На правах рукописи

Аль-Асади Бассам Джаббар Джасим

Свойства обобщенно-однородных дифференциальных и разностных уравнений

Специальность 01.01.02 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Владимир – 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Дагестанский государственный университет»

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, профессор Эфендиев Ахмад Рамазанович

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор Жиков Василий Васильевич

Официальные оппоненты: Родина Людмила Ивановна, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа Удмуртского государственного университета

Барабанов Олег Олегович, кандидат физико-математических наук доцент, заведующий кафедрой высшей математики Ковровской государственной технологической академии имени В. А. Дегтярева

Ведущая организация: Белгородский национальный исследовательский университет

Защита диссертации состоится 30 января 2017 г. в 16 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.025.08 при Владимирском государственном университете имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых по адресу: 600024, г. Владимир, проспект Строителей, д.11, корп. 7 ВлГУ, ауд. 133. Факс (4922) 53-25-75, 33-13-91; e-mail: oid@vlsu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на официальном сайте www.vlsu.ru Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, с авторефератом — на сайтах http://vak2.ed.gov.ru/catalogue/ и http://diss.vlsu.ru

Автореферат разослан «__» ________ 2016 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 212.025.08 Наумова С. Б.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Известно, что многие задачи небесной механики, автоматики, телемеханики и теории колебаний приводят к рассмотрению существенно нелинейных систем дифференциальных и разностных уравнений. Однако общих методов исследования, устанавливающих полную качественную картину расположения траекторий системы дифференциальных и разностных уравнений, не существует. В связи с этим приходится выделять различные классы нелинейных систем дифференциальных и разностных уравнений, которые удается исследовать различными качественными методами.

Самыми распространенными и, по-видимому, наиболее изученными к настоящему времени являются нелинейные системы вида

$$\partial x_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \qquad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

где ∂x_i означает $\frac{dx_i}{dt}$ или $x_i(t+k)$; функции $f_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяют различным условиям однородности.

Наиболее трудным при изучении поведения траекторий системы (1) вблизи особой точки является случай, когда правые части не содержат линейных членов. Такие системы в предположении, что функции $f_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$, являются однородными или разлагающимися в степенные ряды, изучены в работах Н. Н. Красовского, В. И. Зубова, А. А. Шестакова, А. А. Брюно, Л. А. Беклеммива и А. Р. Эфендиева.

В работах Е. А. Барбашина, Н. Н. Красовского точные условия устойчивости нулевого решения системы (1) выражены через свойства функции Ляпунова.

Качественно новым обобщением однородности является введение понятия обобщенно-однородных функций и форм порядка p класса переменной матрицы $A(x_1, \dots, x_n, c)$, $i = 1, \dots, n$.

А. Р. Эфендиев изучил вопросы о структуре семейства интегральных кривых системы (1) в окрестностях особых точек высшего порядка в случаях, когда правые части являются обобщенно-однородными функциями порядка p класса матрицы $\|\delta_{ij} a_{ij}(x_i, c)\|$, $i, j = 1, \dots, n$, где элементы матрицы зависят от одной переменной.

Совокупность обобщенных и обобщенно-однородных функций соответствует совокупности систем дифференциальных уравнений. Этой совокупности соответствует матрица $A(x_1, \dots, x_n, c)$. Следовательно, каждой матрице $A(x_1, \dots, x_n, c)$ соответствует система дифференциальных уравнений. Значит, следует исследовать новые виды матриц.

Мы решаем вопрос о структуре семейства интегральных кривых системы (1) в окрестности особых точек высшего порядка в предположении, что правые части системы (1) являются обобщенно-однородными функциями порядка p класса переменной матрицы $\|\delta_{ij} a_{ij}(x_1, \dots, x_i, c)\|$, $i, j = 1, \dots, n$.

Представленные в диссертации схемы исследования свойств, решений дифференциальных и разностных уравнений основаны на методах качественного исследования динамических систем, разработанных в трудах В. В. Немыцкого, Н. Н. Красовского, А. А. Шестакова, Ю. И. Сапронова, А. Д. Мышкиса, Л. Э. Эльсгольца, Г. А. Каминского, М. В. Келдыша, Ю. В. Покорного и других.

Цель данной работы. Описание поведения решения системы дифференциальных и разностных уравнений, получение условий существования O −кривых, устойчивости тривиального решения исследуемой системы; получение необходимых и достаточных условий обобщенно-однородных функций.

Научная новизна. Все результаты, включенные в диссертацию, являются новыми. Наиболее значительные из них перечислены в следующем ниже списке.

1. Новые условия существования, асимптотической устойчивости, тривиального решения исследуемой системы.
2. Описание обобщенно-однородных функций, их связь с системами дифференциальных уравнений.
3. Описание обобщенно-однородных разностных систем уравнений.
4. Описание специальных решений систем дифференциальных и разностных уравнений.

Методы исследования: В работе использованы качественные методы анализа особых точек динамических систем. (А. Пуанкаре, А. М. Ляпунова, В. В. Немыцкого, Н. Н. Красовского, А. А. Шестакова, А. Р. Эфендиева и др.).

Теоретическая и практическая ценность. Данная работа в целом носит теоретический характер, но представленные в ней результаты могут быть использованы при изучении конкретных динамических систем.

Апробация работы. Результаты диссертации были доложены на VI и VII международных научных конференциях “ФДУ и их приложения”, которые проходили 23-26 сентября 2013 и 21-24 сентября 2015, на VII международной научной конференции, 21-24 сентября 2015, на межвузовском научном семинаре в ДГТУ «Актуальные проблемы математики и смежные вопросы» Махачкала, 2015.

Результаты диссертации опубликованы в шести работах, **три из них соответствуют списку ВАК РФ.** Из совместных работ в диссертацию вошли результаты, которые принадлежат диссертанту.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на разделы (параграфы), и списка литературы из 60 наименований. Общий объем диссертации 90 страниц.

Краткое содержание диссертации.

Введение содержит краткое описание основных результатов диссертации и результатов других авторов, соответствующих теме дисскртации.

Первая глава состоит из 6 параграфов и посвящена рассмотрению обобщенно-однородных систем уравнений переменного класса.

Здесь мы рассматриваем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \qquad i = 1, \dots, n, \tag{2}$$

где правые части (2) являются обобщенно-однородными функциями порядка p из класса переменной матрицы $A(x, c)$

$$A(x,c) = \left\| \frac{\delta_{ij} c^{p_i}}{\sqrt[a_i]{1 - a_i x_i^{a_i} \int_1^c \eta^{a_i p_i - 1}\, q_i(z_1, \dots, z_{i-1}) d\eta}} \right\|, \tag{3}$$

$i, j = 1, \dots, n$, δ_{ij} – символ Кронекера, $\rho_i = \frac{k_i}{2l_i+1}$, k_i, l_i, $-$ целые неотрицательные числа, причем $\alpha_i -$ четные числа, $c -$ параметр, причем $c \in (-1-\iota, 1+\iota)$, $\iota > 0$ функции $q_i(z_1, \dots, z_{i-1})$, таковы, что

$$\alpha_i x_i^{\alpha_i} \int_1^c \eta^{\alpha_i p_i - 1} q_i(z_1, \dots, z_{i-1}) d\eta < 1, \ \ q_i(0, \dots 0) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Вспомогательная система $c\frac{dz_i}{dc} = p_i z_i + q_i(z_1, \dots, z_{i-1}) z_i^{\alpha_{i+1}}$, $i = 1, \dots, n$, имеет единственную особую точку $O(0, \dots, 0)$. При сделанных предположениях относитольно α_i, p_i, q_i и функции z_i, определенной по формуле

$$z_i = \frac{c^{p_i} x_i}{\sqrt[\alpha_i]{1 - \alpha_i x_i^{\alpha_i} \int_1^c \eta^{\alpha_i p_i - 1} q_i(z_1, \dots, z_{i-1}) d\eta}}, \qquad i = 1 \dots n. \qquad (4)$$

В параграфе §1.1 дается понятие обобщенно-однородной функции и некоторые её свойства.

Определение 1. *Вещественная вектор-функция* $f(x)$, *определенная и непрерывная в области* $D \subset R^n$, *называется обобщенно-однородной порядка* p *класса матрицы* $A(x, c)$, *если она удовлетворяет соотношению*

$$f(z) = c^p \mathcal{J}(z, x) f(x), \qquad (5)$$

где $z = A(x, c)x$ *непрерывно дифференцируема по* $x \in D$ *и по параметру* $c \in (a, b)$, $\mathcal{J}(z, x) -$ *матрица Якоби. Считаем, что* $1 \in (a, b)$.

В параграфе §1.2 исследуются системы переменного класса. Под этим понимается, что матрица $A(x, c)$, которая определяет класс обобщенно-однородной функции зависит явно от $(x_1, \dots, x_n)$. В работах В. И. Зубова и В. В. Хоменюка также даны определения обобщенно-однородных функций порядка p

класса матрицы $A(x,c)$, но в них предполагается c меняющимся в $(-\infty,\infty)$, а элементы $A(x,c)$ считаются голоморфными функциями переменных $x_1,\dots,x_n$ и c. Однако если отбросить условие голоморфности, то в общем случае параметр c будет меняться на конечном интервале.

Приведем необходимые и достаточные признаки того, чтобы вектор-функция $f(x)$, была обобщенно-однородной прядка p класса заданной матрицы $A(x,c)$.

Теорема 1. *Для того, чтобы вектор-функция $f(x)$, определенная и непрерывно дифференцируемая в D, была обобщенно-однородной порядка p класса заданной матрицы $A(x,c)$, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла системе уравнений в частных производных*

$$\mathcal{J}(f,x)\varphi(x) = pf(x) + \mathcal{J}(\varphi,x)f(x), \qquad (6)$$

где $\mathcal{J}(f,x) = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|$, $\mathcal{J}(\varphi,x) = \left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right\|$, $\quad i,j = 1,\dots,n$ – *матрица Якоби,*

$$\varphi(x) = colon[\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)], \qquad f(x) = colon[f_1(x),\dots,f_n(x)].$$

Пример скалярной функции непеременного класса:

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i_1,\dots,i_n} \alpha_{i_1\dots i_n} x_1^{i_1}\left(p_1 + q_1 x_1^{\alpha_1}\right)^{-\frac{i_1}{\alpha_1}} \dots x_n^{i_n}\left(p_n + q_n x_n^{\alpha_n}\right)^{-\frac{i_n}{\alpha_n}}, \qquad (7)$$

где $p_s > q_s > 0$, $s = 1,\dots,n$, а суммирование должно быть распространено на все решения в целых и положительных числах уравнения

$$p_1 i_1 + p_2 i_2 + \dots + p_n i_n = p, \qquad p \neq p_i, \qquad i = 1,\dots,n \qquad (8)$$

Функция (7), обобщенно-однородная класса матрицы

$$\left\| \delta_{ij} c^{p_i} \left[1 + x_i^{\alpha_i} \frac{q_i}{p_i} (1 - c^{\alpha_i p_i}) \right]^{-\frac{1}{\alpha_i}} \right\|, \qquad i, j = 1, \dots, n \tag{9}$$

порядка p, где δ_{ij} − символ Кронекера.

В параграфе §1.3 рассматриваются специальные решения системы дифференциальных уравнений, и на основе их и определяющих уравнений строятся решения дифференциальных уравнений.

Параграф §1.4 посвящен существованию O^+ и O^- кривых.

Определение 2. *Кривую* $x_i = x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, *назовем* O^+ − кривой (O^- *−кривой), если* $\lim_{t \to \infty(-\infty)} x_i(t) = 0$

Определение 3. *Специальными решениями системы*

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \qquad i = 1, \dots, n, \tag{10}$$

назовем

$$x = A(\alpha, \tau)\alpha, \ \ \tau = (c_0 + t)^{-\frac{1}{p}}, \ \ x = A(\bar{\alpha}, \tau)\bar{\alpha}, \ \ \tau = (c_0 - t)^{-\frac{1}{p}},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$ – *решения определяющих уравнений системы:*

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_n) + p f_i(x_1, \dots x_n) = 0, \qquad i = 1, .. n, \tag{11}$$

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_n) - p f_i(x_1, \dots x_n) = 0, \qquad i = 1, .. n. \tag{12}$$

Известно, что специальные решения системы (10) $x_i = z_i(t)$ и $x_i = \overline{z_i}(t)$, $i = 1, \dots, n$, определенные следующими формулами

$$x_i = z_i(t) = \frac{(c_0+t)^{-\frac{p_i}{p}} w_i}{\sqrt[\alpha_i]{1 + \frac{\alpha_i w_i^{\alpha_i}}{p} \int_{1-c_0}^{t} (c_0+\eta)^{\frac{\alpha_i p_i + p}{p}} q_i(z_1, \dots, z_{i-1}) d\eta}}, \tag{13}$$

$i = 1, \dots, n,\ \ t \in [0, +\infty),\ c_0 > 0$

и

$$x_i = \bar{z}_i(t) = \frac{(c_0-t)^{-\frac{p_i}{p}} \overline{w}_i}{\sqrt[\alpha_i]{1 - \frac{\alpha_i \overline{w}_i^{\alpha_i}}{p} \int_{c_0-1}^{t} (c_0-\eta)^{-\frac{\alpha_i p_i + p}{p}} q_i(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{i-1}) d\eta}}, \tag{13a}$$

$i = 1, \dots, n,\ \ t \in (-\infty, 0],\ \ c_0 > 0,$

являются O^+ и O^- — кривыми (А. Р. Эфендиев).

В параграфе §1.6 рассматривается вопрос о бифуркации системы дифференциальных уравнений. В параграфе §1.7 рассматривается топологическая эквивалентность систем дифференциальных уравнений.

Глава 2, состоящая из 6 параграфов, посвящена изучению системы «треугольного» вида.

Имеет место следующая

Теорема 2. *Выражения*

$$x_i = z_i(t) = \frac{(c_0+t)^{-\frac{p_i}{p}} w_i}{\sqrt[\alpha_i]{1 + \frac{\alpha_i w_i^{\alpha_i}}{p} \int_{1-c_0}^{t} (c_0+\eta)^{-\frac{\alpha_i p_i + p}{p}} q_i(z_1, \dots, z_i) d\eta}}, \tag{14}$$

$$x_i = \bar{z}_i(t) = \frac{(c_0 - t)^{-\frac{p_i}{p}}\overline{w}_i}{\sqrt[\alpha_i]{1 - \frac{\alpha_i \overline{w}_i^{\alpha_i}}{p}\int_{c_0-1}^{t}(c_0-\eta)^{-\frac{\alpha_i p_i + p}{p}} q_i(\overline{z_1}, \dots, \bar{z}_i)d\eta}}, \qquad (14a)$$

где $c_0 > 0$, *будут специальными решениями (соответственно*, O^+ *и* O^- *кривыми) системы*

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_i), \qquad i = 1, \dots, n$$

тогда и только тогда, когда вещественные числа w_s, $\overline{w_s}$, $s = 1, \dots, n$, *являются решениями следующих определяющих уравнений*

$$\varphi_s(x_1, \dots, x_s) + pf_s(x_1, \dots x_s) = 0,$$

$$\varphi_s(x_1, \dots, x_s) - pf_s(x_1, \dots x_s) = 0.$$

В параграфе §2.2 рассматривается вопрос о размерности O −кривых системы.

В параграфе §2.3 исследуются вопросы ограниченности решений.

В параграфе §2.4 доказан следующий критерий того, что все решения системы (2) были $O^+ -$ кривыми ($O^- -$ кривыми).

Теорема 3. *Если* p *−четное,* p_i $(i = 1, \dots, n)$ *−нечетные числа, то для того, чтобы все решения системы (2) были* $O^+ -$ *кривыми* ($O^- -$ *кривыми), необходимо и достаточно, чтобы все* $f_i < 0$ (все $f_i > 0$) $(i = 1, \dots, n)$. *При этом для* O^+ *и* $O^- -$ *кривых имеют место асимптотические формулы*

$$\lim_{t \to +\infty} x_i(t)\,(c_0 + t)^{\frac{p_i}{p}} = w_i,$$

$$\lim_{t \to -\infty} x_i(t)\,(c_0 - t)^{\frac{p_i}{p}} = (-1)^{p_i}\overline{w}_i, \qquad i = 1, \dots, n,$$

где w_i *и* $\overline{w}_i, i = 1, \ldots n$*, соответственно решения определяющих уравнений*

$$p_i x_i + p f_i(x_1, \ldots, x_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$-p_i x_i + p f_i(x_1, \ldots, x_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

В параграфе §2.5 рассматривается критерий асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы. Имеет место

Теорема 4. *Пусть* $p -$ *четное,* $p_i\,(i = 1, \ldots, n) -$ *нечетные числа и* $f_i \neq 0, i = 1, \ldots, n$*. Тогда нулевое решение системы* (2) *будет асимптотически устойчивым в целом тогда и только тогда, когда все* $f_i < 0,\ i = 1, \ldots, n$.

Глава 3 состоит из 5 параграфов и посвящена исследованию поведения решений разностных уравнений. Здесь впервые исследуются разностные уравнения, когда правые части являются обобщенно- однородными функциями.

Рассмотрим систему

$$x(t + k) = f\big(x(t)\big), \tag{15}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n), f = (f_1, \ldots, f_n), f_i$ – непрерывно-дифференцируемые в области $D \subset R^n$, k – натуральное число, t –принимает дискретные значения.

Определение 4. *Вещественную вектор-функцию* $f(x)$*, определенную и непрерывно дифференцируемую в области* $D \subset E^n$ *назовем обобщенно-однородным порядка* p *класса матрицы* $A(c), c \in (-1 - b, 1 + b), b > 0$*, если*

$$f\big(A(c)\big) = [A(c)]^p f(x), \quad p \geq 0. \tag{16}$$

Имеет место

Теорема 5. *Если* $x = x(t)$ *− решение системы (15), то* $x(t) = [A(c)]^{p^{-\frac{t}{k}}} x(t)$ *также является решением системы* (15).

Следствие 1. *Если* $\lambda = w$ *− вещественное решение определяющей системы* $f(x) = x$, *то* $x(t) = [A(c)]^{p^{-\frac{t}{k}}} w$ *− специальное решение системы* (15).

В параграфе §3.2 система (15) приводится к системе Пуанкаре-Ляпунова вида

$$y(t+k) = \mathcal{J}(f,w)y(t) + \psi(y), \qquad (17)$$

где $\mathcal{J}(f,w)$ − матрица Якоби.

Справедлива

Теорема 6. *Если система* $f(x) = x$ *имеет вещественное решение* $x = w$, *то матрица* $\mathcal{J}(f,w)$ *линейной части системы* (17) *имеет собственное число, равное* $\sqrt[k]{p}$.

Следствие 2. *Если система* (17) *такова, что* $k = 1$, *то собственное значение матрицы* $\mathcal{J}(f,w)$ *равно* p.

В параграфе §3.3 рассматриваются вопросы существования O^+ −кривых.

В параграфе §3.4 изучается система вида

$$y_i(t+1) = y_i(t) \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j^p(t), \quad j = 1, \ldots, n. \qquad (18)$$

К системе (18) сводится система

$$x_i(t+1) = x_i(t) \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_1^{p_{1j}}(t) \ldots x_n^{p_{mj}}(t), \qquad (19)$$

степенным преобразованием [А. А. Брюко]

$$y_1 = x_1^{\alpha_{11}} x_2^{\alpha_{12}} \dots x_n^{\alpha_{1n}},$$

$$y_2 = x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_{22}} \dots x_n^{\alpha_{2n}},$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots,$$

$$y_n = x_1^{\alpha_{n1}} x_2^{\alpha_{n2}} \dots x_n^{\alpha_{nn}}.$$

Теорема 7. *Если p − четное число и ранг матрицы $\|b_{ij}\|$, $i, j = 1, \dots, n$ равен $r = n - 1$, то для того, чтобы особая точка $O(0, \dots, 0)$ системы* (18) *была единственной, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одно из чисел $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$, выражающих линейную зависимость между столбцами матрицы $\|b_{ij}\|$, $i, j = 1, \dots, n$, было положительным.*

В параграфе §3.5 рассматриваются треугольные системы.

Система (15) называется треугольной, если правая часть её зависит от неизвестных с числом, равным номеру уравнения. Мы рассматриваем «треугольную» систему

$$X_s(f) = f_s(X_1, \dots, X_s), \qquad (20)$$

где $s = 1, \dots, n$, $f_s(0, \dots, 0) = 0$ − единственная особая точка $O(0, \dots, 0)$. Правые части (20) $f_s(x_n, \dots, x_s)$, $s = 1, \dots, n$ определены в области D, непрерывно дифференцируемы до порядка $\nu \geq 0$ и удовлетворяют соотношению

$$f_s(\tau^{p_1} x_1, \dots, \tau^{p_s} x_s) = \tau^{p_s p} f_s(x_1, \dots, x_\tau), \qquad (21)$$

где $\tau \epsilon (-\infty, +\infty)$.

Имеет место

Теорема 8.

1) *Пусть* p- *четное,* p_s $(s = 1, \dots, n)$ *нечетные числа, тогда для того, чтобы все специальные решения*

$$x_s(t) = \delta_s \tau^{p_s p^t} \qquad (s = 1, \dots, n), \tag{22}$$

системы (20) *с начальным данными* $|x_s(0)| < 1$ *были* $O^+ -$ *кривыми необходимо и достаточно, чтобы* $0 < |g_s| < 1$

2) *Пусть* p *и* $p_i -$ *числа нечетные. Тогда для того, чтобы все специальные решения* (22) *системы* (20) *с начальными данными* $|x_s(0)| < 1$ *были* $O^+ -$ *кривыми, необходимо и достаточно, чтобы* $0 < g_s < 1$.

3) *При указанных в пункте* 1) *условиях тривиальное решение асимптотически устойчиво.*

Публикации автора по теме диссертации

1. *Джасим А. Х. Д., Аль – Асади Б. Д. Д,* Об одной системе типа Брио – Буке // ДГУ, Материалы VI Межд. научной конференции «ФДУ и их приложения», 2013, с.121 – 123.
2. *Аль – Асади Б. Д. Д., Джасим А. Х. Д., Эфендиев* А. Р. Об обобщенно – однородных системах дифференциальных уравнений // Вестник ДГУ, 2014, Вып.1, с.68-72.
3. *Аль – Асади Б. Д. Д.*, Об одной треугольной обобщенно – однородной системе дифференциальных уравнений // Вестник ДГУ, 2015, Вып.6, с.131-134.
4. *Аль – Асади Б. Д. Д.*, Об одной треугольной обобщенно – однородной системе дифференциальных уравнений // Материалы VI международной

научной конференции посвященной 80-летию профессора Г.А. Магомедова 21-24 сентября ,2015, с.27-28.

5. *Аль – Асади Б. Д. Д.,* Об одной обобщенно – однородном дифференциальном уравнении // Актуальные проблемы математики и смежные вопросы, Сборник научных трудов межвузовского семинара, Махачкала, 2015 с.7-8.
6. *Аль – Асади Б. Д. Д.* О свойствах разностной системы // Успехи современной науки ,2016, No.3, Tom 2, с.105-107.

Работы [2], [3], опубликованы в журналах, рекомендованных в ВАК Минобрнауки РФ. Работа [6], опубликованная в международном научно-исследовательском журнале "Успехи современной науки", включен в РИНЦ и в международную базу данных Agris и она считается журналом, рекомендованным ВАК.

Подписано в печать «___»________2016
Формат 60x841/16. Печать ризографная. Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс». Усл. п. л. 1. Тираж 100 экс.

Издательство ДГУ

Г. Махачкала, ул. М. Ярагского, 59[а]