*На правах рукописи*

Тахир Халид Мизхир Тахир

# ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ВОПРОСОВ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ОЦЕНОК РЕШЕНИЙ

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Владимир — 2020

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьвича и Николая Григорьевича Столетовых» (ВлГУ)

| | |
|---|---|
| **Научный руководитель:** | доктор физико-математических наук,<br>профессор кафедры «Функциональный анализ и его приложения»<br>ВлГУ им. А.Г. и Н.Г. Столетовых<br>Родина Людмила Ивановна |
| **Официальные оппоненты:** | Глызин Сергей Дмитриевич,<br>доктор физико-математических наук,<br>профессор, заведующий кафедрой компьютерных сетей ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»<br><br>Корнев Сергей Викторович,<br>доктор физико-математических наук,<br>проректор по научной работе ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет» |
| **Ведущая организация:** | ФГБОУ ВО «Челябинский государственный университет (ЧелГУ)». |

Защита диссертации состоится 15 мая 2020 г. в 16 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.025.08 при ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых» по адресу: 600024, г. Владимир, проспект Строителей, 11, ауд. 230, ВЛГУ, педагогический институт.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Владимирского государственного университета и на сайте http : //diss.vlsu.ru

Автореферат разослан «___» апреля 2020 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.025.08,
кандидат физико-математических наук, доцент Наумова С.Б.

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы исследования.** Представленная работа посвящена вопросам разрешимости и оценкам решений задачи Коши и краевых задач для линейных и нелинейных функционально-дифференциальных уравнений.

Теория функционально-дифференциальных уравнений начала свое развитие с пятидесятых годов прошлого века. Первые публикации были посвящены исследованиям различных моделей, содержащих дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Дальнейшее развитие данная теория получила благодаря работам Н.В. Азбелева, Р. Беллмана, А.И. Булгакова, Е.С. Жуковского, А.М. Зверкина, В.И. Зубова, В.Б. Колмановского, Н.Н. Красовского, К. Кука, В.П. Максимова, А.Д. Мышкиса, С.Б. Норкина, В.Р. Носова, В.В. Обуховского, Л.Ф. Рахматуллиной, П.М. Симонова, А.Л. Скубачевского, Дж. Хейла, С.Н. Шиманова, Л.Э. Эльсгольца, а также их учеников. Вопросам теории функционально-дифференциальных уравнений (и включений) с вольтерровыми и обобщенно вольтерровыми отображениями посвящены работы Н.В. Азбелева, А.И. Булгакова, С.А. Гусаренко, М.Е. Драхлина, Е.С. Жуковского, В.П. Максимова.

В настоящее время функционально-дифференциальные уравнения являются современным разделом математики, находящим многочисленные приложения как в других ее областях (в анализе, в задачах управления и оптимизации, в теории игр, в приближенных методах и др.), так и при исследовании различных математических моделей. Модели, основанные на линейных и нелинейных уравнениях с отклоняющимся аргументом, интегро-дифференциальных уравнениях, уравнениях нейтрального типа, широко применяются в физике, технике, биологии, экономике и т.д. (см., например, работы [1, 2, 3]).

К важнейшим вопросам теории функционально-дифференциальных уравнений, наряду с изучением устойчивости решений [4], относятся исследования краевых задач [5]. Основными методами исследования здесь являются методы априорных оценок, метод положительных операторов и применение теорем о неподвижных точках, в частности, теоремы Л.В. Канторовича о существовании неподвижной точки отображения, действующего в банаховом простран-

[1] *Глызин С.Д., Кащенко С.А.* Семейство конечномерных отображений, индуцированных логистическим уравнением с запаздыванием // Матем. моделирование. 2020. Т. 32, № 3. С. 19–46.

[2] *Ким А.В., Пименов В.Г.* i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.-Ижевск: Изд-во «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 256 с.

[3] *Максимов В.П., Румянцев А.М.* Краевые задами и задачи импульсного управления в экономической динамике. Конструктивное исследование // Известия вузов. Математика. 1993. № 5. С. 56–71.

[4] *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Пемского университета, 2001. 230 с.

[5] *Скубачевский А.Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Успехи математических наук. 2016. Т. 71, № 5(431). С. 3–112.

стве[6]. В работах участников Пермской школы Н.В. Азбелева при изучении линейных функционально-дифференциальных уравнений широко используется сравнение с модельным уравнением, в частности, для исследования условий разрешимости и построения оценок решений краевых задач[7], для получения условий устойчивости решений [8,9]. При исследовании нелинейных уравнений стандартным приемом является выделение линейной части, обладающей «хорошими» свойствами и, если исходное уравнение оказывается в каком либо смысле близким к соответствующему линейному уравнению, то оно наследует эти «хорошие» свойства.

К фундаментальным проблемам теории функциональных-дифференциальных уравнений относятся вопросы разрешимости и оценки решений задачи Коши и краевых задач для линейных и нелинейных уравнений. Эти вопросы составляют основу и для данной диссертации. Здесь получены новые теоремы сравнения для задачи Коши и краевых задач, исследуются такие свойства, как однозначная разрешимость, справедливость неравенства типа Чаплыгина, неотрицательность решения. Предлагаются оценки на разность между соответствующими линейными и нелинейными операторами, при которых нелинейное уравнение сохраняет требуемые свойства линейного уравнения: разрешимости, однозначной разрешимости и положительной разрешимости.

**Цель работы** — разработка методов исследования функционально-дифференциальных уравнений, основанных на их сравнении с эталонными уравнениями (обладающими требуемыми свойствами); получение с помощью этих методов оценок, а также условий существования и единственности решений задачи Коши и краевых задач для различных функционально-дифференциальных уравнений.

**Методика исследования.** В диссертации применяются методы линейного и нелинейного функционального анализа, теории дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений. В исследовании линейных функционально -дифференциальных уравнений с фредгольмовой главной частью используется представление общего решения через фундаментальное решение однородного уравнения и частное решение неоднородного уравнения, записанное через функцию Коши или функцию Грина. Это представление, в частности, используется для сравнения функций Коши (функций Грина) исследуемого и эталонного уравнений (соответственно, исследуемой и эталонной

[6] *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с. (XVIII.1.2, теорема 1).

[7] *Бравый Е.И.* Краевые задачи для семейств линейных функционально-дифференциальных уравнений // Дисс. .... доктора физ.-мат. н. Пермь, 2017. 334 с.

[8] *Малыгина В.В., Чудинов К.М.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. I // Известия вузов. Математика. 2013. № 6.С. 25–36.

[9] *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Пемского университета, 2001. 230 с.

краевой задачи). При изучении нелинейных уравнений используется их сравнение с линейными.

**Научная новизна.** Все полученные результаты являются новыми. Доказаны новые теоремы сравнения для линейных функционально-дифференциальных уравнений. Для применения этих утверждений получены аналитические решения дифференциальных уравнений с конкретными запаздываниями в аргументе неизвестной функции и ее производной при постоянных коэффициентах. Получены условия однозначной разрешимости задачи Коши и двухточечных краевых задач для уравнений с отклоняющимся аргументом и уравнений нейтрального типа, а также условия неотрицательности нормального фундаментального решения, функций Коши и функций Грина. Получены новые теоремы о разрешимости, однозначной разрешимости и оценке решений задачи Коши и краевых задач для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений общего вида. Это результаты применены к конкретным нелинейным уравнениям.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Доказаны теоремы сравнения для линейных функционально- дифференциальных уравнений с начальными и краевыми условиями.

2. Получены условия неотрицательности функции Коши и функции Грина двухточечной краевой задачи следующих «эталонных» уравнений с постоянным коэффициентом $p$ :

$$\dot{x}(t) - px(t-1) = f(t),$$
$$\dot{x}(t) - px(t/2) = f(t),$$
$$\dot{x}(t) - p\dot{x}(t/2) = f(t).$$

3. На основании сравнения с «эталонным» линейным уравнением получены условия разрешимости, однозначной разрешимости и даны оценки решений задачи Коши для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений общего вида.

4. Получены условия разрешимости, однозначной разрешимости и даны оценки решений двухточечной краевой задачи для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений.

**Теоретическое и практическое значение полученных результатов** Результаты диссертации значимы для теории дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений. Полученные теоремы сравнения применимы к исследованию задачи Коши и краевых задач для различных типов как линейных, так и нелинейных функционально-дифференциальных уравнений. Разработанные методы позволяют устанавливать разрешимость и однозначную разрешимость краевых задач, получать оценки решений. Эти результаты востребованы в задачах управления, приближенных методах, а также могут использоваться в исследовании математических моделей процессов, формализуемых в виде краевых задач (например, в моделях экономики [2]).

**Апробация результатов диссертации.** Материалы диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

1. Международная научная конференция «Колмогоровские чтения – VII. Общие проблемы управления и их приложения ОПУ-2015», посвященная памяти А.И. Булгакова (Тамбов, 2015 г.);

2. Международная школа молодых ученых «Многозначный анализ, выпуклый анализ и оптимальное управление», посвященная 85-летию Института математики, физики и информатики Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина (Тамбов, 2015 г.);

3. Международная конференция «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий ПМТУКТ-2016» (Воронеж, 2016 г.);

4. Школа для студентов, аспирантов и молодых ученых «Математическое и компьютерное моделирование, информационные технологии управления» (Воронеж, 2016 г.);

5. IV и V Международный научный семинар с элементами школы для молодых ученых «Функционально-дифференциальные уравнения и включения и их приложения в математическом моделировании» (Тамбов, 2016 г., 2017 г.);

6. XX–XXIII Всероссийские конференции «Державинские чтения» (Тамбов, 2015–2018 гг.);

7. Тамбовский городской семинар по функциональнодифференциальным уравнениям и включениям (руководитель Е.С.Жуковский, Тамбов, 2016–2018 гг.).

8. Научный семинар кафедры «Функциональный анализ и его приложения» ВлГУ «Нелинейный анализ и его приложения» (Владимир, 2019, 2020 г.).

9. Студенческая школа-конференция «Математическая весна – 2020. Приглашение в динамические системы» (Нижний Новгород, 2020 г.).

**Публикации.** Результаты исследований по теме диссертации опубликованы в работах [1]–[10]. Из совместных работ [1], [4]–[8] в диссертацию вошли результаты, полученные лично автором; в этих работах соавторам принадлежит постановка задачи и выбор методов исследования, а автору — проведение исследования и доказательство основных результатов. Работы [1]–[6] опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК Минобрнауки РФ, в том числе статьи [5], [6] — в журналах, индексируемых базами данных Web of Science, Scopus.

**Структура и объем диссертации.** Работа состоит из введения, двух глав, разбитых на параграфы, перечня используемых обозначений, заключения и списка литературы, содержащего 71 наименование. Общий объем диссертации – 124 страниц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** формулируются цели исследования, дается обзор литературы по исследуемой проблематике, обосновывается актуальность темы диссертации, кратко излагаются основные результаты, выносимые на защиту.

**В первой главе**, которая состоит из четырех параграфов, рассматриваются линейные функционально-дифференциальные уравнения. В §1.1 приведены необходимые сведения из монографии [10] о линейном функционально-дифференциальном уравнении общего вида и получены теоремы сравнения задач Коши и теоремы сравнения краевых задач. Сформулируем эти утверждения.

Используем следующие обозначения: $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел; $L \doteq L([0,T],\mathbb{R})$ — пространство суммируемых по Лебегу функций $x:[0,T]\to\mathbb{R}$ с нормой $\|x\|_L = \int_0^T |x(t)|\,dt$; $AC \doteq AC([0,T],\mathbb{R})$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x:[0,T]\to\mathbb{R}$, $\|x\|_{AC} = \|\dot{x}\|_L + |x(0)|$; $\widetilde{AC} \doteq \widetilde{AC}([0,T],\mathbb{R})$ — пространство функций $x:[0,T]\to\mathbb{R}$, имеющих не более одного разрыва в $\tilde{t} \doteq \tilde{t}(x) \in (0,T]$, непрерывных справа в $\tilde{t}$ и абсолютно непрерывных на $[0,\tilde{t})$ и $[\tilde{t},T]$; $C \doteq C([0,T],\mathbb{R})$ — пространство непрерывных функций $x:[0,T]\to\mathbb{R}$ с нормой $\|x\|_C = \max\limits_{t\in[0,T]} |x(t)|$.

Пусть заданы линейные ограниченные операторы $\mathcal{L}, \triangle\mathcal{L} : AC \to L$ и элементы $y, f \in L$. Рассмотрим функционально-дифференциальные уравнения:

$$\mathcal{L}x = y, \tag{1}$$

$$\widetilde{\mathcal{L}}x \doteq \mathcal{L}x - \triangle\mathcal{L}x = f. \tag{2}$$

Для этих уравнений исследуем задачу Коши с начальным условием $x(0) = \alpha$.

**Теорема 1.1.1.** *Пусть задача Коши для уравнения* (1) *однозначно разрешима и ее решение представимо в виде*

$$x(t) = \alpha X(t) + \int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s)\, f(s)\, ds,$$

*где* $X$ *— нормальное фундаментальное решение однородного уравнения* $\mathcal{L}x = 0$ *такое, что* $X(0) = 1$, $\mathcal{C}$ *— функция Коши. Если оператор* $\triangle\mathcal{L} : AC \to L$

[10] *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.

*вольтерров и вполне непрерывен, то задача Коши для уравнения* (2) *также однозначно разрешима и ее решение имеет представление*

$$\widetilde{x}(t) = \alpha \widetilde{X}(t) + \int\limits_0^t \widetilde{\mathcal{C}}(t,s)\, f(s)\, ds,$$

*где* $\widetilde{X}$ *— нормальное фундаментальное решение однородного уравнения* $\widetilde{\mathcal{L}}x = 0$, $\widetilde{\mathcal{C}}$ *— функция Коши уравнения* (2).

**Теорема 1.1.2.** *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1.1 *и оператор*

$$V : AC \to AC, \quad (Vx)(t) \doteq (C \vartriangle \mathcal{L}x)(t) = \int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s)(\vartriangle \mathcal{L}x)(s)ds$$

*положителен. Тогда справедливы утверждения:*

1) *если при всех* $t \in \Delta_T \doteq \{(t,s) : 0 \le s \le t \le T\}$ *для функции Коши уравнения* (1) *выполнено* $\mathcal{C}(t,s) \ge 0$, *то функция Коши уравнения* (2) *удовлетворяет при* $t \in \Delta_T$ *неравенству* $\widetilde{\mathcal{C}}(t,s) \ge \mathcal{C}(t,s)$;

2) *если для нормального фундаментального решения однородного уравнения* (1) *выполнено* $X(t) \ge 0$ *при всех при* $t \in [0,T]$, *то нормальное фундаментальное решение однородного уравнения* (2) *удовлетворяет при* $t \in [0,T]$ *неравенству* $\widetilde{X}(t) \ge X(t)$.

Рассмотрим краевые задачи для уравнений (1), (2) соответственно:

$$\mathcal{L}x = y, \quad lx = \gamma; \tag{3}$$

$$\widetilde{\mathcal{L}}x \doteq \mathcal{L}x - \vartriangle\mathcal{L}x = f, \quad \widetilde{l}x \doteq lx - \vartriangle lx = \alpha. \tag{4}$$

Здесь $l, \ \vartriangle l : AC \to \mathbb{R}$ — заданные линейные ограниченные функционалы, $\gamma, \alpha \in \mathbb{R}$– заданные числа. Пусть $G : L \to AC$ — оператор Грина краевой задачи (3). Определим оператор

$$H : L \times \mathbb{R} \to L \times \mathbb{R}, \quad H \doteq \begin{pmatrix} \vartriangle\mathcal{L} \\ \vartriangle l \end{pmatrix} (G, X) = \begin{pmatrix} \vartriangle\mathcal{L}G & \vartriangle\mathcal{L}X \\ \vartriangle lG & \vartriangle lX \end{pmatrix}.$$

**Теорема 1.1.3.** *Пусть краевая задача* (3) *для любых* $y \in L, \ \gamma \in \mathbb{R}$ *однозначно разрешима и для спектрального радиуса* $\rho$ *оператора* $H$ *выполнено неравенство* $\rho(H) < 1$. *Тогда краевая задача* (4) *при любых* $f \in L, \ \alpha \in \mathbb{R}$ *однозначно разрешима.*

Определим оператор

$$V : AC \to AC, \quad V \doteq (G, X) \begin{pmatrix} \vartriangle\mathcal{L} \\ \vartriangle l \end{pmatrix} = G \vartriangle \mathcal{L} + X \vartriangle l.$$

**Теорема 1.1.4.** *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1.3 *и оператор* $V$ *является положительным. Тогда справедливы утверждения:*

1) *если оператор Грина* $G : L \to AC$ *краевой задачи* (3) *положителен, то для оператора Грина* $\widetilde{G}$ *краевой задачи* (4) *выполнено неравенство* $\widetilde{G} \geq G$;

2) *если нормальное фундаментальное решение* $X$ *краевой задачи* (3) *неотрицательно, то для нормального фундаментального решения* $\widetilde{X}$ *краевой задачи* (4) *выполнено неравенство* $\widetilde{X} \geq X$.

Для конкретных функционально-дифференциальных уравнений эти утверждения позволяют получать условия однозначной разрешимости, неотрицательности функции Коши, функции Грина и нормального фундаментального решения соответствующего однородного уравнения. Для применения этих утверждений требуется задать «эталонную» краевую задачу, обладающую соответствующими свойствами.

В параграфах 1.2 – 1.4 полученные утверждения применяются к конкретным функционально-дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами. В заголовок каждого параграфа вынесено рассматриваемое в нем уравнение. Для каждого уравнения найдено общее решение, фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения и функция Коши. Получены также условия однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи (в частности, периодической задачи), определена ее функция Грина. В терминах коэффициентов уравнений и длины промежутка «времени» получены условия положительности функции Коши и функции Грина. На основании полученных в §1.1 теорем сравнения из этих результатов выводятся соответствующие утверждения для уравнений с переменными коэффициентами. Сформулируем основные из полученных утверждений о конкретных уравнениях.

Пусть $p \in \mathbb{R}$; рассмотрим дифференциальное уравнение с постоянным запаздыванием

$$\dot{x}(t) - px(t-1) = f(t), \quad t \geq 0, \quad x(\xi) = 0, \text{ если } \xi < 0. \tag{5}$$

В §1.2 показано, что функция Коши уравнения (5) равна

$$\mathcal{C}(t,s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n (t-s-n)^n \, \chi_{[n,\infty)}(t) \, \chi_{[0,t-n]}(s)}{n!},$$

а нормальное фундаментальное решение равно

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n (t-n)^n \, \chi_{[n,\infty)}(t)}{n!},$$

где $\chi_E(\cdot)$ — характеристическая функция множества $E$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и любого $T \in (n, n+1]$ определим многочлен

$$F_{_T}^n(z) = 1 + \frac{(T-1)}{1!}z + \frac{(T-2)^2}{2!}z^2 + \ldots + \frac{(T-n)^n}{n!}z^n, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

**Теорема 1.2.1.** *Многочлен $F_{_T}^n(z)$ при любых $n \in \mathbb{N}$, $T \in (n, n+1]$ имеет действительные корни, все действительные корни этого многочлена отрицательны; обозначим наибольший корень через $z_{_T}^n$, тогда для любых натуральных $n_1, n_2$ и любых значений $T_1 \in (n_1, n_1+1]$, $T_2 \in (n_2, n_2+1]$ если $n_2 \geq n_1$, $T_2 > T_1$, то $0 > z_{_{T_2}}^{n_2} > z_{_{T_1}}^{n_1}$.*

*Если для некоторых $n \in \mathbb{N}$, $T \in (n, n+1]$ коэффициент $p$ уравнения (5) удовлетворяет неравенству $p > z_{_T}^n$, то функция Коши $\mathcal{C}(t,s)$ этого уравнения положительна на множестве $\Delta_{_T} \doteq \big\{(t,s) : s \in [0,t], t \in [0,T]\big\}$.*

Уравнение (5) далее используется в качестве «эталонного» для дифференциального уравнения с запаздыванием с переменным коэффициентом $p(t)$ :

$$\dot{x}(t) - p(t)x(t-1) = f(t), \quad t \in [0,T], \quad x(\xi) = 0, \text{ если } \xi < 0, \tag{7}$$

где $T \in (n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$. Следующее утверждение является следствием теоремы 1.1.2.

**Следствие 1.2.1.** *Пусть* $\operatorname{vrai}\inf\limits_{t\in[0,T]} p(t) > z_{_T}^n$, *тогда для нормального фундаментального решения и функции Коши уравнения (7) имеют место неравенства: $X(t) > 0$ при $t \in [0,T]$ и $\mathcal{C}(t,s) > 0$ при $(t,s) \in \Delta_T$. Если же* $\operatorname{vrai}\inf\limits_{t\in[0,t]} p(t) = z_{_T}^n$, *то $X(t) > 0$ при $t \in [0,T)$ и $\mathcal{C}(t,s) > 0$ при $(t,s) \in \Delta_T$, $(t,s) \neq (T,0)$.*

Теперь для уравнения (5) рассмотрим краевую задачу с условием

$$Ax(0) + Bx(T) = C. \tag{8}$$

В §1.2 показано, что краевая задача (5), (8) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда

$$A + B\sum_{k=0}^{n} \frac{p^k(T-k)^k}{k!} \neq 0.$$

При выполнении этого условия функция Грина задачи (5), (8) имеет вид

$$\mathcal{G}(t,s) = \sum_{j=0}^{k-1} \chi_{[j,T]}(t)\chi_{[0,t-j]}(s)\frac{p^j(t-s-j)^j}{j!} -$$
$$- \frac{B}{A + B\sum\limits_{n=0}^{k-1}\frac{p^n(T-n)^n}{n!}} \sum_{n=0}^{k-1} \chi_{[0,T-n]}(s)\frac{p^n(T-s-n)^n}{n!} \sum_{j=0}^{k-1} \chi_{[j,T]}(t)\frac{p^j(t-j)^j}{j!},$$

а нормальное фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения равно

$$X(t) = \frac{1}{A + B\sum\limits_{n=0}^{k-1} \frac{p^n(T-n)^n}{n!}} \sum_{j=0}^{k-1} \chi_{[j,T]}(t) \frac{p^j(t-j)^j}{j!}.$$

**Теорема 1.2.2.** *Пусть* $T \in (n, n+1]$, $p > z_T^n$, *где* $z_T^n$ *— корень многочлена* (6), *и пусть выполнены неравенства*

$$1 + p\frac{T-1}{1!} + \ldots + \frac{p^n(T-n)^n}{n!} < -\frac{A}{B}, \quad B > 0.$$

*Тогда функция Грина задачи* (5), (8) *положительна.*

Рассмотрен частный случай задачи (5), (8) — периодическая краевая задача с условием

$$x(T) - x(0) = C \tag{9}$$

и начальным условием $x(0) = \alpha$. Показано, что эта задача однозначно разрешима тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{n=0}^{k-1} \frac{p^n(T-n)^n}{n!} \neq 1$. Ее функция Грина равна

$$\mathcal{G}(t,s) = \sum_{j=0}^{k-1} \chi_{[j,T]}(t)\chi_{[0,t-j]}(s) \frac{p^j(t-s-j)^j}{j!} -$$
$$- \frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{k-1} \frac{p^n(T-n)^n}{n!}} \sum_{n=0}^{k-1} \chi_{[0,T-n]}(s) \frac{p^n(T-s-n)^n}{n!} \sum_{j=0}^{k-1} \chi_{[j,T]}(t) \frac{p^j(t-j)^j}{j!},$$

фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения равно

$$X(t) = \frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{k-1} \frac{p^n(T-n)^n}{n!}} \sum_{j=0}^{k-1} \chi_{[j,T]}(t) \frac{p^j(t-j)^j}{j!}.$$

**Следствие 1.2.2.** *Функция Грина периодической краевой задачи* (5), (8) *положительна, если* $p > z_T^n$, $p\frac{T-1}{1!} + \ldots + \frac{p^n(T-n)^n}{n!} < 0.$

Аналогичные результаты в диссертации получены для задачи Коши и двухточечной краевой задачи для линейного дифференциального уравнения с переменным запаздыванием

$$\dot{x}(t) - p(t)\,x(t/2) = f(t), \quad t \geq 0,$$

и для уравнения нейтрального типа

$$\dot{x}(t) - p(t)\,\dot{x}(t/2) = f(t), \quad t \geq 0.$$

Вначале исследован случай постоянного коэффициента $p(t) = \text{const}$. Затем уравнение с постоянным коэффициентом используется в качестве эталонного для исследования соответствующего уравнения с переменным коэффициентом.

**Во второй главе** исследуются нелинейные функционально-дифференциальные уравнения вида

$$\mathcal{L}x = Fx, \tag{10}$$

где $\mathcal{L} : AC \to L$ — линейный оператор, $F : AC \to L$ — нелинейный оператор. В § 2.1 рассмотрена задача Коши с условием

$$x(0) = \alpha. \tag{11}$$

В пункте 2.1.1 приведены необходимые сведения об операторном уравнении Вольтерры. В пункте 2.1.2 исследуется задача Коши для уравнения (10). Используется сравнение нелинейного уравнения с «эталонным» эволюционным линейным уравнением $\mathcal{L}x = y$, для которого задача Коши предполагается однозначно разрешимой.

**Определение 2.1.1.** *Пусть задано* $q \geq 0$. *Вольтерров оператор* $\widetilde{F} : C \to L$ *назовем вольтеррово* $q$*-липшицевым, если для любых* $\varsigma \in [0, T)$, $x^0_\varsigma \in C([0,\varsigma], \mathbb{R})$ *и* $r > 0$ *существует такое* $\tau = \tau(\varsigma, x^0_\varsigma, r) \in (0, T - \varsigma]$, *что для произвольных* $u, \tilde{u} \in C$, *удовлетворяющих соотношениям*

$$u(t) = \tilde{u}(t) = x^0_\varsigma(t) \ \text{при}\ t \in [0,\varsigma],$$
$$\max_{t\in[\varsigma,\varsigma+\tau]} |u(t) - u(\varsigma)| \leq r, \quad \max_{t\in[\varsigma,\varsigma+\tau]} |\tilde{u}(t) - \tilde{u}(\varsigma)| \leq r,$$

*выполнено неравенство*

$$\int\limits_{\varsigma}^{\varsigma+\tau} \left|(\widetilde{F}u)(t) - (\widetilde{F}\tilde{u})(t)\right| dt \leq q \max_{t\in[\varsigma,\varsigma+\tau]} |u(t) - \tilde{u}(t)|. \tag{12}$$

**Определение 2.1.2.** *Оператор* $\widetilde{F} : C \to L$ *назовем равномерно вольтеррово* $q$*-липшицевым,* если этот оператор вольтеррово $q$-липшицев и константа $\tau$ не зависит от значений $\varsigma$, $x^0_\varsigma$, $r$.

Важно, что даже равномерно вольтеррово $q$-липшицев оператор $\widetilde{F}$ не обязательно является ограниченным и непрерывным (в диссертации приведен соответствующий пример 2.1.1).

Обозначим через $\mathcal{C}(t,s)$ функцию Коши линейного уравнения $\mathcal{L}x = y$.

**Теорема 2.1.1.** *Пусть для некоторого* $c_0 \geq 0$ *выполнено* $|\mathcal{C}(t,s)| \leq c_0$, $(t,s) \in \Delta_T$, *и вольтерров оператор* $F : AC \to L$ *допускает продолжение до вольтеррова ограниченного оператора* $\widetilde{F} : C \to L$. *Тогда, если оператор* $\widetilde{F}$ *вольтеррово* $q$*-липшицев,* $q < 1/c_0$, *то задача* (10), (11) *разрешима, имеет единственное глобальное или предельно продолженное решение, а всякое локальное решение является его частью.*

**Теорема 2.1.2.** *Пусть для некоторого* $c_0 \geq 0$ *выполнено* $|\mathcal{C}(t,s)| \leq c_0$, $(t,s) \in \Delta_T$, *и вольтерров оператор* $F : AC \to L$ *допускает продолжение до вольтеррова оператора* $\widetilde{F} : C \to L$. *Тогда, если оператор* $\widetilde{F}$ *равномерно вольтеррово* $q$*-липшицев,* $q < 1/c_0$, *то задача* (10), (11) *имеет единственное глобальное решение, а всякое локальное решение является его частью.*

**Теорема 2.1.3.** *Пусть вольтерров оператор* $F : AC \to L$ *допускает продолжение до вольтеррова непрерывного оператора* $\widetilde{F} : C \to L$, *причем, для любого* $r > 0$ *существует такая суммируемая функция* $\eta_r : [0,T] \to \mathbb{R}_+$, *что при всех* $x \in C$, $||x||_C \leq r$ *выполнено неравенство* $|(\widetilde{F}x)(t)| \leq \eta_r(t)$ *п.в. на* $[0,T]$. *Тогда задача* (10), (11) *разрешима, любое локальное решение является частью некоторого глобального или предельно продолженного решения.*

**Теорема 2.1.4.** *Пусть функция Коши линейного уравнения* $\mathcal{L}x = f$ *удовлетворяет неравенству* $\mathcal{C}(t,s) \geq 0$, $(t,s) \in \Delta_T$. *Пусть, далее, оператор* $F : AC \to L$ *допускает продолжение до вольтеррова монотонного оператора* $\widetilde{F} : \widetilde{AC} \to L$. *Тогда, если для некоторой абсолютно непрерывной функции* $u_0$, *отвечающей начальному условию* $u_0(0) = \alpha$, *справедливо неравенство*

$$\mathcal{L}u_0 \geq Fu_0, \tag{13}$$

*то существует глобальное или предельно продолженное решение* $\tilde{x}$ *задачи* (10), (11), *удовлетворяющее на своей области определения неравенствам*

$$(\mathcal{L}\tilde{x})(t) \leq (\mathcal{L}u_0)(t), \quad \tilde{x}(t) \leq u_0(t).$$

Отметим, что в теореме 2.1.4 не требуется, чтобы отображение $F$ (и тем более, его продолжение $\widetilde{F}$) было непрерывным.

Полученные в пункте 2.1.2 результаты о задаче Коши для функционально-дифференциального уравнения общего вида применяется в пункте 2.1.3 (заключающем § 2.1) к конкретным уравнениям вида (10), в которых линейная часть — это оператор одного из следующих типов:

$$(\mathcal{L}x)(t) \doteq \dot{x}(t) - p(S^0x)(t), \text{ где } p \in \mathbb{R}, \ (S^0x)(t) \doteq \begin{cases} x(t-1), & t \in [1,T], \\ 0, & t \in [0,1); \end{cases} \tag{14}$$

$$(\mathcal{L}x)(t) \doteq \dot{x}(t) - px(t/2), \quad \text{где } p \in \mathbb{R}; \tag{15}$$

$$(\mathcal{L}x)(t) \doteq \dot{x}(t) - p\dot{x}(t/2), \quad \text{где } p \in (-1/2,\, 1/2); \tag{16}$$

а правая часть задается соотношениями

$$(Fx)(t) \doteq f\big(t, x(t), (S_h x)(t)\big), \text{ где } (S_h x)(t) = \begin{cases} x(h(t)), & h(t) \in [0,T], \\ \theta(h(t)), & h(t) \notin [0,T] \end{cases} \tag{17}$$

(здесь $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ и $\theta : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ — заданные измеримые функции, $t \in [0,T]$ ). В пункте 2.2.3 a получены условия на функции $f$ и $h$, при которых решение задачи Коши для рассматриваемых нелинейных уравнений существует, продолжаемо до глобального или предельно продолженного решения, а также условия единственности глобального решения. В пункте 2.2.3 b для рассматриваемых уравнений доказывается утверждение о неравенстве типа Чаплыгина. Здесь используется сравнение с линейным уравнением, функция Коши которого неотрицательна.

В § 2.2 исследуется краевая задачи для уравнения (10) с краевым условием

$$lx = \alpha, \tag{18}$$

где $l : AC \to \mathbb{R}$ — линейный ограниченный функционал, $\alpha$ — заданное число. В качестве «эталонной» рассматривается линейная краевая задача

$$\mathcal{L}x = f, \quad lx = \alpha, \tag{19}$$

которая предполагается однозначно разрешимой при всех $f \in L$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Пусть $X$ — нормальное фундаментальное решение, $\mathcal{G}$ — функция Грина задачи (19).

В пункте 2.1.1 описан подход к исследованию задачи (10), (18), основанный на ее редукции либо к уравнению в пространстве $AC$ :

$$x(t) = \alpha X(t) + \int_0^T \mathcal{G}(t,s)\,(Fx)(s)\,ds, \quad t \in [0,T],$$

либо к уравнению в пространстве $L$ :

$$y(t) = \Big(F\big(\alpha X + \int_0^T \mathcal{G}(\cdot,s)\,y(s)\,ds\big)\Big)(t), \quad t \in [0,T]$$

(относительно неизвестного $y = \mathcal{L}x \in L$ ). Таким образом, появляется возможность применения к краевой задаче (10), (18) известных теорем о неподвижных точках.

В пункте 2.1.2 получены условия на операторы $F$ и $l$, гарантирующие существование решения задачи (10), (18) и условия единственности ее решения. Далее в случае положительности функции Грина «эталонной» задачи и монотонности оператора $F$ показано, что для краевой задачи (10), (18) имеет место утверждение о неравенстве типа Чаплыгина. Сформулируем соответствующие результаты.

Пусть оператор $F : AC \to L$ допускает продолжение до оператора $\widetilde{F} : C \to L$, и оператор $\widetilde{F}$ обладает следующим свойством, обозначаемым далее $(\mathcal{Q})$ : *существует такой линейный ограниченный положительный оператор* $Q : C \to L$, *что для любых* $x, u \in C$ *выполнено неравенство*

$$|\widetilde{F}x - \widetilde{F}u| \le Q(|x - u|).$$

Рассмотрим линейный оператор $K : C \to C$, заданный для любой функции $v \in C$ равенством

$$(Kv)(t) = \int_0^T |\mathcal{G}(t,s)|(Qv)(s)\,ds.$$

**Теорема 2.2.1.** *Пусть выполнено условие* $(\mathcal{Q})$. *Если спектральный радиус* $\varrho$ *линейного оператора* $K : C \to C$ *удовлетворяет неравенству* $\varrho(K) < 1$, *то краевая задача* (10), (18) *при любом действительном* $\alpha$ *имеет единственное решение (в пространстве* $AC$ *).*

**Теорема 2.2.2.** *Пусть оператор* $F : AC \to L$ *допускает продолжение до непрерывного оператора* $\widetilde{F} : C \to L$. *Предположим, что существуют такое* $R > 0$ *и такая суммируемая функция* $\eta_R : [0,T] \to \mathbb{R}_+$, *что при всех* $x \in C$, $||x||_C \le R$ *выполнены неравенства:*

$$|(\widetilde{F}x)(t)| \le \eta_R(t), \quad t \in [0,T],$$

$$|\alpha X(t)| + \int\limits_0^T |\mathcal{G}(t,s)|\,\eta_R(s)\,ds \le R, \quad t \in [0,T].$$

*Тогда краевая задача* (10), (18) *имеет решение* $\tilde{x} \in AC$, $||\tilde{x}||_C \le R$.

**Теорема 2.2.3.** *Пусть* $\mathcal{G}(t,s) \ge 0$ *для всех* $(t,s) \in [0,T]^2$, *отображение* $F : AC \to L$ *монотонное, и для некоторых* $R > 0$, $u_0 \in AC$ *справедливы соотношения*

$$\int_0^T \big|(\mathcal{L}u_0)(t)\big|\,dt \le R, \quad \mathcal{L}u_0 \ge Fu_0, \quad lu_0 = \alpha.$$

*Пусть, кроме того, для любых* $z \in L$ *из неравенства* $\int_0^T |z(t)|\,dt \le R$ *следует* $\int_0^T \Big| F\big(\alpha X + \int\limits_0^T \mathcal{G}(\cdot,s)\,z(s)\,ds\big)\Big|(t)\,dt \le R$. *Тогда существует решение* $\tilde{x} \in AC$

*краевой задачи* (10), (18), *удовлетворяющее неравенствам*

$$\int_0^T \big|(\mathcal{L}\tilde{x})(t)\big|\,dt \le R, \quad \mathcal{L}\tilde{x} \le \mathcal{L}u_0, \quad \tilde{x} \le u_0.$$

**Теорема 2.2.4.** *Пусть* $\mathcal{G}(t,s) \ge 0$ *для всех* $(t,s) \in [0,T]^2$, *отображение* $F : AC \to L$ *монотонное, и для некоторых* $v_0, u_0 \in AC$ *справедливы соотношения*

$$\mathcal{L}v_0 \le \mathcal{L}u_0, \quad lv_0 = lu_0 = \alpha, \quad \mathcal{L}v_0 \le Fv_0, \quad \mathcal{L}u_0 \ge Fu_0.$$

*Тогда существует решение* $\tilde{x} \in AC$ *краевой задачи* (10), (18), *удовлетворяющее неравенствам*

$$\mathcal{L}v_0 \le \mathcal{L}\tilde{x} \le \mathcal{L}u_0, \quad v_0 \le \tilde{x} \le u_0.$$

В пункте 2.1.3 результаты из пункта 2.1.2 о краевой задаче (10), (18) применены к исследованию двухточечной краевой задачи с условием

$$lx \doteq Ax(0) + Bx(T) = C$$

для конкретных нелинейных уравнений. Рассматриваются уравнения с оператором $\mathcal{L}$, определенным каждым из соотношений (14), (15) или (16), и оператором $F$, определенным равенством (17). Получены условия существования и единственности решения такой краевой задачи, а также оценки решений. Рассмотрены частные случаи: апериодическая задача $(A = 1, B = 1)$ и периодическая задача $(A = -1, B = 1)$.

## ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Статьи в научных журналах, рекомендованных ВАК

[1] *Борзова М.В., Козадаев А.В., Тахир Х.М.Т.* Некоторые интегрируемые в квадратурах линейные функционально-дифференциальные уравнения // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20, № 5. С. 1079–1083.

В работе [1] Тахиру Х.М.Т. принадлежат доказательства формул, определяющих функцию Коши и фундаментальное решение однородных уравнений с постоянным и переменным запаздыванием

[2] *Тахир Х.М.Т.* О решении линейных функционально-дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2016. Т. 21, № 2. С. 417–431.

[3] *Тахир Х.М.Т.* Существование и оценки решений задачи Коши для нелинейного функционально-дифференциального уравнения // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2017. Т. 22, № 6. С. 1329–1334.

[4] *Жуковская Т.В., Жуковский Е.С., Тахир Х.М.Т.* О разрешимости задачи Коши для нелинейного функционально-дифференциального уравнения // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2017. Т. 22, № 3. С. 523–532.

В работе [4] Тахиру Х.М.Т. принадлежат доказательства теоремы 1 (о существовании и единственности глобального или предельно продолженного решения задачи Коши в случат вольтеррово $q$-липшицев правой части уравнения) и теоремы 2 (о существовании и единственности глобально решения задачи Коши в случае равномерной вольтерровой $q$-липшицевости правой части уравнения)

[5] *Жуковский Е.С., Тахир Х.М.Т.* Об условиях положительности функции Коши функционально-дифференциальных уравнений // Известия вузов. Математика. 2018. № 11. С. 82–85.

В работе [5] Тахиру Х.М.Т. принадлежит доказательство основного результата — теоремы о схранении свойства неотрицательности функции Коши при положительных вольтерровых вполне непрерывных возмущениях; а также доказательство предложений $1, 2, 3$ о положительности функции Коши конкретных типов функционально-дифференциальных уравнений.

[6] *Жуковский Е.С., Тахир Х.М.Т.* Сравнение решений краевых задач для линейных функционально-дифференциальных уравнений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28, № 3. С. 284–292.

В работе [6] Тахиру Х.М.Т. принадлежит доказательство теоремы 1 об условиях сохранения свойства однозначной разрешимости краевой задачи; доказательство теоремы 2 об условиях сохранения свойства положительности функции Грина, а также следствий из этих теорем.

## Другие публикации автора по теме диссертации

[7] *Жуковский Е.С., Тахир Х.М.Т.* Вопросы теории краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений. Тамбов: Издательский дом ТГУ им. Г.Р. Державина, 2017. 97 с.

В монографии [7] Тахиру Х.М.Т. принадлежат формулировки теорем главы 1, доказательства всех утверждений, составление и решение примеров, в том числе, выводы результатов для конкретных уравнений.

[8] *Жуковский Е.С., Тахир Х.М.Т.* О неотрицательности функции Коши дифференциального уравнения с постоянным запаздыванием // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2016). Сборник трудов IX международной конференции. Воронеж, 2016. С. 154–158.

[9] *Тахир Х.М.Т.* Об одном методе решения линейных функционально-дифференциальных уравнений // Математическое и компьютерное моделирование, информационные технологии управления (МКМИТУ-2016). Сборник трудов Школы для студентов, аспирантов и молодых ученых. Воронеж: Издательство «Научная книга», 2016. С. 212–214.

[10] *Tahir K.M.T.* On the solvability of the Cauchy problem for some linear functional differential equations// School-Conference "Mathematical Spring — 2020. Invitation to Dynamical Systems". National Research University Higher School of Economics. Nizhny Novgorod, 2020. P. 22–23.