На правах рукописи

Хаммади Алаа Хуссейн

СВОЙСТВА ХАРАКТЕРИСТИК МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ РАЗЛИЧНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Специальность: 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Владимир — 2016

Работа выполнена на кафедре математического анализа Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Удмуртский государственный университет».

Научный руководитель : Родина Людмила Ивановна
доктор физико-математических наук, доцент,
зав. кафедрой математического анализа
ИМИТиФ УдГУ

Официальные оппоненты : Бортаковский Александр Сергеевич
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры «Математическая кибернетика» МАИ

Глызин Сергей Дмитриевич
доктор физико-математических наук,
профессор, зав. кафедрой компьютерных сетей ЯрГУ им. П.Г. Демидова

Ведущая организация : Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж.

Защита состоится 30 июня 2016 г. в 16.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.025.08 при Владимирском государственном университете имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых по адресу: 600024, г. Владимир, пр-т. Строителей, д. 11, корп. 7 ВлГУ, Педагогический институт, ауд. 237. Факс (4922) 53-25-75, 33-13-91; e-mail: oid@vlsu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на официальном сайте www.vlsu.ru Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых

Автореферат разослан «....» мая 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.025.08 Наумова С. Б.

Актуальность темы. Задача исследования инвариантности множеств относительно различных управляемых систем и дифференциальных включений является одной из важнейших задач математической теории управления и теории дифференциальных игр. Данной тематике посвящены работы Н. Н. Красовского, А. Б. Куржанского, Ж. П. Обена, А. И. Субботина, Е. Л. Тонкова, В. Н. Ушакова, Т. Ф. Филипповой, Ф. Хартмана и многих других авторов.

Первый результат в этой области опубликован М. Нагумо[1] в 1942 году, которым было изучено свойство слабой инвариантности заданного множества относительно дифференциального уравнения. Эти исследования продолжил Ф. Хартман[2], сформулировав необходимые и достаточные условия слабой инвариантности для системы дифференциальных уравнений. Большое внимание изучению вопросов инвариантности и «выживаемости» (как называют в иностранной литературе слабую инвариантность) уделял Ж. П. Обен[3], который получил условия выживаемости множества $K \subset \mathbb{R}^n$ относительно управляемой системы

$$\dot{x} = f(x, u), \quad u \in U(x)$$

в предположении, что для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ множество $f(x, U(x))$ выпукло и компактно. Ж. П. Обен называет множество K *выживающим* относительно данной системы, если для любой начальной точки $x_0 \in K$ существует хотя бы одно решение $x(t)$ этой системы, начинающееся в x_0 и выживаемое в том смысле, что $x(t) \in K$ для всех $t \geqslant 0$.

Е. Л. Тонков и Е. А. Панасенко[4] сформулировали условия, при которых заданное множество обладает свойствами положительной инвариантности, инвариантности, устойчивой или асимптотически устойчивой инвариантности относительно нестационарного дифференциального включения. Наличие инвариантного множества позволяет им рассматривать сужение включения на это множество и исследовать в нем различные экстремальные движения. А. Б. Куржанским[5] получено аналитическое описание множе-

[1]Nagumo M. Über die Laga der integralkurven gewöhnlicher differential Gleichungen // Proc. Phys. Math. Japan. 1942. Vol. 24. P. 399–414.

[2]Hartman P. On invariant sets and on a theorem of Wazewski // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 32. P. 511–520.

[3]Aubin J.P. Viability Theory. Boston, Birkhäuser. 1991. 543 p.

[4]Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 202–221.

[5]Куржанский А.Б. Об аналитическом описании множества выживающих траекторий дифференциальной системы // Успехи математических наук. 1985. Т. 40. Вып. 4(244). С. 183–184.

ства, которое является замыканием множества выживающих траекторий дифференциального включения; также он исследовал структуру слабо инвариантных множеств гибридных систем[6], движение которых осуществляется путем мгновенного переключения с одной из «стандартных систем» на другую.

Отметим, что свойство слабой инвариантности находится в тесной связи с весьма важными задачами о сближении управляемой системы с компактным целевым множеством, исследуемыми Н. Н. Красовским, А. И. Субботиным, В. Н. Ушаковым и многими другими авторами. При решении этих задач возникает вопрос о том, в какой степени заданное множество не является инвариантным относительно дифференциального включения, порожденного управляемой системой (см. работы В. Н. Ушакова[7] и его учеников). Один из возможных подходов к решению этого вопроса состоит в применении инфинитезимального представления свойства инвариантности и вычисления дефекта инвариантности, который оценивает степень несогласованности множества и динамики системы с точки зрения понятия инвариантности.

В работах Л. И. Родиной и Е. Л. Тонкова[8] также исследуются множества, не являющиеся инвариантными в «классическом» смысле; для таких множеств вводится естественное расширение понятия инвариантности, которое названо статистической инвариантностью. Пусть $D(t, X)$ — множество достижимости управляемой системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (t, x, u) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \tag{1}$$

в момент времени t из начального множества X. Множество

$$\mathfrak{M} = \big\{(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\}$$

[6]Куржанский А.Б., Точилин П.А. Слабо инвариантные множества гибридных систем // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 11. С. 1523-1533.

[7]Ушаков В.Н., Зимовец А.А. Дефект инвариантности множеств относительно дифференциального включения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 2. С. 98–111.

Ушаков В.Н., Котельникова А.Н., Малёв А.Г. Об оценке дефекта слабой инвариантности множеств с кусочно-гладкой границей // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 4. С. 250–266.

[8]Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 2. С. 265–288.

Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 67–86.

называется *статистически инвариантным* относительно системы (1), если относительная частота пребывания множества достижимости $D(t,X)$ в множестве $\mathfrak{M}$ равна единице. Свойство статистической инвариантности связано с исследованием введенных в этих работах статистических характеристик, таких как *верхняя и нижняя относительные частоты поглощения множества достижимости* $D(t,X)$ системы (1) множеством $\mathfrak{M}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{freq}^*(D,M) &\doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]: D(t,X)\subseteq M(t)\}}{\vartheta}, \\ \operatorname{freq}_*(D,M) &\doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]: D(t,X)\subseteq M(t)\}}{\vartheta}, \end{aligned} \tag{2}$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. Если $\operatorname{freq}_*(D,M)=\operatorname{freq}^*(D,M)$, то общий предел

$$\operatorname{freq}(D,M) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]: D(t,X)\subseteq M(t)\}}{\vartheta} \tag{3}$$

называется *относительной частотой поглощения множества достижимости* системы (1) множеством $\mathfrak{M}$.

В данной работе исследуются свойства характеристик, одна из которых — *относительная частота поглощения множества* $D(t,X)$ *множеством* $\mathfrak{M}$ *на отрезке* $[\tau,\tau+\vartheta]$ равна отношению меры Лебега тех t из отрезка $[\tau,\tau+\vartheta]$, при которых $D(t,X)\subseteq M(t)$, к длине данного отрезка:

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M) \doteq \frac{\operatorname{mes}\big\{t\in[\tau,\tau+\vartheta]: D(t,X)\subseteq M(t)\big\}}{\vartheta}. \tag{4}$$

Вторая характеристика —

$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(D,M) \doteq \inf_{\tau\geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\tau+\vartheta]: D(t,X)\subseteq M(t)\}}{\vartheta} \tag{5}$$

отображает свойство равномерности пребывания множества достижимости управляемой системы (1) в множестве $\mathfrak{M}$ на отрезке заданной длины $\vartheta>0$. Доказаны утверждения, позволяющие оценивать и вычислять данные характеристики; получены теоремы сравнения, сформулированные в терминах функций А.М. Ляпунова и производной Ф. Кларка.

Другой задачей, которая изучается в работе, является задача исследования свойства статистической инвариантности, статистических характеристик (2), (3) и характеристик (4), (5) для управляемых систем со случайными параметрами

$$\dot{x}=f(h^t\sigma,x,u), \quad (t,\sigma,x,u)\in\mathbb{R}\times\Sigma\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m, \tag{6}$$

правая часть которых параметризована с помощью метрической динамической системы $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$. В отличие от детерминированных систем, для систем со случайными параметрами часто возникает ситуация, когда множество достижимости системы находится в заданном множестве $\mathfrak{M}(\sigma)$ с относительной частотой, равной единице, причем это происходит не для всех, а для почти всех σ из некоторого множества $\Sigma_* \subset \Sigma$, вероятностная мера которого $\nu(\Sigma_*) = \mu$, $\mu \in (0, 1]$. Поэтому для таких систем рассматривается свойство статистической инвариантности, выполненное с заданной вероятностью.

Цель работы. Целью диссертации является исследование характеристик (4), (5) управляемой системы (1), а также изучение статистически инвариантных множеств и оценка характеристик (3), (4), (5) для управляемой системы со случайными параметрами (6).

Методы исследований. Работа опирается на методы качественной теории дифференциальных уравнений, математической теории управления, теории случайных процессов и теории динамических систем.

Научная новизна. Все полученные в работе результаты являются новыми. Основные результаты состоят в следующем:

1) исследованы основные свойства характеристик (4), (5), доказаны теоремы сравнения для этих характеристик, сформулированные в терминах функций А.М. Ляпунова и производной Ф. Кларка;

2) получены оценки характеристик (4), (5) для различных многозначных функций $t \mapsto D(t, X)$, $t \mapsto M(t)$ и приведены условия, при которых можно найти их значения;

3) для системы со случайными параметрами (6) получены оценки характеристик (3), (4), (5), выполненные с вероятностью единица и исследовано свойство статистической инвариантности множества

$$\mathfrak{M}(\sigma) = \{(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(h^t\sigma)\},$$

выполненное с заданной вероятностью;

4) получены оценки, выполненные с вероятностью единица, для характеристик множества достижимости управляемой системы с переключениями. Данную систему можно отождествить со стационарным случайным процессом, множество состояний которого конечно; для него заданы начальное вероятностное распределение и вероятности нахождения в каждом состоянии; длины промежутков между моментами переключения системы с одного состояния на другое являются случайными величинами с заданной функцией распределения.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Все основные утверждения в ней сформулированы в виде теорем и сопровождаются строгими доказательствами. Результаты работы и примененные методы могут быть использованы при проведении исследований по математической теории управления в Институте математики и механики УрО РАН, в Институте динамики систем и теории управления СО РАН, в Московском, Владимирском, Воронежском, Пермском, Удмуртском и Ярославском государственных университетах, а также при чтении специальных курсов для студентов и магистров математических и естественнонаучных специальностей Удмуртского госуниверситета.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на многочисленных научных семинарах и международных конференциях, среди которых:

1) XVI международная конференция «Моделирование и исследование устойчивости динамических систем» (Киев, 2013);

2) международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2014);

3) международная конференция «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна ВЗМШ-2014» (Воронеж, 2014);

4) XVI международная научная конференция по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения–2014» (Минск, 2014);

5) международная научная конференция «Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций–2014» (Казань, 2014);

6) международная школа молодых ученых «Моделирование и управление сложными системами» MCCS 2015 (Суздаль, 2015);

7) всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященная памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова (Ижевск, 2015);

8) семинар «Нелинейная динамика и синергетика» (ЯрГУ, Ярославль, 2016);

9) Ижевский городской семинар по дифференциальным уравнениям и теории управления (УдГУ, Ижевск, 2012–2016).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 11 печатных изданиях [1–11]. Статьи [1–3] опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов кандидатской диссертации.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, 9 параграфов (нумерация параграфов сквозная), заключения и списка литературы. Полный объем диссертации 100 страниц текста с 10 рисунками. Список литературы содержит 68 наименований, включая работы автора.

Краткое изложение содержания работы

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования, дается общая характеристика рассматриваемого в диссертации круга вопросов, приведен краткий обзор работ предшественников по данной проблеме, определена цель работы и сформулированы основные полученные результаты.

В **первой главе** исследуются характеристики (4), (5) для управляемой системы (1). Предполагаем, что функция $f(t,x,u)$ непрерывна, управление u содержится в компактном множестве $U(t,x) \subset \mathbb{R}^m$ и функция $U(t,x)$ полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа при всех $(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$. Рассматривается множество

$$\mathfrak{M} \doteq \big\{(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\},$$

заданное функцией $t \mapsto M(t)$, непрерывной в метрике Хаусдорфа; полагаем, что для каждого $t \in [0,+\infty)$ множество $M(t)$ непусто и компактно.

В первом параграфе приведены основные определения и свойства характеристик (4), (5). Доказано следующее утверждение.

Теорема 1 ([1], [9]). *Имеют место следующие свойства:*

1) *для любого* $\vartheta > 0$ *выполнено неравенство* $\operatorname{freq}_\vartheta(D,M) \leqslant \operatorname{freq}_*(D,M)$;

2) *если функции* $t \mapsto D(t,X)$ *и* $t \mapsto M(t)$ *периодические с периодом* $T > 0$, *то предел* $\operatorname{freq}(D,M)$ *существует и*

$$\operatorname{freq}_T(D,M) = \operatorname{freq}(D,M) = \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,T] : D(t,X) \subseteq M(t)\}}{T};$$

3) *если функция* $t \mapsto M(t)$ *периодическая с периодом* $T > 0$ *и для всех* $t \geqslant 0$ *имеет место включение* $D(t+T,X) \subseteq D(t,X)$, *то*

$$\operatorname{freq}_T(D,M) = \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,T] : D(t,X) \subseteq M(t)\}}{T}.$$

Во втором параграфе доказаны теоремы сравнения для характеристик (4), (5). Приведем необходимые определения.

Обозначим через $M^r(t)$ замкнутую r-окрестность множества $M(t)$, через $N^r(t) = M^r(t) \backslash M(t)$ обозначим внешнюю r-окрестность границы множества $M(t)$. Построим множество

$$\mathfrak{N}^r \doteq \big\{(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in N^r(t)\big\}.$$

Скалярная функция $V(t,x)$ переменных $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ называется *функцией Ляпунова* относительно множества $\mathfrak{M}$, если она удовлетворяет локальному условию Липшица по переменным (t,x) и следующим условиям:

1) $V(t,x)\leqslant 0$ для всех $(t,x)\in\mathfrak{M}$;

2) $V(t,x)>0$ для некоторого $r>0$ для всех $(t,x)\in\mathfrak{N}^r$.

Управляемой системе (1) поставим в соответствие дифференциальное включение
$$\dot{x}\in F(t,x),\quad (t,x)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n, \tag{7}$$
где для каждой фиксированной точки $(t,x)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$ множество $F(t,x)$ состоит из всех предельных значений функции $f(t_i,x_i,U(t_i,x_i))$ при $(t_i,x_i)\to(t,x)$. Предполагаем, что множество $F(t,x)$ непусто, ограничено, замкнуто и выпукло. Обозначим через $V^o_{\min}(t,x)$ и $V^o_{\max}(t,x)$ нижнюю и верхнюю производные[9] функции V в силу дифференциального включения (7).

Рассмотрим скалярную задачу Коши
$$\dot{z}=w(t,z),\quad z(0)=z_0, \tag{8}$$
где $z_0\geqslant 0$, функция $w(t,z)$ непрерывна и для каждого $t\in[0,+\infty)$ выполнено неравенство
$$\varlimsup_{|z|\to\infty}\frac{|w(t,z)|}{|z|}<\infty.$$
Пусть $z^*(t)$ — верхнее решение задачи (8). Определим характеристики
$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(z^*,(-\infty,0])\doteq\frac{\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\tau+\vartheta]:\,z^*(t)\leqslant 0\}}{\vartheta},$$
$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(z^*,(-\infty,0])\doteq\inf_{\tau\geqslant 0}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\tau+\vartheta]:\,z^*(t)\leqslant 0\}}{\vartheta}.$$

Теорема 2 ([1]). *Пусть для каждой точки $x\in M(0)$ все решения $\varphi(t,x)$ включения (7), удовлетворяющие начальному условию $\varphi(0,x)=x$, продолжаемы на полуось $\mathbb{R}_+$. Предположим, что существуют функции $V(t,x)$ и $w(t,z)$ такие, что функция $V(t,x)$ является функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}$ и при всех $(t,x)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$ выполнено неравенство $V^o_{\max}(t,x)\leqslant w\big(t,V(t,x)\big)$. Тогда для любого множества $X\subseteq M(0)$ имеют место неравенства*
$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M)\geqslant\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(z^*,(-\infty,0]),$$
$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(D,M)\geqslant\operatorname{freq}_{\vartheta}(z^*,(-\infty,0]).$$

[9] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 300 с.

Аналогично характеристикам (4), (5), определим *относительную частоту нахождения графика непрерывной функции* $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ *в множестве* $\mathfrak{M}$ *на отрезке* $[\tau, \tau + \vartheta]$:

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\varphi, M) \doteq \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau, \tau + \vartheta] : \varphi(t) \in M(t)\}}{\vartheta}$$

и для любого заданного $\vartheta > 0$ характеристику

$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(\varphi, M) \doteq \inf_{\tau \geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau, \tau + \vartheta] : \varphi(t) \in M(t)\}}{\vartheta},$$

которая отображает свойство равномерности нахождения графика функции $\varphi(t)$ в множестве $\mathfrak{M}$.

Теорема 3 ([9]). *Пусть для каждой точки* $x \in M(0)$ *все решения* $\varphi(t, x)$ *включения* (7), *удовлетворяющие начальному условию* $\varphi(0, x) = x$, *продолжаемы на полуось* $\mathbb{R}_+$. *Предположим, что существуют функции* $V(t, x)$ *и* $w(t, z)$ *такие, что функция* $V(t, x)$ *является функцией Ляпунова относительно множества* $\mathfrak{M}$ *и при всех* $(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ *выполнено неравенство*

$$V^o_{\min}(t, x) \leqslant w\big(t, V(t, x)\big).$$

Тогда для любого $x \in M(0)$ *существует решение* $\varphi(t, x)$ *включения* (7), *удовлетворяющее начальному условию* $\varphi(0, x) = x$ *такое, что*

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\varphi, M) \geqslant \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(z^*, (-\infty, 0]),$$
$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(\varphi, M) \geqslant \operatorname{freq}_{\vartheta}(z^*, (-\infty, 0]).$$

В третьем параграфе рассматривается множество $\mathfrak{M}$, заданное непрерывной многозначной функцией $t \mapsto M(t)$ и функции $t \mapsto D(t)$, $t \mapsto \widetilde{D}(t)$, также непрерывные в метрике Хаусдорфа. Предполагаем, что для каждого $t \in [0, +\infty)$ множества $M(t)$, $D(t)$ и $\widetilde{D}(t)$ непустые, компактные и функции $M(t)$, $\widetilde{D}(t)$ периодические с периодом $T > 0$. В следующей теореме получена оценка характеристики $\operatorname{freq}_T(D, M)$ и приведены условия, при которых можно найти ее значение.

Теорема 4 ([1], [9]). *Предположим, что функции* $M(t)$, $\widetilde{D}(t)$ *периодические с периодом* $T > 0$ *и* $\lim\limits_{t \to +\infty} \operatorname{dist}\big(D(t), \widetilde{D}(t)\big) = 0$. *Тогда имеют место следующие свойства:*

1) $\operatorname{freq}_T(D, M) \leqslant \operatorname{freq}_T(\widetilde{D}, M) = \dfrac{\operatorname{mes}\{t \in [0, T] : \widetilde{D}(t) \subseteq M(t)\}}{T}$;

2) *если* $D(t) \subseteq \widetilde{D}(t)$ *для всех* $t \geqslant 0$, *то* $\mathrm{freq}_T(D, M) = \mathrm{freq}_T(\widetilde{D}, M)$.

В четвертом параграфе приведены примеры вычисления и оценки характеристик

$$\mathrm{freq}_\vartheta(z^*, (-\infty, c]) \doteq \inf_{\tau \geqslant 0} \frac{\mathrm{mes}\big\{t \in [\tau, \tau+\vartheta] : \, z^*(t) \leqslant c\big\}}{\vartheta},$$
$$\mathrm{freq}(z^*, (-\infty, c]) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\mathrm{mes}\big\{t \in [0, \vartheta] : z^*(t) \leqslant c\big\}}{\vartheta},$$

возникающих в различных прикладных задачах. Здесь $z^*(t)$ — верхнее решение задачи Коши (8), которое в зависимости от характера процесса может являться энергией частицы, концентрацией реагирующих веществ, размером популяции, величиной производства или ценой на продукцию.

В частности, пусть $z(t)$ — решение линейной задачи Коши

$$\dot{z} = a(t)z + b(t), \quad z(0) = z_0, \tag{9}$$

где функции $a(t)$, $b(t)$ непрерывные и периодические с периодом $T > 0$. Через $\widetilde{z}(t)$ обозначим T-периодическое решение линейного уравнения

$$\dot{z} = a(t)z + b(t),$$

в предположении, что оно существует, то есть, что $\displaystyle\int_0^T a(t)dt \neq 0$. Пусть

$$c_0 = \left(\exp\Big(-\int_0^T a(\tau)d\tau\Big) - 1\right)^{-1} \int_0^T b(s) \exp\Big(-\int_0^s a(\tau)d\tau\Big) ds.$$

Л е м м а 1 ([1]). *Если* $\displaystyle\int_0^T a(\tau)d\tau < 0$, *то выполнены следующие свойства:*

1) *если* $z_0 \leqslant c_0$, *то* $\mathrm{freq}_T(z, (-\infty, c]) = \dfrac{\mathrm{mes}\{t \in [0, T] : \widetilde{z}(t) \leqslant c\}}{T}$;

2) *если* $z_0 > c_0$, *то*

$$\mathrm{freq}_T(z, (-\infty, c]) = \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0, T] : z(t) \leqslant c\}}{T}.$$

Равенства для вычисления характеристики $\mathrm{freq}_T(z, (-\infty, c])$ получены также в случае, когда $\displaystyle\int_0^T a(\tau)d\tau > 0$.

Во **второй главе** исследуются статистически инвариантные множества и статистические характеристики управляемой системы (6), порожденной метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ и функциями f и U. В пятом параграфе приведены определения и доказана теорема сравнения для статистических характеристик системы (6).

Пусть $D(t, \sigma, X)$ — множество достижимости управляемой системы (6) в момент времени t при фиксированном $\sigma \in \Sigma$ из начального множества X. Рассмотрим множество

$$\mathfrak{M}(\sigma) = \{(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(h^t\sigma)\},$$

где функция $t \mapsto M(h^t\sigma)$ непрерывна в метрике Хаусдорфа. *Относительной частотой поглощения* множества достижимости $D(t, \sigma, X)$ системы (6) множеством $\mathfrak{M}(\sigma)$ называется характеристика

$$\operatorname{freq}(\sigma, D_X, M) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : D(t, \sigma, X) \subseteq M(h^t\sigma)\}}{\vartheta}. \qquad (10)$$

Если предел (10) не существует, то характеристики

$$\begin{aligned} \operatorname{freq}^*(\sigma, D_X, M) &\doteq \varlimsup_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : D(t, \sigma, X) \subseteq M(h^t\sigma)\}}{\vartheta}, \\ \operatorname{freq}_*(\sigma, D_X, M) &\doteq \varliminf_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : D(t, \sigma, X) \subseteq M(h^t\sigma)\}}{\vartheta} \end{aligned} \qquad (11)$$

называются соответственно, *верхней и нижней относительными частотами поглощения* множества достижимости $D(t, \sigma, X)$ системы (6) множеством $\mathfrak{M}(\sigma)$. Множество $\mathfrak{M}(\sigma)$ называется *статистически инвариантным* относительно управляемой системы (6), если выполнено равенство

$$\operatorname{freq}\big(\sigma, D_{M(\sigma)}, M\big) = 1.$$

В теореме 5.1 диссертации получены оценки снизу характеристик (11) и условия статистической инвариантности множества $\mathfrak{M}(\sigma)$ относительно управляемой системы (6).

Основной результат второй главы получен в шестом параграфе — это оценки статистических характеристик управляемой линейной системы

$$\dot{x} = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)u, \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times U, \qquad (12)$$

параметризованной метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$. Систему (12) можно отождествить со стационарным в узком смысле случайным процессом $\xi(h^t\sigma) \doteq \bigl(A(h^t\sigma), B(h^t\sigma)\bigr)$. Для этого процесса длины промежутков $\theta_1, \theta_2, \ldots$ между моментами переключения $\tau_1, \tau_2, \ldots$ с одного состояния на другое являются независимыми случайными величинами с функцией распределения $F(t)$ и математическим ожиданием m_θ. Множество состояний $\Psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_\ell\}$ процесса конечно; для него заданы начальное вероятностное распределение и вероятности перехода с одного состояния на другое, то есть определена цепь Маркова ζ, относительно которой будем предполагать, что она неприводима и положительно возвратна. Предполагаем, что функция распределения $F(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $F(t) = 0$ при $t \leqslant 0$, $m_\theta \doteq \displaystyle\int_0^\infty t dF(t) < +\infty$;

2) существуют такие постоянные $a > 0$, $C \geqslant 0$ и $\delta > 0$, что $F(t) \leqslant C\,t^a$ при $t \in (0, \delta)$.

Тогда найдется множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\nu(\Sigma_0) = 1$ и для любого $\sigma \in \Sigma_0$ моменты переключения $\tau_1, \tau_2, \ldots$ случайного процесса $\xi(h^t\sigma)$ изолированы и число этих моментов бесконечно[10].

Пусть задано компактное множество $M \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через $D_i(t, X)$ множество достижимости стационарной линейной системы $\psi_i = (A_i, B_i)$, $i = 1, \ldots, \ell$ в момент времени t из начального множества X, также введем обозначения

$$\alpha_i = \alpha_i(X, M) = \min\bigl\{\tau \in [0, \infty) \colon D_i(t, X) \subseteq M \ \text{ при } \ t \geqslant \tau\bigr\},$$
$$\beta_i = \beta_i(X, M) = \inf\bigl\{\tau \in [0, \infty) \colon D_i(t, X) \cap M = \varnothing \text{ при } t \geqslant \tau\bigr\}, \ i = 1, \ldots, \ell.$$

Если какого-либо из этих моментов времени не существует, положим $\alpha_i = \infty$ или $\beta_i = \infty$. Обозначим через $(\pi_1, \ldots, \pi_\ell)$ стационарное распределение цепи Маркова ζ.

Теорема 5 ([3]). *Пусть цепь Маркова ζ неприводима и положительно возвратна; $M \subseteq X$ и множество $\{(t, x) : t \geqslant 0, x \in X\}$ положительно инвариантно относительно системы* (12). *Тогда для почти всех $\sigma \in \Sigma$ справедливы следующие оценки:*

$$\operatorname{freq}_*(\sigma, D_M, M) \geqslant \frac{1}{m_\theta} \sum_{\{i \colon \alpha_i < \infty\}} \pi_i \Bigl(\int_{\alpha_i}^\infty t dF(t) - \alpha_i\bigl(1 - F(\alpha_i)\bigr)\Bigr),$$

[10] Родина Л.И. Инвариантные и статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск. 2012. Вып. 2 (40). С. 3–164.

$$\mathrm{freq}^*(\sigma, D_M, M) \leqslant 1 - \frac{1}{m_\theta} \sum_{\{i:\,\beta_i<\infty\}} \pi_i \Big(\int_{\beta_i}^{\infty} t dF(t) - \beta_i \big(1 - F(\beta_i)\big) \Big).$$

В **третьей главе** получены оценки характеристик, которые отражают свойство равномерности пребывания множества достижимости управляемой системы со случайными параметрами (6) в множестве $\mathfrak{M}(\sigma)$ на отрезке заданной длины. Это характеристики $\mathrm{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\sigma, D, M)$ и $\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, M)$, которые отличаются от характеристик (4), (5), введенных в первой главе тем, что каждая из них зависит также от случайного параметра $\sigma \in \Sigma$. Получены оценки данных характеристик, выраженные в терминах функций Ляпунова, производной в силу дифференциального включения и динамической системы сдвигов.

В девятом параграфе получены оценки характеристики $\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, M)$ для управляемой системы (6).

Т е о р е м а 6 ([4]). *Пусть $\theta_k = d$ для всех $k = 1, 2, \ldots$,*

$$\alpha_{max} \doteq \max(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell) < d.$$

Если $M \subseteq X$ и множество $\{(t, x) : t \geqslant 0,\, x \in X\}$ положительно инвариантно относительно системы (6)*, то для любого $m = 0, 1, 2, \ldots$ с вероятностью единица справедливы следующие оценки:*

1) *если $\vartheta \in [md, md + \alpha_{max})$, то*

$$\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, M) \geqslant \frac{m(d - \alpha_{max})}{\vartheta} > \frac{m(d - \alpha_{max})}{md + \alpha_{max}};$$

2) *если $\vartheta \in [md + \alpha_{max}, (m+1)d)$, то*

$$\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, M) \geqslant \frac{\vartheta - (m+1)\alpha_{max}}{\vartheta} > \frac{m(d - \alpha_{max})}{(m+1)d}.$$

Получены также оценки сверху для характеристики $\mathrm{freq}_\vartheta(\sigma, D, M)$, выполненные с вероятностью единица.

Приведены примеры применения большинства из полученных результатов. Утверждения первой главы доказываются методами теории дифференциальных уравнений и математического анализа. Во второй и третьей главах используются методы теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и теории случайных процессов.

Заключение диссертации подводит итог проделанной работы.

Автор диссертации выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Л. И. Родиной за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Публикации автора по теме диссертации

А) Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Родина Л.И., Хаммади А.Х. Характеристики множества достижимости, связанные с инвариантностью управляемой системы на конечном промежутке времени // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 35–48.

2. Родина Л.И., Хаммади А.Х. Статистические характеристики множества достижимости управляемых систем со случайными коэффициентами // Известия вузов. Математика. 2014. Вып. 11. С. 50–63.

3. Хаммади А.Х. Характеристики инвариантности множества достижимости управляемых систем со случайными коэффициентами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 2. С. 100–110.

Б) Другие публикации

4. Хаммади А.Х. Характеристики инвариантности множества достижимости управляемой системы на конечном промежутке времени // XVI Международная конференция «Моделирование и исследование устойчивости динамических систем». Тезисы докладов. Киев, Киевский национальный университет. 2013. С. 136.

5. Хаммади А.Х. Характеристики множества достижимости, связанные с инвариантностью управляемой системы на конечном промежутке времени // Международная конференция «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна ВЗМШ–2014». Тезисы докладов. Воронеж, ВГУ. 2014. С. 385–388.

6. Хаммади А.Х. Оценка статистических характеристик управляемых систем со случайными коэффициентами // XVI Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения–2014». Тезисы докладов. Минск, институт математики НАН Беларуси. 2014. С. 102–103.

7. Хаммади А.Х. Статистические характеристики линейной управляемой системы со случайными коэффициентами // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. М.: МИАН. Суздаль, 2014. С. 172–174.

8. Хаммади А.Х. Характеристики инвариантности множества достижимости управляемых систем со случайными коэффициентами // Международная научная конференция «Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций–2014». Тезисы докладов. Казань, КФУ. 2014. С. 323–325.

9. Хаммади А.Х. О свойствах характеристик множества достижимости управляемой системы // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск. 2015. Вып. 2 (46). С. 216–227.

10. Родина Л.И., Хаммади А.Х. Об оценках статистических характеристик управляемых систем со случайными коэффициентами // Всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященная памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Тезисы докладов. Ижевск, УдГУ. 2015. С. 197–199.

11. Хаммади А.Х. Об оценке характеристик, связанных с инвариантностью управляемых систем со случайными коэффициентами // Международная школа молодых ученых «Моделирование и управление сложными системами» (MCCS 2015). Тезисы докладов. М.: МИАН. Суздаль, 2015. С. 83–85.

Подписано в печать .... 2016 г.
Тираж 100 экземпляров. Заказ №.
Типография Удмуртского Государственного Университета.
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1. корп. 4.