На правах рукописи

Платов Антон Сергеевич

Оптимизация структурированных по размеру популяций на стационарных состояниях

Специальность: 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Владимир — 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Давыдов Алексей Александрович
Официальные оппоненты:	Канатников Анатолий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана
	Гонченко Сергей Владимирович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института суперкомпьютерных технологий ННГУ им. Н.И. Лобачесвского
Ведущая организация:	ИПС им. А.К. Айламазяна РАН

Защита диссертации состоится 23 декабря 2016г. в 16 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.025.08 при Владимирском государственном университете имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых по адресу: 600024, г. Владимир, проспект Строителей, д. 11, корп. 7 ВлГУ, ауд. 133. Факс (4922) 53-25-75, 33-13-91; e-mail: oid@vlsu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на официальном сайте www.vlsu.ru Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, с авторефератом — на сайтах http://vak2.ed.gov.ru/catalogue/ и http://diss.vlsu.ru

Автореферат разослан «___» ноября 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.025.08 Наумова С. Б.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена анализу существования и единственности нетривиальных стационарных состояний в динамике структурированных популяций, а также оптимизации этих состояний по критерию максимальной выгоды путем выбора подходящей стационарной интенсивности эксплуатации.

Необходимость анализа и оптимизации динамики структурированных популяций естественно возникает при решении широкого класса практических задач рационального природопользования. Структурированные популяции состоят из однотипных объектов с возможным отличием между собой по каким-либо параметрам, например, физиологическим, которое может существенно влиять как на развитие самих объектов так и на эволюцию популяции в целом, и, таким образом, эти различия следует учитывать при выработке и принятии решений по управлению популяцией.

Первой работой, затрагивающей анализ динамики структурированных популяций, по всей видимости, была статья Л. Эйлера[1], в которой он рассматривал задачу об определении справедливой ренты. Для её решения, в случая дискретного времени был определён справедливый размер ренты плательщика возраста a с учётом продолжительности его оставшейся жизни и вероятности его смерти через n лет спустя. Решение этой задачи привело Л. Эйлера к необходимости анализа стационарных распределений популяций по возрасту, а также построению ряда иллюстрирующих примеров.

Несмотря на то, что работа Л. Эйлера была опубликована в 1760 году, до начала 20 века в теории структурированных популяций существенных продвижений сделано не было. Интерес исследователей к этой области вернулся лишь с появлением работы А. Лотка[2]. Одним из основных вкладом А. Лотка в эту теорию была концепция восстановления популяции, структурированной по возрасту, математическая формулировка которой привела к следующему *уравнению восстановления*:

$$b(t) = \int_0^\infty b(t-a)\beta(a)\mathcal{F}(a)\,\mathrm{d}a. \qquad (1)$$

Это уравнение вычисляет текущий уровень воспроизводства по предыдущей истории популяции. Здесь $\mathcal{F}(a)$ – вероятность того, что индивидуум достигнет возраста a, $\beta(a)$ – характеристика воспроизводства, отражающая способность индивидуумов возраста a давать потомство, а $b(t)$ – среднее

[1] Euler L., Recherches generales sur la mortalite et la multiplication du genre humain // Memoires del'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres. 1760. Vol. XVI. P. 144–164.

[2] Lotka A. J., Relation between birth rates and death rates. Science, 26, 21–22, 1907.

число индивидуумов произведенных в момент t.

Соотношение (1) описывает появление новых индивидуумов, когда имеется достаточная история популяции, то есть при достаточно больших t (когда начальное распределение популяции по возрасту фактически уже «забывается»). Здесь возникает естественный вопрос об эволюции начального распределения за конечный промежуток времени.

Первым, кто предложил разумный подход для получения ответа на этот вопрос, был А. Мак-Кендрик. В своей работе[3], он получил уравнение

$$\frac{\partial x(t,a)}{\partial t} + \frac{\partial x(t,a)}{\partial a} = -\mu(t,a)x(t,a) \tag{2}$$

динамики структурированной по возрасту популяции. Здесь $x(t,a)$ – плотность индивидов возраста $a \in [0,\infty)$ в момент времени $t \in [0,\infty)$, а функция μ характеризует темп смертности.

Двадцать лет спустя Х. фон-Фёрстер вновь получает уравнение (2), но в других обозначениях[4]. В этой работе Х. фон-Фёрстер указывает, что уравнение (1), $x(t,0) := b(t)$, должно рассматриваться как граничное условие для уравнения (2). Произошедшее здесь объединение подходов А. Лотка и А. Мак-Кендрика стало важным моментом в развитии теории структурированных популяций.

Следующим этапом в развитии моделей структурированных по возрасту популяций стал учёт влияния общей численности популяции на основные характеристики её динамики такие, например, как темп смертности и воспроизводство потомства. Одной из первых работ в этом направлении стало исследование М. Гуртина и Р. Мак-Ками[5], в котором была рассмотрена нелинейная интегро-дифференциальная версия системы (1),(2):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x(t,a)}{\partial t} + \dfrac{\partial x(t,a)}{\partial a} = -\mu(P(t),a)x(t,a), \\ P(t) = \displaystyle\int_0^\infty x(a,t)\,\mathrm{d}a, \\ x(t,0) = \displaystyle\int_0^\infty \beta(P(t),a)x(t,a)\,\mathrm{d}a. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь коэффициенты β и μ, как и выше, характеризуют рождаемость и смертность, а вот $P(t)$ характеризует численность популяции в момент t. Используя метод характеристик и приводя (3) к системе нелинейных ин-

[3]McKendrick A. G., Applications of mathematics to medical problems Kapil Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, vol 44, 1925, pp. 1–34.

[4]von Foerster H., Some remarks on changing populations // In: F. Stohlman (Ed.), The Kinetics of Cellular Proliferation. New York: Grune and Stratton, 1959. P. 382–407.

[5]Gurtin M. E., MacCamy R. C., Non-linear age-dependent population dynamics. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 54, 281–300, 1974.

тегральных уравнений Вольтера, М. Гуртин и Р. Мак-Ками исследовали вопросы существования и единственности решения системы (3), а также асимптотической устойчивости стационарных состояний системы.

Дж. Вебб предложил другой подход к исследованию структурированных по возрасту популяций[6]. Он рассмотрел динамику модели (3) как действие нелинейной полугруппы в пространстве начальных распределений по возрасту. Этот подход позволил не только дать исчерпывающие ответы на вопросы существования, единственности и асимптотического поведения решений системы (3), но и дал возможность существенно продвинуться в анализе ряда дальнейших обобщений модели.

Анализ практических наблюдаемых данных показывает, что меняющийся линейно со временем возраст индивидуумов не всегда хорошо отражает особенности их индивидуального развития и популяции в целом. Понимание и признание этого факта подтолкнуло исследователей к изучению моделей, в которых структурирование проводится по параметрам, имеющим более сложную, чем линейная зависимость от времени, таким, например, как размер объекта или его вес, содержание калорий и т.п.. Одна из первых моделей такого типа возникла в микробиологии[7],[8]. Эта модель описывает динамику популяции клеток, которые воспроизводятся делением, при этом в качестве параметра структурирования рассматривается размер клетки.

Сегодня анализ моделей динамики структурированных популяций является активно развивающейся областью математики. Достижения соответствующей теории нашли множество применений в задачах прикладного характера, например, в биологической физике[9], в математической экономике[10], демографии[11], и эпидемиологии[12].

Особый интерес с практической точки зрения представляют задачи «правильного» управления структурированными (промысловыми) популяциями с целью получения максимальной выгоды от их эксплуатации. Хо-

---

[6]Webb G. F., Non-linear semigroups and age-dependent population models // Annali di Matematica Pura ed Applicata, 129, 43–55, 1981.

[7]Fredrickson A. G., Ramkrishna D., and Tsuchiya H. M., Statistics and dynamics of procaryotic cell populations. // Mathematical Biosciences, 1, 327–374, 1967

[8]Bell G. I., Anderson E. C., Cell growth and division I. A mathematical model with applications to cell volume distributions in mammalian suspension cultures. Biophysical Journal, 7, 329–351, 1967

[9]Webb, G. F., Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics. // 1985. Marcel Dekker, New York.

[10]Feichtinger G., Hartl R. F., Peter M., Kort P. M., Veliov V. M., Anticipation effects of technological progress on capital accumulation: a vintage capital approach // Journal of Economic Theory. 2006. Vol. 126. № 1. P. 143–164.

[11]Coale A., The Growth and Structure of Human Populations // Princeton University Press, Princeton, 1972

[12]Feng Z., Huang W., Castillo-Chavez C., Global behavior of a multi-group SIS epidemic model with age structure // J. Diff. Eqs. 218(2), 2005, pp 292–324

рошим примером, таких задач, является оптимальное (по некоторому критерию качества) управление возобновляемыми биологическими ресурсами, например, отлов рыбы в коммерческих целях[13], управление вырубкой и посадкой леса[14], и т.п.. Одним из инструментов решения возникающих здесь задач оптимизации является принцип максимума Понтрягина, предложенный Л. С. Понтрягиным и его учениками[15] в середине прошлого века, или подходящие адаптации этого принципа. Например, М. Брокэйта доказал принцип максимума Понтрягина для задач оптимизации структурированными популяциями[16], динамика которых описывается уравнением $(3)_1$ с нелокальным граничным условием $(3)_2$.

Из большого числа статей, последовавших после работы[16], отметим исследования Р.-У. Гётз с соавторами[17] и Н. Като[18], в которых исследуется вопрос оптимального управления структурированными по размеру популяциями при учете различных критериев качества и особенностей самих популяций.

Цель работы. Целью данной работы является анализ существования нетривиальных стационарных состояний в моделях структурированных эксплуатируемых популяций и оптимизация этих состояний по критерию максимальной выгоды от эксплуатации.

Методы исследований. Исследования проводились с использованием методов теории дифференциальных уравнений, математического и функционального анализа, а также теории оптимального управления.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Основные результаты состоят в следующем:

- доказана теорема существования и единственности нетривиального стационарного состояния в модели управления структурированной по размеру популяцией с внутривидовой конкуренцией в симметричной форме;
- доказана теорема существования оптимального среди стационарных состояния в модели управления структурированной по размеру популяцией с внутривидовой конкуренцией в симметричной форме и

[13]Ильин О.И., Об оптимальной эксплуатации популяций рыб с возрастной структурой // Дальневост. матем. журн., 7:1-2, 2007, 48–61

[14]Xabadia A., Goetz R., The optimal selective logging regime and the Faustman formula // Journal of forest economy, 16, 2010, 63-82.

[15]Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. 2-е изд. М.: Наука, 1969

[16]Brokate M., Pontryagin's principle for control problems in age-dependent population dynamics // J. Math. Biol. 23, 1985, 75–101.

[17]Hritonenko N., Yatsenko Y., Goetz R.-U., Xabadia A., Optimal harvesting in forestry: steady-state analysis and climate change impact // Journal of Biological Dynamics, 7:1, 41-58, 2013

[18]Kato N. Optimal harvesting for nonlinear size-structured population dynamics // J. Math. Anal. Appl. 342, 2008, 1388–1398.

найдено необходимое условие оптимальности;

- доказана теорема существования нетривиального стационарного состояния в модели управления совокупностью двух структурированных популяций с векторной симметричной формой конкуренции и единственность этого состояния при «маргинальном» превосходстве по влиянию на развитие внутривидовой конкуренции над межвидовой;
- доказана теорема существования оптимального среди стационарных состояния в модели управления совокупностью двух структурированных популяций с векторной симметричной формой конкуренции;
- доказана теорема существования оптимального среди стационарных состояния для модели управления совокупностью нескольких структурированных популяций со скалярной симметричной формой конкуренции.

Теоретическая ценность и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Все основные результаты в ней сформулированы в виде теорем и сопровождены исчерпывающими доказательствами. Практическая ценность работы состоит в возможности применения полученных результатов к решению прикладных задач оптимизации, возникающих при моделировании широкого класса экономических и биологических процессов. Результаты работы будут также полезны при чтении специальных курсов для студентов математических, естественно-научных и инженерных специальностей университетов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на многих международных математических конференциях и научных семинарах, среди которых

- Шестая международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям DFDE-2011 (Москва, 2011);
- Международная конференция «Управление и оптимизация неголономных систем» (Переславль-Залесский, 2011);
- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2012);
- Workshop «Renewable resources, Sustainability, and Search» (Германия, Гейдельберг, 2013).
- Международная конференция по математической теории управления и механике (Суздаль, 2011, 2013, 2015);
- семинар «Нелинейный анализ и его приложения» (ВлГУ, Владимир, 2011, 2012, 2014, 2015);

- семинар программы Системный анализ Международного института прикладного системного анализа (Австрия, Лаксенбург, 2012);

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 13 печатных работах [1]-[13]. Статьи [3],[5]-[7] опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов кандидатской диссертации.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет **66** страниц текста с **14** рисунками. Список литературы содержит **67** наименований.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приведен краткий обзор работ предшественников по данной проблеме, даны постановки задач и сформулированы основные полученные результаты.

Первая глава диссертации посвящена анализу существования и единственности нетривиальных стационарных состояний в изучаемых моделях.

Сначала анализируется модель структурированной по размеру популяции с симметричной формой конкуренции, в которой динамика доставляется дифференциальным уравнением[19]

$$\frac{\partial}{\partial t}x(t,s)+\frac{\partial}{\partial s}\big(g(E(t),s)x(t,s)\big)+\big(\mu(E(t),s)+u(s)\big)x(t,s)=0, \tag{4}$$

где $x(t,s)$ – плотность индивидуумов размера s в момент времени t; функции g и μ характеризуют собой темпы роста и смертности при заданном уровне конкуренции E, а функция u отражает интенсивность эксплуатации популяции. Показатель E характеризует конкуренцию (в популяции), которую мы берём в *симметричной* форме (=когда уровень конкуренции одинаков для индивидуумов всех размеров):

$$E(t)=\int_0^S \chi(s)x(t,s)\,\mathrm{d}s. \tag{5}$$

Здесь χ – непрерывная, положительная функция, отражающая вклад индивидуумов размера s в уровень конкуренции, а S – наибольший размер,

[19] Roos A. M., A gentle introduction to models of physiologically structured populations, Structured population models in marine, terrestrial, and freshwater systems, Population and Community Biology, eds. S. Tuljapurkar, H. Caswell, Chapman and Hall, N. Y., 1997, 119–20

до которого осуществляется управление популяцией.

Функция u в уравнении (4) отвечает за интенсивность эксплуатации популяции и является управлением в нашей модели. Управление называется *допустимым,* если оно измеримо и выполнено двустороннее ограничение

$$0 \leq U_1(s) \leq u(s) \leq U_2(s), \quad s \in [0, S],$$

где U_1 и U_2 некоторые непрерывные на отрезке $[0, S]$ функции. Первая из этих функций может характеризовать обязательный уход за популяцией, а вторая отражать технологические или экологические ограничения.

Воспроизводство популяции (=приток новых индивидуумов нулевого размера) определяется естественным и промышленным возобновлением. Мы предлагаем новую форму для части естественного возобновления, при которой снижается эффект влияния на воспроизводство каждого последующего прироста плотности популяции. Возобновление в целом задаётся следующей формулой:

$$x(t, 0) = \int_0^S r(E(t), s) x^{\beta}(t, s)\, \mathrm{d}s + p, \tag{6}$$

в которой r – неотрицательная, непрерывная функция, характеризующая способность индивидуума размера s давать потомство при уровне конкуренции E; показатель β, $0 < \beta < 1$, отражает нелинейную зависимость воспроизводства от плотности индивидуумов, а неотрицательная величина p отвечает за постоянное промышленное возобновление.

Затем мы переходим к анализу совокупности из N взаимодействующих популяций, совместная динамика которых описывается следующей системой уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} x_i(t, s) + \frac{\partial}{\partial s}\big(g_i(E(t), s) x_i(t, s)\big) + \big(\mu_i(E(t), s) + u_i(s)\big) x_i(t, s) = 0, \tag{7}$$

$$x_i(t, 0) = \int_0^{S_i} r_i(E(t), s) x^{\beta_i}(t, s)\, \mathrm{d}s + p_i, \quad x_i(0, s) = x_{0i}(s). \tag{8}$$

Аналогично предыдущей модели, $x_i(t, s)$ означает плотность индивидуумов i-ой популяции размера s в момент времени t. Параметры g_i, μ_i, u_i, r_i, S_i, p_i, β_i и x_{0i} имеют тот же смысл, что и выше, а индекс i означает номер популяции, $i = \overline{1, N}$.

Мы рассматриваем два частных случая совокупности популяций. В первом из них конкуренция имеет скалярный характер и является суммой вкладов в конкуренцию всех N популяций

$$E(t) = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{0}^{S_i} \chi_i(s) x_i(t,s)\,\mathrm{d}s, \tag{9}$$

а во втором случае рассматриваемая конкуренция является векторной величиной, компоненты которой отражают вклады каждой из популяций в общий уровень конкуренции:

$$E(t) := \{E_1(t), E_2(t)\} = \left\{ \int\limits_{0}^{S_1} \chi_1(s) x_1(t,s)\,\mathrm{d}s, \int\limits_{0}^{S_2} \chi_2(s) x_2(t,s)\,\mathrm{d}s \right\}. \tag{10}$$

В обоих случаях функция χ_i имеет тот же смысл, что и в первой модели – отражает влияние индивидуумов i-ой популяции на вклад в конкуренцию.

Дополнительно, мы предполагаем, что все параметры обеих моделей, за исключением управления, непрерывны и удовлетворяют следующим условиям:

(A1) темпы прироста g и смертности μ всюду положительны и $g(E_1, s) \geq g(E_2, s)$, $\mu(E_1, s) \leq \mu(E_2, s)$, при любых $s \in [0, S]$, и E_1, E_2, $0 \leq E_1 < E_2$;

(A2) показатель репродуктивности r всюду неотрицателен, положителен на некотором интервале размеров из $[0, S]$ при любом значении уровня конкуренции и $r(E_1, s) \geq r(E_2, s)$, при любых $s \in [0, S]$, и E_1, E_2, $0 \leq E_1 < E_2$;

(A3) $\dfrac{g(E_1, 0)}{g(E_1, s)} \leq \dfrac{g(E_2, 0)}{g(E_2, s)}$, при любых $s \in [0, S]$, и E_1, E_2, $0 \leq E_1 < E_2$.

Эти условия имеют естественную интерпретацию. Первые два из них означают, что условия для развития популяции не улучшаются при росте конкуренции, то есть при увеличении уровня конкуренции в популяции коэффициенты роста и рождаемости не растут, в то время как коэффициент смертности не убывает. Что касается последнего условия, то оно отражает не меньшее негативное влияние роста конкуренции на прирост для индивидуумов меньшего размера, чем для индивидуумов большего.

Теорема 1. *Пусть параметры модели (4)-(6) непрерывны и удовлетворяют условиям* (**A1**)-(**A3**)*. Тогда для заданной пары из допустимого управления и неотрицательного промышленного воспроизводства существует и при том единственное нетривиальное стационарное состояние этой модели.* (см. теорему 1 в диссертации)

Теорема 2. *Пусть параметры модели (7),(8),(10) непрерывны по своим аргументам и при каждом i удовлетворяют условиям* (**A1**)-(**A3**) *по каждой из компонент конкуренции, а управления u_i измеримы и удовле-*

творяют ограничениям

$$U_{i,1}(s) \le u_i \le U_{i,2}(s), \quad s \in [0, S_i],$$

с некоторыми непрерывными на $[0, S_i]$ *функциями ограничений* $U_{i,1}$ *и* $U_{i,2}$, $0 \le U_{i,1} \le U_{i,2}$, $i = 1, 2$. *Тогда для любого заданного постоянного неотрицательного промышленного воспроизводства* $\{p_1, p_2\}$ *существует ненулевое стационарное решение задачи (7),(8),(10), и такое решение единственно, если коэффициенты* g_i, μ_i, r_i *дифференцируемы и выполнены условия (11).* (см. теорему 2 в диссертации)

Условия

$$\frac{\partial x_i}{\partial E_i} \le \frac{\partial x_i}{\partial E_j}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \quad i \ne j, \tag{11}$$

биологически можно интерпретировать как более слабое «предельное» влияние прироста межвидовой конкуренции, чем внутривидовой. Как и выше, управления, удовлетворяющие указанным в теореме 2 ограничениям, будем называть *допустимыми.*

Вторая глава работы посвящена оптимизации стационарных состояний в динамике (совокупности) популяций по критерию максимума дохода от их эксплуатации, т.е максимизации функционала

$$J_N(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) := \sum_{i=1}^{N} \int_0^{S_i} c_i(s) u_i(s) x_i(s)\, \mathrm{d}s, + x_i(S) c_i(S) - p_i c_{0,i}, \tag{12}$$

где N — число популяций в совокупности, а максимум берется по стационарным состояниям в изучаемой модели для пары из вектора допустимых управлений $\boldsymbol{u} := (u_1, \dots, u_N)$ и вектора промышленного возобновления $\boldsymbol{p} := (p_1, \dots, p_N)$. В функционале (12) функция $c_i(s)$ отражает агрегированную цену за единицу i-ой популяции размера s. Этот функционал представляет собой сумму доходов от реализации отобранных частей популяций совокупности и полного изъятия индивидуумов максимальных размеров S_i за вычетом затрат на промышленное возобновление.

Мы предполагаем, что компоненты промышленного воспроизводства удовлетворяют ограничениям

$$0 \le p_i \le P_i, \quad i = 1, 2.$$

Воспроизводство с такими компонентами будем называть *допустимым.*

Следующие утверждения представляют основные результаты второй главы.

Теорема 3. *Пусть параметры модели (4)-(6) непрерывны и удовлетворяют условиям* (**A1**)-(**A3**). *Тогда существуют допустимые управление и промышленное воспроизводство такие, что соответствующее им* *стационарное состояние этой модели доставляет максимум дохода от эксплуатации на стационарных состояниях.* (см. теорему 3' в диссертации)

Теорема 4. *Пусть параметры модели (7),(8),(10) непрерывны по своим аргументам и при каждом i удовлетворяют условиям* (**A1**)-(**A3**) *по каждой из компонент конкуренции, тогда существуют допустимые управления u_i и промышленные воспроизводства p_i, $i = 1, 2$, что некоторое из соответствующих стационарных состояний этой модели доставляет максимум дохода от эксплуатации совокупности популяций на стационарных состояниях.* (см. теорему 4 в диссертации)

Теорема 5. *Пусть параметры модели (7),(8),(9) непрерывны по своим аргументам и при каждом i удовлетворяют условиям* (**A1**)-(**A3**)*, тогда существуют допустимые управления u_i и промышленные воспроизводства p_i, $i = 1, \dots, N$, что некоторое из соответствующих стационарных состояний этой модели доставляет максимум дохода от эксплуатации совокупности популяций на стационарных состояниях.* (см. теорему 3 в диссертации)

Теорема 3, 4 и 5 доказываются методами функционального анализа.

Последняя **третья глава** посвящена обсуждению двух численных методов решения изученной в предыдущей главе задачи оптимизации стационарного состояния в модели динамики одной популяции. Первый из этих методов основан на использовании необходимого условия оптимальности, получаемого на основе вычисления первой вариации функционала (12). Для формулировки необходимого условия оптимальности воспользуемся обозначениями

$$M(s_1, s_2, E) = \int\limits_{s_1}^{s_2} \chi(s) \frac{g(E,0)}{g(E,s)} e^{-\int\limits_0^s m(E,\tau)\,\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}s,$$

$$H(s_1, s_2, E) = \int\limits_{s_1}^{s_2} r(E,s) \left(\frac{g(E,0)}{g(E,s)} e^{-\int\limits_0^s m(E,\tau)\,\mathrm{d}\tau} \right)^{\beta} \mathrm{d}s,$$

$$F(x_0, E) = E - x_0 M(0, S, E),$$

$$G(x_0, E) = x_0 - p_0 - x_0^{\beta} H(0, S, E),$$

$$I(s_1, s_2, E) = \int\limits_{s_1}^{s_2} c(s)u(s) \frac{g(E,0)}{g(E,s)} e^{-\int\limits_0^s m(E,\tau)\,\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}s + c_S \frac{g(0,E)}{g(L,E)} e^{-\int\limits_0^S m(s,E)\,\mathrm{d}s},$$

$$\mathfrak{M}(x_0,E):=\begin{pmatrix} F'_E(x_0,E) & F'_{x_0}(x_0,E)\\ G'_E(x_0,E) & G'_{x_0}(x_0,E)\end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $m(E,s):=(\mu(E,s)+u(s))/g(E,s)$, $[s_1,s_2]\subset[0,S]$.

Следующая теорема представляет основной результат третьей главы.

Теорема 5. *Пусть функции g,μ,r в модели (4)-(6) непрерывно дифференцируемы по E, и удовлетворяют ограничениям* (**A1**)-(**A3**)*, функция цены c непрерывна и допустимое управление u^* максимизирует функционал выгоды при заданном промышленном воспроизводстве p. Тогда, в любой точке $s_0\in[0,S)$ управление u^* имеет вид:*

$$u^*(s_0):=\begin{cases} U_1(s_0), & \textit{если}\quad W(s_0)>0,\\ (U_1(s_0),U_2(s_0)), & \textit{если}\quad W(s_0)=0,\\ U_2(s_0), & \textit{если}\quad W(s_0)<0,\end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} W(s_0):=2\frac{I(0,S,E)}{\det\mathfrak{M}}\Big(F'_E\beta x_0^{\beta-2}H(s_0,S,E)-G'_E M(s_0,S,E)\Big)+\\ +2\frac{x_0 I'_E(0,S,E)}{\det\mathfrak{M}}\Big(G'_{x_0}M(s_0,S,E)-F'_{x_0}\beta x_0^{\beta-2}H(s_0,S,E)\Big)+\\ +c(s_0)g(E,0)e^{-\int_0^{s_0}m(E,s)ds}-I(s_0,S,E). \end{aligned}\tag{14}$$

(см. теорему 5 в диссертации)

Основная идея второго подхода, заключается в комбинированном использовании метода стрельбы по уровню конкуренции и принципа максимума Понтрягина.

В этой же главе мы приводи иллюстрирующие примеры, в которых оптимальное управление имеет как одну точку переключения так и несколько.

Заключение диссертации подводит итог проделанной работы.

Автор выражает искреннею благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Алексею Александровичу Давыдову за постановку задач, руководство и постоянное внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] Давыдов А. А., Платов А. С. Оптимизация стационарного решения модели эксплуатации структурированной по размеру популяции // Проблемы математического анализа, Вып. 58, 2011, с. 135-142.

[2] Davydov A. A., Platov A. S. Optimization of Stationary Solution of a Model of Size-Structured Population. // Journal of Mathematical

Sciences, Vol. 176, № 6, 2011, 860-869.

[3] Davydov A. A., Platov A. S. Optimal stationary solution in forest management model by accounting intra-species competition // Moscow Mathematical Journal, Vol. 12, №2, 2012, 269–273

[4] Панеш А. А., Платов А. С. Оптимизация структурированной по размеру популяции с взаимодействующими видами // Проблемы математического анализа, Вып. 67, 2012, с. 107-112.

[5] Panesh A. A., Platov A. S. Optimization of size-structured population with interacting species // Journal of Mathematical Sciences, 2013, Volume 188, Issue 3, pp 293-298.

[6] Давыдов А. А., Платов А. С., Оптимальная эксплуатация двух структурированных по размеру конкурирующих популяций // Тр. ИММ УрО РАН, 19, № 4, 2013, 89–94.

[7] Davydov A. A., Platov A. S. Optimal Stationary Solution for a Model of Exploitation of a Population Under Intraspecific Competition // Journal of Mathematical Sciences, 2014, Vol. 201, Issue 6, pp 746–750

[8] Davydov A. A., Platov A. S., Optimal stationary exploitation of size-structured population with intra-specific competition // in book «Geometric Control Theory and Sub-Riemannian Geometry», 2014, pp. 123-132 DOI: 10.1007/978-3-319-02132-4_8

[9] Давыдов А. А., Платов А. С., Стационарное решение модели лесопользования //Тезисы докладов международной конференции по математической теории управления и механике. Суздаль 1-5 июля 2011.- с. 74-76.

[10] Davydov A.A., Platov A.S. Optimization of Steady State of Forest Management Model // The Sixth International Conference on Differential and Functional Differential Equations Moscow, Russia, August 14–21, 2011. – pp. 15.

[11] Давыдов А.А., Платов А.С., Оптимизация эксплуатации структурированной по размеру популяции с внутривидовой конкуренцией // Тезисы докладов международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль 29 июня - 4 июля 2012, с. 57-58.

[12] Давыдов А.А., Платов А.С., Оптимальная стационарная эксплуатация структурированных по размеру конкурирующих популяций // Тезисы докладов международной конференции по математической теории управления и механике. Суздаль 5-9 июля 2013, с. 87-89.

[13] Давыдов А.А., Платов А.С., Оптимальное управление структурированной по размеру популяцией на стационарном режиме. // Международная конференция по математической теории управления и механике: Тезисы докладов. - Суздаль 3-7 июля 2015, с. 53-54.