На правах рукописи

Закора Дмитрий Александрович

Спектральный анализ и асимптотика решений задач механики вязкоупругих сред

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Симферополь – 2021

Работа выполнена на кафедре математического анализа факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского.

Официальные оппоненты:	**Баскаков Анатолий Григорьевич** доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры системного анализа и управления ФГБОУ ВО "Воронежский государственный университет"
	Власов Виктор Валентинович доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры математического анализа Механико-математического факультета, Отделения математики ФГБОУ ВО "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова"
	Муравник Андрей Борисович доктор физ.-мат. наук, руководитель проекта в Акционерном обществе "Концерн "Созвездие"
Ведущая организация:	ФГАОУ ВО "Южный федеральный университет"

Защита состоится *28 мая* в *16* часов на заседании диссертационного совета *Д 212.025.08* при *Владимирском государственном университете имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых*, расположенном по адресу: *600024, г. Владимир, проспект Строителей, 11, ауд. 237, ВлГУ, Педагогический институт.*

Автореферат разослан «____» ____________ 2021 г.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых* и на сайте *http://diss.vlsu.ru/*.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.025.08,
кандидат ф.-м.н., доцент *Наумова С. Б.*

Общая характеристика работы

Актуальность темы и ее разработанность в литературе. Пятидесятые годы прошлого столетия характеризуются проникновением методов функционального анализа в механику сплошной среды. У истоков этого процесса находились H. Weyl, J. Leray, С.Л. Соболев, K.O. Friedrichs, О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, В.И. Юдович, а в дальнейшем в разработку этих вопросов включился большой коллектив отечественных и зарубежных ученых.

В 1951 году в основополагающей работе М.В. Келдыша[1] получены первые важные результаты в спектральной теории полиномиальных операторных пучков. Были введены понятия присоединенных элементов, кратности собственного значения, кратной полноты собственных и присоединенных элементов.

В 1964 году С.Г. Крейном[2] изучена линеаризованная задача о движении вязкой несжимаемой жидкости в открытом сосуде. Был предложен способ сведения задачи к решению уравнения в ортогональной сумме специальных гильбертовых пространств. Этот способ нашел применение и в других задачах гидродинамики и теории упругости. В развернутом виде результаты были опубликованы[3] в 1968 году. В этих двух работах впервые возник нелинейный операторный пучок, связанный с задачей о нормальных колебаниях исследуемой системы, изучены простейшие свойства его спектра. Доказано, в частности, что спектр задачи имеет две точки сгущения — бесконечность и ноль. Н.К. Аскеровым, С.Г. Крейном и Г.И. Лаптевым[4] исследована система собственных и присоединенных элементов возникшего операторного пучка, и с помощью теоремы М.В. Келдыша доказана двукратная полнота этой системы в некотором специальном виде.

В это же время в работах М.Г. Крейна и Г.К. Лангера[5] развивается теория квадратичных операторных пучков. Методы факторизации операторных матриц и их приложения к различным задачам механики сплошных сред развиваются в работах А.А. Шкаликова, R. Mennicken'а, C. Tretter, Т.Я. Азизова, Н.Д.Копачевского. Идеи и методы указанных работ М.В. Келдыша, М.Г. Крейна и Г.К. Лангера, С.Г. Крейна и его учеников получили развитие в многочисленных статьях А.С. Маркуса, В.И. Мацаева, А.Г. Костюченко, А.А. Шкаликова,

---

[1] *Келдыш М.В.*, О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // *ДАН СССР* – 1951. – Т. 77, №1. – С. 11-14. (см. также более подробное изложение в *Келдыш М.В.*, О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных операторов // *УМН* – 1971. – Т. 24, вып. 4(160). – С. 15-41.)

[2] *Крейн С.Г.*, О колебаниях вязкой жидкости в сосуде // *ДАН СССР* – 1964. – Т. 159, №2. – С. 262-265.

[3] *Крейн С.Г., Лаптев Г.И.*, К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде // *Функциональный анализ и его приложения* – 1968. – Т. 2, №1. – С. 40-50.

[4] *Аскеров Н.К., Крейн С.Г., Лаптев Г.И.*, Задача о колебаниях вязкой жидкости и связанные с ней операторные уравнения // *Функциональный анализ и его приложения* – 1968. – Т. 2, №2. – С. 21-32.

[5] *Крейн М.Г., Лангер Г.К.*, К теории квадратичных пучков самосопряженных операторов // *ДАН СССР* – 1964. – Т. 154, №6. – С. 1258-1261. (см. также более подробное изложение в *Крейн М.Г., Лангер Г.К.*, О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов // Труды междунар. симпоз. по применению теории функции комплексного переменного в механике сплошной среды Т. 2. – М.: Наука, 1965. – С. 283-322.)

Г.В. Радзиевского, М.Б. Оразова, Н.Д. Копачевского, В.Б. Лидского, Г.И. Руссу, Ю.А. Паланта, M. Shinbrot'а, Е.З. Могульского, Дж.Э. Аллахвердиева и других.

В 1989 году А.И. Милославским[6] изучена задача о малых движениях вязкоупругой несжимаемой жидкости, частично заполняющей ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Вязкоупругая жидкость описывалась обобщенной моделью Олдройта:

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t,x)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p(t,x) + \nu I_0(t)\big(\Delta \mathbf{u}(t,x)\big) + \mathbf{f}(t,x), \quad \mathrm{div}\mathbf{u}(t,x) = 0 \quad (x \in \Omega),$$

$$I_0(t)\mathbf{v}(t,x) = \mathbf{v}(t,x) + \sum_{l=1}^{m} \alpha_l \int\limits_0^t \exp\big(-\gamma_l(t-s)\big)\mathbf{v}(s,x)\,ds.$$

Доказано, что спектр операторного пучка, ассоциированного с изучаемой задачей, локализован в окрестности действительной положительной полуоси и сгущается к бесконечности, к нулю и еще к конечному количеству точек. Отличные от нуля и бесконечности точки сгущения спектра связаны с интегральными слагаемыми в модели Олдройта и качественно отличают ее от задачи, рассмотренной С.Г. Крейном. Приведенная работа является одной из первых, посвященной спектральному анализу системы, описываемой интегро-дифференциальными уравнениями. В монографии Н.Д. Копачевского и С.Г. Крейна[7] рассматриваются и другие гидродинамические задачи, в которых наблюдается этот эффект.

Задачи, подобные описанной выше, возникают при описании систем с эффектами "памяти" и давно привлекают внимание многих авторов. Жидкости Олдройта, Максвелла и Кельвина-Фойгта в гидродинамике моделируют эмульсии и суспензии одной ньютоновской жидкости в другой, сильно разбавленные суспензии твердых частиц в ньютоновской жидкости, некоторые полимерные растворы и т.д. Модели Ильюшина и Тимошенко в механике и термодинамике вязкоупругих сплошных сред применяются для описания полимерных материалов и конструкций, а также металлов и других не вполне упругих тел и т.д.

К настоящему времени относительно небольшое количество работ посвящено спектральному анализу интегро-дифференциальных уравнений и систем, содержащих такие уравнения. В монографии В.В. Власова и Н.А. Раутиан[8] отмечается, что *"Несмотря на важность оценок оператор-функции $\mathcal{L}^{-1}(\lambda)$, информации о структуре их спектра и резольвентных множеств, имеющихся в этом направлении работ очень мало... Одной из возможных причин такого положения дел авторы видят в том, что упомянутыми специалистами не в полной мере, а точнее, почти не используются результаты, относящиеся*

---

[6] *Милославский А.И.*, Спектр малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом сосуде. – Деп. в Укр. НИИНТИ. – 1221-УК89, 1989. – 78 с.

[7] *Kopachevsky N.D., Krein S.G.*, Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Volume 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids. – Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 146.), 2003 – 444 p.

[8] *Власов В.В., Раутиан Н.В.*, Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. – М.: МАКС пресс, 2016 – 488 с.

к спектральной теории операторных пучков".

Другим аспектом исследования описанных систем являются утверждения, часто тесно связанные со спектральным анализом этих систем, о существовании и единственности решений, об устойчивости этих решений и их асимптотическом поведении, утверждения о представлении решений.

В 1970 году C.M. Dafermos[9], в связи с задачей о малых движениях вязкоупругого тела, рассмотрел задачу об асимптотическом поведении решений следующего интегро-дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2\mathbf{u}(t)}{dt^2} = -A\mathbf{u}(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} G(t-s)\mathbf{u}(s)\,ds, \quad \mathbf{u}(s) = \mathbf{v}(s), \quad s \in (-\infty, 0],$$

где A — самосопряженный положительно определенный оператор с дискретным спектром, а оператор-функция $G(t)$ подчинена ему и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Было доказано, что каждое решение приведенного уравнения убывает к нулю при $t \to +\infty$, однако без оценки скорости убывания. Таким образом, интегральное слагаемое в уравнении гиперболического типа может играть роль демпфера.

После работ C.M. Dafermos'а исследование подобного рода вопросов для различных систем было проведено в многочисленных статьях ряда авторов[10]. Изучались вопросы экспоненциальной и полиномиальной устойчивости решений для различных систем, в том числе и абстрактных, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями. В частности, активно изучалось и изучается приведенное выше уравнение при условии, что $G(t) = g(t)A$, где $g(t)$ — скалярная функция. При этом весьма небольшое количество работ посвящено случаю абстрактных уравнений с несколькими некоммутирующими операторами, входящими в ядра интегральных слагаемых, а также вопросам поведения решений при заданных внешних силах.

Таким образом, недостаточно исследованными оставались вопросы существования и поведения решений абстрактных интегро-дифференциальных уравнений с операторными ядрами, содержащими некоммутирующие коэффициенты, и в связи с этим — соответствующие приложения в механике сплошных сред, то есть механические и гидродинамические системы, описываемые такими интегро-дифференциальными уравнениями. Этой тематике для некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений и их приложениям посвящена данная работа.

---

[9] *Dafermos C.M.*, An abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity // *J. Differ. Equations* – 1970. – V. 7, №3. – P. 544-569. Asymptotic stability in viscoelasticity // *Arch. Rational Mech. Anal.* – 1970. – V. 37. – P. 297-308.

[10] Day W.A., Масленникова В.Н., Lagnese J., Кажихов А.В., Desch W., Miller R.K., Triggiani R., Muñoz Rivera J.E., Grimmer R., Avalos G., Шкаликов А.А., Fabrizio M., Morro A., Pata V., Liu Z., Zheng S., Alabau-Boussouria F., Cannarsa P., Sforza D., Conti M., Pandolfi L., Власов В.В., Ati Ben Hassi E.M., Ammari K., Dell'Oro F. и др.

Цель диссертационной работы — исследование равномерной экспоненциальной устойчивости полугрупп, ассоциированных с некоторыми системами гиперболического типа и исследование асимптотического поведения решений этих систем при нагрузках, близких к почти периодическим; спектральный анализ генераторов возникающих полугрупп; исследование моделей релаксирующих жидкостей, моделей Ильюшина вязкоупругих тел, моделей Олдройта и Максвелла сжимаемых жидкостей; доказательство теорем существования и единственности решений задач Коши для интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с переменными операторными коэффициентами;

Методы исследования, достоверность и обоснованность результатов. Работа носит теоретический характер. Все результаты в ней формулируются в виде математических теорем и сопровождаются строгими доказательствами.

В работе применяются методы функционального анализа, методы теории дифференциально операторных уравнений и теория C_0-полугрупп операторов, спектральная теория операторов и операторных пучков.

Исследуемые в работе интегро-дифференциальные уравнения и системы трактуются в операторной форме и специальным образом сводятся к задачам Коши для дифференциально операторных уравнений первого порядка в некоторых гильбертовых пространствах. Операторные блок-матрицы этих уравнений имеют вполне определенную структуру, общую для моделей параболического и гиперболического типа.

Положения, выносимые на защиту, и их научная новизна: На защиту выносятся следующие результаты автора:

1. Метод отыскания асимптотик решений изучаемых систем гиперболического типа при внешних нагрузках, близких к почти периодическим.

2. Теоремы о равномерной экспоненциальной устойчивости полугрупп, генерируемых операторными блоками специального вида. Теорема об асимптотике решений неполного интегро-дифференциального уравнения второго порядка с ядром разностного типа, являющимся суммой конечного количества экспоненциальных функций с некоммутирующими операторными коэффициентами. Теорема о структуре спектра генератора и теоремы о p-базисности системы его собственных или корневых элементов в специальном частном случае.

3. Теоремы о разрешимости и теоремы о спектре в задачах о малых движениях вязкой либо идеальной релаксирующей жидкости, в задаче о малых движениях начально-изотропного вязкоупругого тела, закрепленного на границе занимаемой области, в задачах о малых движениях сжимаемой жидкости Олдройта и Максвелла, заполняющей равномерно вращающееся твердое тело. Теоремы об асимптотическом поведении решений в указанных задачах при нагрузках специального вида.

4. Теоремы об однозначной разрешимости для изучаемых классов интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с неограниченными переменными операторными коэффициентами.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Выводы работы.

1. Метод отыскания асимптотических формул может быть использован для численных расчетов в задачах о движениях вязкоупругих систем при внешних нагрузках специального вида и, в частности, для численных методов решения рассмотренных задач.

2. Теоремы о равномерной экспоненциальной устойчивости полугрупп с генераторами специального вида и теоремы о спектре таких генераторов могут быть использованы при исследовании устойчивости систем с памятью, описываемой ядрами экспоненциального типа.

3. Исследованные физические модели дают представление о возможных типах волновых движений, возникающих в этих системах. Эти представления могут быть применены в других задачах математической физики с памятью.

4. Применяемые к рассмотренным моделям схемы исследования могут быть использованы в других задачах математической физики с памятью.

5. Доказанные теоремы об однозначной разрешимости для изучаемых классов интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с неограниченными переменными операторными коэффициентами могут быть использованы при исследовании различных систем с эффектами памяти.

Апробация результатов. Основные результаты по теме диссертации получены в ходе выполнения научно-исследовательских проектов: РНФ № 14-21-00066, выполняемый в Воронежском государственном университете, и № 14.Z50.31.0037 Министерство образования и науки РФ.

Основные результаты диссертации докладывались на Международной конференции "Modern Analysis and Applications" dedicated to the centenary of Mark Krein (Odessa, Ukraine, 2007), на Международной конференции "Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам" (Батилиман, 2011, 2012, 2014–2018), на Научном семинаре под руководством профессора Н.Д. Копачевского (КФУ, Симферополь, 2014–2019), на Международной научной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа — V, VI, VII" (Ростов-на-Дону, 2015–2017), на Научном семинаре под руководством профессора В.Г. Звягина (ВГУ, Воронеж, 2015), на Международной научной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна" (Воронеж, 2016, 2019), на Международной научной конференции "IX Международный симпозиум Ряды Фурье и их приложения" (Дюрсо, 2016), на Воронежской весенней математической школе "Современные методы в качественной теории краевых задач" – "Понтрягинские чтения – XXVII, XXVIII" (Воронеж, 2016, 2017), на Научном семинаре под руководством профессора В.В. Власова и профессора К.А. Мирзоева (МГУ, Москва, 2016, 2017, 2019), на Научном семинаре под руководством профессора А.А. Шкаликова (МГУ, Москва, 2016, 2017), на Научном семинаре под руководством д.ф.-м.н. Д.В. Георгиевского (МГУ, Москва, 2016), на Научном семинаре под руководством академика РАН, профессора В.А. Садовничего (МГУ, Москва, 2017), на Международной научной конференции "Современные методы и проблемы математической гидродинамики" (Воронеж, 2018, 2019), на Научном семинаре под руководством профессора А.Л. Скубачевского (РУДН, Москва, 2018), на Научном семинаре под руководством профессора Г.А. Чечкина (МГУ, Москва, 2019).

Публикации. Личный вклад автора. Основные результаты диссертации получены автором и опубликованы в 13 статьях в журналах [1–13] из списка ВАК и в 12 тезисах международных конференций [14–25] .

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 5 глав, списка сокращений и условных обозначений и библиографии. Общий объем диссертации 293 страницы, из них 267 страниц текста. Библиография включает 204 наименования на 26 страницах.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе развивается метод получения асимптотических формул для решений некоторых интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа. В частности, изучается операторная блок-матрица специального вида и генерируемая ей C_0-полугруппа, проводится спектральный анализ этой блок-матрицы.

Пусть H, H_l $(l=\overline{0,m})$ — гильбертовы пространства. Пусть задан самосопряженный и положительно определенный оператор $A:\mathcal{D}(A)\subset H\to H$, заданы ограниченные операторы $Q_l\in\mathcal{L}(H,H_l)$ $(l=\overline{0,m})$ и неотрицательные числа $\gamma_l\geqslant 0$ такие, что $(Q_l^*Q_lu,u)_H\geqslant\gamma_l\|u\|_H^2$ при всех $u\in H$. Будем считать также, что дан упорядоченный набор неотрицательных чисел $0=:b_0<b_1<\ldots<b_m$.

Определим гильбертово пространство $\mathcal{H}:=H\oplus\big(\oplus_{l=0}^m H_l\big)$, состоящее из элементов вида $\xi:=(u;w)^\tau:=\big(u;(u_0;u_1;\ldots;u_m)^\tau\big)^\tau$. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ определим оператор $\mathcal{A}$ по следующей формуле:

$$\mathcal{A}=\operatorname{diag}\big(A^{1/2},\mathcal{I}\big)\begin{pmatrix}0 & \mathcal{Q}^*\\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}\end{pmatrix}\operatorname{diag}\big(A^{1/2},\mathcal{I}\big)=\begin{pmatrix}0 & A^{1/2}\mathcal{Q}^*\\ -\mathcal{Q}A^{1/2} & \mathcal{G}\end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\mathcal{Q} := \big(Q_0, Q_1, \ldots, Q_m\big)^\tau, \quad \mathcal{G} := \mathrm{diag}\big(0, b_1 I, \ldots, b_m I\big), \quad \mathcal{I} := \mathrm{diag}\big(I, I, \ldots, I\big),$$
$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{\xi = (u; w)^\tau \in \mathcal{H} \Big| \; u \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \;\; \mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(A^{1/2})\Big\}. \tag{2}$$

Теорема 1 ([9]) *Пусть существует* $Q_0^{-1} \in \mathcal{L}(H_0, H)$ *и* $\gamma_q = \gamma_q(Q_q^* Q_q) > 0$ *при некотором* $q \in \{1, \ldots, m\}$. *Обозначим через* λ_k^+ *наименьший положительный корень уравнения* $g_k(\lambda) = 0$ $(k = 1, 2)$, *где*

$$g_1(\lambda) := \|Q_0^{-1}\|^{-2} - \lambda^2 \|A^{-1/2}\|^2 - \lambda \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{b_l - \lambda} \|Q_l\|^2,$$
$$g_2(\lambda) := \gamma_q + 2\lambda \Bigg[\sum_{q<l\leqslant m} \frac{\gamma_l}{b_l - b_q + 2\lambda} - \frac{\|Q_0\|^2}{b_q - 2\lambda} - \sum_{1\leqslant l<q} \frac{\|Q_l\|^2}{b_q - b_l - 2\lambda}\Bigg].$$

Определим число
$$\omega_0 := \min\Big\{\frac{b_q - b_{q-1}}{2}, \frac{b_q}{3}, \lambda_1^+, \lambda_2^+\Big\}. \tag{3}$$

Тогда оператор $-\mathcal{A}$ *является генератором равномерно экспоненциально устойчивой* C_0*-полугруппы* $\mathcal{U}(t)$. *Более того, для любого* $\omega \in (0, \omega_0)$ *существует* $M = M(\omega) \geqslant 1$ *такое, что*

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant M e^{-\omega t} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+ := [0, +\infty). \tag{4}$$

Доказательство теоремы 1 основано на теореме L. Gearhart'a[11] и методе спектрального сдвига, который использовался, например, в работах Р.О. Гринива и А.А. Шкаликова[12], K. Veselić'a[13] при исследовании вопросов устойчивости для дифференциально операторных уравнений второго порядка.

Теорема 2 ([11, 13]) *Оператор* $-\mathcal{A}$ *является генератором* C_0*-полугруппы сжимающих операторов, если* $\sum_{l=0}^m Q_l^* Q_l \gg 0$, *и генератором равномерно экспоненциально устойчивой* C_0*-полугруппы (см. (4)), если* $\sum_{l=1}^m Q_l^* Q_l \gg 0$, $Q_0 Q_0^* \gg 0$.

Доказательство теоремы 2 основано на следствии из теоремы L. Gearhart'a и идеях, систематически используемых в монографии Z. Liu и S. Zheng'a[14] при исследовании вопросов равномерной экспоненциальной устойчивости в различных вязко- и термовязко-упругих системах.

[11] *Gearhart L.*, Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces // Trans. Amer. Math. Soc. – 1978. – Vol. 236. – P. 385–394.

[12] *Гринив Р.О., Шкаликов А.А.*, Экспоненциальная устойчивость полугрупп, связанных с некоторыми операторными моделями в механике // Матем. заметки. – 2003. – Т. 73, № 5. – С. 657–664. Экспоненциальное убывание энергии решений уравнений, отвечающих некоторым операторным моделям механики // Функц. анализ и его прил. – 2004. – Т. 38, № 3. – С. 3–14.

[13] *Veselić K.*, Bounds for Contractive Semigroups and Second Order Systems // Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 162. – Basel-Boston-Berlin : Birkhäuser Verlag, 2006. – P. 293–308.

[14] *Liu Z., Zheng S.*, Semigroups Associated with Dissipative Systems. – Boca Raton-London-New York-Washington: CHAPMAN & HALL/CRC Research Notes in Mathematics Series, 398, 1999. – 206 p.

В п. 1.3 **первой главы** теоремы 1 и 2 применяются к исследованию асимптотического поведения решений некоторых интегро-дифференциальных уравнений второго порядка.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве H задачу Коши:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -Au + \sum_{l=1}^{m} \int_0^t \exp\big(-b_l(t-s)\big) C_l^* C_l u(s)\,ds + f(t), \qquad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{5}$$

где $A = A^* \gg 0$, а оператор C_l, действующий из H в гильбертово пространство H_l, плотно определен и замкнут при каждом $l = \overline{1,m}$.

Определение 1. *Сильным решением* задачи Коши (5) назовем функцию $u \in C^2(\mathbb{R}_+; H)$ такую, что 1) $u(t) \in \mathcal{D}(A)$, $u'(t) \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ для любого $t \geqslant 0$ и Au, $A^{1/2}u' \in C(\mathbb{R}_+; H)$, 2) в (5) выполнено уравнение при $t \geqslant 0$ и удовлетворено начальное условие.

Здесь и ниже $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

Пусть $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(C_l^* C_l)$ $(l = \overline{1,m})$, существуют числа $a_1 \in (0,1)$, $a_2 > 0$ и номер $q \in \{1, \ldots, m\}$ такие, что $\mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{D}(C_q)$ и

$$\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{b_l} \|C_l u\|_{H_l}^2 \leqslant a_1 \|A^{1/2}u\|_H^2, \quad \|C_q u\|_{H_q}^2 \geqslant a_2 \|A^{1/2}u\|_H^2 \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(A^{1/2}). \tag{6}$$

Введем операторы $Q_l := b_l^{-1/2} C_l A^{-1/2}$, $Q_l^+ := b_l^{-1/2} A^{-1/2} C_l^*$ $(l = \overline{1,m})$. Из неравенств (6) следует, что $Q_l \in \mathcal{L}(H, H_l)$, а оператор Q_l^+ расширяется по непрерывности до оператора $Q_l^* \in \mathcal{L}(H, H_l)$. Из (6) также следует, что $I - \sum_{l=1}^m Q_l^* Q_l \gg 0$. Введем оператор $Q_0 := (I - \sum_{l=1}^m Q_l^* Q_l)^{1/2}$. Определим теперь число ω_0 по формуле (3).

Теорема 3 ([9]) *1. Задача Коши (5) имеет единственное сильное решение, если $u^0 \in \mathcal{D}(A)$, $u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $f \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$, а операторы в уравнении удовлетворяют условиям (6).*
2. Если к тому же $f(t) = g(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} f_k(t)$, где g, $f_k \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$ ненулевые, то для любого $\omega \in (0, \omega_0)$ существуют константы $M_k \geqslant 1$ $(k = 1, 2)$ такие, что при $t \in \mathbb{R}_+$

$$\Big\| A^{1/2}\Big(u(t) - \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t)\Big)\Big\|_H^2 + \\ + \Big\| u'(t) + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t)\Big\|_H^2 \leqslant$$

$$\leqslant M_1 e^{-2\omega t}\Bigl[\|A^{1/2}u^0\|_H^2 + \|u^1\|_H^2 + \sum_{k=0}^{n}\|f_k(0)\|_H^2\Bigr] + M_2\Bigl[\int_0^t e^{-\omega(t-s)}h(s)\,ds\Bigr]^2,$$

где $\quad h(s) := \|g(s)\|_H + \sum_{k=0}^{n}\|f_k'(s)\|_H, \quad M(\lambda) := I + \lambda^2 A^{-1} - \sum_{l=1}^{m}\frac{b_l}{b_l-\lambda}\,Q_l^* Q_l.$

3. В частности,

$$\Bigl\|A^{1/2}\Bigl(u(t) - \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}A^{-1/2}M^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}f_k(t)\Bigr)\Bigr\|_H^2 +$$
$$+\Bigl\|u'(t) + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A^{-1/2}M^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}f_k(t)\Bigr\|_H^2 \to 0$$

при $t \to +\infty$, *если* $\|g(t)\|_H \to 0$, $\|f_k'(t)\|_H \to 0$, $k=\overline{0,n}$, *при* $t\to+\infty$.

Рассмотрим абстрактную задачу Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка в гильбертовых пространствах H и H_0:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + B^* u_0 + \sum\limits_{l=1}^{m}\int\limits_0^t \exp\bigl(-b_l(t-s)\bigr)C_l^* C_l u(s)\,ds = f(t), \\ \dfrac{du_0}{dt} - Bu = 0, \qquad u(0)=u^0, \quad u_0(0)=u_0^0, \end{cases} \tag{7}$$

где оператор B действует из H в H_0, плотно определен и замкнут, а оператор C_l, действующий из H в гильбертово пространство H_l, плотно определен и замкнут при каждом $l=\overline{1,m}$.

Пусть $A = A^* \gg 0$, $\mathcal{D}(A^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B)$, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(C_l^* C_l)$. Введем операторы $Q_0 := BA^{-1/2}$, $Q_l := C_l A^{-1/2}$ $(l=\overline{1,m})$. Тогда $Q_l \in \mathcal{L}(H, H_l)$. С помощью операторов Q_l запишем задачу (7) в расширенной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A^{1/2}\Bigl\{Q_0^* u_0 + \sum\limits_{l=1}^{m} Q_l^* \int\limits_0^t \exp\bigl(-b_l(t-s)\bigr)Q_l A^{1/2}u(s)\,ds\Bigr\} = f(t), \\ \dfrac{du_0}{dt} - Q_0 A^{1/2}u = 0, \qquad u(0)=u^0, \quad u_0(0)=u_0^0. \end{cases} \tag{8}$$

Определение 2. Функции $u \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R}_+; H_0)$ назовем *решением* задачи (8), если 1) $u(t) \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $u_0(t) \in H_0$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$, выражение в фигурных скобках принимает значения из $\mathcal{D}(A^{1/2})$ и $A^{1/2}\{\ldots\} \in C(\mathbb{R}_+; H)$, 2) в (8) выполнены уравнения при $t \geqslant 0$ и начальные данные.

Теорема 4 ([11, 13]) *Имеют место следующие утверждения.*
1. Пусть $\sum_{l=0}^{m} Q_l^* Q_l \gg 0$, $u^0 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $u_0^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, $f \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$. *Тогда решение задачи* (8) *существует и единственно.*
2. Пусть $\sum_{l=1}^{m} Q_l^* Q_l \gg 0$, $\underline{Q_0 Q_0^* \gg 0,}$ $f(t) = g(t) + \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t} f_k(t)$, *где* g, $f_k \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$ *ненулевые. Тогда существуют абсолютные константы* $\omega > 0$, $M_0 \geqslant 1$ *такие, что при всех* $t \in \mathbb{R}_+$

$$\Big\| u(t) - A^{-1/2} C^{1/2} P_0 C^{1/2} A^{-1/2} f_0(t) - \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \Big\|_H^2 +$$

$$+ \Big\| u_0(t) - \big(Q_0 C Q_0^*\big)^{-1} Q_0 C A^{-1/2} f_0(t) + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t} \frac{1}{i\sigma_k} Q_0 L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \Big\|_{H_0}^2 \leqslant$$

$$\leqslant M_0 e^{-2\omega t} \Big[\|u^0\|_H^2 + \|u_0^0\|_{H_0}^2 + \sum_{k=0}^{n} \|f_k(0)\|_H^2 \Big] +$$

$$+ M_0 \Big[\int_0^t e^{-\omega(t-s)} \Big[\|g(s)\|_H + \sum_{k=0}^{n} \|f_k'(s)\|_H \Big] \, ds \Big]^2,$$

$$C := \Big[\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{b_l} Q_l^* Q_l \Big]^{-1}, \quad L(\lambda) := -\lambda A_0^{-1} - \frac{1}{\lambda} Q_0^* Q_0 + \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{b_l - \lambda} Q_l^* Q_l,$$

где P_0 *— ортопроектор пространства* H *на* $\operatorname{Ker}\big(Q_0 C^{1/2}\big)$.

Теорема 1 и метод доказательства теоремы 3 применяются во **второй** и **третьей главах** при исследовании асимптотического поведения решений в задаче о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости и в задаче о движении вязкоупругого тела. Теорема 4 применяется в **четвертой главе** при исследовании асимптотического поведения решений в задаче о малых движениях вязкоупругой сжимаемой жидкости Максвелла под действием нагрузок специального вида.

В п. 1.4 **первой главы** изучена задача о спектре оператора $\mathcal{A}$ (см. (1)-(2)):

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}, \tag{9}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, ξ — амплитудный элемент. При $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G})$ с (9) связывается следующая спектральная задача

$$L(\lambda)u := \big[-\lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q} \big] u = 0, \quad u \in H. \tag{10}$$

Теорема 5. *Пусть* $\mathcal{Q}^*\mathcal{Q} = \sum_{l=0}^{m} Q_l^* Q_l \gg 0$, *тогда спектр оператора* $\mathcal{A}$, *за исключением точек множества* $\{0, b_1, \ldots, b_m\} = \sigma(\mathcal{G})$, *совпадает со спектром пучка* $L(\lambda)$ *и расположен симметрично относительно действительной оси.*

Определение 3. *Существенным спектром* оператора $\mathcal{A}$ назовем множество $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) := \big\{\lambda \in \mathbb{C} |\ \text{оператор}\ \mathcal{A} - \lambda\ \text{нефредгольмов}\big\}$.

Теорема 6. *Пусть $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ и $\mathcal{Q}^*\mathcal{Q} \gg 0$. Тогда*
1. Если $Q_q^*Q_q \gg 0$ при некотором $q \in \{0, 1, \ldots, m\}$, то точка b_q может быть лишь изолированным собственным значением оператора $\mathcal{A}$ конечной либо бесконечной кратности.
2. Для существенного спектра оператора $\mathcal{A}$ справедлива формула

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \backslash \{0, b_1, \ldots, b_m\} = \sigma_{ess}(L(\lambda)) \subset [0, b_m]$$

и множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$.
3. Имеет место включение

$$\sigma(\mathcal{A}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}|\ \mathrm{Im}\lambda \neq 0\} \subset \{\lambda \in \mathbb{C}|\ 0 \leqslant \mathrm{Re}\lambda < b_m/2\}$$

и при $\sum_{l=1}^m Q_l^*Q_l \gg 0$ и $Q_0Q_0^* \gg 0$ существует $\beta > 0$ такое, что

$$\sigma(\mathcal{A}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}|\ \mathrm{Im}\lambda \neq 0\} \subset \{\lambda \in \mathbb{C}|\ \beta \leqslant \mathrm{Re}\lambda < b_m/2\}.$$

4. Если собственные значения оператора $(\mathcal{Q}^*\mathcal{Q})^{1/2}A(\mathcal{Q}^*\mathcal{Q})^{1/2}$ имеют степенное асимптотическое распределение, то оператор $\mathcal{A}$ имеет две ветви комплексно сопряженных собственных значений $\{\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A})\}_{k=1}^\infty$, расположенных в полосе $\{\lambda \in \mathbb{C}|\ 0 \leqslant \mathrm{Re}\lambda < b_m/2\}$, со следующей асимптотикой при $k \to +\infty$:

$$\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A}) = \pm i\lambda_k^{1/2}\big((\mathcal{Q}^*\mathcal{Q})^{1/2}A(\mathcal{Q}^*\mathcal{Q})^{1/2}\big)(1 + o(1)).$$

5. Если норма $\|A^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(H)}$ достаточно мала, то ни одна из точек множества $\sigma_{ess}(\mathcal{A})\backslash\{0, b_1, \ldots, b_m\}$ не лежит в замыкании комплексно сопряженных ветвей собственных значений из $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, а при $b_q \in \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ и $\sum_{l\neq q} Q_l^*Q_l \gg 0$ и точка b_q не лежит в этом замыкании.

Теорема 7. *Пусть набор элементов $\{\xi_k = (u_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ является цепочкой из собственного и присоединенных элементов задачи (9), отвечающей собственному значению λ_0, $\lambda_0 \notin \{0, b_1, \ldots, b_m\}$, тогда набор элементов $\{v_k\}_{k=0}^{n-1} := \{A^{1/2}u_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов задачи (10), отвечающая собственному значению λ_0.*

Обратно, пусть набор элементов $\{v_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов спектральной задачи (10), отвечающая собственному значению λ_0, тогда набор элементов $\{\xi_k = (A^{-1/2}v_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$, где $w_k = \sum_{l=0}^k (\mathcal{G} - \lambda_0)^{-(k-l+1)}\mathcal{Q}v_l$, — цепочка из собственного и присоединенных элементов спектральной задачи (9).

В п. 1.5 **первой главы** рассмотрен частный случай оператора $\mathcal{A}$ и доказана теорема о базисности Рисса и p-базисности системы его корневых элементов.

Будем считать, что в (1)-(2) $Q_l := \beta_l^{1/2} I \in \mathcal{L}(H)$, где $\beta_l > 0$ $(l = \overline{0, m})$. Предположим, что $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$. Пусть $\lambda_k = \lambda_k(A^{-1})$, $u_k = u_k(A^{-1})$ $(k \in \mathbb{N})$ — k-е собственное значение и соответствующий ему нормированный к единице собственный элемент оператора A^{-1}. Тогда u_k — собственный элемент операторного пучка $L(\lambda)$, и спектр задачи (10) (а, значит, и задачи (9)), может быть полностью найден из последовательности характеристических уравнений:

$$\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q} \equiv -\frac{1}{\lambda}\beta_0 + \sum_{l=1}^{m} \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} = \lambda\lambda_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Здесь и далее $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}^*$ и $\mathcal{G}$ будем понимать также как вектор-столбец, вектор-строку и матрицу соответственно, действующие в $\mathbb{C}^{m+1}$.

Определим характеристические функции

$$g_k(\lambda) := \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q} - \lambda\lambda_k \equiv -\frac{1}{\lambda}\beta_0 + \sum_{l=1}^{m} \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} - \lambda\lambda_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

$$g_\infty(\lambda) := \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q} \equiv -\frac{1}{\lambda}\beta_0 + \sum_{l=1}^{m} \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} \equiv -\frac{1}{\lambda}\left[\sum_{l=0}^{m} \beta_l - \sum_{l=1}^{m} \frac{\beta_l b_l}{b_l - \lambda}\right].$$

Обозначим через γ_p $(p = \overline{1, m})$ корни уравнения $g_\infty(\lambda) = 0$, занумерованные в порядке возрастания. Простые геометрические рассуждения показывают, что $0 < \gamma_1 < b_1 < \gamma_2 < b_2 < \ldots < \gamma_m < b_m$ и $g'_\infty(\gamma_p) > 0$ для любого $p = \overline{1, m}$.

Обозначим через $\lambda_k^{(p)}$ $(p = \overline{1, m+2})$ корни уравнения $g_k(\lambda) = 0$ при каждом $k \in \mathbb{N}$. Можно проверить, что это уравнение всегда имеет m действительных корней $\lambda_k^{(p)} \in (\gamma_p, b_p)$ $(p = \overline{1, m})$ и еще два корня. Если $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ $(p = \overline{1, m})$, то $g'_k(\lambda_k^{(p)}) > 0$. Оставшиеся два корня $\lambda_k^{(m+1)}$ и $\lambda_k^{(m+2)}$ являются комплексно сопряженными, начиная с некоторого номера k_0. В силу конечной кратности собственных значений оператора A^{-1} легко видеть также, что может быть только конечное количество номеров $k \in \mathbb{N}$ при которых характеристическое уравнение $g_k(\lambda) = 0$ имеет кратные (действительные) корни.

Применение асимптотических методов к уравнениям (12) приводит к следующей теореме (см. также теоремы 5 и 6).

Теорема 8. *Спектр оператора $\mathcal{A}$ (или пучка $L(\lambda)$) расположен в правой открытой полуплоскости и в $\mathbb{C}\backslash\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ состоит из изолированных конечнократных собственных значений, которые расположены симметрично относительно действительной полуоси. Все собственные значения можно разбить* *на $(m+2)$-е серии со следующим асимптотическим поведением при $k \to +\infty$:*

$$\lambda_k^{(p)}(\mathcal{A}) = \gamma_p + \frac{\gamma_p}{g'_\infty(\gamma_p)}\lambda_k(A^{-1}) + O(\lambda_k^2(A^{-1})), \quad p = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A}) = \pm i\alpha^{1/2}\lambda_k^{-1/2}(A^{-1}) + \sum_{l=1}^{m}\frac{\beta_l b_l}{2\alpha} + O(\lambda_k^{1/2}(A^{-1})), \quad \alpha := \sum_{l=0}^{m}\beta_l.$$

Из теорем 7, 8 и ряда вспомогательных утверждений выводится следующая теорема о базисности системы корневых элементов оператора $\mathcal{A}$.

Теорема 9 ([12]) *Пусть $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ ($p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$). Тогда система*

$$\xi_k^{(p)} := R_{k,p}\big(\lambda_k^{1/2}(A^{-1}); (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\big)^\tau u_k, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$R_{k,p} := \begin{cases} \big[g'_\infty(\gamma_p)\big]^{-1/2}, & p = \overline{1, m}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \big[2\lambda_k(A^{-1})\big]^{-1/2}, & p = m+1, m+2, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

собственных элементов оператора $\mathcal{A}$ образует базис Рисса в пространстве $\mathcal{H}$. Если $A^{-1} \in \mathfrak{S}_q(H)$ при некотором $q > 0$, то система собственных элементов оператора $\mathcal{A}$ образует p-базис в пространстве $\mathcal{H}$ при $p \geqslant 2q$. При этом биортогональная система имеет следующий вид:

$$\zeta_k^{(p)} := -\big[g'_k(\overline{\lambda_k^{(p)}})R_{k,p}\big]^{-1}\big(\lambda_k^{1/2}(A^{-1}); -(\mathcal{G} - \overline{\lambda_k^{(p)}})^{-1}\mathcal{Q}\big)^\tau u_k, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В общем случае система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ образует базис Рисса или p-базис при $p \geqslant 2q$ в пространстве $\mathcal{H}$ соответственно.

Теорема 9 применяется во **второй** и **третьей главах** при представлении решений в задаче о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей неподвижный контейнер и находящейся в невесомости, и в задаче о движении синхронно-изотропного вязкоупругого тела. В монографии В.В. Власова и Н.А. Раутиан[15] аналогичные вопросы представления решений интегро-дифференциальных уравнений решаются другими методами. Ядра интегральных слагаемых содержат бесконечное количество экспоненциальных функций, однако при этом считается, что спектр оператора A простой.

Результаты первой главы опубликованы в работах [6, 9, 11, 12].

Во второй главе изучаются модели релаксирующих жидкостей.

Рассмотрим контейнер, равномерно вращающийся вокруг оси, сонаправленной с действием силы тяжести, и полностью заполненный вязкой неоднородной жидкостью. Будем считать, что жидкость занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор, нормальный к границе $\partial\Omega$ и

---

[15] *Власов В.В., Раутиан Н.В.*, Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. – М.: МАКС пресс, 2016 – 488 с.

направленный вне области Ω. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с контейнером, таким образом, что ось Ox_3 совпадает с осью вращения и направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится в области Ω. В этом случае равномерная скорость вращения контейнера запишется в виде $\omega_0\mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_3$ — орт оси вращения Ox_3, а $\omega_0 > 0$, для определенности.

Малые движения *вязкой релаксирующей жидкости*, заполняющей равномерно вращающийся контейнер, в введенной системе координат описываются следующей системой уравнений (в симметризованной форме):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}(t,x)}{\partial t} - 2\omega_0\big(\mathbf{u}(t,x)\times\mathbf{e}_3\big) + \nabla\big(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho(t,x)\big) - \\ \qquad -\rho_0^{-1}(z)\big(\mu\Delta\mathbf{u}(t,x) + (\eta + 3^{-1}\mu)\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}(t,x)\big) - \\ \qquad - \displaystyle\sum_{l=1}^{m}\int_0^t \exp\big(-b_l(t-s)\big)\nabla\big(a_\infty\rho_0^{1/2}(z)k_l(x)\rho(s,x)\big)\,ds = \mathbf{f}(t,x), \\ \dfrac{\partial\rho(t,x)}{\partial t} + a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\mathbf{u}(t,x)\big) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \end{cases} \tag{13}$$

где $\mathbf{u}(t,x)$ — поле скоростей жидкости в подвижной системе координат, μ и η — динамическая и вторая вязкости жидкости, $a_\infty^{-1}\rho_0^{1/2}(z)\rho(t,x)$ — динамическая плотность жидкости ($\rho_0(z) = \rho_0(0)\exp(za_\infty^{-2})$, где $\rho_0(0)$ — плотность жидкости в начале координат, $a_\infty = \mathrm{const}$ — скорость звука, $z := 2^{-1}\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) - gx_3$), $\mathbf{f}(t,x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное поле. Числа b_l^{-1} имеют смысл времен релаксации в системе, а $k_l(x)$ — некоторые структурные функции. Будем считать, что $k_l(x)$ — непрерывно дифференцируемые, положительные и отделенные от нуля функции. При отсутствии вращения и сил тяжести ($\omega_0 = 0$, $g = 0$) функции k_l будем считать положительными константами.

Систему (13) дополним начальными условиями $\mathbf{u}(0,x) = \mathbf{u}^0(x)$, $\rho(0,x) = \rho^0(x)$ и граничным условием прилипания:

$$\mathbf{u}(t,x) = \mathbf{0} \quad (\text{на } \partial\Omega). \tag{14}$$

Чтобы получить задачу о малых движениях *идеальной релаксирующей жидкости*, заполняющей равномерно вращающуюся ограниченную область, следует в (13) положить $\mu = 0$, $\eta = 0$, а условие прилипания (14) заменить на условие непротекания:

$$\mathbf{u}(t,x)\cdot\mathbf{n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega). \tag{15}$$

Физические параметры предполагаются связанными неравенством $1 - \sum_{l=1}^{m} b_l^{-1}\rho_0(z)k_l(x) > 0$ для любых $x \in \overline{\Omega}$, характеризующим малость времен релаксации b_l^{-1} либо структурных функций $k_l(x)$. Положим $\varphi_0(x) := 1 - \sum_{l=1}^{m} b_l^{-1}\rho_0(z)k_l(x)$.

В п. 2.3 **второй главы** исследуется вязкая релаксирующая жидкость.

Определим векторное пространство $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ с весом $\rho_0=\rho_0(z)$, скалярное гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ функций, суммируемых со своими квадратами по области Ω, а также его подпространство $L_{2,g}(\Omega):=\{f\in L_2(\Omega)\mid (f,g^{1/2})=0\}$ ($L_{2,\Omega}:=L_{2,\mathrm{const}}(\Omega)$), где $g\in C(\overline{\Omega})$, $0<g_1\leqslant g(x)\leqslant g_2$. Задача (13)-(14) записывается в виде задачи Коши для системы двух дифференциально-операторных уравнений в гильбертовых пространствах $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ и $L_{2,\rho_0}(\Omega)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}+(2\omega_0 iS+A)\mathbf{u}-B^*\rho+\displaystyle\sum_{l=1}^{m}\int\limits_0^t \exp\big(-b_l(t-s)\big)B^*M_l\rho(s)\,ds=\mathbf{f}(t),\\ \dfrac{d\rho}{dt}+B\mathbf{u}=0,\qquad \mathbf{u}(0)=\mathbf{u}^0,\quad \rho(0)=\rho^0. \end{cases}\tag{16}$$

Здесь S, M_l ограниченные операторы, $S=S^*$, $M_l\gg 0$. Оператор A является самосопряженным положительно определенным, $A^{-1}\in\mathfrak{S}_p(\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))$ при $p>3/2$. Оператор B замкнут на $\mathcal{D}(B)\subset\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ и $B^*BA^{-1}\in\mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))$.

Определение 4. Поле $\mathbf{u}\in C^1(\mathbb{R}_+;\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))\cap C(\mathbb{R}_+;\mathcal{D}(A))$ и функцию $\rho\in$ $\in C^1(\mathbb{R}_+,L_{2,\rho_0}(\Omega))\cap C(\mathbb{R}_+,\mathcal{D}(B^*))$ назовем *сильным решением* задачи (16) и, соответственно, задачи (13)-(14), если в (16) выполнены и уравнения при $t\geqslant 0$, и начальные условия.

Определим операторы $T_l\rho:=(k_l\rho_0)^{1/2}\Pi\rho$ $(l=\overline{1,m})$, $T_0\rho:=\varphi_0^{1/2}\Pi\rho$, где Π — ортопроектор пространства $L_2(\Omega)$ на $L_{2,\rho_0}(\Omega)$. Тогда $M_l=T_l^*T_l$ $(l=\overline{1,m})$, $I-\sum_{l=1}^m b_l^{-1}M_l=T_0^*T_0\gg 0$.

Задача (16) после ряда замен записывается как задача Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в ортогональной сумме гильбертовых пространств $\mathcal{H}:=\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)\oplus L_{2,\varphi_0^{-1}\rho_0}(\Omega)\oplus_{l=1}^m L_{2,k_l^{-1}}(\Omega)$:

$$\frac{d\xi}{dt}=-\mathcal{A}\big(\xi+\xi_{\rho^0}(t)\big)+\mathcal{F}(t),\quad \xi(0)=\xi^0,$$
$$\xi(t):=\big(\mathbf{u}(t);w(t)\big)^\tau=\big(\mathbf{u}(t);\big(r_0(t);r_1(t);\ldots;r_m(t)\big)^\tau\big)^\tau,\ \ \xi^0:=\big(\mathbf{u}^0;T_0\rho^0;0;\ldots;0\big)^\tau$$
$$\xi_{\rho^0}(t):=\Big(0;(T_0^*)^{-1}\sum_{l=1}^m e^{-b_lt}\frac{1}{b_l}M_l\rho^0;0;\ldots;0\Big)^\tau,\quad \mathcal{F}(t):=\big(\mathbf{f}(t);0;0;\ldots;0\big)^\tau.$$

Для оператора $\mathcal{A}$ справедливы следующие формулы:

$$\mathcal{A}=\operatorname{diag}\big(A^{1/2},\mathcal{I}\big)\begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^*\\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}\end{pmatrix}\operatorname{diag}\big(A^{1/2},\mathcal{I}\big)+\begin{pmatrix}2\omega_0 iS & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$
$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} I & 0\\ -\mathcal{Q}TA^{-1/2} & \mathcal{I}\end{pmatrix}\operatorname{diag}\big(A^{1/2}T^{-1}A^{1/2},\mathcal{G}+\mathcal{Q}T\mathcal{Q}^*\big)\begin{pmatrix} I & A^{-1/2}T\mathcal{Q}^*\\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix},$$
$$\mathcal{D}(\mathcal{A})=\Big\{\xi=(\mathbf{u};w)^\tau\in\mathcal{H}\big|\ \mathbf{u}+A^{-1/2}\mathcal{Q}^*w\in\mathcal{D}(A)\Big\},$$

где $I, \mathcal{I}$ — единичные операторы, $T := (I + 2\omega_0 i A^{-1/2} S A^{-1/2})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$,

$$\mathcal{Q} := \Big(-T_0 Q, \frac{-1}{\sqrt{b_1}} T_1 Q, \ldots, \frac{-1}{\sqrt{b_m}} T_m Q \Big)^{\tau}, \quad \mathcal{G} := \mathrm{diag}\big(0, b_1 I, \ldots, b_m I\big).$$

Лемма 1. *Оператор $\mathcal{A}$ максимальный секториальный. Более того,*

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \big\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\big|\; |\mathrm{Im}\lambda| \leqslant \|\mathcal{Q}^*\|^2 (2\omega_0)^{-1} \mathrm{Re}\lambda + 2\omega_0, \;\; 0 \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant 4\omega_0^2 \|\mathcal{Q}^*\|^{-2} \big\} \\ \cup \big\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\big|\; |\mathrm{Im}\lambda| \leqslant 2\|\mathcal{Q}^*\| (\mathrm{Re}\lambda)^{1/2}, \;\; \mathrm{Re}\lambda \geqslant 4\omega_0^2 \|\mathcal{Q}^*\|^{-2} \big\},$$

где $\mathcal{W}(\mathcal{A})$ — числовая область значений оператора $\mathcal{A}$.

Теорема 10 ([1]) *Пусть поле $\mathbf{f}$ локально гельдерово: для любого $\tau \in \mathbb{R}_+$ существуют $K = K(\tau) > 0$, $k = k(\tau) \in (0,1]$ такие, что $\|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} \leqslant K|t-s|^k$ при всех $0 \leqslant s, t \leqslant \tau$. Тогда для любых $\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(A)$ и $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$ существует и единственно сильное решение задачи (16).*

Рассмотрим задачу о спектре оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}, \tag{17}$$

которую ассоциируем с *задачей о спектре вязкой вращающейся релаксирующей жидкости*. При исследовании существенного спектра оператора $\mathcal{A}$ предполагается, что граница $\partial\Omega$ области Ω класса C^∞ — ограничение используемых методов[16].

Задача (17) определяет невырожденную систему Дуглиса–Ниренберга. Из работы G. Grubb и G. Geymonat[17] следует, что $\mathcal{A} - \lambda$ фредгольмов тогда и только тогда, когда соответствующая краевая задача является эллиптической.

Теорема 11 ([5]) $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \Lambda_E \cup \Lambda_L$, *где*

$$\Lambda_E := \Big\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\Big|\; 1 - \sum_{l=1}^m \frac{\rho_0(z) k_l(x)}{b_l - \lambda} = \lambda \frac{3\eta + 4\mu}{3a_\infty^2 \rho_0(z)}, \;\; x \in \overline{\Omega} \Big\},$$
$$\Lambda_L := \Big\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\Big|\; 1 - \sum_{l=1}^m \frac{\rho_0(z) k_l(x)}{b_l - \lambda} = \lambda \frac{3\eta + 7\mu}{3a_\infty^2 \rho_0(z)}, \;\; x \in \partial\Omega \Big\}.$$

Множество $\mathbb{C} \backslash \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$.

---

[16] Отметим, что в работе *Faierman M., Fries R.J., Mennicken R., Möller M.*, On the essential spectrum of the linearized Navier-Stokes operator // Integral Equations and Operator Theory — 2000. — Vol. 38, no. 1. — P. 9–27. к исследованию существенного спектра оператора Навье-Стокса применяется другой подход, при котором граница области предполагается класса C^2.

[17] *Grubb G., Geymonat G.*, The essential spectrum of elliptic systems of mixed order // Math. Ann. — 1977. — Vol. 227, no. 3. — P. 247–276.

Теорема 11 обобщает соответствующее утверждение из работы А.К. Пал и В.Н. Масленниковой[18].

В следующем утверждении фигурирует условие на малость нормы $\|A^{-1/2}\|$. Эта норма тем меньше, чем больше максимум функции $\mu\rho_0^{-1}(z)$ по области Ω. Таким образом, малость указанной нормы эквивалентна достаточно большой "вязкости" в системе (в случае $\omega_0 = 0$ и $g = 0$ — достаточно большой кинематической вязкости жидкости $\nu = \mu\rho_0^{-1}$).

Теорема 12 ([5, 8]) *Имеют место следующие утверждения.*
1. $0 \in \rho(\mathcal{A})$. *Если* $\|A^{-1/2}\| < b_q^{-1/2}$, *то* $b_q \in \rho(\mathcal{A})$. *В противном случае, точка* b_q *может быть изолированным конечнократным собственным значением* $\mathcal{A}$.
2. Для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ *спектр оператора* $\mathcal{A}$, *за исключением, быть может, конечного числа собственных значений, лежит в полосе* $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\lambda > 0,\ |\mathrm{Im}\lambda| \leqslant 2\omega_0 + \varepsilon\}$.
3. Спектр оператора $\mathcal{A}$ *имеет ветвь собственных значений* $\{\lambda_k^{(+\infty)}(\mathcal{A})\}_{k=1}^{\infty}$ *со следующей асимптотикой при* $k \to +\infty$:

$$\lambda_k^{(+\infty)}(\mathcal{A}) = \left\{ \frac{1}{6\pi^2} \left(2\mu^{-3/2} + \left[\eta + \frac{4\mu}{3} \right]^{-3/2} \right) \int\limits_{\Omega} \rho_0^{3/2}(z)\, d\Omega \right\}^{-2/3} k^{2/3}(1 + o(1)).$$

4. Пусть $\omega_0 = 0$. *Тогда спектр оператора* $\mathcal{A}$ *действительный, за исключением, быть может, конечного числа комплексно сопряженных собственных значений, лежащих в области*

$$\gamma_1 < \mathrm{Re}\lambda < \gamma_2, \quad \gamma_1 := \left[2\|A^{-1/2}\|^2 \right]^{-1}, \quad \gamma_2 := b_m + \|Q\|^2 + \|Q\| \left(b_m + \|Q\|^2 \right)^{1/2},$$
$$|\lambda|^2 < \left(b_m + 2\|Q\|^2 + 2\|Q\| \left(b_m + \|Q\|^2 \right)^{1/2} \right) \left(b_m + \|Q\|^2 \right).$$

5. При $\omega_0 = 0$, $g = 0$ *и* $\gamma_2 \leqslant \gamma_1$ *в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$ *существует* $\mathcal{J}$*-ортонормированный* p*-базис при* $p > 3$ *из собственных элементов оператора* $\mathcal{A}$.

В работе доказана также теорема о пересчете корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ и ассоциированного с ним операторного пучка (см. теорему 7), доказаны утверждения о полноте и базисности для систем элементов, связанных с отдельными ветвями собственных значений $\mathcal{A}$, получены достаточные условия глобальной полноты и базисности системы корневых элементов оператора $\mathcal{A}$. В случае $\omega_0 = 0$, $g = 0$ и большой вязкости в системе (см. п. 5 теоремы 12) получено представление решения задачи Коши (16). Доказаны асимптотические формулы для решений задачи (16) в случае правой части специального вида (см. теоремы 3, 4).

[18] *Пал А.К., Масленникова В.Н.* , Спектральные свойства операторов в задаче о колебаниях сжимаемой жидкости во вращающихся сосуда // ДАН СССР. — 1985. — Т. 281, № 3. — С. 529–534.

В п. 2.4 **второй главы** исследуется идеальная релаксирующая жидкость. Операторная формулировка задачи (13), (15) выводится с использованием метода ортогонального проектирования, предложенного в работах С.Л. Соболева, E. Hopf'а, С.Г. Крейна и развитого в дальнейшем в работах Н.Д. Копачевского и его учеников. А именно, введем разложение Г. Вейля пространства векторных полей $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ в следующую ортогональную сумму:

$$\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)=\mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus\mathbf{G}(\Omega,\rho_0),$$
$$\mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0):=\Big\{\mathbf{u}\in\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)\big|\ \mathrm{div}\big(\rho_0(z)\mathbf{u}\big)=0\ \ (\text{в }\Omega),\quad \mathbf{u}_n:=\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=0\ \ (\text{на }\partial\Omega)\Big\},$$
$$\mathbf{G}(\Omega,\rho_0):=\Big\{\mathbf{u}\in\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)\big|\quad \mathbf{u}=\nabla\varphi,\quad \int\limits_\Omega\varphi\,d\Omega=0\Big\}.$$

Здесь операции $\mathrm{div}\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}_n$ понимаются в смысле теории обобщенных функций. Введем ортопроекторы P_0 и P_G пространства $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ на $\mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0)$ и $\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)$ соответственно и представим поле $\mathbf{u}=\mathbf{v}+\nabla\varphi$, где $\mathbf{v}\in\mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0)$, $\nabla\varphi\in\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)$.

Уравнения системы (13) проектируются на выбранные подпространства, вводится ряд операторов задачи, полученные операторные уравнения и начальные условия записываются в виде следующей задачи Коши в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\omega_0}:=\mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0)\oplus\mathbf{G}(\Omega,\rho_0)\oplus\big(\oplus_{l=0}^m L_{2,\rho_0}(\Omega)\big)$:

$$\frac{d\xi}{dt}=-\mathcal{A}_{\omega_0}\big(\xi+\xi_{\rho^0}(t)\big)+\mathcal{F}(t),\quad \xi(0)=\xi^0,\tag{18}$$
$$\xi(t):=\big(\mathbf{v}(t);\nabla\varphi(t);w(t)\big)^\tau:=\big(\mathbf{v}(t);\nabla\varphi(t);u_0(t);u_1(t);\ldots;u_m(t)\big)^\tau,$$
$$\xi_{\rho^0}(t):=\Big(0;0;-(Q_0^*)^{-1}\sum_{l=1}^m e^{-b_lt}Q_l^*Q_lU^*\rho^0;0;\ldots;0\Big)^\tau,$$
$$\xi^0:=\big(P_0\mathbf{u}^0;P_G\mathbf{u}^0;-Q_0U^*\rho^0;0;\ldots;0\big)^\tau,\quad \mathcal{F}(t):=\big(P_0\mathbf{f}(t);P_G\mathbf{f}(t);0;0;\ldots;0\big)^\tau.$$

Оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ определяется по следующим формулам:

$$\mathcal{A}_{\omega_0}=\mathrm{diag}\big(I,A^{1/2},\mathcal{I}\big)\begin{pmatrix}T_{11}&T_{12}&0\\T_{21}&T_{22}&\mathcal{Q}^*\\0&-\mathcal{Q}&\mathcal{G}\end{pmatrix}\mathrm{diag}\big(I,A^{1/2},\mathcal{I}\big),$$
$$\mathcal{Q}:=\big(Q_0,Q_1,\ldots,Q_m\big)^\tau,\quad \mathcal{G}:=\mathrm{diag}\big(0,b_1I,\ldots,b_mI\big),\quad \mathcal{I}:=\mathrm{diag}\big(I,I,\ldots,I\big),$$
$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\omega_0})=\Big\{\xi=(\mathbf{v};\nabla\varphi;w)^\tau\in\mathcal{H}\big|\ \mathbf{v}\in\mathbf{J}_0(\Omega,\rho_0),\ \ \nabla\varphi,\ \mathcal{Q}^*w\in\mathcal{D}(A^{1/2})\Big\}.$$

Здесь U, Q_l ограниченные операторы, операторная матрица с компонентами T_{jk} ограничена и кососамосопряжена, $\sigma(T_{11})=\sigma_{ess}(T_{11})=[-2\omega_0i,2\omega_0i]$. Оператор A является самосопряженным положительно определенным, $A^{-1}\in\mathfrak{S}_p(\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0))$ при $p>3/2$.

Доказано, что оператор $(-\mathcal{A}_{\omega_0})$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы. Отсюда выведены достаточные условия сильной по времени разрешимости исходной задачи (13), (15).

При отсутствии вращения вихревую составляющую $\mathbf{v} \in \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0)$ поля скорости можно найти по внешнему полю $\mathbf{f}$ и начальным данным. Оставшиеся уравнения и начальные условия приводятся к задаче Коши вида (18) в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с оператором $\mathcal{A}$, который является частным случаем оператора (1). С использованием теоремы 1 найдены асимптотические формулы для решений изучаемой задачи при внешних нагрузках специального вида. Если система находится в невесомости, то оператор $\mathcal{A}$ подчиняется всем выводам п. 1.5 **первой главы**. В этом случае получено разложение решения изучаемой задачи по системе собственных элементов оператора $\mathcal{A}$.

Рассмотрим задачу о спектре оператора $\mathcal{A}_{\omega_0}$:

$$\mathcal{A}_{\omega_0}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\omega_0}) \subset \mathcal{H}_{\omega_0}, \tag{19}$$

которую будем ассоциировать с *задачей о спектре идеальной вращающейся релаксирующей жидкости.*

Теорема 13 ([10]) *Имеют место следующие утверждения.*
1. $\{b_1, \ldots, b_m\} \subset \rho(\mathcal{A}_{\omega_0})$, $\{0, b_1, \ldots, b_m\} \subset \rho(\mathcal{A})$.
2. Существенные спектры операторов $\mathcal{A}_{\omega_0}$ *и* $\mathcal{A}$ *имеют следующий вид:*

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0}) = \big[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i\big] \cup \sigma_{ess}(\mathcal{A}),$$
$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \Big| \ 1 - \sum_{l=1}^{m} \frac{\rho_0(z)k_l(x)}{b_l - \lambda} = 0, \ \ x \in \overline{\Omega}\Big\}.$$

Множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0})$ ($\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$) *состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора* $\mathcal{A}_{\omega_0}$ *(оператора* $\mathcal{A}$ *соответственно).*
3. Спектр $\sigma(\mathcal{A}_{\omega_0})$ *оператора* $\mathcal{A}_{\omega_0}$ *лежит в полосе* $\{\lambda \in \mathbb{C} | \ 0 \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant b_m\}$ *и имеет две ветви собственных значений* $\{\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A}_{\omega_0})\}_{k=1}^{\infty}$ *со следующей асимптотикой при* $k \to +\infty$:

$$\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A}_{\omega_0}) = \pm i\Big\{\frac{1}{6\pi^2 a_\infty^6}\int\limits_\Omega \rho_0^{-3/2}(z)\,d\Omega\Big\}^{-1/3} k^{1/3}(1 + o(1)).$$

4. Для оператора $\mathcal{A}$ *верны утверждения п. 3 и п. 5 теоремы 6, и при отсутствии силы тяжести утверждения теорем 8 и 9.*

В работе доказаны утверждения о полноте и базисности для систем элементов, связанных с отдельными ветвями собственных значений оператора $\mathcal{A}_{\omega_0}$.

Результаты второй главы опубликованы в работах [1, 5, 8, 10].

В третьей главе изучаются модели Ильюшина вязкоупругих тел.

Рассмотрим изотропное тело, занимающее область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Введем прямоугольную декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с областью. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$ $(x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega)$ — поле смещений в изотропном теле, тогда тензор деформации ε_{ij} будет выражаться через поле перемещений по формуле Коши. Разложим тензоры деформации ε_{ij} и напряжений σ_{ij} на девиаторы и шаровые составляющие: $\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \varepsilon\delta_{ij}$, $\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma\delta_{ij}$. Здесь e_{ij}, s_{ij} — девиаторы тензора деформации и напряжений соответственно, δ_{ij} — символ Кронекера, $\theta := 3\varepsilon$ — объемная деформация, σ — среднее гидростатическое напряжение. В монографии А.А. Ильюшина и Б.Е. Победри [19] выводится общий вид связей девиаторов и шаровых составляющих тензоров деформаций и напряжений:

$$s_{ij}(t) = \int\limits_0^t \Gamma_1(t-s)e_{ij}(s)\,ds, \quad \sigma(t) = \int\limits_0^t \Gamma_2(t-s)\theta(s)\,ds, \tag{20}$$

где Γ_1 и Γ_2 — это ядра сдвиговой и объемной релаксации. Они имеют вид:

$$\Gamma_1(t) = -c_1\delta'(t) + c_0\delta(t) - \Gamma(t) \quad \text{с} \quad \Gamma(t) = \sum_{l=1}^{m} c_{-l}\exp(-tb_l),$$
$$\Gamma_2(t) = -\widetilde{c}_1\delta'(t) + \widetilde{c}_0\delta(t) - \widetilde{\Gamma}(t) \quad \text{с} \quad \widetilde{\Gamma}(t) = \sum_{l=1}^{n} \widetilde{c}_{-l}\exp(-t\widetilde{b}_l),$$

где $\delta(t)$ — δ-функция, c_k, $\widetilde{c}_k$ — некоторые структурные постоянные, b_k^{-1}, $\widetilde{b}_k^{-1}$ — времена релаксации. При этом

$$c_1, \widetilde{c}_1 \geqslant 0, \quad c_0, \widetilde{c}_0 > 0, \quad c_{-l} > 0 \quad (l = \overline{1, m}), \quad \widetilde{c}_{-l} > 0 \quad (l = \overline{1, n}),$$
$$0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_m, \quad 0 < \widetilde{b}_1 < \widetilde{b}_2 < \ldots < \widetilde{b}_n,$$
$$c_0 - \sum_{l=1}^{m} \frac{c_{-l}}{b_l} > 0, \quad \widetilde{c}_0 + \frac{1}{6}\Big[c_0 - \sum_{l=1}^{m} \frac{c_{-l}}{b_l}\Big] - \sum_{l=1}^{n} \frac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l} \geqslant 0,$$
$$\big\{b_1, \ldots, b_m\big\} \cap \big\{\widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_n\big\} = \emptyset,$$

где последнее условие вводится лишь для упрощения формулировок и вычислений и не является принципиальным ограничением.

Из (20) и уравнения движения сплошной среды в форме Коши следует уравнение движения начально-изотропного вязкоупругого тела, которое считается закрепленным на границе $\partial\Omega$ области Ω. Соответствующая начально-краевая задача записывается в виде задачи Коши для интегро-дифференциального

[19] *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.*, Основы математической теории термовязко-упругости. – М: Наука, 1970. – 280 с.

уравнения второго порядка в $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho)$:

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}=-A_p\frac{d\mathbf{u}}{dt}-A_h\mathbf{u}+\int\limits_0^t\Big[\Gamma(t-s)A+\widetilde{\Gamma}(t-s)B^*B\Big]\mathbf{u}(s)\,ds+\mathbf{f}(t),$$
$$\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}^0,\quad \mathbf{u}'(0)=\mathbf{u}^1, \tag{21}$$

где A_p, A_h, A — операторы теории упругости, а оператор B аналогичен по свойствам соответствующему оператору из (16). Под *сильным решением* задачи Коши (21) в *параболическом* случае понимается такое поле $\mathbf{u}$, что все слагаемые в уравнении из (21) непрерывны, выполнено само уравнение при $t\geqslant 0$ и начальные условия, а в *гиперболическом* случае ($A_p=0$) — в смысле определения 1.

В обоих случаях задача (21) сводится к задаче Коши для уравнения первого порядка с главным оператором $-\mathcal{A}$ в некоторой ортогональной сумме гильбертовых пространств. Для нее доказаны теоремы о сильной разрешимости, получены асимптотические формулы для решений в случае правой части специального вида; в *гиперболическом* случае эти формулы следуют из теоремы 3. В *параболическом* случае оператор $(-\mathcal{A})$ — генератор голоморфной полугруппы, отсюда выведены формулы для решений задачи (21). В *параболическом* случае найдены условия, при которых система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ образует p-базис в основном пространстве. В частном случае найдено разложение решения задачи (21) по системе собственных элементов.

Исследованы соответствующие синхронно-изотропные среды:

$$m=n,\quad b_l=\widetilde{b}_l\quad (l=\overline{1,m=n}),\quad c_{-l}=2\mu\alpha_{-l},\quad \widetilde{c}_{-l}=\eta\alpha_{-l},$$
$$\alpha_{-l}>0\quad (l=\overline{-1,m}),\quad \mu>0,\quad \eta\geqslant 0$$

(*гиперболический* случай соответствует выбору $\alpha_1=0$). Исследованы спектры соответствующих операторов, доказаны теоремы о p-базисности систем корневых элементов этих операторов, найдены разложения решений задачи (21) по системам этих элементов. В *гиперболическом* случае утверждения следуют из результатов п. 1.5 **первой главы**.

Приведем здесь утверждение о структуре спектра оператора $\mathcal{A}$.

Теорема 14 ([12]) *Имеют место следующие утверждения.*
1. $\{0,b_1,\dots,b_m\}\subset\rho(\mathcal{A})$. *Если* $c_1>0$ *(в гиперболическом случае —* $c_0>0$*) достаточно велико, то точка* $\lambda=\widetilde{b}_q$, $q=\overline{1,n}$, *не является собственными значением оператора* $\mathcal{A}$.
2. Справедливо равенство

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A})=\Big\{\varphi(\lambda)=0\Big\}\cup\Big\{\tfrac{1}{2}\,\varphi(\lambda)+\psi(\lambda)=0\Big\}\cup\Big\{\varphi(\lambda)+\psi(\lambda)=0\Big\},\ \textit{где}$$

$$\varphi(\lambda) = \lambda c_1 - \Big[c_0 - \sum_{l=1}^{m} \frac{c_{-l}}{b_l - \lambda}\Big],$$
$$\psi(\lambda) = \lambda\big(\widetilde{c}_1 + \frac{1}{6}\,c_1\big) - \Big[\widetilde{c}_0 + \frac{1}{6}\,c_0 - \sum_{l=1}^{m} \frac{c_{-l}}{6(b_l - \lambda)} - \sum_{l=1}^{n} \frac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l - \lambda}\Big]$$

и множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$ и регулярных точек.
3. В параболическом случае спектр оператора $\mathcal{A}$ действительный, за исключением, быть может, конечного числа комплексно сопряженных собственных значений, лежащих в области

$$\gamma_1 < \mathrm{Re}\lambda < \gamma_2,$$
$$|\lambda|^2 < \big(\max\{b_m, \widetilde{b}_n\} + 2\|Q\|^2 + 2\|Q\|\big(\max\{b_m, \widetilde{b}_n\} + \|Q\|^2\big)^{1/2}\big)\big(\max\{b_m, \widetilde{b}_n\} + \|Q\|^2\big),$$
$$\gamma_1 := \big[2\|A_p^{-1/2}\|^2\big]^{-1}, \quad \gamma_2 := \max\{b_m, \widetilde{b}_n\} + \|Q\|^2 + \|Q\|\big(\max\{b_m, \widetilde{b}_n\} + \|Q\|^2\big)^{1/2}.$$

Оператор $\mathcal{A}$ имеет ветвь собственных значений $\{\lambda_k^{(+\infty)}(\mathcal{A})\}_{k=1}^{\infty}$ со следующей асимптотикой при $k \to +\infty$:

$$\lambda_k^{(+\infty)}(\mathcal{A}) = \Big\{\frac{1}{6\pi^2}\Big(2\Big[\frac{c_1}{2}\Big]^{-3/2} + \Big[\widetilde{c}_1 + \frac{2c_1}{3}\Big]^{-3/2}\Big)\int\limits_{\Omega} \rho^{3/2}(x)\, d\Omega\Big\}^{-2/3} k^{2/3}(1 + o(1)).$$

4. В гиперболическом случае существует $\beta > 0$ такое, что
$\sigma(\mathcal{A}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}|\ \mathrm{Im}\lambda \neq 0\} \subset \big\{\lambda \in \mathbb{C}|\ \beta \leqslant \mathrm{Re}\lambda < \max\{b_m, \widetilde{b}_n\}/2\big\}.$

При этом оператор $\mathcal{A}$ имеет две ветви комплексно сопряженных собственных значений $\{\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A})\}_{k=1}^{\infty}$ со следующей асимптотикой при $k \to +\infty$:

$$\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A}) = \pm i\Big\{\frac{1}{6\pi^2}\Big(2\Big[\frac{c_0}{2}\Big]^{-3/2} + \Big[\widetilde{c}_0 + \frac{2c_0}{3}\Big]^{-3/2}\Big)\int\limits_{\Omega} \rho^{3/2}(x)\, d\Omega\Big\}^{-1/3} k^{1/3}(1 + o(1))$$

и для него верно утверждение п. 5 теоремы 6.

Отметим, что здесь точки $\lambda = \widetilde{b}_q$ $(q = \overline{1, n})$ могут входить в существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ и, таким образом, быть точками сгущения спектра.

Результаты третьей главы опубликованы в статьях [2, 6, 9, 12].

В четвертой главе изучаются модели Олдройта и Максвелла вязкоупругих сжимаемых жидкостей.

Рассмотрим вязкую сжимаемую жидкость, заполняющую ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Обозначим через $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x)$ $(x := (x_1, x_2, x_3) \in \Omega)$ — поле скоростей этой жидкости, $\sigma = \{\sigma_{ij}(t, x)\}_{i,j=1}^{3}$ — тензор вязких напряжений в жидкости. Для изучаемых моделей имеем

$$\sigma(t,x) = J_1(t)\sigma^{(1)}(t,x) + J_2(t)\sigma^{(2)}(t,x), \tag{22}$$

$$\sigma^{(1)}_{ij}(t,x) := \frac{\partial v_i(t,x)}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j(t,x)}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\,\delta_{ij}\frac{\partial v_l(t,x)}{\partial x_l}, \quad \sigma^{(2)}_{ij}(t,x) := \delta_{ij}\frac{\partial v_l(t,x)}{\partial x_l},$$

$$J_1(t)\sigma^{(1)}(t,x) := \gamma_1\mu_{-1}\frac{\partial}{\partial t}\sigma^{(1)}(t,x) + \gamma_2\mu_0\sigma^{(1)}(t,x) + \sum_{l=1}^{m}\int_0^t \mu_l e^{-b_l(t-s)}\sigma^{(1)}(s,x)\,ds,$$

$$J_2(t)\sigma^{(2)}(t,x) := \gamma_1\eta_{-1}\frac{\partial}{\partial t}\sigma^{(2)}(t,x) + \gamma_2\eta_0\sigma^{(2)}(t,x) + \sum_{l=1}^{m}\int_0^t \eta_l e^{-b_l(t-s)}\sigma^{(2)}(s,x)\,ds.$$

При $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$ получаем модель Олдройта, при $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$ — модель Максвелла, а при $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$ — модель Кельвина-Фойгта.

Из (22) следует система уравнений, описывающих малые движения вязкоупругой баротропной жидкости, заполняющей равномерно вращающуюся ограниченную область.

В п. 4.3 **четвертой главы** исследуется модель Олдройта вязкоупругой баротропной жидкости. Соответствующая начально-краевая задача записывается в виде задачи Коши для системы интегродифференциальных уравнений первого порядка в гильбертовых пространствах $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)$ и $L_{2,\rho_0}(\Omega)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} + (2\omega_0 iS + A_O)\mathbf{u} - B^*\rho + \displaystyle\sum_{l=1}^{m}\int_0^t \exp\big(-b_l(t-s)\big)A_l\mathbf{u}(s)\,ds = \mathbf{f}(t), \\ \dfrac{d\rho}{dt} + B\mathbf{u} = 0, \qquad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \rho(0) = \rho^0. \end{cases} \tag{23}$$

Здесь свойства операторов A_O, A_l $(l = \overline{1,m})$ такие же, как у оператора A из (16).

Как и в предыдущих главах, задача (23) сводится к задаче Коши для уравнения первого порядка с главным оператором $-\mathcal{A}$ в некотором гильбертовом пространстве. На основе этой задачи доказана теорема о сильной разрешимости задачи (23). С использованием голоморфной полугруппы, генерируемой оператором $-\mathcal{A}$, найдено представление для решения задачи (23). Доказаны асимптотические формулы для решений задачи (23) в случае правой части специального вида.

Спектральные свойства оператора $\mathcal{A}$ и свойства системы его корневых элементов весьма близки к свойствам соответствующих операторов из п. 2.3 **второй главы** и п. 3.3 **третьей главы**.

В п. 4.4 **четвертой главы** исследуется модель Максвелла вязкоупругой баротропной жидкости. Эта модель описывается системой (23) с $A_O = 0$. При $\omega_0 = 0$ эта система является частным случаем задачи (7). Система (23) с $A_O = 0$ записывается в расширенной форме, аналогичной (8). Под решением системы в расширенной форме понимается решение в смысле определения 2.

В случае $\omega_0 = 0$ следствием теоремы 4 является утверждение об асимптотическом представлении решения в задаче о малых движениях вязкоупругой сжимаемой жидкости Максвелла в случае правой части специального вида. В частности, если $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) + \nabla p(t)$, $\|\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} \to 0$, $\|p'(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$, то

$$\big\|\mathbf{u}(t)\big\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_0)} + \Big\|\rho(t) - \Pi\frac{\rho_0^{1/2}(z)}{a_\infty}\,p(t)\Big\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)} \to 0,$$

где Π — ортопроектор пространства $L_2(\Omega)$ на $L_{2,\rho_0}(\Omega)$.

Спектральные свойства оператора $\mathcal{A}$, ассоциированного с системой (23) с $A_O = 0$, описываются следующей теоремой.

Теорема 15 ([7]) *Имеют место следующие утверждения.*
1. $\{0, b_1, \ldots, b_m\} \subset \rho(\mathcal{A})$. *Справедлива следующая формула:*

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \big\{\varphi(\lambda) = 0\big\} \cup \big\{\varphi(\lambda) + \psi(\lambda, x) = 0,\ x \in \Omega\big\} \cup \\ \cup \big\{2\varphi(\lambda) + \psi(\lambda, x) = 0,\ x \in \partial\Omega\big\}, \quad \text{где}$$

$$\varphi(\lambda) := \sum_{l=1}^{m} \frac{\mu_l}{b_l - \lambda}, \quad \psi(\lambda, x) := \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{b_l - \lambda}\Big(\eta_l + \frac{\mu_l}{3}\Big) - \frac{1}{\lambda}\, a_\infty^2 \rho_0(z).$$

При этом множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ *состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора* $\mathcal{A}$*, лежащих в полосе* $\big\{\lambda \in \mathbb{C} |\ 0 < \mathrm{Re}\lambda < b_m\big\}$.
2. Спектр оператора $\mathcal{A}$ *имеет две ветви собственных значений* $\{\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A})\}_{k=1}^{\infty}$ *со следующей асимптотикой при* $k \to +\infty$*:*

$$\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A}) = \pm i \Big\{ \frac{1}{6\pi^2} \int\limits_{\Omega} \rho_0^{3/2}(z) \Big(2 \Big[\sum_{l=1}^{m} \frac{\mu_l}{b_l} \Big]^{-3/2} + \\ + \Big[a_\infty^2 \rho_0(z) + \sum_{l=1}^{m} \frac{3\eta_l + 4\mu_l}{3b_l} \Big]^{-3/2} \Big)\, d\Omega \Big\}^{-1/3} k^{1/3}(1 + o(1)).$$

3. При $\omega_0 = 0$ *спектр оператора* $\mathcal{A}$ *расположен симметрично относительно действительной оси и существует* $\beta > 0$ *такое, что*

$$\sigma(\mathcal{A}) \cap \big\{\lambda \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im}\lambda \neq 0\big\} \subset \big\{\lambda \in \mathbb{C} |\ \beta \leqslant \mathrm{Re}\lambda < b_m/2\big\}.$$

При этом существенный спектр $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ *не пересекается с замыканием комплексно сопряженных ветвей собственных значений из* $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$*, если сумма* $\sum_{l=1}^{m} \mu_l$ *достаточно велика.*

Результаты четвертой главы опубликованы в статьях [3, 7, 13].

В пятой главе изучаются интегро-дифференциальные уравнения первого и второго порядков с переменными операторными коэффициентами.

Будем писать $A \in \mathcal{J}(M, \omega)$ ($M \geqslant 1$, $\omega \in \mathbb{R}$), если оператор A — генератор C_0-полугруппы ограниченных операторов $U(t)$, действующей в банаховом пространстве E и удовлетворяющей оценке $\|U(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant Me^{\omega t}$ при любом $t \geqslant 0$.

Пусть $A(t)$ генератор C_0-полугруппы в E при каждом $t \in [0, T]$.

Определение 5. Семейство операторов $A(t)$ называется *стабильным*[20] на отрезке $[0, T]$, если существуют константы $M \geqslant 1$ и $\omega \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\Big\| \prod_{k=n \searrow 1} \big(A(t_k) - \lambda\big)^{-1} \Big\|_{\mathcal{L}(E)} \equiv \Big\| \big(A(t_n) - \lambda\big)^{-1} \dots \big(A(t_1) - \lambda\big)^{-1} \Big\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}$$

для любых $\lambda > \omega$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant T$.

Если $A(t) \in \mathcal{J}(1, \omega)$ при каждом $t \in [0, T]$, то семейство операторов $A(t)$ стабильно на отрезке $[0, T]$ с константами $M = 1$ и ω.

В банаховом пространстве E рассмотрим задачу Коши

$$\frac{du}{dt} = A(t)u + \int\limits_0^t G(t, s)u(s)\, ds + f(t), \quad u(0) = u^0 \tag{24}$$

с замкнутыми операторами $A(t)$, определенными на плотном в E множестве $\mathcal{D}$ при любом $t \in [0, T]$. При этом $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(G(t, s))$ при $t, s \in T_\Delta := \{0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$.

Определение 6. *Сильным решением* задачи Коши (24) назовем функцию $u \in C^1([0, T]; E)$ такую, что $Au \in C([0, T]; E)$, в (24) выполнено уравнение при любом $t \in [0, T]$ и начальное условие.

Будем писать $A \in SC^n_{\mathcal{D}}([0, T]; E)$ $(\mathcal{D} \subset E,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, если $Au \in$ $\in C^n([0, T]; E)$ при любом $u \in \mathcal{D}$. Если $A \in SC_E([0, T]; E)$, то из теоремы Банаха-Штейнгауза будет следовать, что $A(t) \in \mathcal{L}(E)$ и $\|A(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant K < +\infty$.

Теорема 16 ([4]) *Пусть $C^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{D}(C) \supset \mathcal{D}$ и выполнены условия:*
1. $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}$, $A \in SC^1_{\mathcal{D}}([0, T]; E)$ и стабильно на $[0, T]$;
2. $G(t, s)C^{-1}$, $\big(G(t, s)C^{-1}\big)'_t \in SC_E(T_\Delta; E)$.

Тогда для любых $u^0 \in \mathcal{D}$, $f \in C^1([0, T]; E)$ сильное решение задачи Коши (24) существует и единственно.

---

[20] *Kato T.*, Linear evolution equations of "hyperbolic" type // J. Fac. Sci. Univ. Tokio. – 1970. – Vol. 17. – P. 241–258.

Теорема 16 близка к утверждению, следующему из работы M.L. Heard'a[21], и применяется к исследованию вопросов разрешимости задач Коши для интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с переменными операторными коэффициентами в банаховом или гильбертовом пространстве. Рассматриваются случаи, когда в уравнении имеется доминирующий оператор, заданный на постоянной области определения. Приведем две из четырех доказанных теорем без громоздких, но естественных условий на операторные коэффициенты.

В гильбертовом пространстве H рассмотрим задачу Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} = A(t)\frac{du}{dt} + B(t)u + \int\limits_0^t G(t,s)u(s)\,ds + f(t), \quad u(0) = u^0, \;\; u'(0) = u^1, \quad (25)$$

где $B(t) := B_0^2(t) + Q_0(t)$, а $B_0(t)$ — замкнутые операторы, определенные на плотном в H множестве $\mathcal{D}$ при любом $t \in [0,T]$. Операторы $A(t)$, $Q_0(t)$ и $G(t,s)$ подчинены в некотором смысле операторам $B_0(t)$ и $B_0^2(t)$ соответственно.

Определение 7. *Сильным решением* задачи Коши (25) назовем функцию $u \in C^2([0,T];E)$ такую, что 1) $u(t) \in \mathcal{D}(B_0^2(t))$, $u'(t) \in \mathcal{D}$ для любого $t \in [0,T]$, B_0^2u, $B_0u' \in C([0,T];E)$, 2) в (25) выполнено уравнение при любом $t \in [0,T]$ и начальные условия.

Теорема 17 ([4]) *Для любых $u^0 \in \mathcal{D}(B_0^2(0))$, $u^1 \in \mathcal{D}$, $f \in C^1([0,T];H)$ сильное решение задачи Коши (25) существует и единственно.*

В банаховом пространстве E рассмотрим задачу Коши (25), где $A(t)$ — замкнутые операторы, определенные на плотном в E множестве $\mathcal{D}$ при любом $t \in [0,T]$. Операторы $B(t)$ и $G(t,s)$ подчинены оператору $A(t)$.

Определение 8. *Сильным решением* задачи Коши (25) назовем функцию $u \in C^2([0,T];E)$ такую, что 1) $u(t) \in \mathcal{D}(B(t))$, $u'(t) \in \mathcal{D}$ для любого $t \in [0,T]$, Bu, $Au' \in C([0,T];E)$, 2) в (25) выполнено уравнение при любом $t \in [0,T]$ и начальные условия.

Теорема 18 ([4]) *Для любых $u^0, u^1 \in \mathcal{D}$, $f \in C^1([0,T];E)$ сильное решение задачи Коши (25) существует и единственно.*

Результаты пятой главы опубликованы в работе [4].

Заключение содержит краткое резюме основных результатов, полученных в диссертации.

Благодарности. Автор глубоко благодарен своему научному консультанту профессору Николаю Дмитриевичу Копачевскому за постоянное внимание к работе, за многочисленные обсуждения и поддержку.

[21] *Heard M.L.*, An abstract semilinear hyperbolic Volterra integrodifferential equation // J. Math. Anal. Appl. – 1981. – Vol. 80, no. 1. – P. 175–202.

Список публикаций

1. Zakora D. A symmetric model of viscous relaxing fluid. An evolution problem // Журн. матем. физ., анал., геом. — 2012. — Т. 8, № 2. — С. 190–206. — Режим доступа: http://mi.mathnet.ru/jmag534.
2. Закора Д. А. Операторный подход к модели Ильюшина вязкоупругого тела параболического типа // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2015. — Т. 57. — С. 31–64. — Режим доступа: http://mi.mathnet.ru/cmfd271.
3. Закора Д. А. Модель сжимаемой жидкости Олдройта // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2016. — Т. 61. — С. 41–66. — Режим доступа: http://mi.mathnet.ru/cmfd271.
4. Zakora D. A. Abstract linear Volterra second-order integro-differential equations // Eurasian Math. J. — 2016. — Vol. 7, no. 2. — P. 75–91. — Access mode: http://mi.mathnet.ru/emj225.
5. Zakora D. On the spectrum of rotating viscous relaxing fluid // Журн. матем. физ., анал., геом. — 2016. — Т. 12, № 4. — С. 338–358. — Режим доступа: http://mi.mathnet.ru/jmag657.
6. Закора Д. А. О стабилизации решений неполных интегродифференциальных уравнений второго порядка // Изв. вузов. Матем. — 2016. — Т. 9. — С. 78–83. — Режим доступа: http://mi.mathnet.ru/ivm9155.
7. Закора Д. А. Модель сжимаемой жидкости Максвелла // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2017. — Т. 63, № 2. — С. 247–265. — Режим доступа: http://mi.mathnet.ru/cmfd319.
8. Zakora D. On properties of root elements in the problem on small motions of viscous relaxing fluid // Журн. матем. физ., анал., геом. — 2017. — Т. 13, № 4. — С. 402–413. — Режим доступа: http://mi.mathnet.ru/jmag681.
9. Закора Д. А. Экспоненциальная устойчивость одной полугруппы и приложения // Матем. заметки. — 2017. — Т. 103, № 5. — С. 702–719. — Режим доступа: http://mi.mathnet.ru/mz11703.
10. Закора Д. А. Операторный подход к задаче о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2018. — Т. 64, № 3. — С. 459–489. — Режим доступа: http://mi.mathnet.ru/cmfd357.
11. Закора Д. А. Асимптотика решений системы связанных интегро-дифференциальных неполных операторных уравнений второго порядка // Сиб. электрон. матем. изв. — 2018. — Т. 15. — С. 971–986. — Режим доступа: http://semr.math.nsc.ru/v15/p971-986.pdf.
12. Закора Д. А. Спектральный анализ одной задачи теории вязкоупругости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2018. — Т. 58, № 11. — С. 1829–1843. — Режим доступа: http://mi.mathnet.ru/zvmmf10855.
13. Закора Д. А. Асимптотика решений в задаче о малых движениях сжимаемой жидкости Максвелла // Дифференциальные уравнения. — 2019. —

Т. 55, № 9. — С. 1195–1208.

14. Закора Д. А. О малых движениях синхронно-изотропной среды параболического типа // Сборник тезисов международной конференции "XXV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам", 21 – 30 сентября 2014 г., Судак. — С. 21. — Режим доступа: http://kromsh.info/files/abstracts/abstracts-2014.pdf.
15. Закора Д. А. Задача о спектре вязкоупругого тела параболического типа // Сборник тезисов международной конференции "XXVI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам", 17 – 29 сентября 2015 г., Батилиман (Ласпи). — С. 20–21. — Режим доступа: http://kromsh.info/files/abstracts/abstracts-2015-p1.pdf.
16. Закора Д. А. Об интегродифференциальных операторных уравнениях первого и второго порядка // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — V, 26 апреля – 1 мая 2015 г., Ростов-на-Дону. — С. 105–106. — Режим доступа: http://karapetyants.sfedu.ru/conf/tethis2015.pdf.
17. Закора Д. А. Об экспоненциальной устойчивости одной полугруппы // Сборник тезисов международной конференции "XXVII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам", 17 – 29 сентября 2016 г., Батилиман (Ласпи). — С. 30. — Режим доступа: http://kromsh.info/files/abstracts/abstracts-2016.pdf.
18. Закора Д. А. Об устойчивости потенциальных течений идеальной релаксирующей жидкости // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — VI, 24 – 29 апреля 2016 г., Ростов-на-Дону. — С. 88–89.
19. Закора Д. А. О спектре в одной задаче для вязкоупругой жидкости // XXIV Международная конференция "Математика. Экономика. Образование", IX Международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения", Международная конференция по стохастическим методам, 7 мая – 3 июня 2016 г., Ростов-на-Дону. — С. 139.
20. Закора Д. А. Об асимптотическом поведении решений интегро-дифференциальных операторных уравнений второго порядка // Сборник тезисов международной конференции "XXVIII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам", 17 – 29 сентября 2016 г., Батилиман (Ласпи). — С. 91–92. — Режим доступа: http://kromsh.info/files/abstracts/abstracts-2017-p1.pdf.
21. Закора Д. А. О p-базисности системы корневых элементов в одной задаче гидродинамики // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — VII, 23 – 28 апреля 2017 г., Ростов-на-Дону. — С. 46–47.
22. Закора Д. А. Об одной задаче теории вязкоупругости // Материалы международной научной конференции "Современные методы и проблемы математической гидродинамики — 2018", 3 – 8 мая 2018 г., Воронеж. — С. 102–108.

23. Закора Д. А. Представление решения в задаче о движении вязкоупругого тела // Материалы международной научной конференции "Воронежская зимняя математическая школа". Современные методы теории функций и смежные проблемы, 28 января – 2 февраля 2019 г., Воронеж. — С. 128. — Режим доступа: https://vzmsh.math-vsu.ru/files/vzmsh2019.pdf.
24. Закора Д. А. Задача о движении сжимаемой жидкости Максвелла // Материалы международной научной конференции "Современные методы и проблемы математической гидродинамики — 2019", 3 – 8 мая 2019 г., Воронеж. — С. 235–248.
25. Закора Д. А. Представление решений одного интегро-дифференциального уравнения и приложения // Материалы Воронежской зимней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы». 28 января – 2 февраля 2019 г. Часть 2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **171**, ВИНИТИ РАН, М. — 2019. — С. 78–93. — Режим доступа: http://mi.mathnet.ru/into535.

Научное издание

Закора Дмитрий Александрович

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук на тему:

Спектральный анализ и асимптотика решений

задач механики вязкоупругих сред

Подписано в печать ____.____.20____. Заказ № ___________

Формат 60 × 90 1/16. Усл. печ. л. 2. Тираж 100 экз.

Типография ____