На правах рукописи

Устинов Никита Сергеевич

ПОЛУЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ЛАПЛАСИАНАМИ

Специальность 01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2021

Работа выполнена на кафедре математической физики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет».

Научный руководитель: **Назаров Александр Ильич,**
доктор физико-математических наук,
профессор.

Официальные оппоненты: **Муравник Андрей Борисович,**
доктор физико-математических наук,
профессор, Акционерное общество «Концерн «Созвездие», руководитель проекта

Бобков Владимир Евгеньевич,
кандидат физико-математических наук,
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, научный сотрудник

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Российский Университет Дружбы Народов».

Защита состоится 28 мая 2021 г. в 17 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.025.08 при Владимирском государственном университете имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, расположенном по адресу: 600024, г. Владимир, проспект Строителей, 11, ауд. 237, ВлГУ, Педагогический институт.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых и на сайте http://diss.vlsu.ru/.

Автореферат разослан «___» ___________ 2021 года.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба направлять по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета Д 212.025.08.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.025.08,
кандидат физико-математических наук,
доцент Наумова С. Б.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования.

Полулинейные уравнения — классический объект теории дифференциальных уравнений в частных производных. Вопросы существования или несуществования решений привлекают большое внимание исследователей с начала второй половины XX века. В последние несколько десятилетий многократно возрос интерес к нелокальным уравнениям с операторами дробного порядка, простейшими примерами которых являются дробные лапласианы.

Бурное развитие этой области может объясняться как развитием самостоятельной теории уравнений в частных производных, так и запросом на соответствующий аппарат с точки зрения прикладных задач: классические уравнения в частных производных не позволяют описывать сложные нелокальные взаимодействия, поэтому для реализации таких моделей используются нелокальные операторы. Примеры математических моделей, основанных на операторах дробного порядка, можно обнаружить в различных областях науки: задачи с тонкими препятствиями, математическая биология, гидрогеология, физика частиц, случайные процессы со скачками ("полеты Леви"), задачи оптимизации, минимальные поверхности, исследования в области полупроводников, изучение фазовых переходов, законы сохранения, финансовые модели и др.

Степень разработанности темы исследования.

История дробных производных берет свое начало еще в XVII веке. Первым упоминанием понятия о дробной производной принято считать переписку Г. Ф. Лопиталя с одним из создателей классического анализа Г. В. Лейбницем в 1695 году. В письме к Лейбницу Лопиталь интересовался следующим вопросом: что может означать производная порядка 1/2? В ответном письме Лейбниц предположил тесную связь между производными и расходящимися рядами. В том же 1695 году Лейбниц в письме к Я. Бернулли отмечает, что можно распространить классическую формулу $\frac{d^n e^{mx}}{dx^n} = m^n e^{mx}$ на случай нецелых n и попробовать с ее помощью определить дробную производную. Наконец, первым полновесным результатом в теории дробных производных можно считать работу Л. Эйлера первой половины XVIII века, в которой на основе Гамма-функции определяется дробная производная от степени.

Дальнейшие результаты теории дробного исчисления и выделение его в самостоятельный раздел математического анализа относятся к XIX – началу XX века. В это время появляется множество работ с разнообразными дробными производными и дифферинтегралами: это производные Римана–Лиувилля, Грюнвальда–Летникова, Сонина–Летникова, Вейля, Фурье, Рисса, Адамара, Эрдейи–Кобера, Маршо. Со второй половины XX века дробные производные становятся все более популярным объектом для исследований, и ряд классических дробных производных пополнили производные Джрбашяна–Капуто, Дэвисона–Эссекса, Гилфера, Канавати, Капуто–Катугампола, Капуто–Ортигейры, Катугампола, Коимбры, Колванкара–Гангала, Коссара, Мачадо, Миллера–Росса, Олдхема–Спанье, Ослера, Рисса–Капуто, Умари, Чена, Чена–Мачадо, Янга и др. В 1987 году была выпущена первая полноценная монография по теории дробных производных [39], однако уже после ее выхода в свет появилось множество новых определений.

С развитием теории дробных операторов связано развитие теории пространств дробной гладкости. Эти пространства впервые возникли в работе В. М. Бабича и Л. Н. Слободецкого и работе Н. Ароншайна как пространства следов, потом были разработаны Э. Гальярдо и Л. Н. Слободецким в гильбертовом случае и О. В. Бесовым в общем случае. Нынешняя литература по дробным пространствам Соболевского типа весьма обширна.

В отличие от классического оператора Лапласа, дробный лапласиан в области можно определить несколькими естественными способами: в литературе известны по меньшей мере два дробных лапласиана Дирихле (спектральный и суженный (restricted); см., например, [25]) и не менее трех дробных лапласианов Неймана (спектральный, суженный и полусуженный (semirestricted); см., например, [26]). Однако в случае, когда область совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$, эти определения дают один и тот же оператор: в [19] было сформулировано 10 различных определений дробного лапласиана в $\mathbb{R}^n$ и была показана их эквивалентность. В диссертации рассматриваются уравнения с дробными лапласианами трех видов: спектральным лапласианом Дирихле, суженным лапласианом Дирихле и спектральным лапласианом Неймана.

Эффект множественности решений краевых задач для полулинейных уравнений был впервые открыт Коффманом [14]: при $n = 2$ задача

$$-\Delta u = |u|^{q-2}u \quad \text{в} \quad \mathbb{K}_r^n = \mathbb{B}_{r+1}^n \setminus \overline{\mathbb{B}_r^n}, \qquad u|_{\partial \mathbb{K}_r^n} = 0$$

имеет любое наперед заданное число различных (здесь и далее: *не получающихся друг из друга поворотом*) положительных решений для $q > 2$ и достаточно больших r. В работе Ли [20] аналогичный результат был получен для $n \geqslant 4$ при $2 < q < 2_{n,1}^* = \frac{2n}{(n-2)_+}$, а также рассматривался вопрос существования нерадиальных решений при $q \geqslant 2_{n,1}^*$. Множественность решений для случая $n = 3$ была получена Бьеном [13]. В дальнейшем в работах Назарова [34] и Колоницкого [32] похожие результаты были получены для уравнения с p-лапласианом.

В отличие от уравнений с докритической нелинейностью в правой части, в критическом случае теорема существования решения нетривиальна, поскольку вложение соответствующего энергетического пространства в пространство Лебега не является компактным. Таким образом, вопрос существования решений в задачах с критической нелинейностью всегда зависит от специфики задачи (в частности, от геометрии области) и требует отдельного рассмотрения.

Классическими работами о разрешимости задачи Неймана с критическим ростом правой части

$$-\Delta u + u = |u|^{2^*_{n,1}-2}u, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{x\in\partial\Omega} = 0,$$

являются работы Адимурти и Манчини [12] и Ванга [29]: при $n \geqslant 3$ в $\mathcal{C}^2$-гладкой ограниченной области Ω задача имеет положительное решение с миинимальной энергией. В работе Демьянова и Назарова [31] аналогичный результат был получен для задачи с p-лапласианом в левой части. Вопрос о постоянстве построенного решения с минимальной энергией в зависимости от размера области Ω был изучен в работе Назарова и Щегловой [37].

Для задачи Дирихле с критической правой частью типа Харди–Соболева

$$\Delta u = \frac{|u|^{2^*_{n,1}-2}u}{|x|^{(1-\sigma)2^*_{n,\sigma}}}, \quad u|_{x\in\partial\Omega} = 0$$

разрешимость были установлена Госсубом и Кангом [16], Госсубом и Робером [17; 18] и, при менее ограничительных условиях, Демьяновым и Назаровым [30]. Также отметим работы Эгнелла [15] и Назарова [33], в которых была получена разрешимость задачи в конусе в $\mathbb{R}^n$ с лапласианом и p-лапласианом соответственно.

Цели и задачи. Основной целью работы является изучение условий существования и качественных свойств решений полулинейных уравнений с различными дробными лапласианами. Задача состоит в получении теорем множественности для уравнений с дробными лапласианами и докритическими и критическими показателями в правой части, а также достаточно общих условий существования решений и условий постоянства и непостоянства решений с минимальной энергией.

Научная новизна. Выносимые на защиту положения являются новыми и получены автором самостоятельно.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты представляют интерес для специалистов по теории уравнений в частных производных и теории случайных процессов.

Методология и методы исследования. При доказательстве основных результатов данной диссертации были использованы: метод обобщенного гармонического продолжения для дробных лапласианов в области [28]; метод (m,k)-разложений и априорные оценки решений из классов с различными симметриями; принцип симметричной критичности Пале [27]; модификация принципа концентрации–компактности Лионса

[21—24] для дробных лапласианов; метод построения специальных пробных функций; модификация тождества Похожаева [38] для дробных лапласианов.

Положения, выносимые на защиту.

1. Показано, что для задачи $(-\Delta)^s u = |u|^{q-2}u$ с дробным лапласианом Дирихле (спектральным или суженным) имеет место эффект множественности решений в кольцах большого радиуса.
2. Доказано существование решений с минимальной энергией в $\mathcal{C}^2$-гладкой ограниченной области Ω для критической задачи Неймана $(-\Delta_\Omega^N)^s_{Sp} u + u = |u|^{2^*_{n,s}-2}u$ при $2s > 1$.
3. Получены условия постоянства и непостоянства решений с минимальной энергией для задачи Неймана $(-\Delta_\Omega^N)^s_{Sp} u + u = |u|^{q-2}u$ в зависимости от размера липшицевой области Ω.
4. Исследована разрешимость задачи со спектральным дробным лапласианом Дирихле $(-\Delta_\Omega^D)^s_{Sp} u = |x|^{(\sigma-s)2^*_{n,\sigma}} u^{2^*_{n,\sigma}-1}$.

Степень достоверности и апробация. Все результаты диссертации снабжены подробными доказательствами и опубликованы в ведущих научных изданиях. Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

– School and Workshop «PDEs and Applications», Universitá Federico II, Naples, Italy (2016).
– Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, Россия (2016, 2018; 2020, онлайн).
– Seminar «Nonlinear Dynamics», Freie Universität Berlin, Berlin, Germany, chair: B. Fiedler (2016).
– International Conference on PDEs «Silkroad Mathematics Center Series International Conferences», Beijing, China (2017).
– Общегородской семинар по математической физике им. В. И. Смирнова, Санкт-Петербург, Россия, рук.: А. И. Назаров, Т. А. Суслина (2017, 2018).
– Международная конференция «Singular Problems, Blow-up, and Regimes with Peaking in Nonlinear PDEs», Москва, Россия (2019).
– Финал двадцать третьего Конкурса Мёбиуса, Москва, Россия (2019).
– Семинар по вариационному исчислению, ПОМИ РАН, Санкт-Петербург, Россия, рук.: А. И. Назаров, В. Г. Осмоловский (2019, 2020).
– Seminar on nonlinear problems of PDE and mathematical physics, RUDN, Moscow, chair: A. E. Shishkov (2020, online).
– Семинар по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям, РУДН, Москва, рук.: А. Л. Скубачевский (2021, онлайн).

Публикации. Результаты данной диссертации опубликованы в работах [1—5], [6—11]. Работы [3—5] опубликованы в журналах из перечня ВАК. Работы [1; 2] опубликованы в изданиях, удовлетворяющих достаточному условию включения в перечень ВАК: издание “Transactions of the American Mathematical Society" и переводная версия второго издания "Journal of Mathematical Sciences" входят в систему цитирования Scopus.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, содержащих 24 параграфа, заключения и списка литературы. Общий объем работы составляет 120 страниц. Список литературы содержит 113 наименований.

Содержание работы

Во <u>введении</u> описаны актуальность темы исследования и степень ее разработанности, поставлены цели и задачи, аргументирована научная новизна, достоверность, теоретическая и практическая значимость результатов, перечислены использованные методы, выносимые на защиту положения, публикации и доклады по теме диссертации, кратко изложена структура работы.

В <u>главе 1</u> даются основные определения, связанные с различными дробными лапласианами, и доказываются некоторые вспомогательные утверждения.

Определение 1. *Пространства Соболева–Слободецкого* $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{H}^s(\Omega)$ *и* $\widetilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)$ *при* $s>0$ *определяются как (здесь* $\mathcal{F}u$ *— это преобразование Фурье функции* u*)*

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)=\Big\{u\in L_2(\mathbb{R}^n)\ \ |\ \ \|u\|^2_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)}:=\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2s})\cdot|\mathcal{F}u(\xi)|^2d\xi<\infty\Big\};$$
$$\mathcal{H}^s(\Omega)=\big\{u\big|_\Omega : u\in\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)\big\};\quad \widetilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)=\big\{u\in\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)\ |\ \mathrm{supp}(u)\subset\overline{\Omega}\big\}.$$

Определение 2. *Дробный лапласиан* $(-\Delta)^s$ *в* $\mathbb{R}^n$ *на классе гладких финитных функций задается формулой*

$$(-\Delta)^s u:=\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}\mathcal{F}u(\xi)),\quad u\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

а на пространстве $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$ *восстанавливается по квадратичной форме*

$$\langle(-\Delta)^s u,u\rangle=\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2s}|\mathcal{F}u(\xi)|^2d\xi. \tag{1}$$

Определение 3. *Суженный (restricted) дробный лапласиан Дирихле* $(-\Delta_\Omega^D)^s_R$ *— это самосопряженный оператор, восстановленный по квадратичной форме* (1) *с областью определения* $\widetilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)$:

$$\langle(-\Delta_\Omega^D)^s_R u,u\rangle:=\langle(-\Delta)^s u,u\rangle\quad \text{при}\quad u\in\widetilde{\mathcal{H}}^s(\Omega).$$

Определение 4. *Спектральный дробный лапласиан Дирихле* $(-\Delta_\Omega^D)^s_{Sp}$ *— это* s*-тая степень оператора Лапласа с условием Дирихле в области* Ω

в смысле спектральной теории. Его квадратичная форма в ограниченной области Ω равна

$$\langle (-\Delta_{\Omega}^{D})_{Sp}^{s} u,u\rangle := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{D,j}^{s} \cdot \langle u, \phi_{D,j}\rangle^2,$$

где $\lambda_{D,j}$ и $\phi_{D,j}$ — собственные числа и ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции задачи Дирихле для оператора Лапласа соответственно.

Определение 5. *Спектральный дробный лапласиан Неймана $(-\Delta_{\Omega}^{N})_{Sp}^{s}$ — это s-ая степень оператора Лапласа с условием Неймана в области Ω в смысле спектральной теории. Его квадратичная форма в ограниченной липшицевой области Ω равна*

$$\langle (-\Delta_{\Omega}^{N})_{Sp}^{s} u,u\rangle := \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_{N,j}^{s} \cdot \langle u,\phi_{N,j}\rangle^2,$$

где $\lambda_{N,j}$ и $\phi_{N,j}$ — собственные числа и ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции задачи Неймана для оператора Лапласа соответственно (напомним, что в случае условия Неймана $\lambda_{N,1} = 0$ для собственной функции $\phi_{N,1} \equiv C$).

При $s \in (0,1)$ рассматриваемые дробные лапласианы могут быть получены с помощью обобщенного гармонического продолжения.

Определение 6. *Продолжением Стинга—Торреа [28] для оператора $(-\Delta_{\Omega}^{D})_{Sp}^{s}$ называется решение w_{Sp}^{D} задачи*

$$\mathcal{L}_s[w](x,t) \equiv -\operatorname{div}(t^{1-2s}\nabla w(x,t)) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+; \quad w|_{t=0} = u; \quad w|_{x\in\partial\Omega} = 0$$

с конечной энергией

$$\mathcal{E}_{s,\Omega}[w] := C_s \cdot \int_0^{\infty}\int_{\Omega} t^{1-2s}|\nabla w(x,t)|^2 dxdt.$$

Оно существует, единственно, и для достаточно гладких u

$$(-\Delta_{\Omega}^{D})_{Sp}^{s} u(x) = C_s \cdot \frac{\partial w_{Sp}^{D}}{\partial \nu_s}(x,0).$$

Определение 7. *Продолжением Стинга—Торреа [28] для оператора $(-\Delta_{\Omega}^{N})_{Sp}^{s}$ называется единственное решение w_{Sp}^{N} задачи*

$$\mathcal{L}_s[w](x,t) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+; \quad w|_{t=0} = u; \quad \left.\frac{\partial w}{\partial \vec{n}}\right|_{x\in\partial\Omega} = 0$$

с конечной энергией $\mathcal{E}_{s,\Omega}\left[w_{Sp}^N\right]$ *, и для достаточно гладких* u

$$(-\Delta_\Omega^N)^s_{Sp} u(x) = C_s \cdot \frac{\partial w_{Sp}^N}{\partial \nu_s}(x,0).$$

Далее под **решениями задач** мы всегда будем понимать **слабые (вариационные) решения**.

В главе 2 исследуется множественность положительных решений для уравнений с дробными лапласианами Дирихле в кольце единичной ширины $\mathbb{K}_r^n = \mathbb{B}_{r+1}^n \setminus \overline{\mathbb{B}_r^n}$:

$$(-\Delta_{\mathbb{K}_r^n}^D)^s_R u = |u|^{q-2}u, \quad u \in \widetilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n); \tag{2}$$

$$(-\Delta_{\mathbb{K}_r^n}^D)^s_{Sp} u = |u|^{q-2}u, \quad u \in \widetilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n) \tag{3}$$

при $n \neq 3$, $s \in (0,1)$ и $2 < q < 2^*_{n,s} = \frac{2n}{(n-2s)_+}$.

Для получения эффекта множественности используется подход Ли [20], впоследствии усовершенствованный Назаровым [34]. Этот подход основан на методе (m,k)-разложений и оценок энергии минимайзеров по (m,k)-инвариантным подпространствам. Минимайзеры по таким подпространствам являются положительными решениями уравнений (2) и (3), что обеспечивается принципом симметричной критичности Пале [27].

Определение 8. *Пусть* $\mathcal{G}$ *— замкнутая подгруппа ортогональной группы* $\mathbb{O}(n)$. *Тогда* $\mathfrak{L}^s_{\mathcal{G}}$ *и* $L_{q,\mathcal{G}}(\mathbb{K}_r^n)$ *— это подпространства функций из* $\widetilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)$ *и* $L_q(\mathbb{K}_r^n)$, *инвариантных относительно* $\mathcal{G}$:

$$\mathfrak{L}^s_{\mathcal{G}} := \left\{ u \in \widetilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n) \mid u(x) = u(gx), \forall g \in \mathcal{G} \right\};$$
$$L_{q,\mathcal{G}}(\mathbb{K}_r^n) := \{u \in L_q(\mathbb{K}_r^n) \mid u(x) = u(gx),\ \forall g \in \mathcal{G}\}.$$

Определение 9. *Допустимым* (m,k)*-разложением пространства* $\mathbb{R}^n$ *мы будем называть разложение* $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^m)^l \oplus \mathbb{R}^k$, *где*

$$ml + k = n; \quad m \geqslant 2; \quad k = 0 \quad \text{или} \quad k \geqslant m; \quad l, m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Функция $u(x)$ *называется* (m,k)*-радиальной, если она радиальна по каждой из* $l+1$ *составляющих и инвариантна относительно всех перестановок* l *переменных размерности* m. *Группу, порождающую пространство* (m,k)*-радиальных функций, мы обозначим* $\mathcal{G}_{m,k}$.

Определим функционалы $\mathcal{J}_R[u]$ и $\mathcal{J}_{Sp}[u]$:

$$\mathcal{J}_R[u] := \frac{\langle(-\Delta_{\mathbb{K}_r^n}^D)^s_R u, u\rangle}{\|u\|^2_{L_q(\mathbb{K}_r^n)}}; \quad \mathcal{J}_{Sp}[u] := \frac{\langle(-\Delta_{\mathbb{K}_r^n}^D)^s_{Sp} u, u\rangle}{\|u\|^2_{L_q(\mathbb{K}_r^n)}}.$$

Лемма 1 (Принцип симметричной критичности). *Пусть $\mathcal{G}$ — замкнутая подгруппа $\mathbb{O}(n)$, для которой вложение $\mathfrak{L}^s_{\mathcal{G}} \hookrightarrow L_q(\mathbb{K}^n_r)$ компактно. Тогда минимайзеры функционалов $\mathcal{J}_R[u]$ и $\mathcal{J}_{Sp}[u]$ по подпространству $\mathfrak{L}^s_{\mathcal{G}}$ существуют и являются положительными решениями задач* (2) *и* (3).

В параграфе 2.4 получены оценки на энергию минимайзеров по подпространствам (m,k)-радиальных функций. В частности, доказаны следующие утверждения:

Лемма 2 (Уровень энергии для радиальных функций). *При $n \geqslant 2$ для всех $q \in [2, 2^*_{1,s}]$ выполнена оценка*

$$\min_{u_r \in \mathfrak{L}^s_{\mathbb{O}(n)}} \mathcal{J}_{Sp}[u_r] \geqslant \min_{u_r \in \mathfrak{L}^s_{\mathbb{O}(n)}} \mathcal{J}_R[u_r] \overset{r}{\asymp} r^{(n-1)(1-\frac{2}{q})}, \quad r \to \infty.$$

Лемма 3 (Уровень энергии для $(2, n-2)$-радиальных функций). *При $n \geqslant 4$ выполнены следующие оценки при $r \to \infty$:*

$$\min_{u_r \in \mathfrak{L}^s_{\mathbb{O}(2)\times\mathbb{O}(n-2)}} \mathcal{J}_R[u_r] \overset{r}{\asymp} r^{1-\frac{2}{q}} \quad \text{и} \quad \min_{u_r \in \mathfrak{L}^s_{\mathbb{O}(2)\times\mathbb{O}(n-2)}} \mathcal{J}_{Sp}[u_r] \overset{r}{\asymp} r^{1-\frac{2}{q}}.$$

Леммы 2 и 3 показывают, что при больших r минимайзеры по подпространству $\mathfrak{L}^s_{\mathbb{O}(2)\times\mathbb{O}(n-2)}$ не являются радиальными.

Основные результаты главы 2 следующие:

Теорема 1 (Существование радиального решения). *При $q \in [1, 2^*_{1,s})$, $q \neq 2$, у каждой из задач* (2) *и* (3) *существует положительное радиальное решение.*

Теорема 2 (Существование (m,k)-радиальных решений). *При $n \geqslant 4$ и $q \in (2, 2^*_{n-m+1,s})$ существует такой радиус r_0, что для всех $r > r_0$ в кольце $\mathbb{K}^n_r$ для каждой из задач* (2) *и* (3) *существует положительное (m,k)-радиальное решение (при различных m решения различны).*

Теорема 3 (Эффект множественности). *Пусть $n \neq 3$, $q \in (2, 2^*_{n,s})$ и N — некоторое натуральное число. Тогда существует такое $r_1(N)$, что при любом $r \geqslant r_1$ у каждой из задач* (2) *и* (3) *существует не менее N не совмещающихся поворотом положительных решений.*

В <u>главе 3</u> получено существование решений с минимальной энергией в $\mathcal{C}^2$-гладкой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$ для задачи Неймана с критической правой частью

$$(-\Delta^N_\Omega)^s_{Sp} u + u = |u|^{2^*_{n,s}-2} u, \tag{4}$$

где $s \in (1/2, 1)$ и $u \in \mathcal{H}^s(\Omega)$.

Решение задачи (4) с минимальной энергией — это (с точностью до домножения на константу) минимайзер функционала $\mathcal{I}^{Sp,N}_{s,2^*_{n,s},\Omega}[u]$:

$$\mathcal{I}^{Sp,N}_{s,2^*_{n,s},\Omega}[u] := \frac{\langle(-\Delta^N_\Omega)^s_{Sp} u, u\rangle + \|u\|^2_{L_2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L_{2^*_{n,s}}(\Omega)}}, \quad \mathcal{S}^{Sp,N}_{s,\Omega} := \inf_{u \in \mathcal{H}^s(\Omega)} \mathcal{I}^{Sp,N}_{s,2^*_{n,s},\Omega}[u]. \tag{5}$$

Доказательство существования получается как развитие подхода из работ Адимурти и Манчини [12], Ванга [29] и Демьянова и Назарова [31]. В параграфе 3.2 модификацией предельного принципа концентрации–компактности Лионса [21; 22] для нелокального оператора $(-\Delta^N_\Omega)^s_{Sp}$ (с использованием продолжений Стинга-Торреа) мы получаем альтернативу: в пространстве мер $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ для минимизирующей последовательности $u_k(x)$ для функционала (5) может иметь место либо **концентрация** в точке x_0 (в этом случае $|u_k|^{2^*_{n,s}} \overset{\mathcal{M}(\overline{\Omega})}{\rightharpoonup} \delta(x_0)$), либо **компактность** (в этом случае $|u_k|^{2^*_{n,s}} \overset{\mathcal{M}(\overline{\Omega})}{\rightharpoonup} |u|^{2^*_{n,s}}$).

Далее, в параграфе 3.2 также показано, что в случае **компактности** для предельной функции u выполнено равенство $\mathcal{I}^{Sp,N}_{s,2^*_{n,s},\Omega}[u] = \mathcal{S}^{Sp,N}_{s,\Omega}$. Другими словами, в случае **компактности** функция u минимизирует функционал (5), и, после домножения на подходящую константу, является решением задачи (4) с минимальной энергией.

В параграфе 3.3 доказана справедливость следующей леммы:

Лемма 4. *В случае* ***концентрации*** *имеет место* $\mathcal{S}^{Sp,N}_{s,\Omega} \geqslant \mathcal{S}^{Sp,N}_{s,\mathbb{R}^n_+}$.

Параграф 3.4 посвящен построению пробной функции $\check{u} \in \mathcal{H}^s(\Omega)$, для которой при $n \geqslant 3$ и $2s > 1$ выполнено неравенство

$$\mathcal{I}^{Sp,N}_{s,2^*_{n,s},\Omega}[\check{u}] < \mathcal{S}^{Sp,N}_{s,\mathbb{R}^n_+}.$$

Согласно лемме 4, существование такой функции исключает возможность **концентрации** и доказывает основное утверждение главы 3:

Теорема 4. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, *—* $\mathcal{C}^2$*-гладкая ограниченная область, и* $2s > 1$. *Тогда задача* (4) *имеет неотрицательное нетривиальное решение с минимальной энергией.*

В главе 4 изучается постоянство решений с минимальной энергией для полулинейной задачи Неймана в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с липшицевой границей при $n \geqslant 1$:

$$(-\Delta^N_\Omega)^s_{Sp} u + u = |u|^{q-2} u, \quad u \in \mathcal{H}^s(\Omega), \quad s \in (0, 1). \tag{6}$$

Эта задача обобщает задачу (4): показатель q в правой части не обязан быть критическим; допустимы показатели

$$q \in \begin{cases} [1, 2^*_{n,s}] & \text{при } n \geqslant 2 \ \text{ или } \ n = 1,\ s < \frac{1}{2}; \\ [1, \infty) & \text{при } n = 1,\ s = \frac{1}{2}; \\ [1, \infty] & \text{при } n = 1,\ s > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

По аналогии с функционалом (5), определяется функционал $\mathcal{I}^{Sp,N}_{s,q,\Omega}[u]$, порождаемый теоремой вложения $\mathcal{H}^s(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$:

$$\inf_{u \in \mathcal{H}^s(\Omega)} \mathcal{I}^{Sp,N}_{s,q,\Omega}[u] := \inf_{u \in \mathcal{H}^s(\Omega)} \frac{\langle (-\Delta^N_\Omega)^s_{Sp} u, u \rangle + \|u\|^2_{L_2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L_q(\Omega)}} > 0. \tag{7}$$

Поскольку при $q \in [1, 2^*_{n,s})$ вложение компактно, у функционала $\mathcal{I}^{Sp,N}_{s,q,\Omega}[u]$ существует минимайзер, который является решением с миинимальной энергией для задачи (6). При $q = 2^*_{n,s}$ существование решения с минимальной энергией в $\mathcal{C}^2$-гладкой ограниченной области Ω при $n \geqslant 3$ и $2s > 1$ обеспечивается теоремой 4.

Очевидно, что функция $u = \mathbf{1}$ (тождественно равная единице) является решением задачи (6), поскольку $(-\Delta^N_\Omega)^s_{Sp} \mathbf{1} = 0$. Главный вопрос, на который отвечает глава 4, таков: *совпадает ли решение $u = \mathbf{1}$ с решением с минимальной энергией?*

В локальном случае $s = 1$ ответ на этот вопрос был получен в работе Назарова и Щегловой [37]. Оказывается, что постоянство решения с минимальной энергией определяется формой и размером области Ω. Более того, оказывается, что исходный вопрос удобно переформулировать с использованием дополнительного параметра ε: будем считать, что область Ω имеет единичный объем, и рассмотрим вложения (7) для семейства областей $\Omega_\varepsilon := \{\varepsilon x \mid x \in \Omega\}$. Положим $u_\varepsilon(y) := u(\varepsilon^{-1} y)$, тогда

$$\mathcal{I}^\varepsilon_{s,q}[u] := \frac{\mathcal{I}^{Sp,N}_{s,q,\Omega_\varepsilon}[u_\varepsilon]}{\varepsilon^{n-2s-\frac{2n}{q}}} = \frac{\langle (-\Delta^N_\Omega)^s_{Sp} u, u \rangle + \varepsilon^{2s} \|u\|^2_{L_2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L_q(\Omega)}},$$

и легко видеть, что вопрос о постоянстве решения с минимальной энергией для задачи (6) в области Ω_ε эквивалентен вопросу о постоянстве минимайзера функционала $\mathcal{I}^\varepsilon_{s,q}$ с параметром ε.

Основные результаты, полученные в главе 4, таковы:

Теорема 5. *1. При $q \in [1,2]$ для любого $\varepsilon > 0$ функция $\mathbf{1}$ является единственным минимайзером функционала $\mathcal{I}^\varepsilon_{s,q}[u]$;*
2. Если же $q \in (2, 2^*_{n,s}]$, то:
- *при $\varepsilon < \varepsilon_s(q) := [\lambda^s_{N,2}/(q-2)]^{1/(2s)}$ (напомним, что $\lambda_{N,2}$ — первое ненулевое собственное число оператора Лапласа с условием Неймана) функция $\mathbf{1}$ дает локальный минимум функционала $\mathcal{I}^\varepsilon_{s,q}[u]$, а при всех $\varepsilon > \varepsilon_s(q)$ не дает;*

– *существует непрерывная, монотонно убывающая функция $\mathcal{E}_s(q) > 0$, такая, что при $\varepsilon \leqslant \mathcal{E}_s(q)$ функция $\mathbf{1}$ дает глобальный минимум функционала $\mathcal{I}^{\varepsilon}_{s,q}[u]$, а при $\varepsilon > \mathcal{E}_s(q)$ не дает.*

Для построенных функций очевидно неравенство $\mathcal{E}_s(q) \leqslant \varepsilon_s(q)$. В локальном случае $s = 1$ известны следующие результаты: при $n = 1$ выполнено $\mathcal{E}_1(q) = \varepsilon_1(q)$ (см. работы Назарова [35; 36]), а при $n \geqslant 2$ существуют как области с $\mathcal{E}_1(q) < \varepsilon_1(q)$ (см. работу Назарова и Щегловой [37]), так и области с $\mathcal{E}_1(q) = \varepsilon_1(q)$ (см. работу Щегловой [40], посвященную решениям в тонких цилиндрах).

В параграфе 4.2 доказана следующая теорема:

Теорема 6. *Пусть $s < n/2$, $q = 2^*_{n,s}$ и $\varepsilon = \varepsilon_s(2^*_{n,s})$. Тогда функция $\mathbf{1}$ не является глобальным минимайзером функционала $\mathcal{I}^{\varepsilon_s}_{s,2^*_s}[u]$ в кубе $(0,1)^n$.*

Из этой теоремы следует, что при q, близких к $2^*_{n,s}$ снизу, для куба $(0,1)^n$ выполнено неравенство $\mathcal{E}_s(q) < \varepsilon_s(q)$.

В главе 5 найдены достаточные условия существования решений с минимальной энергией в $\mathcal{C}^1$-гладкой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ для задачи Дирихле с критической особенностью типа Харди–Соболева в правой части при $n \geqslant 2$ и $0 < \sigma < s < 1$:

$$(-\Delta^D_\Omega)^s_{Sp} u(x) = \frac{u^{2^*_{n,\sigma}-1}(x)}{|x|^{(s-\sigma)2^*_{n,\sigma}}} \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u \in \widetilde{\mathcal{H}}^s(\Omega). \tag{8}$$

Решение задачи (8) с минимальной энергией — это (с точностью до домножения на константу) минимайзер функционала $\mathcal{I}^{Sp,D}_{s,\sigma,\Omega}[u]$:

$$\mathcal{I}^{Sp,D}_{s,\sigma,\Omega}[u] := \frac{\langle (-\Delta^D_\Omega)^s_{Sp} u, u\rangle}{\| |x|^{\sigma-s} u\|^2_{L_{2^*_{n,\sigma}}(\Omega)}}, \quad \mathcal{S}^{Sp,D}_{s,\sigma,\Omega} := \inf_{u\in\widetilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)} \mathcal{I}^{Sp,D}_{s,\sigma,\Omega}[u].$$

Если $\mathbf{0}_n \notin \overline{\Omega}$, то соответствующее вложение компактно, и задача (8) имеет решение с минимальной энергией. В дальнейшем мы будем считать, что $\mathbf{0}_n \in \overline{\Omega}$.

В параграфе 5.2 доказана теорема:

Теорема 7. *Выполнены следующие утверждения:*

1. *Если $\mathbf{0}_n \in \Omega$, то задача (8) не имеет решений с минимальной энергией.*
2. *Для звездных относительно $\mathbf{0}_n$ областей Ω задача (8) не имеет неотрицательных решений.*

Для доказательства этого результата устанавливается нелокальный аналог тождества Похожаева [38] для лапласиана $(-\Delta^D_\Omega)^s_{Sp}$.

Параграф 5.4 посвящен следующему результату:

Теорема 8. *В $\mathbb{R}^n_+$ задача (8) имеет решение с минимальной энергией.*

В параграфе 5.5 обсуждаются свойства полученного решения $\Phi(y)$ и его продолжения Стинга–Торреа $\mathcal{W}(Y)$. Основной результат заключается в следующем:

Лемма 5. *Выполнены следующие оценки:*

$$\Phi(y) \leqslant \frac{Cy_n}{1+|y|^{n-2s+2}},\ y \in \mathbb{R}^n_+; \quad \mathcal{W}(Y) \leqslant \frac{Cy_n}{1+|Y|^{n-2s+2}},\ Y \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+;$$

$$\mathcal{V}(y) := C_s \cdot \int\limits_0^\infty z^{1-2s} |\nabla_Y \mathcal{W}(Y)|^2 dz \leqslant \frac{C}{1+|y|^{2n-2s+2}},\ y \in \mathbb{R}^n_+,$$

где константы C зависят от n, s, σ и выбора решения Φ.

Доказательство существования решений с минимальной энергией в задаче (8) для ограниченной области Ω похоже на рассуждение из главы 3. Модификацией локально–компактного принципа концентрации–компактности Лионса [23; 24] для нелокального оператора $(-\Delta^D_\Omega)^s_{Sp}$ (с использованием продолжений Стинга-Торреа) мы получаем альтернативу: имеет место либо **концентрация** в начале координат $\mathbf{0}_n$, либо **компактность**.

В параграфе 5.6 показывается, что в случае **компактности** выполнено равенство $\mathcal{I}^{Sp,D}_{s,\sigma,\Omega}[u] = \mathcal{S}^{Sp,D}_{s,\sigma,\Omega}$, и функция $u(x)$ является решением с минимальной энергией для задачи (8).

В параграфе 5.6 также объясняется, что в случае **концентрации** имеет место неравенство $\mathcal{S}^{Sp,D}_{s,\sigma,\Omega} \geqslant \mathcal{S}^{Sp,D}_{s,\sigma,\mathbb{R}^n_+}$. Таким образом, как и в главе 3, для завершения доказательства достаточно исключить возможность **концентрации**, построив пробную функцию $\widetilde{\Phi}_\varepsilon(x)$, для которой

$$\mathcal{I}^{Sp,D}_{s,\sigma,\Omega}[\widetilde{\Phi}_\varepsilon(x)] < \mathcal{S}^{Sp,D}_{s,\sigma,\mathbb{R}^n_+}. \tag{9}$$

Для ее построения требуется наложить условия на границу $\partial\Omega$: параметризуем ее в окрестности начала координат $\mathbf{0}_n$ уравнением $x_n = F(x')$. Следуя работе Демьянова и Назарова [30], предположим, что:

– граница **вогнута в среднем** в нуле: при малых $\tau > 0$ выполнено

$$f(\tau) := \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-2}_\tau|} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-2}_\tau} F(y')\, dy' < 0. \tag{10}$$

– функция f имеет **регулярное поведение** в нуле порядка $\alpha \in [1, n - 2s + 3)$: при любом $d > 0$ выполнено

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{f(d\tau)}{f(\tau)} = d^\alpha. \tag{11}$$

– выполнено **условие**

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{\tau \cdot \int_{\mathbb{S}_\tau^{n-2}} |\nabla_{y'} F(y')|^2\, dy'}{|\mathbb{S}_\tau^{n-2}| \cdot f(\tau)} = 0. \tag{12}$$

Пробная функция $\widetilde{\Phi}_\varepsilon(x)$ строится на основе решения $\Phi(y)$ задачи (8) в $\mathbb{R}^n_+$, существование которого было доказано в теореме 8. Из условий (10)–(12) и оценок решения $\Phi(y)$ из Леммы 5, в параграфах 5.7 и 5.8 для функции $\widetilde{\Phi}_\varepsilon(x)$ доказывается справедливость неравенства (9).

Таким образом, доказан основной результат главы 5:

Теорема 9. *Пусть граница* $\partial\Omega$ *удовлетворяет условиям* (10)–(12). *Тогда задача* (8) *имеет положительное решение с минимальной энергией в области* Ω.

В заключении перечисляются основные результаты диссертации, а также предлагаются возможные направления для дальнейшей работы.

Результаты, изложенные в диссертации, получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований: результаты из глав 2 и 5 получены в рамках проекта 17-01-00678A, а результаты из глав 3 и 4 получены в рамках проекта 20-01-00630A.

Публикации автора в рецензируемых изданиях

1. *Ustinov N.* The effect of curvature in fractional Hardy-Sobolev inequality involving the spectral Dirichlet Laplacian // Transactions of the American Mathematical Society. — 2020. — т. 373. — с. 7785—7815.
2. *Устинов Н. С.* Множественность решений краевых задач с дробными лапласианами Дирихле и Навье // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2017. — т. 459. — с. 104—126.
3. *Устинов Н. С.* О достижимости точных констант в дробных неравенствах Харди–Соболева со спектральным лапласианом Дирихле // Функциональный анализ и его приложения. — 2019. — т. 53, № 4. — с. 93—98.
4. *Устинов Н. С.* О постоянстве экстремали в теореме вложения дробного порядка // Функциональный анализ и его приложения. — 2020. — т. 54, № 4. — с. 85—97.
5. *Устинов Н. С.* О разрешимости полулинейной задачи со спектральным дробным лапласианом Неймана и критической правой частью // Алгебра и Анализ. — 2021. — т. 33, № 1. — с. 194—212.

Тезисы докладов

6. *Ustinov N.* Multiplicity of boundary value problem solutions for fractional Dirichlet Laplacian // School and Workshop «PDEs and Applications». — Naples, 2016. — с. 10.
7. *Ustinov N.* Multiplicity of positive solutions to the boundary value problems for fractional Laplacians in the expanding annuli // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. — Владимир, 2016. — с. 281.
8. *Ustinov N.* Multiplicity of positive solutions to the boundary value problems for fractional Laplacians in the expanding annuli // International Conference on Partial Differential Equations. — Silkroad Mathematics Center Series International Conferences, Beijing, 2017. — с. 24.
9. *Ustinov N.* On attainability of the best constant in the Navier-type fractional Hardy–Sobolev inequalities // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. — Владимир, 2018. — с. 270—271.
10. *Ustinov N.* On existence of extremal function in the Navier-type fractional Hardy—Sobolev inequalities // Book of Abstracts of International Conference Singular Problems, Blow-Up and Regimes with Peaking in Nonlinear PDEs. — RUDN University, Moscow, 2019. — с. 78—79.
11. *Ustinov N.* On solvability of a critical problem with the spectral Neumann fractional Laplacian // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. — Владимир, 2020. — с. 237—238.

Список литературы

12. *Adimurthi*, *Mancini G.* The Neumann problem for elliptic equations with critical nonlinearity // Nonlin. Anal. Sc. Norm. Super. di Pisa Quaderni. — 1991. — с. 9—25.
13. *Byeon J.* Existence of many nonequivalent nonradial positive solutions of semilinear elliptic equations on three-dimensional annuli // Journal of Differential Equations. — 1997. — т. 136, № 1. — с. 136—165.
14. *Coffman C. V.* A non-linear boundary value problem with many positive solutions // Journal of Differential Equations. — 1984. — т. 54, № 3. — с. 429—437.

15. *Egnell H.* Positive solutions of semilinear equations in cones // Transactions of the American Mathematical Society. — 1992. — т. 330, № 1. — с. 191—201.

16. *Ghoussoub N.*, *Kang X. S.* Hardy–Sobolev critical elliptic equations with boundary singularities // Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis. т. 21. — Elsevier. 2004. — с. 767—793.

17. *Ghoussoub N.*, *Robert F.* Concentration estimates for Emden-Fowler equations with boundary singularities and critical growth // International Mathematics Research Papers. — 2006. — т. 2006. — с. 1—85.

18. *Ghoussoub N.*, *Robert F.* The effect of curvature on the best constant in the Hardy–Sobolev inequalities // Geometric & Functional Analysis GAFA. — 2006. — т. 16, № 6. — с. 1201—1245.

19. *Kwaśnicki M.* Ten equivalent definitions of the fractional Laplace operator // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2017. — т. 20, № 1. — с. 7—51.

20. *Li Y. Y.* Existence of many positive solutions of semilinear elliptic equations on annulus // Journal of Differential Equations. — 1990. — т. 83, № 2. — с. 348—367.

21. *Lions P.-L.* The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The limit case, part 1 // Revista Matemática Iberoamericana. — 1985. — т. 1, № 1. — с. 145—201.

22. *Lions P.-L.* The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The limit case, part 2 // Revista Matemática Iberoamericana. — 1985. — т. 1, № 2. — с. 45—121.

23. *Lions P.-L.* The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The locally compact case, part 1. // Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis. т. 1. — Elsevier. 1984. — с. 109—145.

24. *Lions P.-L.* The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The locally compact case, part 2 // Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis. т. 1. — Elsevier. 1984. — с. 223—283.

25. *Musina R.*, *Nazarov A. I.* On fractional laplacians // Communications in Partial Differential Equations. — 2014. — т. 39, № 9. — с. 1780—1790.

26. *Musina R.*, *Nazarov A. I.* Sobolev inequalities for fractional Neumann Laplacians on half spaces // Advances in Calculus of Variations. — 2018. — т. 1, ahead-of—print.

27. *Palais R. S.* The principle of symmetric criticality // Communications in Mathematical Physics. — 1979. — т. 69, № 1. — с. 19—30.

28. *Stinga P. R.*, *Torrea J. L.* Extension problem and Harnack's inequality for some fractional operators // Communications in Partial Differential Equations. — 2010. — т. 35, № 11. — с. 2092—2122.

29. *Wang X.-J.* Neumann problems of semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents // Journal of Differential equations. — 1991. — т. 93, № 2. — с. 283—310.

30. *Демьянов А. В.*, *Назаров А. И.* О разрешимости задачи Дирихле для полулинейного уравнения Шредингера с сингулярным потенциалом // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2006. — т. 336. — с. 25—45.

31. *Демьянов А. В.*, *Назаров А. И.* О существовании экстремальной функции в теоремах вложения Соболева с предельным показателем // Алгебра и анализ. — 2005. — т. 17, № 5. — с. 105—140.

32. *Колоницкий С. Б.* Множественность решений задачи Дирихле для уравнения с p-лапласианом в трехмерном сферическом слое // Алгебра и анализ. — 2010. — т. 22, № 3. — с. 206—221.

33. *Назаров А. И.* Неравенства Харди–Соболева в конусе // Проблемы математического анализа. т. 31. — Новосибирск: Издательство Тамары Рожковской, 2005. — с. 39—46.

34. *Назаров А. И.* О решениях задачи Дирихле для уравнения, включающего p-лапласиан, в сферическом слое // Труды Санкт Петербургского Математического Общества. т. 10. — Новосибирск: Издательство Тамары Рожковской, 2004. — с. 33—62.

35. *Назаров А. И.* О точной константе в одномерной теореме вложения // Проблемы математического анализа. — 1999. — т. 19. — с. 149—163.

36. *Назаров А. И.* О точных константах в одномерных теоремах вложения произвольного порядка // Вопросы современной теории аппроксимации. — Издательство Санкт-Петербургского университета, 2004. — с. 146—158.

37. *Назаров А. И.*, *Щеглова А. П.* О некоторых свойствах экстремали в вариационной задаче, порожденной теоремой вложения Соболева // Проблемы математического анализа. т. 27. — Новосибирск: Издательство Тамары Рожковской, 2004. — с. 109—136.

38. *Похожаев С. И.* О собственных функциях уравнения $\Delta u + \lambda f(u) = 0$ // Доклады Академии Наук СССР. т. 165. — Российская академия наук. 1965. — с. 36—39.

39. *Самко С. Г.*, *Килбас А. А.*, *Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.

40. *Щеглова А. П.* Задача Неймана для полулинейного эллиптического уравнения в тонком цилиндре. Решения с наименьшей энергией // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2007. — т. 348. — с. 272—302.

Устинов Никита Сергеевич

Полулинейные уравнения с дробными лапласианами

Подписано в печать ____________. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ____