выражению.

Лемма 1. Решение $N(t, x) \equiv N_*(t)$ является пространственно однородным решением краевой задачи (1).

Для исследования проблемы устойчивости решения (3) при $d > 0$ в краевой задаче (1) выполняются замены $N(t, x) = N_*(t) + v(t, x)$, $(1 + \delta\varepsilon)t \rightarrow \tau$, где $\delta = -4/(\pi(3\pi - 2))$, после чего в ней выделяется линейная составляющая и получается краевая задача вида

$$(1 + \delta\varepsilon)\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon d\Delta v - \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)(N_*(\tau - 1 - \delta\varepsilon)v + (1 + N_*)v(\tau - 1 - \delta\varepsilon)), \quad \frac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4)$$

Применяя к линейной краевой задаче (4) разложения в ряды Фурье по собственным функциям оператора Лапласа в области Ω , получаем

$$(1 + \delta\varepsilon)\dot{\alpha}_k = -\varepsilon d\lambda_k\alpha_k - \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)(N_*(\tau - 1 - \delta\varepsilon)\alpha_k + (1 + N_*)\alpha_k(\tau - 1 - \delta\varepsilon)), \quad (5)$$

где λ_k — собственные числа, пронумерованные в порядке возрастания абсолютных величин, а $u_k(x)$ — собственные функции оператора Лапласа, соответствующие им так, что $\Delta u_k = -\lambda_k u_k$, $\partial u_k / \partial \nu|_{\partial\Omega} = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$. При этом $v(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(t)u_k(x)$. Отметим, что для выпуклых областей с гладкой границей $\lambda_0 = 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$.

Для исследования на устойчивость линейных уравнений с запаздыванием (5) применяется специальная методика теории усреднения¹³, для этого выполняется следующее асимптотическое разложение:

$$\alpha_k(\tau) = \left(V_0(\tau) + \sqrt{\varepsilon}V_1(\tau) + \varepsilon V_2(\tau) + \dots\right) \exp\left((\varepsilon D_0 + \varepsilon^2 D_1 + \dots)\tau\right), \quad (6)$$

где $V_j(\tau)$ — 1×2 вектор-функции периода четыре, а D_j — 2×2 постоянные матрицы ($j = 0, 1, \dots$). Очевидно, что $V_0(\tau) = \left(\exp(i\tau\pi/2), \exp(-i\tau\pi/2)\right)$. После применения разложения (6) в уравнении (5) приравняются коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$. Тогда при ε получается уравнение для V_2 , после чего можно вычислить значение матрицы D_0 :

$$D_0 = \frac{2}{\pi^2 + 4} \begin{pmatrix} d_{11} & \overline{d_{21}} \\ d_{21} & \overline{d_{11}} \end{pmatrix},$$

$$d_{11} = -2d\lambda_k - \pi - \pi i \left(-d\lambda_k + \frac{\pi + 6}{3\pi - 2}\right), \quad d_{21} = -\pi + \pi i \frac{\pi + 6}{3\pi - 2}.$$

¹³ Колесов Ю.С., Майоров В.В. Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10, № 10. С. 1778–1788.

Матрица D_0 определяет устойчивость пространственно однородного цикла. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ краевая задача (1) имеет пространственно однородный цикл $N(t, x) \equiv N_*(t)$, который экспоненциально орбитально устойчив при $d > d_*$, где*

$$d_* = \frac{2\pi}{\lambda_1(3\pi - 2)},$$

и неустойчив при $d < d_$. Здесь λ_1 — первое ненулевое собственное число оператора Лапласа в области Ω .*

При прохождении параметра d через критическое значение $d = d_*$ пространственно однородный цикл теряет устойчивость, и от него на первой моде ответвляются пространственно неоднородные циклы, которые имеют вид ведущих центров. Отметим также, что динамические свойства этих циклов (среднее, минимумы по времени и пространству, минимумы средних) остаются практически неизменными по сравнению с пространственно однородным режимом.

Асимптотические методы не позволяют проводить дальнейшие исследования в случае увеличения параметра r и уменьшения параметра d , поэтому далее происходит изучение краевой задачи (1) численными методами в квадратной области $\Omega = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ при $r = 3$. Поскольку система (1) без диффузионного слагаемого при $r > \pi/2$ имеет цикл с минимумом, близким к $\exp(-\exp(r))$, то увеличение r приводит к значительным трудностям численной арифметики.

Для решения системы применялся метод Дормана–Принса с переменной длиной шага (DOPRI54). В большинстве экспериментов область Ω покрывалась решеткой из 100×100 узлов. Таким образом, рассматривалась система из 10000 уравнений с запаздыванием.

Представляет интерес поиск решений задачи (1), минимум среднего по пространству у которых качественно отделен от нуля, поскольку в таком случае популяция не вымирает с течением времени, всегда сохраняя некоторый необходимый для дальнейшего существования запас особей.

Были обнаружены три разных типа устойчивых решений при значениях D , близких к критическому для $r = 3$ значению $D_* \approx 0.0373$, динамические характеристики которых существенно отличаются от пространственно однородного решения.

Первый режим возникает при значениях $D < \hat{D}$, больше критических ($\hat{D} \approx 0.148 > D_*$, что превышает критическое значение D_* примерно в четыре раза), то есть сосуществует с пространственно однородным режимом, сохраняется практически в неизменном виде при значительном снижении D и является периодическим. Характерный график распределения решения имеет “вихреобразную” структуру, представленную на рис. 1, где указано графическое представление режима на временном интервале в половину периода.

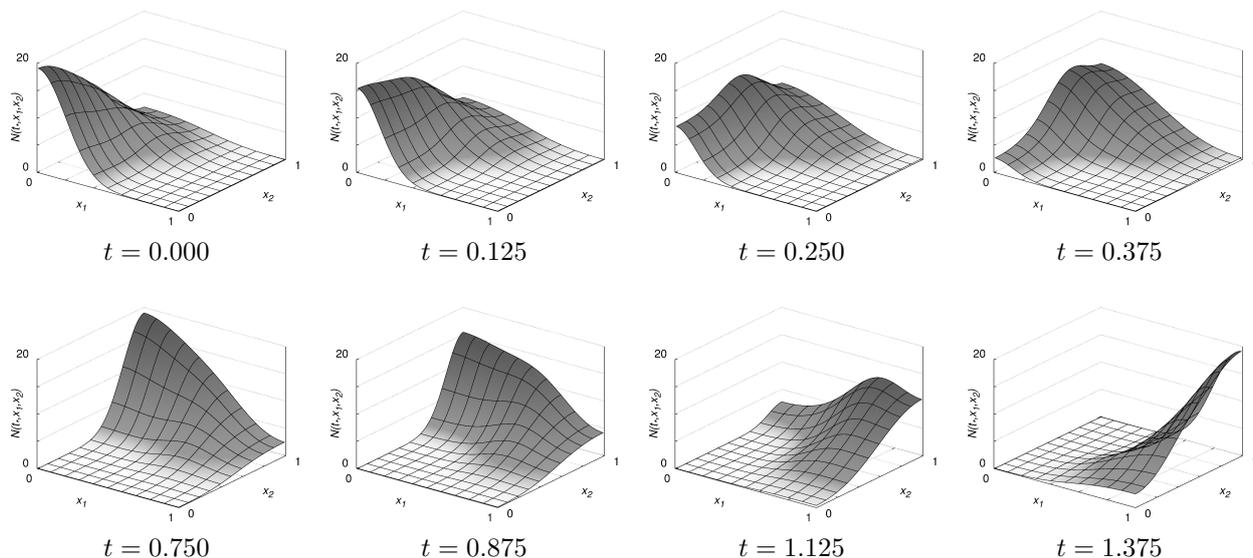


Рис. 1. Распределение $N(t, x)$ в случае режима самоорганизации “вихрь” при $r = 3$, $D = 0.042$ в разные моменты времени t .

Можно заметить, что после накопления популяции в углу области Ω до некоего пикового значения происходит запуск миграции, в течение которой центр популяции начинает плавно смещаться к другому смежному углу, после чего процесс повторяется.

Биологический смысл пространственно неоднородной структуры, названной нами режимом самоорганизации, состоит в том, что она предпочтительнее режима, качественно схожего с пространственно однородным, поскольку в таком случае популяция за счет постоянного перемещения по области Ω не вымирает с течением времени, всегда сохраняя некоторый необходимый для дальнейшего существования запас особей. В случае же режима, у которого среднее по пространству иногда оказывается около нуля, реальная популя-

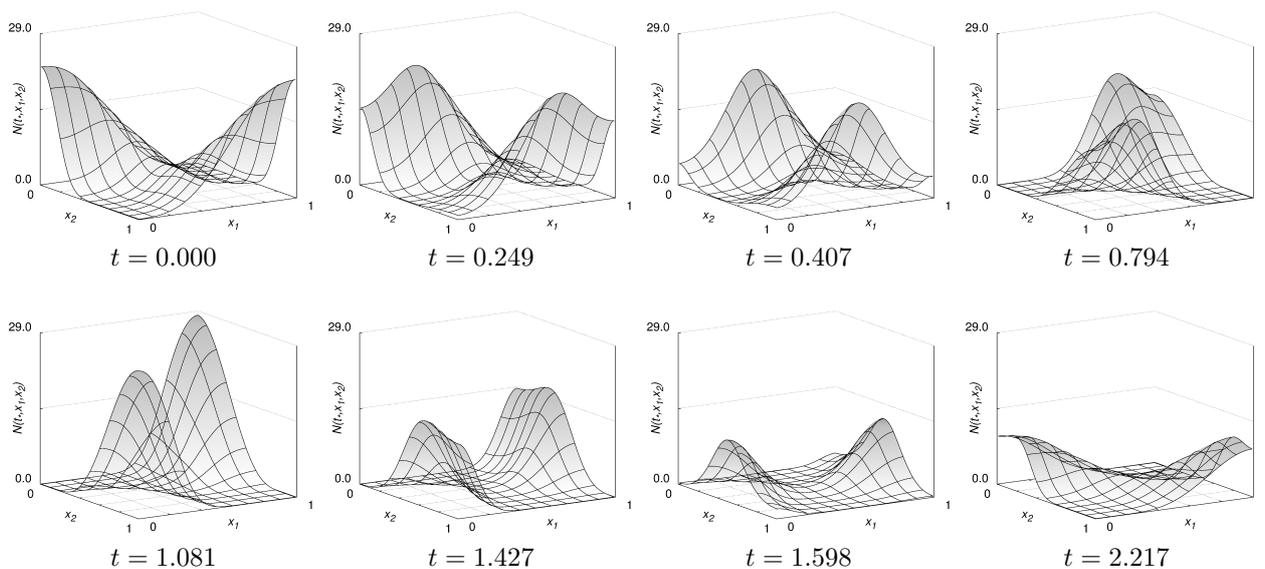


Рис. 2. Распределение $N(t, x)$ в случае режима двух согласованных вихрей при $r = 3$, $D = 0.037$ в разные моменты времени t .

ция может окончательно вымереть (в том числе за счет некоторых других неучтенных факторов) и тем самым прекратить свое существование.

Второй режим существует при $D < D_*$, является двухчастотным, сохраняется практически в неизменном виде при значительном уменьшении D . Характерный график распределения такого решения по времени имеет вид двух согласованных вихрей, представленный на рис. 2. В данном режиме две популяции постоянно находятся на противоположных зонах области Ω , в результате чего не наблюдается их слияния — лишь слабое взаимодействие в центре рассматриваемой области. Ось вращения таких вихреобразных структур не закреплена и совершает медленный оборот вокруг центра области Ω .

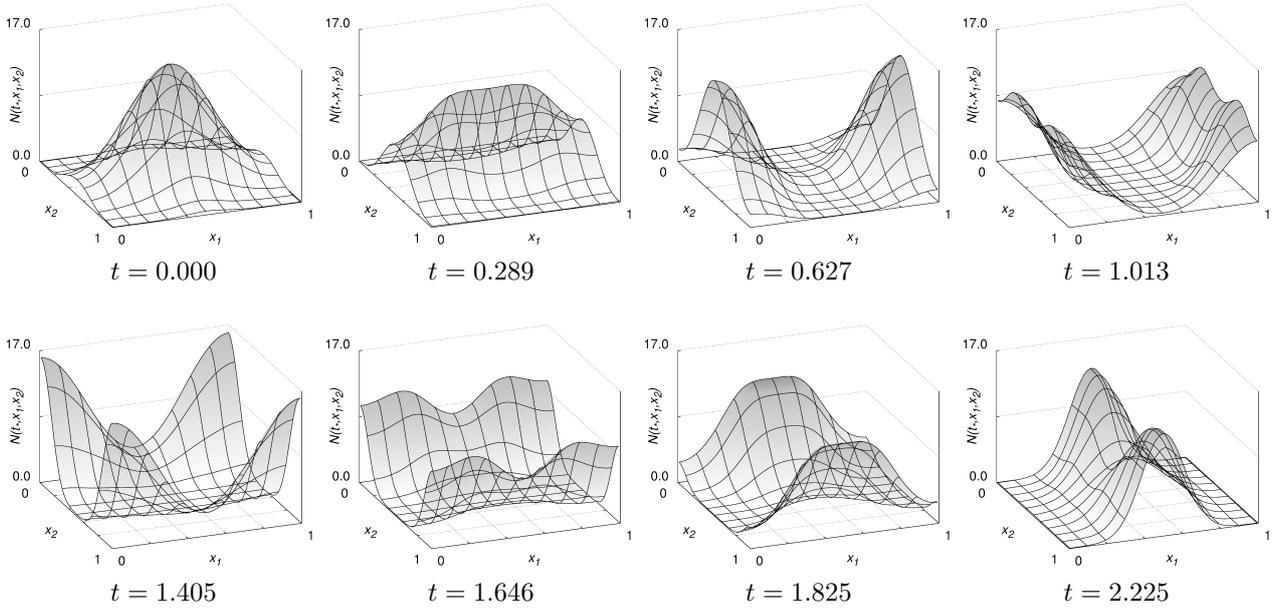


Рис. 3. Распределение $N(t, x)$ в случае режима четырех согласованных вихрей при $r = 3$, $D = 0.037$ в разные моменты времени t .

Третий режим самоорганизации существует при значительном снижении D ниже \tilde{D} , где $\tilde{D} \approx 0.031$, и является периодическим. Характерный график распределения такого решения, имеющий вид четырех согласованных вихрей, представлен на рис. 3. Популяция, находясь в центре области Ω , начинает расходиться к двум серединам противоположных ребер области, а по их достижении получившиеся популяции снова делятся на 2 части каждая,

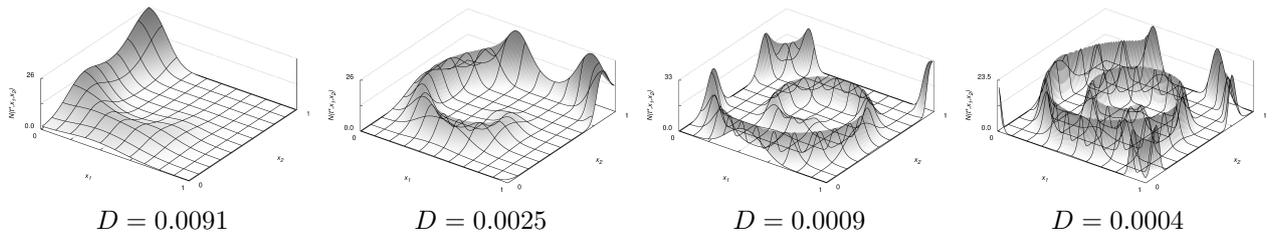


Рис. 4. Типичное распределение $N(t, x)$ во время перехода режима “вихрь” в спиральную волну при $r = 3$ и уменьшении параметра D .

распределяются по углам рассматриваемой области, после чего покидают углы и начинают обратный процесс слияния.

Отметим, что каждый из трех описанных режимов имеет симметричную пару.

За счет уменьшения значения D продемонстрирована трансформация режима ведущего центра, а также процесс перехода режима самоорганизации типа “вихрь” к классической спиральной волне (рис. 4).

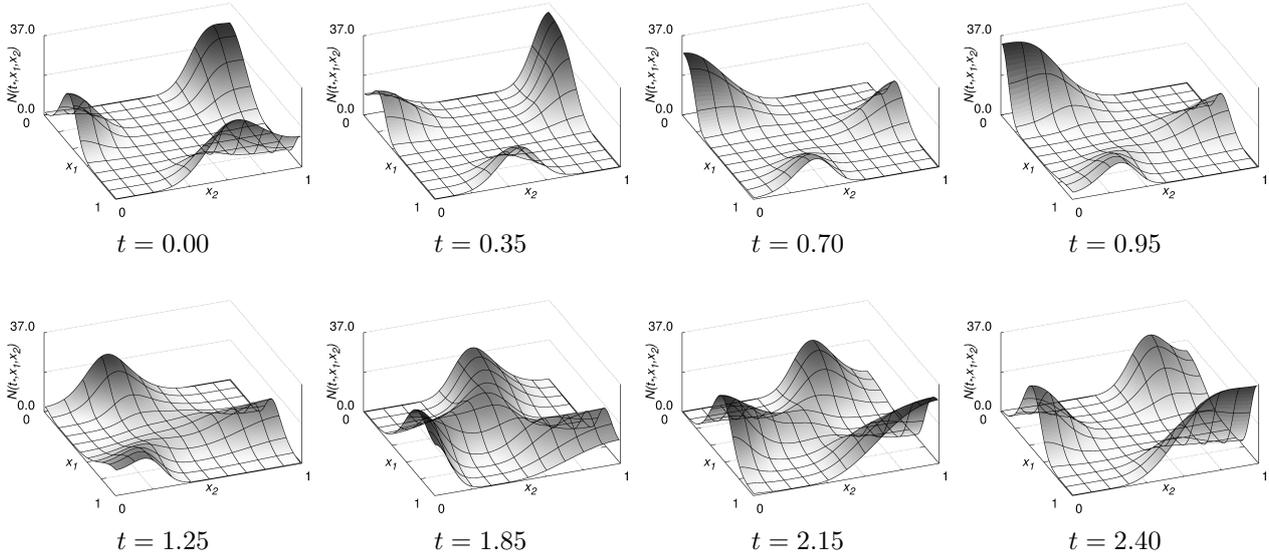


Рис. 5. Распределение $N(t, x)$ в случае режима спиральной волны с тремя фронтами при $r = 3$, $D = 0.02$ в разные моменты времени t .

Также изучены производные режимы сложной структуры при значении D , значительно ниже критического. Это режим «блуждающего ведущего центра», названный так из-за плавного циклического перемещения ведущего центра по одной из диагоналей рассматриваемой области, который является циклом с относительно большим периодом ($T \approx 116.81$ при $D = 0.0015$); режим двух однонаправленных пар согласованных вихрей — цикл с периодом $T \approx 3.239$ при $D = 0.005$; двухчастотный режим двух согласованных вихрей с разными направлениями вращения; многочастотный режим спиральной волны с тремя фронтами (на рис. 5 представлена вихреобразная вариация этого режима, которая так же, как и режим самоорганизации “вихрь”, описанный выше, претерпевает плавный переход к спиральным закруткам при уменьшении D). Отдельно по шагам разобран процесс генерации устойчивого режима, основанного на шестнадцати спиральных волнах.

В последней части главы рассмотрена проблема сосуществования аттракторов и, тем самым, возникновения мультистабильности. Особо выделены три интервала сосуществования описанных аттракторов — $D \in (0.0085, 0.0207)$, при котором сосуществуют шесть описанных в работе режимов, а также $D \in [0.0012, 0.002]$, при котором сосуществуют десять описанных режимов, и $D \in [0.0003, 0.0005]$, при котором сосуществуют шесть описанных режимов.

Во **второй главе** диссертационной работы рассматривается модель окислительно-восстановительных колебательных химических реакций, в основе которых лежит широко известная реакция Белоусова–Жаботинского. При этом за счет малого количества учитываемых компонентов и особой структуры уравнений изучаемая модель феноменологически близка к задаче «хищник – хищник – жертва» и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} &= D_1 \Delta v_1 + r_1(1 + a(1 - v_3) - v_1)v_1, & \frac{\partial v_1}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} &= 0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} &= D_2 \Delta v_2 + r_2(v_1 - v_2)v_2, & \frac{\partial v_2}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} &= 0, \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} &= D_3 \Delta v_3 + r_3(\alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2 - v_3)v_3, & \frac{\partial v_3}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где функции $v_1(t, s)$, $v_2(t, s)$, $v_3(t, s)$ отвечают за плотности концентраций основных компонентов реакции в момент времени t в точке s выпуклой ограниченной плоской области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial \Omega$ и единичной мерой, $\alpha \in (0, 1)$, параметры $r_1, r_2, r_3, a, D_1, D_2, D_3$ положительны, ν — направление внешней нормали к $\partial \Omega$.

Сначала с помощью локального анализа вблизи нетривиального состояния равновесия $(1, 1, 1)$ определяются условия возникновения цикла в точечной модели, являющегося пространственно однородным режимом в исходной распределенной модели (7). Характеристический многочлен для такого состояния равновесия имеет следующий вид:

$$\lambda^3 + \lambda^2 R + \lambda(Q + r_1 r_3 a \alpha) + P(1 + a), \quad (8)$$

где $R = r_1 + r_2 + r_3$, $P = r_1 r_2 r_3$, $Q = r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3$. На основе его анализа можно сформулировать следующие утверждения, которые обоснованы в первом параграфе второй главы работы.

Лемма 2. Пусть $a < a_{cr}$ ($a > a_{cr}$), где

$$a_{cr} = (QR - P)/(r_1 r_3 (r_2 - \alpha R)). \quad (9)$$

Тогда состояние равновесия $(1, 1, 1)$ устойчиво (неустойчиво).

Лемма 3. Пусть $a = a_{cr} + \varepsilon$, где a_{cr} определяется формулой (9), ε — положительный малый параметр. Тогда корни характеристического многочлена (8) $\lambda_{1,2}(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) + i\omega(\varepsilon)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\frac{d\tau}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} > 0, \quad \omega(0) = \pm((r_2 Q - \alpha P)/(r_2 - \alpha R))^{1/2}.$$

Далее, для формулировки бифуркационной теоремы выполняется замена переменных, в результате чего исследуется точечная модель вида:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= r_1(u_1 + 1)(-u_1 - (a_{cr} + \varepsilon)u_3), \\ \dot{u}_2 &= r_2(u_2 + 1)(u_1 - u_2), \\ \dot{u}_3 &= r_3(u_3 + 1)(\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2 - u_3). \end{aligned} \quad (10)$$

При $0 < \varepsilon \ll 1$, где $\varepsilon = a - a_{cr}$, применяется метод нормальных форм, что позволяет изучить окрестность начала координат системы (10).

В результате стандартной замены метода нормальных форм

$$(u_1, u_2, u_3)^T = \sqrt{\varepsilon}(\xi(\tau)e^{i\omega t}h + \text{к.с.}) + \varepsilon U_1(t, \tau) + \varepsilon^{3/2}U_2(t, \tau) + \dots, \quad (11)$$

рассматривая слагаемые при $\varepsilon^{3/2}$, приходим к уравнению на $\xi(\tau)$:

$$\xi' = (\varphi_0 + i\psi_0)\xi + (d_0 + ic_0)|\xi|^2\xi,$$

где $\varphi_0, \psi_0, d_0, c_0$ – действительные числа, определяемые из правых частей системы (10). На этой основе формулируется следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполнены неравенства:

$$\begin{aligned} r_1, r_2, r_3 > 0, \quad r_2 - \alpha R > 0, \quad r_2(R^2 + Q) - \alpha(R^3 + P) > 0, \\ r_2(R^2 + 4Q) - \alpha(R^3 + 4P) > 0, \quad \alpha(R + 2r_3) + r_1 - 3r_2 - r_3 < 0, \end{aligned} \quad (12)$$

а также $a = a_{cr} + \varepsilon$, где a_{cr} определяется формулой (9). Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ в некоторой достаточно малой окрестности начала координат существует ответвляющийся от него орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл системы (10) с асимптотикой (11).

Кроме того, возможен сценарий, при котором $\varphi_0 > 0$ и $d_0 > 0$.

Определение 3. Жесткая потеря устойчивости – сценарий бифуркации Андронова–Хопфа, в ходе которого особая точка теряет устойчивость при переходе пары ее комплексно-сопряженных собственных значений через мнимую ось в результате стягивания в эту точку неустойчивого предельного цикла и приобретения отделенного от нуля бассейна отталкивания.

Теорема 4. Пусть выполнены неравенства:

$$\begin{aligned} r_1, r_2, r_3 > 0, \quad r_2 - \alpha R > 0, \quad r_2(R^2 + Q) - \alpha(R^3 + P) > 0, \\ r_2(R^2 + 4Q) - \alpha(R^3 + 4P) > 0, \quad \alpha(R + 2r_3) + r_1 - 3r_2 - r_3 > 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда начало координат системы (10) жестко теряет устойчивость, к нему при $a < a_{cr}$, где a_{cr} определяется формулой (9), приближается неустойчивый цикл, который при $a = a_{cr}$ сливается с данным состоянием равновесия и отбирает у него устойчивость.

Теорема 5. Множества, определяемые условиями (12) и (13), непусты.

Далее рассматривается задача о диффузионной потере устойчивости полученного пространственно однородного цикла исходной модели в случае $\varphi_0 > 0, d_0 < 0$ и предположения, что

$$D_1 = \varepsilon dD_1^0, \quad D_2 = \varepsilon dD_2^0, \quad D_3 = \varepsilon dD_3^0, \quad d > 0. \quad (14)$$

В результате замены

$$\begin{aligned} (u_1(t, s), u_2(t, s), u_3(t, s))^T = \sqrt{\varepsilon}(he^{i\omega t}\xi(\tau, s) + \text{к.с.}) + \\ + \varepsilon U_1(t, \tau, s) + \varepsilon^{3/2}U_2(t, \tau, s) + \dots, \end{aligned} \quad (15)$$

приходим к квазинормальной форме¹⁴ вида

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = d(Dh, g)\Delta \xi + (\varphi_0 + i\psi_0)\xi + (d_0 + ic_0)|\xi|^2\xi, \quad \left. \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right|_{\partial \Omega} = 0,$$

где $D = \text{diag}\{D_1^0, D_2^0, D_3^0\}$, вектор $h = (h_1, h_2, h_3)^T$ такой, что

$$(A_0 - i\omega)h = 0, \quad \omega = \sqrt{Q + r_1 r_3 a \alpha}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} -r_1 & 0 & -r_1 a_{cr} \\ r_2 & -r_2 & 0 \\ r_3 \alpha & r_3(1 - \alpha) & -r_3 \end{pmatrix},$$

вектор $g = (g_1, g_2, g_3)^T$ удовлетворяет условиям $(A_0^T + i\omega)g = 0$ и $(h, g) = 1$. Выполняя нормирующие замены $\xi = \eta \sqrt{-\varphi_0/d_0} \exp(i\psi_0\tau)$, $\tau^* = \varphi_0\tau$ и проведя переобозначение $\tau = \tau^*$, получим уравнение Гинзбурга–Ландау

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \mu(1 - ic_1)\Delta \eta + \eta - (1 + ic_2)|\eta|^2\eta, \quad \left. \frac{\partial \eta}{\partial \nu} \right|_{\partial \Omega} = 0,$$

где $\mu = d\text{Re}(Dh, g)/\varphi_0$, $c_1 = -\text{Im}(Dh, g)/\text{Re}(Dh, g)$, $c_2 = c_0/d_0$, после чего удастся доказать следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть выполнены условия (14) и $(c_1 c_2 - 1)/\text{Re}(Dh, g) > 0$, тогда при всех достаточно малых $\varepsilon = a - a_{cr}$ краевая задача (7) имеет пространственно однородный цикл, асимптотика которого задается формулой (15), причем этот цикл экспоненциально орбитально устойчив при $d > d_*$ и неустойчив при $d < d_*$, где d_* определяется формулой

$$d_* = \frac{2\varphi_0(c_1 c_2 - 1)}{\pi^2(1 + c_1^2)\text{Re}(Dh, g)}. \quad (16)$$

При прохождении параметра d через критическое значение $d = d_*$ от пространственно однородного цикла ответвляются четыре симметричных пространственно неоднородных цикла. Численный анализ показал, что динамические свойства этих циклов (среднее значение по пространству, минимумы по пространству, минимумы среднего по пространству) остаются практически неизменными по сравнению с пространственно однородным циклом. При значениях параметра a , не близких к a_{cr} , и фиксированного набора величин r_1, r_2, r_3 и α показано, что потеря устойчивости однородного цикла происходит аналогично, в этом случае удастся построить график зависимости критического значения d_* от a . При тех же значениях параметров r_1, r_2, r_3, α и различных значениях d численно отыскивались устойчивые решения краевой задачи (7). На этом пути удалось выделить сосуществующие хаотические режимы двух типов (рис. 6).

- Решения первого типа близки по свойствам к однородному релаксационному циклу системы (глубокие минимумы и высокие δ -образные всплески среднего по пространству значения $v_1(t, s)$).

¹⁴ Васильева А.Б., Кащенко С.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией // Мат. сб. 1986. Т. 130(172), № 4(8). С. 488–499.

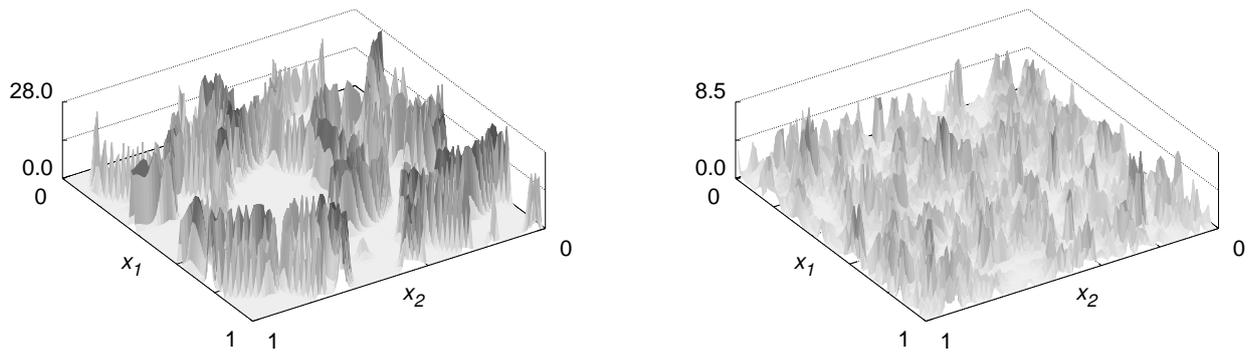


Рис. 6. Распределение значений $v_1(t, s)$ по области Ω при $t = T_*$ в случае режима с релаксационными свойствами (слева), самоорганизации (справа).

- Решения второго типа или решения с самоорганизацией имеют минимумы среднего значения $v_1(t, s)$, отделенные от нуля, при этом всплески не так велики, как для решений первого типа.

Отметим, что наблюдаемой является именно первая компонента решения $v_1(t, s)$, графики зависимостей остальных компонент системы $v_2(t, s)$ и $v_3(t, s)$ отдельно не приводятся. В главе дано сравнение динамических характеристик выделенных типов решений (среднее по времени и пространству, минимумы и максимумы среднего по пространству, минимумы и максимумы на плоскости). В последней части главы представлены графики старших ляпуновских показателей, вычисленные для разного количества точек разбиения, а также графики типичных разрезов и фазовых портретов, которые хорошо показывают разницу в хаотической структуре рассматриваемых режимов.

В **третьей главе** рассмотрена проблема вычисления оценок показателей Ляпунова для систем дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Определение 4. Показателем Ляпунова непрерывной вектор-функции $x(t)$, заданной на полуоси $\Pi = [0, \infty)$, называется величина, определяемая формулой¹⁵

$$\chi(x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |x(t)|. \quad (17)$$

Известно, что для конечномерных систем имеет место известная теорема Оселедеца, в которой утверждается, что линеаризованная на устойчивом решении система всегда является правильной по Ляпунову. Это позволяет при определении ляпуновских показателей (17) заменить верхний предел на обычный и, тем самым, эффективно численно оценивать эти величины. В случае уравнения с запаздыванием такую теорему доказать не удастся. Но наличие модельного уравнения с запаздыванием, для которого спектр может быть вычислен явно каким-либо иным способом, позволяет протестировать разработанный алгоритм и убедиться в его работоспособности.

¹⁵ Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости — М.: Наука. 1966.

В главе подробно описан предлагаемый алгоритм численной оценки показателей Ляпунова, содержащий две методики обработки решений линеаризованных систем, одна из которых основана на их непосредственном ортонормировании («метод импульсных функций»), а другая — на разложении решений линеаризованных систем в ряды Фурье и дискретном преобразовании Фурье («метод тригонометрических функций»). Разработанные методы протестированы на уравнении Хатчинсона

$$\dot{x} = rx(t)(1 - x(t - 1)),$$

у которого в случае единичного состояния равновесия при $r < \pi/2$ показатели Ляпунова совпадают с вещественными частями корней характеристического квазиполинома $P(\lambda) \equiv \lambda + r \exp(-\lambda)$, $\lambda = \tau + i\omega$. В итоге получены результаты, иллюстрирующие «близость» оцениваемых характеристик и показателей Ляпунова. Из таблиц расчетов оценок показателей Ляпунова становится видно, что точность вычисления показателей зависит от величины выбранного разбиения. Помимо сравнения точности методик и вопроса ограничений применимости также затронут вопрос соотношения скорости их расчетов для разных видов решений и конечного выбора методики для конкретной задачи.

Для целого ряда моделей, в частности, генных сетей и нейронных ассоциаций¹⁶, исследуемых в последнее время, является характерным так называемое квазиустойчивое поведение.

Определение 5. *Аттрактор — притягивающее предельное множество фазового пространства динамической системы.*

Определение 6. *Будем считать аттрактор квазиустойчивым, если спектр его устойчивости лежит внутри единичной окружности комплексной плоскости и имеются мультипликаторы, близкие к единичной окружности.*

Наличие у динамической системы квазиустойчивых режимов приводит к появлению длительных переходных процессов. В некоторых моделях с помощью методов большого параметра удается доказать существование такого феномена. Однако в случае, если асимптотические методы неприменимы, требуется инструмент численной оценки мультипликаторов. Такой инструмент дают алгоритмы оценки показателей Ляпунова.

В качестве системы с наблюдаемой квазиустойчивостью численно анализируется модель синаптического взаимодействия двух импульсных нейронов¹⁷. Указано пять комплектов сосуществующих режимов разных типов при особом выборе комбинаций параметров рассматриваемой системы, при этом на основе разработанных методик для каждого режима вычислены первые

¹⁶ Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Квазиустойчивые структуры в кольцевых генных сетях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58, № 5. С. 682–704.

¹⁷ Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Об одном способе математического моделирования химических синапсов // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 10. С. 1227–1244.

четыре показателя Ляпунова, которые полностью согласуются с аналитическими результатами. Таким образом, продемонстрирована важность применения алгоритмов вычисления показателей Ляпунова для систем с феноменом квазиустойчивости, затрудняющим их численное исследование.

В конце третьей главы продемонстрирована возможность применения разработанного алгоритма для пространственно распределенных моделей с запаздывающими аргументами на примере некоторых режимов логистической модели с запаздыванием и диффузией в плоской области, описанных в первой главе. Указаны первые пять показателей Ляпунова для аттракторов с разными свойствами. На примере двух режимов показано наличие эффекта квазиустойчивости в случае, если параметр D близок к значению, при котором режим теряет устойчивость. Помимо этого подтверждено наличие двухчастотности и многочастотности некоторых режимов. Малые значения показателей Ляпунова говорят о медленной сходимости решений к указанным режимам в случае не слишком удачного выбора начальных условий, что подчеркивает сложность задачи обнаружения новых аттракторов в рассматриваемой системе.

Отметим, что все результаты, описанные в этой главе, носят экспериментальный численный характер.

В **заключении** обобщаются результаты диссертационной работы и формулируются выводы.

В **приложении 1** приводятся некоторые подробные результаты численного анализа, кратко представленные в первой главе.

В **приложении 2** и **приложении 3** приводятся свидетельства о государственной регистрации программного комплекса «Моделирование логистического уравнения с запаздыванием и диффузией в плоской области» и программного комплекса «LESPE (Lyapunov Exponents Spectrum Parallel Estimator)».

Основные результаты и выводы

Рассмотрена задача поиска в плоской области устойчивых сосуществующих режимов динамики популяций, описываемой логистической моделью с запаздыванием и диффузией. Построена асимптотика пространственно однородного цикла и исследована зависимость его устойчивости от параметра диффузии, доказана бифуркационная теорема о фазовых перестройках в плоской области при критическом значении коэффициента диффузии. При значениях параметра роста популяции, не близких к критическим, проведен обширный численный эксперимент с целью поиска сосуществующих аттракторов задачи, в результате чего сделан вывод о существовании у краевой задачи решений двух типов, первый из которых наследует свойства однородного решения, а второй, названный режимом самоорганизации, более сложно распределен по пространству и имеет существенно более предпочтительные с точки зрения популяционной динамики свойства.

Рассмотрена система типа реакция–диффузия, которая может быть привлечена для моделирования реакции Белоусова–Жаботинского в плоской области, исследована ее локальная динамика. Доказана бифуркационная теорема о фазовых перестройках в плоской области при критическом значении коэффициента диффузии. Показано, что в модели наряду с пространственно неоднородными режимами, бифурцирующими от пространственно однородного, присутствуют хаотические колебательные режимы с самоорганизацией.

Разработан алгоритм численной оценки спектра показателей Ляпунова для систем с запаздывающими аргументами, включающий в себя две методики обработки решений, одна из которых основана на применении дискретного преобразования Фурье, получены результаты его тестирования на уравнении Хатчинсона. Проиллюстрировано применение алгоритма к модели из нейродинамики, подтверждено наличие у некоторых сосуществующих режимов феномена квазиустойчивости.

Список публикаций по теме диссертации

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ, а также входящих в базы цитирования Web of Science и Scopus:

1. Горюнов, В.Е. Особенности вычислительной реализации алгоритма оценки ляпуновских показателей систем с запаздыванием / В.Е. Горюнов // Модел. и анализ информ. систем. 2019. Т. 26, № 4. С. 572–582.
2. Aleshin, S. V. Estimation of Lyapunov exponents for quasi-stable attractors of dynamical systems with time delay / S. V. Aleshin, D. S. Glyzin, S. D. Glyzin, V. E. Goryunov // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1163, No. 012045.

В работе [2] Горюнову В.Е. принадлежат описание алгоритма, результаты его тестирования и все материалы численного анализа модели синаптически связанных нейроосцилляторов.

3. Glyzin, S. D. Invariant characteristics of self-organization modes in Belousov reaction modeling / S. D. Glyzin, V. E. Goryunov, A. Yu. Kolesov // Journal of Physics: Conference Series. 2018. V. 955, No. 012024.

В работе [3] Горюнову В.Е. принадлежат доказательство теоремы 1 о существовании орбитально асимптотически устойчивого предельного цикла и все материалы численного анализа.

4. Горюнов, В.Е. Бифуркация Андронова–Хопфа в одной биофизической модели реакции Белоусова / В.Е. Горюнов // Модел. и анализ информ. систем. 2018. Т. 25, № 1. С. 63–70.

Статья на английском языке:

Goryunov, V.E. The Andronov–Hopf bifurcation in a biophysical model of the Belousov reaction / *V.E. Goryunov* // Automatic Control and Computer Sciences. 2018. V. 52, No. 7. P. 694–699.

5. *Glyzin, S.* Spatially inhomogeneous modes of logistic differential equation with delay and small diffusion in a flat area / *S. Glyzin, V. Goryunov, A. Kolesov* // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. V. 38, No. 5. P. 898–905.

В работе [5] Горюнову В.Е. принадлежат доказательство теоремы 2 о фазовых перестройках в плоской области при критическом значении коэффициента диффузии и все материалы численного анализа.

Работы, опубликованные в прочих изданиях:

6. *Горюнов, В.Е.* Квазиустойчивость сосуществующих аттракторов нейродинамической модели с запаздыванием / *В.Е. Горюнов, М.М. Преображенская* // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2019. Т. 173. С. 26–47.

В работе [6] Горюнову В.Е. принадлежат все материалы раздела 4.

7. *Горюнов, В.Е.* Режимы с самоорганизацией одного класса распределенных биофизических моделей / *В.Е. Горюнов* // Международная научная конференция «Динамика. 2019. Ярославль», 10–12 октября 2019 г., Ярославль. С. 32–34.
8. *Горюнов, В.Е.* Сложные пространственно неоднородные режимы одного класса распределенных биофизических моделей / *В.Е. Горюнов* // Материалы XII Международной школы-конференции ХАОС-2019, 1–6 октября 2019 г., Саратов. С. 57–58.
9. *Горюнов, В.Е.* Численное определение квазиустойчивости аттракторов динамических систем с запаздыванием / *В.Е. Горюнов* // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа», 28 января – 2 февраля 2019 г. С. 108–109.
10. *Алешин, С.В.* Оценка инвариантных числовых показателей квазиустойчивых аттракторов динамических систем с запаздыванием / *С.В. Алешин, В.Е. Горюнов* // Международная научная конференция «Интегрируемые системы и нелинейная динамика», 1–5 октября 2018 г., Ярославль. С. 90–91.
11. *Aleshin, S.* Estimation of Lyapunov exponents for quasi-stable attractors of dynamical systems with time delay / *S. Aleshin, D. Glyzin, S. Glyzin, V. Goryunov* // International Conference on Computer Simulation in Physics and beyond, September 24–27, 2018, Moscow, Russia, Book of Abstracts. P. 70.

12. Горюнов, В.Е. Бифуркация Андронова–Хопфа в одной биофизической модели реакции Белоусова / В.Е. Горюнов // Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Селима Григорьевича Крейна, 13–19 ноября 2017 г., Воронеж. С. 87–88.
13. Glyzin, S. Invariant numerical characteristics of diffusion chaos in the problem of Belousov reaction simulating / S. Glyzin, V. Goryunov, A. Kolesov // International Conference on Computer Simulation in Physics and beyond, October 9–12, 2017, Moscow, Russia, Book of Abstracts. P. 90.
14. Глызин, С.Д. Численный анализ диффузионного хаоса в задаче, моделирующей реакцию Белоусова / С.Д. Глызин, В.Е. Горюнов, А.Ю. Колесов // Международная научная конференция «Новые тенденции в нелинейной динамике», 5–7 октября 2017 г., Ярославль. С. 29–30.
15. Glyzin, S. Spatially inhomogeneous modes of logistic equation with delay and small diffusion in a flat area / S. Glyzin, V. Goryunov, A. Kolesov // International Conference «Supercomputer Simulations in Science and Engineering», September 6–10, 2016, Moscow, Russia, Book of Abstracts. P. 13.
16. Горюнов, В.Е. Пространственно-неоднородные режимы логистического уравнения с запаздыванием при диффузии, близкой к критической / В.Е. Горюнов // Международная конференция «Нелинейные методы в физике и механике», 1–3 октября 2015 г., Ярославль. С. 28–29.

Подписано в печать . . . Формат 60x84/16
Тираж 100 экз. Заказ / .
Отдел оперативной полиграфии ЯрГУ
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.