На правах рукописи

Зайцева Наталья Владимировна

ГЛАДКИЕ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2022

Работа выполнена на кафедре общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики ФГБОУ ВО "Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова".

Научный руководитель: **Муравник Андрей Борисович**
доктор физико-математических наук,
директор Математического института
имени С. М. Никольского ФГАОУ ВО
"Российский университет дружбы народов"

Официальные оппоненты: **Сакбаев Всеволод Жанович**
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник ФГУ
"Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики
имени М. В. Келдыша РАН"

Ситник Сергей Михайлович
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры прикладной математики
и компьютерного моделирования ФГАОУ ВО
"Белгородский государственный национальный
исследовательский университет"

Ведущая организация: ФГБОУ ВО "Воронежский государственный
университет"

Защита состоится «09» сентября 2022 г. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.025.08 при ФГБОУ ВО "Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых" по адресу: 600024, г. Владимир, проспект Строителей, 11, ауд. 237, ВлГУ, Педагогический институт.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Владимирского государственного университета и на сайте http://diss.vlsu.ru.

Автореферат разослан « » 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.025.08,
кандидат физико-математических наук, доцент С. Б. Наумова

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Диссертация посвящена исследованию в полупространстве гиперболических дифференциально-разностных уравнений, т.е. уравнений, которые помимо дифференциальных операторов содержат операторы сдвига, действующие по пространственным переменным.

Теория функционально-дифференциальных и, в частности, дифференциально-разностных уравнений представляет собой один из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными, что объясняется ее многочисленными приложениями.

Систематическое изучение обыкновенных дифференциальных уравнений с операторами сдвига было начато с сороковых годов XX века, благодаря приложениям к теории автоматического управления, и связано с работами А. Д. Мышкиса, Э. Пинни, Р. Беллмана и К. Л. Кука, Г. А. Каменского, Л. Э. Эльсгольца, Дж. Хейла.

Существенные результаты в исследовании задач для функционально-дифференциальных уравнений различных классов были получены А. Л. Скубачевским, В. В. Власовым, А. Н. Зарубиным, А. Б. Муравником, А. В. Разгулиным, Л. Е. Россовским, В. Ж. Сакбаевым и другими авторами.

Специальный класс функционально-дифференциальных уравнений составляют дифференциально-разностные уравнения, теория краевых и нелокальных задач для которых продолжает развиваться.

В настоящее время достаточно полно исследованы задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений в ограниченных областях, разработка и развитие теории для которых принадлежит А. Л. Скубачевскому. Задачи для таких уравнений тесно связаны с нелокальными задачами для эллиптических дифференциальных уравнений, внимание к которым привлекла работа А. В. Бицадзе и А. А. Самарского (Доклады АН СССР, 1969). Согласно разработанной теории, нелокальные задачи для эллиптических уравнений связаны с краевыми задачами в ограниченной области для дифференциально-разностных уравнений, содержащих сдвиги аргументов в старших производных, отображающие точки границы внутрь области. Наличие таких сдвигов в уравнении приводит к появлению решений, гладкость которых может нарушаться внутри области (даже при бесконечно дифференцируемых правых частях и бесконечно гладкой границе), и к принципиально новым свойствам решений. Были получены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства типа Гординга; исследованы вопросы однозначной, фредгольмовой и нетеровой разрешимости в пространствах Соболева и весовых пространствах, а также вопросы гладкости обобщенных решений; подробно рассмотрены приложения эллиптических дифференциально-разностных уравнений в механике деформируемого твердого тела.

Отметим также работы А. Л. Скубачевского и Е. Л. Цветкова, Е. П. Ивановой, Д. А. Неверовой, В. В. Лийко, продолжающие исследования сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений в ограниченных областях.

В неограниченных областях задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений изучены в значительно меньшей степени. Обширное исследование таких задач представлено в работах А. Б. Муравника. В частности, в его работах рассматриваются сильно эллиптические уравнения с нелокальными потенциалами по одной из пространственных переменных, встречающиеся в моделях нелинейной оптики; исследуются модельные задачи для многомерных эллиптических дифференциально-разностных уравнений в полупространстве.

Параболические уравнения со сдвигами по времени были исследованы в работах В. В. Власова. Краевые задачи в ограниченных областях для параболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами по пространственным переменным изучались в работах А. Л. Скубачевского, Р. В. Шамина и А. М. Селицкого, А. Йаакбариеха и В. Ж. Сакбаева. В случае же неограниченной области задачи для таких уравнений были изучены в работах А. Б. Муравника.

А. Н. Зарубиным была рассмотрена задача Коши для гиперболического уравнения с запаздыванием, встречающаяся в математических моделях сред с фрактальной геометрией.

В работах В. В. Власова и Д. А. Медведева, А. Акбари Фаллахи, А. Йаакбириеха и В. Ж. Сакбаева гиперболические дифференциально-разностные уравнения были исследованы для случая, когда операторы сдвига также действуют по времени.

Если, как уже было отмечено, эллиптические и параболические дифференциально-разностные уравнения в настоящее время изучены достаточно глубоко и подробно, то исследованию гиперболических дифференциально-разностных уравнений посвящено совсем незначительное число работ, и в тех, что известны, операторы сдвига действуют по времени.

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию в полуплоскости и полупространстве гиперболических дифференциально-разностных уравнений, содержащих операторы сдвига по пространственным переменным, и построению их решений в явном виде. При этом интересовать нас будут классические решения.

Определение. Функция $u(x,t)$ называется *классическим решением* гиперболического уравнения второго порядка, если в каждой точке полуплоскости (полупространства) существуют классические производные u_{tt} и u_{xx} (u_{tt} и $u_{x_jx_j}$, $j=\overline{1,n}$), и в каждой точке этой полуплоскости (этого полупространства) выполняется данное уравнение.

Цель и задачи диссертационного исследования. Построение гладких решений двумерных и многомерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений, содержащих суперпозиции дифференциальных операторов и операторов сдвига, действующих по пространственным переменным, и содержащих суммы дифференциальных операторов и операторов сдвига, действующих по пространственным переменным.

Объектами исследования являются гиперболические дифференциально-разностные уравнения со сдвигами по пространственным переменным.

Теоретическую и методологическую основу исследования вопросов существования и построения классических решений гиперболических дифференциально-разностных уравнений составляют методы общей теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Научная новизна. Результаты работы, выносимые на защиту являются новыми. Ранее не было исследовано существование гладких решений гиперболических уравнений со сдвигами по пространственным переменным и не было предложено способа построения таких решений.

Теоретическая и практическая значимость работы. Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в общей теории дифференциально-разностных уравнений.

Основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие вопросы:

1. Существование гладких решений в полуплоскости двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений, содержащих суперпозиции дифференциальных операторов и операторов сдвига, действующих по пространственной переменной, изменяющейся на всей вещественной оси.

2. Существование гладких решений в полуплоскости двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений, содержащих суммы дифференциальных операторов и операторов сдвига, действующих по пространственной переменной, принимающей все вещественные значения.

3. Существование гладких решений в полупространстве многомерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений, содержащих суперпозиции и суммы дифференциальных операторов и операторов сдвига, действующих по пространственным переменным, принимающим все действительные значения.

4. Для всех уравнений, рассматриваемых в работе, получены достаточные условия на коэффициенты и сдвиги в уравнениях, гарантирующие существование гладких решений.

5. Для всех уравнений, рассматриваемых в работе, построены в явном виде многопараметрические семейства бесконечно гладких решений.

Степень достоверности результатов, полученных в диссертации, обеспечивается строгостью приведенных доказательств, многочисленными выступлениями на научных семинарах, конференциях и школах, а также имеющимися публикациями в рецензируемых научных изданиях.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационной работы докладывались автором и обсуждались

- на научном семинаре Математического института имени С. М. Никольского Российского университета дружбы народов по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям под руководством профессора А. Л. Скубачевсого (2020, 2021, 2022 гг.);

- на научном семинаре факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова ”Спектральная теория дифференциальных операторов и актуальные проблемы математической физики“ под руководством академика Е. И. Моисеева и профессора И. С. Ломова (2020, 2021 гг.);

- на научном семинаре Белгородского государственного национального исследовательского университета под руководством профессоров В. Б. Васильева, С. М. Ситника и А. П. Солдатова (2022 г.);

- на научном семинаре кафедры высшей математики Московского физико-технического института (национального исследовательского университета) (2022 г.);

- на научном семинаре ”Обратные задачи математической физики и естествознания“ кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством академика В. А. Садовничего и профессора А. И. Прилепко (2022 г.);

- на научном семинаре ”Интегральные уравнения“ кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством профессора Е. А. Бадерко (2022 г.);

- на научном семинаре кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством профессора В. В. Власова (2022 г.);

- на научном семинаре ”Нелинейный анализ и его приложения“ кафедры функционального анализа и его приложений Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых под руководством профессоров М. С. Беспалова, А. А. Давыдова, В. И. Данченко и Л. И. Родиной (2022 г.),

а также на следующих всероссийских и международных конференциях:

1. XXX Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2019) (Крым, пос. Батилиман, Россия, 17 – 29 сентября 2019 г.);

2. XX Международная Саратовская зимняя школа "Современные проблемы теории функций и их приложения" (Саратов, Россия, 28 января – 1 февраля 2020 г.);

3. XXXIII Международная конференция "Современные методы теории краевых задач": Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения - XXXI" (Воронеж, Россия, 3 – 9 мая 2020 г.);

4. Научная конференция, посвященная памяти академика А.Н. Тихонова "Тихоновские чтения – 2020" (Москва, Россия, 26 – 31 октября 2020 г.);

5. Международная научная конференция "Уфимская осенняя математическая школа – 2020" (Уфа, Россия, 11 – 14 ноября 2020 г.);

6. Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых "Современные методы математической физики и их приложения" (Ташкент, Узбекистан, 17 – 18 ноября 2020 г.);

7. XIX Всероссийская научная школа-конференция "Лобачевские чтения — 2020" (Казань, Россия, 1 – 4 декабря 2020 г.);

8. XXXIV Международная конференция "Современные методы теории краевых задач": Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения - XXXII" (Воронеж, Россия, 3 – 9 мая 2021 г.);

9. XXXV Международная конференция "Современные методы теории краевых задач": Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения - XXXIII" (Воронеж, Россия, 3 – 9 мая 2022 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в печатных изданиях [1] – [15]. Список публикаций приведен в конце автореферата. При этом статьи [1] – [6] опубликованы в изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией (ВАК) Министерства образования и науки Российской Федерации для публикации результатов научных исследований.

Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертация является самостоятельным исследованием автора. Постановка задач принадлежит научному руководителю А.Б. Муравнику.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, списка литературы, содержащего 122 наименования. Общий объем диссертации – 102 страницы.

Автор искренне благодарит научного руководителя А. Б. Муравника за ценные советы, постоянное внимание к работе и поддержку.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** приведен обзор литературы, обоснована актуальность темы исследования, приводятся основные результаты диссертации, а также кратко описывается содержание параграфов.

В **главе 1**, состоящей из двух параграфов, в полуплоскости $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times (0,+\infty)$ рассматриваются гиперболические дифференциально-разностные уравнения, содержащие суперпозиции дифференциальных операторов и операторов сдвига по пространственной переменной, изменяющейся на всей вещественной оси:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a_1 \frac{\partial^2 u(x-h_1,t)}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 u(x-h_2,t)}{\partial x^2}$$

и

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial^2 u(x-h_j,t)}{\partial x^2}.$$

Коэффициенты и сдвиги в уравнениях — заданные вещественные числа.

Для построения решений уравнений использовалась классическая операционная схема, согласно которой к уравнению формально применяются сначала прямое, а затем обратное преобразования Фурье. Однако, если в классическом случае применение преобразования Фурье приводит к исследованию полиномов относительно двойственной переменной, то в данном случае, с учетом того, что в образах Фурье оператор сдвига является мультипликатором, символ дифференциально-разностного оператора представляет собой уже не полином, а комбинацию степенной функции и тригонометрических функций с несоизмеримыми аргументами. Это приводит к вычислительным трудностям и совершенно иным эффектам в решении.

Основными результатами главы Главы 1 являются теоремы 1.1.1 и 1.2.1, свидетельствующие о том, что гладкие решения рассматриваемых уравнений существуют, если вещественная часть символа оператора сдвига в уравнениях положительна.

Получены достаточные условия на коэффициенты и сдвиги, гарантирующие существование гладких решений уравнений.

В частности, для существования гладких решений уравнений, содержащих суперпозиции дифференциальных операторов и операторов сдвига (если их несколько), одна из старших производных по пространственной переменной должна иметь сдвиг, равный нулю.

Случай уравнения с одним единственным нелокальным слагаемым

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a\,\frac{\partial^2 u(x-h,t)}{\partial x^2}$$

оказался особым. В теореме 1.1.2 говорится о том, что классические решения, построенные в явном виде, этого уравнения существуют, если коэффициент a положителен.

Во второй главе в полуплоскости $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times (0,+\infty)$ исследуются дифференциально-разностные уравнения, содержащие суммы дифференциальных операторов и операторов сдвига:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - b\,u(x-h,t) \tag{1}$$

и

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \sum_{k=1}^{n} b_k u(x-h_k,t),$$

в которых все коэффициенты и сдвиги — заданные вещественные числа.

Приведем формулировку теоремы для уравнения (1).

Теорема 2.1.1. *При выполнении условия*

$$a^2\xi^2 + b\cos(h\xi) > 0$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^1$, *функции*

$$F(x,t;\xi) := e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi) - x\xi),$$

$$H(x,t;\xi) := e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi) - x\xi)$$

удовлетворяют уравнению (1) *в классическом смысле. Здесь функции* $G_1(\xi)$ *и* $G_2(\xi)$ *определяются равенствами*

$$G_1(\xi) := \rho(\xi)\sin\varphi(\xi), \quad G_2(\xi) := \rho(\xi)\cos\varphi(\xi);$$

а функции $\rho(\xi)$ *и* $\varphi(\xi)$ *следующими равенствами:*

$$\rho(\xi) := \Big[\big(a^2\xi^2 + b\cos(h\xi)\big)^2 + b^2\sin^2(h\xi)\Big]^{1/4},$$

$$\varphi(\xi) := \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{b\sin(h\xi)}{a^2\xi^2 + b\cos(h\xi)}.$$

В работе показано, что условие теоремы $a^2\xi^2 + b\cos(h\xi) > 0$ (условие положительности вещественной части символа дифференциально-разностного оператора) выполняется для всех вещественных $\xi \in \mathbb{R}^1$, если коэффициенты уравнения a, b и сдвиг h удовлетворяют соотношению

$$0 < b\,h^2 \leq 2a^2.$$

В качестве такой тройки параметров a, b и h можно выбрать, например, значения $a = 1$, $b = n$, $h = 1/n$, где $n \in \mathbb{N}$.

В уравнениях, рассматриваемых во второй главе, потенциалы являются нелокальными, так как все вещественные сдвиги не являются бесконечно малыми величинами и могут принимать сколь угодно большие значения. Отметим также, что операторы сдвига не являются подчиненными по отношению к дифференциальному оператору.

Третья глава посвящена исследованию вопроса существования гладких решений в полупространстве $\{(x,t) |\, x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0\}$ гиперболических дифференциально-разностных уравнений двух типов.

Первый тип — уравнения, содержащие суперпозиции вторых производных и операторов сдвига по любым пространственным координатным направлениям:

$$u_{tt}(x,t) = a^2\sum_{j=1}^{n} u_{x_jx_j}(x,t) + \sum_{j=1}^{n} b_j u_{x_jx_j}(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j - h_j,x_{j+1},\ldots,x_n,t)$$

и

$$u_{tt}(x,t) = a^2\sum_{j=1}^{n} u_{x_jx_j}(x,t) + \\ + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{kj} u_{x_jx_j}(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k - h_k,x_{k+1},\ldots,x_n,t). \quad (2)$$

Здесь $a \neq 0$.

Приведем формулировку теоремы для уравнения (2) о существовании классических решений этого уравнения.

Теорема 3.2.1. *При выполнении условия*

$$a^2|\xi|^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\xi_j^2\right)\cos(h_k\xi_k) > 0$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, отличных от нуля, функции

$$F(x,t;\xi) := e^{t\,G_1(\xi)}\sin\left(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right),$$

$$H(x,t;\xi) := e^{-t\,G_1(\xi)} \sin\left(t\,G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right)$$

удовлетворяют уравнению (2) *в классическом смысле. Здесь введены обозначения*

$$G_1(\xi) := \rho(\xi)\sin\varphi(\xi), \quad G_2(\xi) := \rho(\xi)\cos\varphi(\xi);$$

$$\rho(\xi) := \left[\left(a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi)\right)^2 + \beta^2(\xi)\right]^{1/4};$$

$$\varphi(\xi) := \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\beta(\xi)}{a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi)};$$

$$\alpha(\xi) := \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\xi_j^2\right)\cos\left(h_k\xi_k\right);$$

$$\beta(\xi) := \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\xi_j^2\right)\sin\left(h_k\xi_k\right).$$

Условие теоремы 3.2.1 выполняется для любых сдвигов $h_1,\dots,h_n$ и для всех $\xi_1,\dots,\xi_n$, отличных от нуля, если коэффициенты уравнения удовлетворяют условию

$$|b_{kj}| < a^2, \quad k = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Очевидно, что в качестве примера таких коэффициентов можно выбрать значения $a = 1$, $b_{kj} \in (0,1)$ ($k = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$).

Второй рассмотренный тип — уравнения, содержащие сдвиги в потенциалах, также действующие по всем направлениям:

$$u_{tt}(x,t) = c^2\sum_{j=1}^{n} u_{x_jx_j}(x,t) - \sum_{j=1}^{n} d_j u(x_1,\dots,x_{j-1},x_j - l_j,x_{j+1},\dots,x_n,t)$$

и

$$u_{tt}(x,t) = c^2\sum_{j=1}^{n} u_{x_jx_j}(x,t) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} d_{jk} u(x_1,\dots,x_{j-1},x_j - l_{jk},x_{j+1},\dots,x_n,t).$$

Все коэффициенты и сдвиги в уравнениях — заданные вещественные числа, но $c \neq 0$. Никакие условия соизмеримости на сдвиги не накладываются.

Для всех приведенных уравнений построены трехпараметрические семейства решений. Из утверждений, доказанных в третьей главе теорем следует, что полученные решения являются классическими, если выполняется условие положительности вещественной части символа дифференциально-разностного оператора в правой части уравнений.

Получены достаточные условия на коэффициенты и сдвиги, гарантирующие существование гладких решений уравнений.

Публикации по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, включенных в список ВАК

1. *Зайцева Н. В.* О глобальных классических решениях некоторых гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491. № 2. С. 44–46.

2. *Зайцева Н. В.* Глобальные классические решения некоторых двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 745–751.

3. *Zaitseva N. V.* Classical solutions of hyperbolic differential-difference equations with several nonlocal terms // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. № 1. P. 231–236.

4. *Зайцева Н. В.* Классические решения гиперболического уравнения с нелокальным потенциалом // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 498. № 3. С. 37–40.

5. *Zaitseva N. V.* Classical solutions of hyperbolic differential-difference equations in a half-space // Differential Equations. 2021. Vol. 57. № 12. P. 1629–1639.

6. *Зайцева Н. В.* Гиперболические дифференциально-разностные уравнения с нелокальными потенциалами общего вида // Уфимский математический журнал. 2021. Т. 13. № 3. С. 37–44.

Публикации в других изданиях

7. *Зайцева Н.В.* О гладких глобальных решениях некоторых двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Международная конференция "XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам" (КРОМШ – 2019): сборник материалов. – Симферополь: "Полипринт". 2019. С. 163–165.

8.*Зайцева Н.В.* О глобальных классических решениях двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 20-й международной Саратовской зимней школы / А.П. Хромов (гл. редактор), Б.С. Кашин (зам. гл. редактора), Ю.С. Крусс (отв. секретарь) [и др.]. – Саратов: ООО Изд-во "Научная книга". 2020. С. 162–163.

9. *Зайцева Н.В.* Построение решений некоторых гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения – XXXI" (3–9 мая 2020 г.) / Воронежский государственный университет; МГУ имени М.В. Ломоносова; Математический институт имени В.А. Стеклова РАН. – Воронеж: Издательский дом ВГУ. 2020. С. 79–80.

10. *Зайцева Н.В.* Классические решения двумерных гиперболических уравнений с несоизмеримыми сдвигами // "Тихоновские чтения": научная конференция: тезисы докладов: посвящается памяти академика Андрея Николаевича Тихонова: 26–31 октября 2020 г. – Москва: МАКС Пресс. 2020. С. 26.

11. *Зайцева Н.В.* О гладких классических решениях гиперболических дифференциально-разностных уравнений с n сдвигами // Международная научная конференция "Уфимская осенняя математическая школа – 2020": сборник тезисов (г. Уфа, 11–14 нобря 2020 г.) / отв. ред. З.Ю. Фазуллин. – Уфа: Аэтерна. 2020. С. 29–31.

12. *Зайцева Н.В.* О классических решениях одного гиперболического дифференциально-разностного уравнения с нелокальными членами // Современные методы математической физики и их приложения: Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых (17–18 ноября 2020 г., Ташкент) / Главный редактор Р.Р. Ашуров. – Т. 1. – Ташкент: Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека. 2020. С. 203–205.

13. *Зайцева Н.В.* Однопараметрическое семейство гладких решений гиперболического дифференциально-разностного уравнения с несоизмеримыми сдвигами // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачекого. Т. 59 / Лобачевские чтения – 2020 // Материалы XIX Всероссийской молодежной научной школы-конференции (1–4 декабря 2020 г., г. Казань). – Т. 59. – Казань: Издательство Академии наук РТ. 2020. С. 58–60.

14. *Зайцева Н.В.* Классические решения гиперболических дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения – XXXII" (3–9 мая 2021 г.) / Воронежский государственный университет; МГУ имени М.В. Ломоносова; Математический институт имени В.А. Стеклова РАН. – Воронеж: Издательский дом ВГУ. 2021. С. 99–101.

15. *Зайцева Н.В.* Классические решения многомерных гиперболических уравнений с разнонаправленными сдвигами в потенциалах // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения – XXXIII" (3–9 мая 2022 г.) / МГУ имени М.В. Ломоносова; Воронежский государственный университет; Математический институт имени В.А. Стеклова РАН. – Воронеж: Издательский дом ВГУ. 2022. С. 94–95.