На правах рукописи

Мерчела Вассим

Теоремы о возмущениях накрывающих отображений обобщенных метрических пространств в исследовании дифференциальных и интегральных уравнений

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Тамбов — 2021

Работа выполнена на кафедре функционального анализа федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»

Научный руководитель:	*Жуковский Евгений Семенович* доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
Официальные оппоненты:	*Максимов Владимир Петрович* доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике ФГАОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет»
	Обуховский Валерий Владимирович доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет»
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук

Защита диссертации состоится 22 апреля 2022 г. в 17 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.025.08 при ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых» по адресу: 600024, г. Владимир, проспект Строителей, 11, ауд. 237, ВЛГУ, педагогический институт.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Владимирского государственного университета и на сайте http : //diss.vlsu.ru

Автореферат разослан «___» марта 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.025.08,
кандидат физико-математических наук, доцент Наумова С.Б.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Изучение дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной (называемых также неявными), актуально для теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем, теории управления, смежных разделов анализа. Такие уравнения используют в моделировании процессов, адекватное описание которых должно учитывать зависимость их характеристик от скорости изменения состояния объектов. Подобные процессы характерны для неголономных механических систем[1], электрических колебательных контуров[2], электромагнитных волн в холодной анизотропной плазме[3], установления термодинамического равновесия (релаксации)[4] и др.

Теория динамических систем, описываемых неявными дифференциальными уравнениями, восходит к А. Пуанкаре[5]. Современная качественная теория таких уравнений и теория особенностей разработаны в работах В.И. Арнольда[6], А.А. Давыдова[7], Л. Дара[8], А. О. Ремизова[9] и др. авторов.

Исследование неявных дифференциальных уравнений встречает дополнительные трудности, если порождающая уравнение функция не является гладкой или непрерывной, а например, удовлетворяет условиям Каратеодори. Методы качественной теории и многие классические методы анализа оказываются

[1] *И.В. Закалюкин.* Особенности уравнений динамики некоторых неголономных систем и неявные дифференциальные уравнения. Автореферат дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.01 [Место защиты: Московский авиационный институт (государственный технический университет)]. М., 2010.

[2] *А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин.* Теория колебаний. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1959.

[3] *А.Д. Пилия, В.И. Федоров.* Особенности поля электромагнитной волны в холодной анизотропной плазме с двумерной неоднородностью // ЖЭТФ. 1971. Т. 60. № 1. С. 389–399.

[4] *F. Tokens.* Constrained equations; a study of imphcit differential equations and their discontinuous solutions. In Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences. Lect. Notes Math. Berlin: Springer, 1976. V. 525. P. 143–234.

[5] *А. Пуанкаре.* Избранные груды, т. III. М.: Наука, 1974.

[6] *В.И. Арнольд.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

В.И. Арнольд. Теория катастроф. М.: Знание. Сер. мат. кибернетика, № 9. 1981.

[7] *A.A. Davydov.* Qualitative Theory of Control Systems. Translations of Mathematical Monographs. V. 141. American Mathematical Society. Providence, Rhode Islans. 1994.

А.А. Давыдов. Особенности предельных направлений типичных неявных ОДУ высших порядков // Дифференциальные уравнения и динамические системы, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Тр. МИАН, 236, М.: Наука, 2002, С. 134–141.

А.А. Давыдов. Нормальная форма уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности его особой точки // Функц. анализ и его приложения. 1985. Т. 19. № 2. С. 1–10.

[8] *L. Dara.* Singularites generiques des equations differentielles multiformes // Bol. Soc. Bras. Mat. 1975. V. 6. № 2. P. 95–128.

[9] *А.О. Ремизов.* Многомерная конструкция Пуанкаре и особенности поднятых полей для неявных дифференциальных уравнений // Оптимальное управление. Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 19. М.: РУДН, 2006, С. 131–170.

А.О. Ремизов. Неявные дифференциальные уравнения и векторные поля с неизолированными особыми точками // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 11. С. 105–124.

неэффективными. В частности, в исследованиях вопросов существования, зависимости от параметров, устойчивости решений задачи Коши и краевых задач для уравнений, разрешенных относительно производной, широко исследуются теоремы о неподвижных точках операторов. Однако, для неявных уравнений применение результатов о неподвижных точках затруднено, а во многих случаях и невозможно. В теории неявных дифференциальных уравнений роль, аналогичную роли теорем о неподвижных точках, могут играть утверждения об уравнениях с накрывающими (регулярными) отображениями в метрических и обобщенно метрических пространствах (в том числе, об уравнениях, определяющих точки совпадения отображений). Диссертация посвящена следующим актуальным теоретическим задачам: получению результатов об уравнениях с накрывающими отображениями в пространствах с обобщенными метриками; разработке на их основе методов исследования дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной; применению разрабатываемых методов к исследованию задачи Коши и краевых задач.

Степень разработанности темы исследования. Теории накрывающих (регулярных) отображений нормированных и метрических пространств, ее приложениям посвящены работы Е.Р. Авакова, А.В. Арутюнова, Б.Д. Гельмана, А.В. Дмитрука, А.Д. Иоффе, Е.С. Жуковского, С.Е. Жуковского, А.А. Милютина, Б.С. Мордуховича, Н.П. Осмоловского, В.М. Тихомирова, А. Удерзо и др. авторов. В первой половине XX века Л.А. Люстерником[10] и несколько позже Л.М. Грейвсом[11] получены утверждения о накрывающих отображениях банаховых пространств. В 80-е годы XX века для отображений, действующих из метрического пространства в линейное метрическое пространство, А.А. Милютиным доказана теорема об устойчивости свойства накрывания к липшицевым возмущениям[12]. Новые возможности приложений накрывающих отображений в анализе открыла теорема А.В. Арутюнова[13] о точке совпадения накрывающего и липшицева отображений метрических пространств. Распространению и приложениям этого результата посвящены многочисленные работы[14], был

[10] *Л.А. Люстерник.* Об условных экстремумах функционалов // Математ. сборник. 1934. Т. 41. С. 390–401

[11] *L.M. Graves.* Some mapping theorems // Duke Math. J. 1950. V. 17. P. 111–114.

[12] *А.В. Дмитрук, А.А. Милютин, Н.П. Осмоловский.* Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. 1980. Т. 35. № 6(216). С. 11–46.

[13] *А.В. Арутюнов.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.

[14] *A.V. Arutyunov, E.S. Zhukovskiy, S.E. Zhukovskiy, Z.T. Zhukovskaya.* Kantorovich's fixed point theorem and coincidence point theorems for mappings in vector metric spaces // Set-Valued Var. Anal. 2021.

B. Zhang, W. Ouyang. Coincidence points for set-valued mappings with directional regularity // Fixed Point Theory. 2021. V. 22, № 1. P. 391–406.

Ю.Н. Захарян, Т.Н. Фоменко. О сохранении совпадений у однопараметрического семейства пар многозначных отображений типа Замфиреску // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. мех. 2021. № 1. С. 28–34.

Т.Н. Фоменко. Сохранение существования точки совпадения при некоторых дискретных преобразованиях пары отображений метрических пространств // Тр. ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23. № 4. С. 292–300.

доказан локальный вариант этой теоремы[15], получены условия устойчивости точек совпадения к малым изменениям отображений[16]. С целью исследования дифференциальных и интегральных уравнений была рассмотрена задача о нелинейных липшицевых возмущениях накрывающих отображений метрических пространств[17].

Исследованию неявных дифференциальных уравнений методами, основанными на результатах о накрывающих отображениях метрических пространств, посвящены работы Е.Р. Авакова, А.В. Арутюнова, Е.С. Жуковского, С.Е. Жуковского, Е.А. Плужниковой, В.С. Трещева, V.A. de Oliveira, F.L. Pereira. Для задачи Коши были получены условия разрешимости и оценки решений[17], условия устойчивости решений к малым изменениям входящих в уравнение функций[18], условия непрерывной зависимости решений от параметоров[19]. Также были исследованы вопросы разрешимости краевых задач[20], начаты исследования неявных дифференциальных включений[21] и задач управления для неявных дифференциальных уравнений[22]. В этих работах краевые задачи и задачи управления сводятся к уравнениям и включениям с отображениями в произведениях метрических пространств. Эти произведения пространств наделяются векторной метрикой, принимающей значения в $\mathbb{R}^n_+$, и используются результаты о накрывающих отображениях векторно метрических пространств.

В связи с исследованиями кратных неподвижных точек и кратных точек совпадения, систем различных функциональных уравнений, краевых задач и задач управления для дифференциальных уравнений, некоторых других теоретических и прикладных задач возникла потребность в распространении результатов о накрывающих отображениях на векторно метрические простран-

---

[15] *A. Arutyunov, E. Avakov, B. Gel'man, A. Dmitruk, V. Obukhovskii.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications. 2009. V. 5. № 1. P. 105–127.

[16] *A.V. Arutyunov, E.R. Avakov, S.E. Zhukovskiy.* Stability theorems for estimating the distance to a set of coincidence points // SIAM Journal on Optimization. 2015. V. 25. № 2. P. 807–828.

А.В. Арутюнов. Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Матем. заметки. 2009. Т. 86. № 2. С. 163–169.

[17] *Е.Р. Аваков, А.В. Арутюнов, Е.С. Жуковский.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.

[18] *А.В. Арутюнов, Е.С. Жуковский, С.Е. Жуковский.* О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.

[19] *С.Е. Жуковский.* Минимумы функционалов и неявные дифференциальные уравнения // Вестник Тамбовского университета. Серия: естеств. техн. науки. 2017. Т. 22. № 6. С. 1298–1303.

[20] *Е.С. Жуковский, Е.А. Плужникова.* Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 439–455.

[21] *A. Arutyunov, V.A. de Oliveira, F.L. Pereira, E. Zhukovskiy, S. Zhukovskiy.* On the solvability of implicit differential inclusions // Applicable Analysis. 2015. V. 94. № 1. P. 129–143.

[22] *Е.С. Жуковский, Е.А. Плужникова.* Об управлении объектами, движение которых описывается неявными нелинейными дифференциальными уравнениями // Автомат. и телемех. 2015. № 1. С. 31–56.

ства и на пространства с другими «ослабленными метриками», в частности, на пространства с расстоянием, удовлетворяющим лишь аксиоме тождества. В работах Е.С. Жуковского[23] определен аналог свойства накрывания для отображений, действующих в пространствах с векторнозначными метриками, для таких отображений получены утверждения о липшицевых возмущениях. В статье А.В. Арутюнова и А.В. Грешнова[24] получена теорема о точках совпадения отображений в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах. В дальнейших исследованиях утверждения о неподвижных точках и точках совпадений были распространены на отображения общих f-квазиметрических пространств[25]. Отметим, что кроме работ автора диссертации в литературе не рассматривалась задача о возмущениях накрывающих отображений, действующих из метрического пространства в пространство с расстоянием, удовлетворяющим лишь аксиоме тождества.

В диссертации предлагаются новые результаты об уравнениях с накрывающими отображениями, действующими из метрического пространства в пространство с расстоянием, удовлетворяющим аксиоме тождества, распространяющие теорему Арутюнова[13] и цитированные выше результаты[15,17,18]. На основании этих результатов разрабатываются методы исследования дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной, а также интегральных уравнений. Получены условия существования и оценки решений задачи Коши и краевых задач для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной, а также условия существования и оценки решений интегральных уравнений.

Цели и задачи. Основной целью работы является разработка аппарата исследования дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной, основанного на результатах о накрывающих отображениях; изучение на этой основе свойств решений задачи Коши и краевых задач.

Основными задачами работы являются:

– получение теорем о решениях уравнений с отображениями, действующими из метрического пространства в пространство с расстоянием, в том числе, о

[23] *Е.С. Жуковский.* О возмущениях векторно накрывающих отображений и системах уравнений в метрических пространствах // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57. № 2. С. 297–311.

Е.С. Жуковский. О точках совпадения многозначных векторных отображений метрических пространств // Математ. заметки. 2016. Т. 100. № 3. С. 344–362.

[24] *А.В. Арутюнов, А.В. Грешнов.* (q_1, q_2)-квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82. № 2. С. 3–32

[25] *Е.С. Жуковский.* Неподвижные точки сжимающих отображений f-квазиметрических пространств // Сиб. матем. журн. 2018. Т. 59. № 6. С. 1338–1350.

Т.Н. Фоменко Существование нулей многозначных функционалов, совпадения и неподвижные точки в f-квазиметрическом пространстве // Матем. заметки. 2021. Т. 110. № 4. С. 598–609.

Т.Н. Фоменко. Поиск нулей функционалов, неподвижные точки и совпадения отображений в квазиметрических пространствах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2019. № 6. С. 14–22.

точках совпадения таких отображений;

– исследование свойств накрывания конкретных отображений пространств измеримых функций, возникающих при исследовании дифференциальных и интегральных уравнений;

– исследование интегральных уравнений в пространствах измеримых функций, получение условий существования решений, их оценок, их устойчивости к малым изменениям уравнений;

– исследование задачи Коши и краевых задач для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной искомой функции, получение условий существования решений, их оценок, их устойчивости к малым изменениям уравнений, начальных и краевых условий.

Научная новизна. Выносимые на защиту положения являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты значимы для общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложений, теории интегральных уравнений, теории операторных уравнений и соответствующих разделов анализа.

Методология и методы исследования. При исследовании уравнений с отображениями, действующими из метрического пространства в пространство с расстоянием, в том числе, уравнения, определяющего точки совпадения отображений, учитываются топологические свойства пространств с расстоянием и используются итерационные методы доказательства существования решений уравнений. Для исследования задачи о непрерывной зависимости от параметров решений операторных уравнений используются результаты о полунепрерывных многозначных отображениях[26]. При исследовании свойств накрывания конкретных отображений в диссертации предлагается определение расстояния в пространстве измеримых функций, используются стандартные методы теории функций и методы многозначного анализа; в частности, для установления связи свойств накрывания оператора Немыцкого и порождающей его функции используется лемма Филиппова об измеримом выборе[27]. Для исследования задачи Коши и краевых задач используется редукция (называемая W-подстановкой Азбелева[28]) к интегральному уравнению в пространстве измеримых функций. К полученному интегральному уравнению применяются доказанные в диссертации утверждения о накрывающих отображениях, действующих из метрического пространства в пространство с расстоянием.

[26] *А.В. Арутюнов.* Лекции по выпуклому и многозначному анализу. М.: Физматлит, 2014.

Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: Либроком, 2011.

[27] *Филиппов А.Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестник Московского университета. Серия математ., механ., астрон., физ., хим. 1959. № 2. С. 25–32.

[28] *Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

Положения, выносимые на защиту.

1. Утверждения о существовании, оценках, устойчивости точек совпадения отображений, действующих из метрического пространства в пространство с расстоянием; утверждения о существовании, непрерывной зависимости от параметра решений уравнения $G(x) = y$ с отображением G, действующим из метрического пространства в пространство с расстоянием и представимом в виде $G(x)=F(x,x)$, где отображение F является накрывающим по первому аргументу и липшицевым по второму аргументу.

2. Утверждения о накрывающих свойствах оператора Немыцкого, действующего в пространствах измеримых функций; утверждения о существовании, оценках, решений функциональных уравнений в пространствах измеримых функций, их устойчивости к изменениям функций, порождающих уравнение.

3. Утверждения о существовании, оценках и корректности решений интегральных уравнений в пространствах измеримых функций.

4. Утверждения о существовании, оценках и корректности решений задачи Коши для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной.

5. Утверждения о существовании, оценках и корректности решений краевой задачи для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной.

Степень достоверности и апробация. Все результаты диссертации снабжены подробными доказательствами и опубликованы в рецензируемых научных изданиях. Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

– Тамбовский городской семинар по теории функционально-дифференциальных уравнений и включений, Тамбов, Россия (2019, 2020, 2021).

– Международная научная конференция «Колмогоровские чтения – VIII. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ-2018)», посвященная 115-летию со дня рождения А.Н. Колмогорова и 100-летию Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина, Тамбов, Россия (2018).

– International conference on mathematics «An Istanbul Meeting for World Mathematicians», Istanbul, Turkey (2018).

– Summer school «Identification and Control: some challenges», Monastir, Tunisia (2019).

– Международная Воронежская весенняя математическая школа «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXX», Воронеж, Россия (2019).

– Международная конференция «Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019)», посвященная 95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского, Екатеринбург, Россия (2019).

– International scientific OTHA online workshop on operator theory and harmonic analysis and their applications, Online, Russia (2020).

– Всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование (СТММ 2020)», посвященная памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова, Ижевск, Россия (2020).

– International e-Conference on Nonlinear Analysis and its Application (ICNAA 2020), Online, India.

– Международная научная конференция «Колмогоровские чтения – IX. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ-2020)», посвященная 70-летию профессора А.И. Булгакова, Тамбов, Россия (2020).

– III Международный семинар «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби (CGS'2020)», Екатеринбург, Россия (2020).

– Научный семинар «Нелинейный анализ и его приложения» кафедры «Функциональный анализ и его приложения» ВлГУ, Владимир, Россия (2021).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 12 работах, из которых 7 работ опубликовано в журналах из перечня ВАК (в том числе работы [1–3] — в изданиях, входящих в системы цитирования Web of Science Core Collection и Scopus, работы [4–6] — в издании, индексирующемся в Web of Science Russian Science Citation Index).

Личный вклад автора. Все основные результаты диссертации получены автором лично. Из работ, выполненных в соавторстве, в диссертацию вошли только результаты, принадлежащие автору.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, содержащих 5 параграфов, заключения, списка обозначений и списка литературы. Общий объем работы составляет 127 страницы. Список литературы содержит 80 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Приведем основные положения и результаты диссертации (сохраняя нумерацию утверждений и формул из основного текста). Во **введении** описаны актуальность темы исследования и степень ее разработанности, поставлены цели и задачи, аргументирована научная новизна, достоверность, теоретическая и практическая значимость результатов, перечислены использованные методы, выносимые на защиту положения, публикации и доклады по теме диссертации, кратко изложена структура работы.

В главе 1 рассмотрены накрывающие отображения, действующие из метрического пространства в пространство с расстоянием, удовлетворяющем аксиоме тождества, и получены утверждения об уравнениях с таким отображениями.

В параграфе 1 предлагаются утверждения, распространяющие теорему Арутюнова[13] и некоторые другие известные утверждения[15,29] о существовании и свойствах точек совпадения на отображения, действующие из метрического пространства в множество с расстоянием. В этом параграфе четыре пункта. В пункте 1.1.1 приведены необходимые сведения о пространстве с расстоянием и об отображениях, действующих из метрического пространства в пространство с расстоянием. Обозначим $\overline{\mathbb{R}}_+ := [0, +\infty]$. Пусть задано метрическое пространство $X = (X, \rho)$ с метрикой $\rho : X^2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Обозначим $B_X(x_0, r) := \{x \in X |\, \rho(x, x_0) \le r\}$ — замкнутый шар в X с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Далее, пусть задано множество $Y \neq \emptyset$, на котором определено *расстояние* — отображение $d : Y^2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ такое, что для $y_1, y_2 \in Y$ равенство $d(y_1, y_2) = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $y_1 = y_2$. *Сходимость* при $i \to \infty$ последовательности $\{y_i\} \subset Y$ к элементу $y \in Y$ определим соотношением $d(y, y_i) \to 0$. Отметим, что предел y последовательности может быть не единственным, и из $d(y, y_i) \to 0$ не следует $d(y_i, y) \to 0$.

В пункте 1.1.2 на отображения рассматриваемых пространств перенесены следующие определения, известные[13] для отображений метрических пространств: отображение $f : X \to Y$ названо α*-накрывающим*, $\alpha > 0$, если

$$\forall x_0 \in X \quad \forall y \in Y \quad \exists x \in X : \ f(x) = y \quad \text{и} \quad \rho(x, x_0) \le \frac{1}{\alpha} d\big(f(x), f(x_0)\big);$$

и β*-липшицевым*, $\beta \ge 0$, если

$$\forall x, u \in X \ \ d\big(f(x), f(u)\big) \le \beta \rho(x, u).$$

В пункте 1.1.2 также доказано утверждение, распространяющее теорему Арутюнова[13] о точках совпадения на отображения, действующие из метрического пространства в множество с расстоянием.

В пункте 1.1.3 предлагается распространение этих результатов, использующее следующее обобщение понятий накрывания и липшицевости. Пусть $U \subset X$. Для отображения $f : X \to Y$ определим множества:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}_\alpha[f; U] &:= \big\{(x, y) \in X \times Y \mid \\ &\qquad \exists u \in U \ f(u) = y, \ \rho(u, x) \le \alpha^{-1} d(y, f(x)), \ \rho(u, x) < \infty\big\}; \\ \mathrm{Lip}_\beta[f; U] &:= \big\{(x, y) \in X \times Y \mid \forall u \in U \ f(u) = y \Rightarrow d(y, f(x)) \le \beta \rho(u, x)\big\}; \end{aligned}$$

первое из которых назовем *множеством* α*-накрывания отображения* f *относительно множества* U, а второе — *множеством* β*-липшицевости* f *от-*

[29] *А.В. Арутюнов.* Точки совпадения двух отображений // Функц. анализ и его прил. 2014. Т. 48. № 1. С. 89–93.

носительно U. Очевидно, соотношение $\mathrm{Cov}_\alpha[f;X]=X\times Y$ означает, что отображение f α-накрывающее, а соотношение $\mathrm{Lip}_\beta[f;X]=X\times Y$ справедливо тогда и только тогда, когда f β-липшицево.

Пусть заданы отображения $\psi,\varphi : X\to Y$. Их точкой совпадения называют $x\in X$ такой, что $\psi(x)=\varphi(x)$.

Теорема 1.1.2. *Пусть метрическое пространство* X *является полным, и пусть заданы* $\alpha>\beta\geq 0$, $x_0\in X$ *такие, что* $d\big(\varphi(x_0),\psi(x_0)\big)<\infty$. *Положим* $R:=(\alpha-\beta)^{-1}d\big(\varphi(x_0),\psi(x_0)\big)$, $U:=B_X(x_0,R)$. *Предположим, что для любого* $x\in U$ *выполнены включения* $(x,\psi(x))\in\mathrm{Lip}_\beta[\varphi;U]$, $(x,\varphi(x))\in\mathrm{Cov}_\alpha[\psi;X]$; *на шаре* U *отображение* ψ *является замкнутым, а* φ *— непрерывным. Тогда в шаре* U *существует точка совпадения отображений* ψ,φ.

Также в пункте 1.1.3 получены условия устойчивости точек совпадения отображений к изменениям этих отображений.

В заключительном пункте 1.1.4 параграфа 1 определены условия полунепрерывной зависимости от параметра множества точек совпадения. Пусть T — топологическое пространство и пусть заданы отображения $\psi,\varphi\colon X\times T\to Y$. Рассмотрим уравнение

$$\psi(x,t)=\varphi(x,t),$$

с параметром $t\in T$ относительно неизвестного $x\in X$. Обозначим через $\mathrm{Coin}(t)$ множество решений этого уравнения, т. е. множество точек совпадения отображений $\psi(\cdot,t),\varphi(\cdot,t)\colon X\to Y$.

Для каждого $x\in X$ определим функционал

$$\eta_x\colon T\to\overline{\mathbb{R}}_+,\quad \eta_x(t)=d\big(\varphi(x,t),\psi(x,t)\big).$$

Зафиксируем $t_0\in T$ и рассмотрим условия

(C_-) для любого $x\in X$, если $\eta_x(t_0)=0$, то для любого $\varepsilon>0$ существует окрестность $W(t_0)$ точки t_0 такая, что $\eta_x(t)<\varepsilon$ при всех $t\in W(t_0)$;

($\widehat{\mathrm{C}}_-$) для любого $\varepsilon>0$ существует окрестность $W(t_0)$ точки t_0 такая, что для любого $x\in X$, если $\eta_x(t_0)=0$, то $\eta_x(t)<\varepsilon$ при всех $t\in W(t_0)$;

($\widehat{\mathrm{C}}_+$) для любого $\varepsilon>0$ существует окрестность $W(t_0)$ точки t_0 такая, что для любых $x\in X$, $t\in W(t_0)$, если $\eta_x(t)=0$, то $\eta_x(t_0)<\varepsilon$.

Теорема 1.1.4. *Пусть метрическое пространство* X *полное,* $0\leq\beta<\alpha$, $t_0\in T$. *Пусть существует такая окрестность* $V(t_0)$ *точки* t_0, *что при любом* $t\in V(t_0)$ *найдется* $u\in X$, *для которого* $d\big(\varphi(u,t),\psi(u,t)\big)<\infty$; *при всех* $x\in X$, $t\in V(t_0)$ *выполнены включения* $(x,\psi(x,t))\in\mathrm{Lip}_\beta\big[\varphi(\cdot,t),X\big]$,

$(x,\varphi(x,t)) \in \mathrm{Cov}_\alpha\big[\psi(\cdot,t),X\big]$; *отображение* $\psi(\cdot,t)\colon X \to Y$ *является замкнутым, а отображение* $\varphi(\cdot,t)\colon X \to Y$ *— непрерывным. Тогда при любом* $t \in V(t_0)$ *множество* $\mathrm{Coin}(t)$ *не пусто и замкнуто в* X. *Кроме того, многозначное отображение* $\mathrm{Coin}\colon V(t_0) \rightrightarrows X$, *при выполнении условия* (C_-), *является полунепрерывным снизу в точке* t_0, *при выполнении условия* $(\widehat{\mathrm{C}}_-)$ *—* h*-полунепрерывным снизу в* t_0, *а при выполнении условия* $(\widehat{\mathrm{C}}_+)$ *—* h*-полунепрерывным сверху в* t_0.

В параграфе 1.2 рассматривается уравнение $G(x) = \widehat{y}$ относительно неизвестного x — элемента метрического пространства X. Предполагается, что действующее из X в Y (Y — это множество, снабженное расстоянием) отображение G представимо в виде отображения двух элементов, по одному из которых является накрывающим, а по другому — липшицевым. Для рассматриваемого уравнения в пункте 1.2.1 получены утверждения о существовании и оценках решений, об устойчивости решений к изменениям отображения G и правой части $\widehat{y} \in Y$. Сформулируем эти теоремы. Пусть заданы отображение $F : X \times X \to Y$ и элемент $\widehat{y} \in Y$. Рассмотрим уравнение

$$G(x) := F(x,x) = \widehat{y}. \tag{1}$$

Определим *множество замкнутости отображения* $G : X \to Y$ *относительно множества* $U \subset X$ формулой

$$\mathrm{Cl}[G;U] := \big\{(x,y) \in X \times Y \mid \forall \{x_n\} \subset U \ x_n \to x,\ G(x_n) \to y \Rightarrow G(x) = y\big\}.$$

Очевидно, соотношение $\mathrm{Cl}[G;X] = X \times Y$ равносильно замкнутости отображения G.

Теорема 1.2.1. *Пусть метрическое пространство* X *является полным,* $x_0 \in X$, $\alpha > \beta \geq 0$ *и* $R := (\alpha-\beta)^{-1} d(\widehat{y}, F(x_0,x_0)) < \infty$. *Предположим что для любого* $x \in U := B_X(x_0,R)$ *выполнены включения*

$$(x,\widehat{y}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\cdot,x);X], \quad (x,\widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x,\cdot);U], \quad (x,\widehat{y}) \in \mathrm{Cl}[G;U].$$

Тогда в шаре U *существует решение уравнения* (1).

Предлагаемые в пункте 1.2.1 утверждения являются развитием и обобщением теорем[17,18,30] о липшицевых возмущениях накрывающих отображений метрических пространств. Эти исследования восходят к теореме Милютина[12] о возмущениях, в которой пространство Y — линейное метрическое, а отображение G представимо разностью накрывающего и липшицева отображений.

В пункте 1.2.2 получены условия полунепрерывной сверху и снизу зависимости множества решений от параметров. Эти результаты являются новыми и в случае метрического пространства Y.

---

[30] *A.V. Arutyunov, E.S. Zhukovskii, S.E. Zhukovskii.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. № 3. P. 1026–1044.

Глава 2 диссертации посвящена исследованию дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной искомой функции. Эта глава содержит три параграфа. В параграфе 2.1 рассматривается функциональное уравнение с отклоняющимся аргументом относительно неизвестной измеримой функции. Исследование основано на представленных в главе 1 результатах об операторных уравнениях с накрывающими отображениями, действующими из метрического пространства в множество, снабженное расстоянием. Для применения соответствующих теорем в пространстве измеримых функций вводится расстояние и для действующих в полученном пространстве операторов суперпозиции определяются множества замкнутости, накрывания и липшицевости. Этим вопросам посвящен пункт 2.1.1. Приведем определение расстояния в пространстве $\mathbb{S}=\mathbb{S}([0,\tau],\mathbb{R})$ измеримых (по Лебегу) функций $[0,\tau]\to\mathbb{R}$ ($\tau>0$), предложенное в этом пункте.

Пусть функция $\theta:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ суперпозиционно измерима и выполнено **условие** $(\mathcal{A})$: *при любом фиксированном втором аргументе* $z\in\mathbb{R}$ *функция первого аргумента* $\theta(\cdot,z):\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ *непрерывна в точке* z, *справедливо равенство* $\theta(z,z)=0$ *и имеет место соотношение*

$$\forall\delta>0\ \exists\gamma=\gamma(z,\delta)>0\ \forall\upsilon\in\mathbb{R}\quad|\upsilon-z|\geq\delta\ \Rightarrow\ \theta(\upsilon,z)\geq\gamma. \tag{2}$$

Отображение $d^{\theta}:\mathbb{S}\times\mathbb{S}\to\overline{\mathbb{R}}_+$, сопоставляющее любым $\upsilon,z\in\mathbb{S}$ число $d^{\theta}(\upsilon,z)=\operatorname{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]}\theta(\upsilon(t),z(t))$, является расстоянием в $\mathbb{S}$. Обозначим $\mathbb{S}^{\theta}:=(\mathbb{S},d^{\theta})$. В частном случае, для функции $\theta_0:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, определенной формулой $\theta_0(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$, соответствующее отображение $d^{\theta_0}:\mathbb{S}\times\mathbb{S}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ является метрикой в $\mathbb{S}$. Будем обозначать соответствующее пространство измеримых функций через $\mathbb{S}^{\theta_0}=(\mathbb{S},\rho)$, где $\rho=d^{\theta_0}$.

В пункте 2.1.2 доказана следующая теорема существования измеримого решения функционального уравнения с отклоняющимся аргументом.

Пусть задана функция $f:[0,\tau]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, являющаяся измеримой по первому аргументу и непрерывной по совокупности второго и третьего аргументов, измеримая функция $\widehat{y}:[0,\tau]\to\mathbb{R}$ и функция $h:[0,\tau]\to[0,\tau]$ такая, что для любого $E\subset[0,\tau]$ из $\mu(E)=0$ (μ — мера Лебега) следует $\mu(h^{-1}(E))=0$. Рассмотрим уравнение

$$f\big(t,x(h(t)),x(t)\big)=\widehat{y}(t),\quad t\in[0,\tau], \tag{3}$$

относительной неизвестной измеримой функции $x:[0,\tau]\to\mathbb{R}$. Для каждого $v\in\mathbb{S}$ определим функции $g_1^{[v]},g_2^{[v]}:[0,\tau]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ соотношениями

$$g_1^{[v]}(t,x)=f(t,v(h(t)),x),\quad g_2^{[v]}(t,x)=f(t,x,v(t)),\quad t\in[0,\tau],\quad x\in\mathbb{R}.$$

Функции $g_1^{[v]},g_2^{[v]}$, очевидно, удовлетворяют условиям Каратеодори.

Теорема 2.1.1. *Пусть заданы* $\alpha > \beta \geq 0$ *и* $x_0 \in \mathbb{S}$ *такие, что*
$$R := \frac{1}{\alpha - \beta} \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [0,\tau]} \theta\big(\widehat{y}(t),\ f(t, x_0(h(t)), x_0(t))\big) < \infty.$$

Пусть для каждого $v \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, R)$ *при п.в.* $t \in [0,\tau]$ *выполнено:*
$$\forall x \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, R) \ \ \exists u \in \mathbb{R} \ \ g_1^{[v]}(t,u) = \widehat{y}(t), \quad |u - x(t)| \leq \alpha^{-1}\theta\big(\widehat{y}(t), g_1^{[v]}(t, x(t))\big);$$
$$\forall x \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, R) \ \ \forall u \in B_{\mathbb{R}}(x_0(h(t)), R) \ \ g_2^{[v]}(t,u) = \widehat{y}(t) \ \Rightarrow$$
$$\theta\big(\widehat{y}(t), g_2^{[v]}(t, x(h(t)))\big) \leq \beta\big|u - x(h(t))\big|.$$

Тогда существует решение $\widehat{x} \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, R)$ *уравнения* (3).

В заключительном пункте 2.1.3 параграфа 2.1 получены условия устойчивости решений к изменениям функций, порождающих рассматриваемое функциональное уравнение.

В параграфе 2.2 рассматривается задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной искомой функции. Исследование основано на полученных в главе 1 результатах об операторных уравнениях с накрывающими отображениями, действующими из метрического пространства в множество, снабженное расстоянием. Дифференциальное уравнение сводится к интегральному уравнению с отображением, действующим из пространства $\mathbb{L}$ суммируемых функций в пространство $\mathbb{S}$ измеримых функций. В $\mathbb{L}$ вводится метрика $\rho = d^{\theta_0}$ (это пространство обозначаем $\mathbb{L}^{\theta_0}$), а в $\mathbb{S}$ — расстояние d^{θ} и используются утверждения из пункта 2.1.1 о множествах накрывания и липшицевости оператора Немыцкого. Параграф разделен на два пункта. В пункте 2.2.1 получена теорема существования решения задачи Коши. В пункте 2.2.2 исследуется устойчивость решений задачи Коши к изменениям функции, порождающей дифференциальное уравнение, и начального условия. Сформулируем эти результаты.

Пусть функция $\widehat{y} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ измерима, функция $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима по первому аргументу и непрерывна по совокупности второго и третьего аргументов, $A \in \mathbb{R}$. Рассмотрим задачу Коши
$$f\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) = \widehat{y}(t), \quad t \geq 0; \tag{4}$$
$$x(0) = A. \tag{5}$$

Решением уравнения (4), определенным на $[0,\tau]$, $\tau > 0$, называем функцию x, принадлежащую пространству $\mathbb{AC}([0,\tau],\mathbb{R})$ абсолютно непрерывных функций и удовлетворяющую этому уравнению при п.в. $t \in [0,\tau]$.

Для произвольных функций $v \in \mathbb{AC}([0,\tau],\mathbb{R})$ и $w \in \mathbb{L}([0,\tau],\mathbb{R})$ определим функции $g_1^{[v]}, g_2^{[w]} : [0,\tau] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ соотношениями

$$g_1^{[v]}(t,x)=f(t,v(t),x),\quad g_2^{[w]}(t,x)=f(t,x,w(t)),\quad t\in[0,\tau],\quad x\in\mathbb{R}.$$

Для произвольного многозначного отображения $V:[0,\tau]\rightrightarrows\mathbb{R}$ обозначим через $\mathrm{Sel}(V)$ и $\mathrm{Sel}_{\mathbb{AC}}(V)$ множества его измеримых и, соответственно, абсолютно непрерывных сечений.

Теорема 2.2.1. *Пусть заданы числа $\alpha>0$, $\beta\geq 0$, $\tau>0$ такие, что $\beta\tau<\alpha$, и функция $x_0\in\mathbb{AC}([0,\tau],\mathbb{R})$, удовлетворяющая условию (5). Пусть $R:=(\alpha-\beta\tau)^{-1}\mathrm{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]}\,\theta\big(\widehat{y}(t),f(t,x_0(t),\dot{x}_0(t))\big)<\infty$. Положим*

$$V,\dot{V}:[0,\tau]\rightrightarrows\mathbb{R},\quad V(t)=B_{\mathbb{R}}(x_0(t),Rt),\quad \dot{V}(t)=B_{\mathbb{R}}(\dot{x}_0(t),R),\quad t\in[0,\tau].$$

Пусть для любых $v\in\mathrm{Sel}_{\mathbb{AC}}(V)$, $w\in\mathrm{Sel}(\dot{V})$ при п.в. $t\in[0,\tau]$ выполнено

$$\forall x\in\mathrm{Sel}(\dot{V})\ \ \exists u\in\mathbb{R}\ \ g_1^{[v]}(t,u)=\widehat{y}(t),\quad |u-x(t)|\leq\alpha^{-1}\theta\big(\widehat{y}(t),g_1^{[v]}(t,x(t))\big);$$

$$\forall x\in\mathrm{Sel}_{\mathbb{AC}}(V)\ \ \forall u\in V(t)\ \ g_2^{[w]}(t,u)=\widehat{y}(t)\ \Rightarrow\ \theta\big(\widehat{y}(t),g_2^{[w]}(t,x(t))\big)\leq\beta\big|u-x(t)\big|.$$

Тогда существует определенное на $[0,\tau]$ решение x задачи Коши (4), (5) такое, что $\dot{x}\in B_{\mathbb{L}^{\theta_0}}(\dot{x}_0,R)$.

Сформулируем условия устойчивости решений задачи Коши (4), (5) к малым изменениям функций $f,\widehat{y}$ и числа A. Пусть при каждом $n\in\mathbb{N}$ заданы: функция $f_n\colon\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, являющаяся измеримой по первому аргументу и непрерывной по совокупности второго и третьего аргументов, измеримая функция $\widehat{y}_n:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ и число A_n. Рассмотрим уравнение

$$f_n\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big)=\widehat{y}_n(t),\quad t\geq 0,\tag{6}$$

с начальным условием

$$x(0)=A_n.\tag{7}$$

Для произвольных функций $v\in\mathbb{AC}([0,\tau],\mathbb{R})$ и $w\in\mathbb{L}([0,\tau],\mathbb{R})$ определим функции $g_{1n}^{[v]},g_{2n}^{[w]}:[0,\tau]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ соотношениями

$$g_{1n}^{[v]}(t,x)=f_n(t,v(t),x),\quad g_{2n}^{[w]}(t,x)=f_n(t,x,w(t)),\quad t\in[0,\tau],\quad x\in\mathbb{R}.$$

Теорема 2.2.2. *Пусть $\widehat{x}\in\mathbb{AC}([0,\tau],\mathbb{R})$ — решение задачи (4), (5); при каждом $n\in\mathbb{N}$ заданы $\alpha_n>0$, $\beta_n\geq 0$ такие, что $\beta_n\tau<\alpha_n$. Положим $r_n:=(\alpha_n-\beta_n\tau)^{-1}d\Big(\widehat{y}_n(t),\,f_n\big(t,\,\widehat{x}(t)+A_n-A,\,\dot{\widehat{x}}(t)\big)\Big)$ и определим многозначные отображения $V_n,\dot{V}_n:[0,\tau]\rightrightarrows\mathbb{R}$ соотношениями*

$$V_n(t)=B_{\mathbb{R}}\big(\widehat{x}(t)+A_n-A,\,r_nt\big),\quad \dot{V}_n(t)=B_{\mathbb{R}}\big(\dot{\widehat{x}}(t),r_n\big),\quad t\in[0,\tau].$$

Пусть для любых $v\in\mathrm{Sel}_{\mathbb{AC}}(V_n)$, $w\in\mathrm{Sel}(\dot{V}_n)$ при п.в. $t\in[0,\tau]$ выполнено

$$\forall x\in\mathrm{Sel}(\dot{V}_n)\ \ \exists u\in\mathbb{R}\ \ g_{1n}^{[v]}(t,u)=\widehat{y}_n(t),\quad |u-x(t)|\leq\alpha_n^{-1}\theta\big(\widehat{y}_n(t),g_{1n}^{[v]}(t,x(t))\big);$$

$$\forall x\in\mathrm{Sel}_{\mathbb{AC}}(V_n)\ \ \forall u\in V_n(t)$$

$$g_{2n}^{[w]}(t,u)=\widehat{y}(t)\ \Rightarrow\ \theta\big(\widehat{y}_n(t),g_{2n}^{[w]}(t,x(t))\big)\leq\beta\big|u-x(t)\big|.$$

Если при $n \to \infty$ выполнено $r_n \to 0$, то при любом $n \in \mathbb{N}$ задача (6), (7) *разрешима и существует такое ее решение $\widehat{x}_n \in \mathbb{AC}([0,\tau],\mathbb{R})$, что имеет место сходимость $\dot{\widehat{x}}_n \to \dot{\widehat{x}}$ в пространстве $\mathbb{L}^{\theta_0}([0,\tau],\mathbb{R})$.*

Параграф 2.3 посвящен исследованию интегральных уравнений, не разрешенных относительно искомой функции, а также краевых задач для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной искомой функции. Используются полученные в главе 1 результаты об абстрактных уравнениях с отображениями, действующими из метрического пространства в пространство, на котором задано расстояние, а также утверждения пункта 2.1.1 об операторе Немыцкого в пространствах измеримых функций. Параграф содержит четыре пункта. В пункте 2.3.1 исследуются множества накрывания и липшицевости отображений, порождаемых интегральными уравнениями. В пункте 2.3.2 получены условия существования решений интегральных уравнений в пространстве измеримых (не обязательно суммируемых) функций и найдены оценки таких решений, а в пункте 2.3.3 получены утверждения об устойчивости решений к изменениям функций, порождающих интегральное уравнение. Сформулируем основной результат этих исследований.

Обозначим $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $\overline{\mathbb{R}}^{\theta} := (\overline{\mathbb{R}},\theta)$ и $\overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} := (\overline{\mathbb{R}},\theta_0)$. Определим пространство $\overline{\mathbb{S}}^{\theta} = (\overline{\mathbb{S}}, d^{\theta})$ измеримых (по Лебегу) функций $[0,\tau] \to \overline{\mathbb{R}}$ с расстоянием $d^{\theta} : \overline{\mathbb{S}} \times \overline{\mathbb{S}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $d^{\theta}(z_1,z_2) = \operatorname{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \theta(z_1(t),z_2(t))$. В случае $\theta = \theta_0$ это пространство обозначаем $\overline{\mathbb{S}}^{\theta_0} = (\overline{\mathbb{S}}, d^{\theta_0})$. Предполагаем, что задана измеримая функция $\mathcal{K} : [0,\tau]\times[0,\tau] \to \mathbb{R}$ такая, что $k_0 := \operatorname{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \int_0^{\tau} |\mathcal{K}(t,s)|ds < \infty$. Пусть также заданы $\widehat{z} \in \overline{\mathbb{S}}$ и функция $f : [0,\tau] \times \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, измеримая по первому аргументу и непрерывная по совокупности второго и третьего аргументов. Рассмотрим интегральное уравнение

$$f\big(t, \int_0^{\tau} \mathcal{K}(t,s)x(s)ds, x(t)\big) = \widehat{z}(t), \quad t \in [0,\tau], \tag{8}$$

с неизвестной функцией $x \in \mathbb{S}$. Для произвольного $x \in \mathbb{S}$ обозначим $(Kx)(t) := \int_0^{\tau}\mathcal{K}(t,s)x(s)ds$ и определим функции

$$\overline{g}^{[x]} : [0,\tau] \times \overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}, \ \ \forall t \in [0,\tau] \ \ \forall u \in \overline{\mathbb{R}} \ \ \overline{g}^{[x]}(t,u) = f(t,u,x(t)),$$
$$g^{[x]} : [0,\tau] \times \mathbb{R}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}, \ \ \forall t \in [0,\tau] \ \ \forall u \in \mathbb{R} \ \ g^{[x]}(t,u) = f(t,(Kx)(t),u).$$

Теорема 2.3.1. *Пусть задана функция $x_0 \in \mathbb{S}$ такая, что*

$$R_0 := \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \theta\big(\widehat{z}(t), f(t,v_0(t),x_0(t))\big) < \infty, \quad \text{где} \ \ v_0(t) := (Kx_0)(t).$$

Пусть $\alpha > 0$, $\sigma \in (0,\alpha)$, $R := \sigma^{-1}R_0$, $\beta := {k_0}^{-1}(\alpha - \sigma)$. Определим многозначное отображение $\overline{\Omega} : [0,\tau] \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}$, $\forall t \in [0,\tau]$ $\overline{\Omega}(t) := [v_0(t) - k_0R, v_0(t) + k_0R]$.

Пусть при любом $x \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, R)$ *при п.в.* $t \in [0,\tau]$ *выполнены включения*

$$\big(x(t), \widehat{z}(t)\big) \in \mathrm{Cov}_\alpha\big[g^{[x]}(t,\cdot);\mathbb{R}\big], \quad \big((Kx)(t), \widehat{z}(t)\big) \in \mathrm{Lip}_\beta\big[\overline{g}^{[x]}(t,\cdot);\overline{\Omega}(t)\big].$$

Тогда в шаре $B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, R)$ *существует решение уравнения* (8).

В заключительном пункте 2.3.4 результаты об интегральных уравнениях применяются к исследованию краевых задач для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной. Краевая задача сводится к интегральному уравнению, что позволяет воспользоваться результатами, полученными в пунктах 2.3.2 и 2.3.3.

Для уравнения (4) рассматривается краевая задача с условием

$$\mathfrak{L}x := \lambda x(0) + \int_0^\tau \Lambda(s)\dot{x}(s)ds = A. \tag{9}$$

Здесь $\lambda, A \in \mathbb{R}$, Λ — ненулевая измеримая существенно ограниченная функция. Эта краевая задача записывается в виде эквивалентного интегрального уравнения (8) следующим образом.

В случае $\lambda \neq 0$ сделаем замену $(\mathcal{L}x)(t) := \dot{x}(t) = v(t)$. Обозначим

$$\mathrm{f}(t,x,v) = f(t, \frac{A}{\lambda} + x, v),$$
$$\mathrm{K}(t,s) = \begin{cases} 1 - \frac{\Lambda(s)}{\lambda} & \text{при } 0 \le s \le t \le \tau, \\ \ -\frac{\Lambda(s)}{\lambda} & \text{при } 0 \le t < s \le \tau. \end{cases}$$

Если же $\lambda = 0$, то сделаем замену $(\mathcal{L}x)(t) := \dot{x}(t) - \Lambda(t)x(t) = v(t)$ и тогда обозначим

$$M(t) = \exp\Big(\int_0^t \Lambda(s)ds\Big), \quad \Delta(t) = \int_t^\tau \Lambda(\nu)^2 M(\nu)d\nu, \quad t \in [0,\tau].$$

$$\mathrm{f}(t,x,v) = f\Big(t, \frac{AM(t)}{\Delta(0)} + x, \ v + \frac{A\Lambda(t)M(t)}{\Delta(0)} + \Lambda(t)x\Big),$$

$$\mathrm{K}(t,s) = \begin{cases} 1 - \dfrac{M(t)\Lambda(s)}{\Delta(0)} - \dfrac{M(t)\Delta(s)}{M(s)\Delta(0)} & \text{при } 0 \le s \le t \le \tau, \\ \ -\dfrac{M(t)\Lambda(s)}{\Delta(0)} - \dfrac{M(t)\Delta(s)}{M(s)\Delta(0)} & \text{при } 0 \le t < s \le \tau. \end{cases}$$

В этих обозначениях краевая задача (4),(9) относительно функции $v \in \mathbb{L}$ эквивалентна интегральному уравнению

$$\mathrm{f}\big(t, \int_0^\tau \mathrm{K}(t,s)\, v(s)ds, \ v(t)\big) = \widehat{y}(t). \tag{10}$$

Обозначим $\mathrm{k}_0 = \mathrm{vrai\ sup}_{t\in[0,\tau]} \int_0^\tau |\mathrm{K}(t,s)|ds$. Для любого $v \in \mathbb{L}([0,\tau],\mathbb{R})$ положим $(\mathbf{K}v)(t) = \int_0^\tau \mathrm{K}(t,s)v(s)ds$ и определим функции $\overline{\mathrm{g}}^{[v]} : [0,\tau]\times\overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$, $\mathrm{g}^{[v]} : [0,\tau]\times\mathbb{R}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ соотношениями

$$\forall t \in [0,\tau] \ \ \forall u \in \mathbb{R} \quad \overline{\mathrm{g}}^{[v]}(t,u) = \mathrm{f}(t,u,v(t)), \quad \overline{\mathrm{g}}^{[v]}(t,\infty) = \infty,$$
$$\forall t \in [0,\tau] \ \ \forall u \in \mathbb{R} \quad \mathrm{g}^{[v]}(t,u) = \mathrm{f}(t,(\mathbf{K}v)(t),u).$$

Из теорему 2.3.1, примененной к интегральному уравнению (10), получены следующие условия разрешимости краевой задачи (4), (9).

Теорема 2.3.3. *Пусть задана функция* $v_0 \in \mathbb{L}([0,\tau],\mathbb{R})$ *такая, что*

$$R_0 := \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \theta\big(\widehat{y}(t),\, \mathrm{f}(t,u_0(t),v_0(t))\big) < \infty, \quad \textit{где} \ \ u_0(t) := (\mathbf{K}v_0)(t).$$

Пусть $\alpha > 0$, $\sigma \in (0,\alpha)$, $R := \sigma^{-1}R_0$, $\beta := \mathrm{k}_0{}^{-1}(\alpha-\sigma)$. *Определим многозначное отображение* $\overline{\Omega} : [0,\tau] \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}$, $\forall t \in [0,\tau]$ $\overline{\Omega}(t) := [u_0(t) - \mathrm{k}_0R, u_0(t) + \mathrm{k}_0R]$. *Пусть при любом* $v \in B_{\mathbb{L}^{\theta_0}}(v_0,R)$ *при п.в.* $t \in [0,\tau]$ *выполнены включения*

$$\big(v(t),\widehat{y}(t)\big) \in \mathrm{Cov}_\alpha\big[\mathrm{g}^{[v]}(t,\cdot);\mathbb{R}\big], \quad \big((\mathbf{K}v)(t),\widehat{y}(t)\big) \in \mathrm{Lip}_\beta\big[\overline{\mathrm{g}}^{[v]}(t,\cdot);\overline{\Omega}(t)\big].$$

Тогда существует решение x *задачи* (4), (9) *такое, что* $\mathcal{L}x \in B_{\mathbb{L}^{\theta_0}}(v_0,R)$.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах, рекомендованных ВАК

1. *С. Бенараб, Е.С. Жуковский, В. Мерчела.* Теоремы о возмущениях накрывающих отображений в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. С. 52–63.

В работе [1] В. Мерчеле принадлежат все результаты раздела 1 (об операторных уравнениях с отображениями, действующими из метрического пространства в пространство с расстоянием, удовлетворяющим аксиоме тождества).

2. *Е.С. Жуковский, В. Мерчела.* О накрывающих отображениях в обобщенных метрических пространствах в исследовании неявных дифференциальных уравнений // Уфимск. матем. журн. 2020. Т. 12. № 4. С. 42–55.

В работе [2] В. Мерчеле принадлежат доказательства предложений 2,3,4 (о свойствах оператора Немыцкого в пространствах измеримых функций), теоремы 3.1 (о разрешимости функционального уравнения в пространстве измеримых функций), теоремы 4.1 (о разрешимости задачи Коши для неявного дифференциального уравнения), а также примеры 6,7, иллюстрирующие полученные теоремы.

3. *Е.С. Жуковский, В. Мерчела.* О непрерывной зависимости от параметра множества решений операторного уравнения // Изв. ИМИ УдГУ. 2019. Т. 54. С. 27–37

В работе [3] В. Мерчеле принадлежат: определение 1 множества накрывания отображения, действующего из метрического пространства в пространство с расстоянием, доказательства теоремы 2 (об устойчивости решений операторных уравнений к изменениям порождающих отображений), теоремы 3 (о непрерывной зависимости от параметров решений операторных уравнений), а также пример 2, иллюстрирующий полученные теоремы.

4. *Т.В. Жуковская, В. Мерчела, А.И. Шиндяпин.* О точках совпадения отображений в обобщенных метрических пространствах // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 129. С. 18–24.

В работе [4] В. Мерчеле принадлежит доказательство теоремы 2.1 (о точке совпадения отображений, действующих из метрического пространства в пространство с расстоянием).

5. *В. Мерчела.* Один метод исследования разрешимости краевых задач для неявного дифференциального уравнения // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 136. С. 404–413.

6. *В. Мерчела.* Об устойчивости решений интегральных уравнений в классе измеримых функций // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 25. № 133. С. 44–54.

7. *В. Мерчела.* К теореме Арутюнова о точках совпадения двух отображений метрических пространств // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. 2018. Т. 23. № 121. С. 65–73.

Другие публикации автора по теме диссертации

8. *В. Мерчела.* Накрывающие отображения обобщенных метрических пространств в исследовании интегральных уравнений Вольтерры // Колмогоровские чтения. общие проблемы управления и их приложения (ОПУ–2020). Материалы IX Международной научной конференции, посвященной 70-летию со дня рождения Александра Ивановича Булгакова и 90-летию Института математики, физики и информационных технологий Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина. Тамбов, 2020. С. 73–75.

9. *В. Мерчела.* Накрывающие отображения обобщенных метрических пространств в исследовании интегральных уравнений // Теория управления и математическое моделирование. Материалы Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Ижевск, 2020. С. 96–98.

10. *В. Мерчела.* О существовании точек совпадения двух отображений, определенных на (q_1, q_2)-квазиметрическом пространстве // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби (CGS'2020). Мате-

риалы III Международного семинара, посвященного 75-летию акад. А.И. Субботина. Екатеринбург, 2020. С. 235–237.

11. *С. Бенараб, Е.С. Жуковский, В. Мерчела.* Распространение теорем о возмущениях накрывающих отображений // Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019). Материалы Международной конференции, посвященной 95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского. Екатеринбург, 2019. С. 67–70.

В работе [11] В. Мерчеле принадлежат результаты пункта 1 (о липшицевых возмущениях накрывающих отображений в пространствах с расстоянием).

12. *Е.С. Жуковский, В. Мерчела.* К вопросу о существовании точки совпадения двух отображений // Современные методы теории краевых задач. Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа Понтрягинские чтения – XXX. Воронеж, 2019. С. 134.

В работе [12] В. Мерчеле принадлежит теорема (о точках совпадения отображений метрического пространства в пространство с расстоянием).