

На правах рукописи



УДК 517.984.48

Закора Дмитрий Александрович

**Спектральный анализ и асимптотика решений
задач механики вязкоупругих сред**

01.01.02 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Оглавление

Введение	4
Обзор литературы	12
Глава 1. Интегро-дифференциальные уравнения гиперболического типа и связанные с ними полугруппы	22
1.1. Введение	22
1.2. Экспоненциальная устойчивость и оценка типа полугруппы с генератором специального вида	23
1.3. Асимптотика решений некоторых систем операторных уравнений гиперболического типа	37
1.4. Спектральная задача для генератора и соответствующего операторного пучка, пересчет корневых элементов	53
1.5. Частный случай. Теорема о p -базисности системы корневых элементов генератора	68
1.6. Выводы к первой главе	83
Глава 2. Модели релаксирующих жидкостей	85
2.1. Введение	85
2.2. Уравнения движения релаксирующих жидкостей	86
2.3. Вязкая релаксирующая жидкость. Эволюционная задача, спектральная задача, представление и асимптотика решения	90
2.4. Идеальная релаксирующая жидкость. Эволюционная задача, асимптотика решения, спектральная задача, представление решения в частном случае	141
2.5. Выводы ко второй главе	170
Глава 3. Модели вязкоупругих тел Ильюшина	172

3.1.	Введение	172
3.2.	Уравнения движения вязкоупругих тел Ильюшина при изотермических процессах деформирования	173
3.3.	Модель параболического типа. Эволюционная задача, спектральная задача, синхронно-изотропная среда	175
3.4.	Модель гиперболического типа. Эволюционная задача, асимптотика решения, спектральная задача, синхронно-изотропная среда	204
3.5.	Выводы к третьей главе	211
 Глава 4. Модели вязкоупругих сжимаемых жидкостей Олдройта и Максвелла		
4.1.	Введение	213
4.2.	Модели сжимаемых вязкоупругих жидкостей	214
4.3.	Баротропная жидкость Олдройта. Эволюционная задача, спектральная задача, представление и асимптотика решения	218
4.4.	Баротропная жидкость Максвелла. Эволюционная задача, спектральная задача, асимптотика решения	228
4.5.	Выводы к четвертой главе	237
 Глава 5. О разрешимости линейных интегро-дифференциальных эволюционных уравнений первого и второго порядков		
5.1.	Введение	239
5.2.	Уравнение первого порядка в банаховом пространстве	240
5.3.	Уравнение второго порядка: различные случаи подчинения операторных коэффициентов	245
Заключение		265
Список сокращений и условных обозначений		267
Список литературы		268

Введение

Актуальность темы и ее разработанность в литературе. Пятидесятые годы прошлого столетия характеризуются проникновением методов функционального анализа в механику сплошной среды. У истоков этого процесса находились Н. Weyl, J. Leray, С.Л. Соболев, К.О. Friedrichs, О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, В.И. Юдович, а в дальнейшем в разработку этих вопросов включился большой коллектив отечественных и зарубежных ученых.

В 1951 году в основополагающей работе М.В. Келдыша¹ получены первые важные результаты в спектральной теории полиномиальных операторных пучков. Были введены понятия присоединенных элементов, кратности собственного значения, кратной полноты собственных и присоединенных элементов.

В 1964 году С.Г. Крейном² изучена линеаризованная задача о движении вязкой несжимаемой жидкости в открытом сосуде. Был предложен способ сведения задачи к решению уравнения в ортогональной сумме специальных гильбертовых пространств. Этот способ нашел применение и в других задачах гидродинамики и теории упругости. В развернутом виде результаты были опубликованы³ в 1968 году. В этих двух работах впервые возник нелинейный операторный пучок, связанный с задачей о нормальных колебаниях исследуемой системы, изучены простейшие свойства его спектра. Доказано, в частности, что спектр задачи имеет две точки сгущения — бесконечность и ноль. Н.К. Аскеровым, С.Г. Крейном и Г.И. Лаптевым⁴ исследована система собственных и присоединенных элементов возникшего операторного пучка, и с помощью теоремы

¹ Келдыш М.В., О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // *ДАН СССР* – 1951. – Т. 77, №1. – С. 11-14. (см. также более подробное изложение в Келдыш М.В., О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных операторов // *УМН* – 1971. – Т. 24, вып. 4(160). – С. 15-41.)

² Крейн С.Г., О колебаниях вязкой жидкости в сосуде // *ДАН СССР* – 1964. – Т. 159, №2. – С. 262-265.

³ Крейн С.Г., Лаптев Г.И., К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде // *Функциональный анализ и его приложения* – 1968. – Т. 2, №1. – С. 40-50.

⁴ Аскеров Н.К., Крейн С.Г., Лаптев Г.И., Задача о колебаниях вязкой жидкости и связанные с ней операторные уравнения // *Функциональный анализ и его приложения* – 1968. – Т. 2, №2. – С. 21-32.

М.В. Келдыша доказана двукратная полнота этой системы в некотором специальном виде.

В это же время в работах М.Г. Крейна и Г.К. Лангера⁵ развивается теория квадратичных операторных пучков. Методы факторизации операторных матриц и их приложения к различным задачам механики сплошных сред развиваются в работах А.А. Шкаликова, R. Mennicken'a, C. Tretter, Т.Я. Азизова, Н.Д. Копачевского. Идеи и методы указанных работ М.В. Келдыша, М.Г. Крейна и Г.К. Лангера, С.Г. Крейна и его учеников получили развитие в многочисленных статьях А.С. Маркуса, В.И. Мацаева, А.Г. Костюченко, А.А. Шкаликова, Г.В. Радзиевского, М.Б. Оразова, Н.Д. Копачевского, В.Б. Лидского, Г.И. Руссу, Ю.А. Паланта, M. Shinbrot'a, Е.З. Могульского, Дж.Э. Аллахвердиева и других.

В 1989 году А.И. Милославским⁶ изучена задача о малых движениях вязкоупругой несжимаемой жидкости, частично заполняющей ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Вязкоупругая жидкость описывалась обобщенной моделью Олдройта:

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t, x)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p(t, x) + \nu I_0(t) (\Delta \mathbf{u}(t, x)) + \mathbf{f}(t, x), \quad \operatorname{div} \mathbf{u}(t, x) = 0 \quad (x \in \Omega),$$

$$I_0(t) \mathbf{v}(t, x) = \mathbf{v}(t, x) + \sum_{l=1}^m \alpha_l \int_0^t \exp(-\gamma_l(t-s)) \mathbf{v}(s, x) ds.$$

Доказано, что спектр операторного пучка, ассоциированного с изучаемой задачей, локализован в окрестности действительной положительной полуоси и сгущается к бесконечности, к нулю и еще к конечному количеству точек. Отличные от нуля и бесконечности точки сгущения спектра связаны с интегральными слагаемыми в модели Олдройта и качественно отличают ее от задачи, рассмотренной С.Г. Крейном. Приведенная работа является одной из первых, посвящен-

⁵ Крейн М.Г., Лангер Г.К., К теории квадратичных пучков самосопряженных операторов // ДАН СССР – 1964. – Т. 154, №6. – С. 1258-1261. (см. также более подробное изложение в Крейн М.Г., Лангер Г.К., О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов // Труды междунар. симпоз. по применению теории функции комплексного переменного в механике сплошной среды Т. 2. – М.: Наука, 1965. – С. 283-322.)

⁶ Милославский А.И., Спектр малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом сосуде. – Деп. в Укр. НИИНТИ. – 1221-УК89, 1989. – 78 с.

ной спектральному анализу системы, описываемой интегро-дифференциальными уравнениями. В монографии Н.Д. Копачевского и С.Г. Крейна⁷ рассматриваются и другие гидродинамические задачи, в которых наблюдается этот эффект.

Задачи, подобные описанной выше, возникают при описании систем с эффектами "памяти" и давно привлекают внимание многих авторов. Жидкости Олдройта, Максвелла и Кельвина-Фойгта в гидродинамике моделируют эмульсии и суспензии одной ньютоновской жидкости в другой, сильно разбавленные суспензии твердых частиц в ньютоновской жидкости, некоторые полимерные растворы и т.д. Модели Ильюшина и Тимошенко в механике и термодинамике вязкоупругих сплошных сред применяются для описания полимерных материалов и конструкций, а также металлов и других не вполне упругих тел и т.д.

К настоящему времени относительно небольшое количество работ посвящено спектральному анализу интегро-дифференциальных уравнений и систем, содержащих такие уравнения. В монографии В.В. Власова и Н.А. Раутиан⁸ отмечается, что *"Несмотря на важность оценок оператор-функции $\mathcal{L}^{-1}(\lambda)$, информации о структуре их спектра и резольвентных множеств, имеющихся в этом направлении работ очень мало... Одной из возможных причин такого положения дел авторы видят в том, что упомянутыми специалистами не в полной мере, а точнее, почти не используются результаты, относящиеся к спектральной теории операторных пучков"*.

Другим аспектом исследования описанных систем являются утверждения, часто тесно связанные со спектральным анализом этих систем, о существовании и единственности решений, об устойчивости этих решений и их асимптотическом поведении, утверждения о представлении решений.

⁷ Kopachevsky N.D., Krein S.G., Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Volume 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids. – Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 146.), 2003 – 444 p.

⁸ Власов В.В., Раутиан Н.В., Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. – М.: МАКС пресс, 2016 – 488 с.

В 1970 году С.М. Dafermos⁹, в связи с задачей о малых движениях вязкоупругого тела, рассмотрел задачу об асимптотическом поведении решений следующего интегро-дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2 \mathbf{u}(t)}{dt^2} = -A\mathbf{u}(t) + \int_{-\infty}^t G(t-s)\mathbf{u}(s) ds, \quad \mathbf{u}(s) = \mathbf{v}(s), \quad s \in (-\infty, 0],$$

где A — самосопряженный положительно определенный оператор с дискретным спектром, а оператор-функция $G(t)$ подчинена ему и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Было доказано, что каждое решение приведенного уравнения убывает к нулю при $t \rightarrow +\infty$, однако без оценки скорости убывания. Таким образом, интегральное слагаемое в уравнении гиперболического типа может играть роль демпфера.

После работ С.М. Dafermos'а исследование подобного рода вопросов для различных систем было проведено в многочисленных статьях ряда авторов¹⁰. Изучались вопросы экспоненциальной и полиномиальной устойчивости решений для различных систем, в том числе и абстрактных, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями. В частности, активно изучалось и изучается приведенное выше уравнение при условии, что $G(t) = g(t)A$, где $g(t)$ — скалярная функция. При этом весьма небольшое количество работ посвящено случаю абстрактных уравнений с несколькими некоммутирующими операторами, входящими в ядра интегральных слагаемых, а также вопросам поведения решений при заданных внешних силах.

Таким образом, недостаточно исследованными оставались вопросы существования и поведения решений абстрактных интегро-дифференциальных урав-

⁹ Dafermos C.M., An abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity // *J. Differ. Equations* – 1970. – V. 7, №3. – P. 544-569. Asymptotic stability in viscoelasticity // *Arch. Rational Mech. Anal.* – 1970. – V. 37. – P. 297-308.

¹⁰ Day W.A., Масленникова В.Н., Lagnese J., Кажихов А.В., Desch W., Miller R.K., Triggiani R., Muñoz Rivera J.E., Grimmer R., Avalos G., Шкалик А.А., Fabrizio M., Morro A., Pata V., Liu Z., Zheng S., Alabau-Boussouria F., Cannarsa P., Sforza D., Conti M., Pandolfi L., Власов В.В., Ати Бен Хасси E.M., Ammari K., Dell'Oro F. и др.

нений с операторными ядрами, содержащими некоммутирующие коэффициенты, и в связи с этим — соответствующие приложения в механике сплошных сред, то есть механические и гидродинамические системы, описываемые такими интегро-дифференциальными уравнениями. Этой тематике для некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений и их приложениям посвящена данная работа.

Цель диссертационной работы — исследование равномерной экспоненциальной устойчивости полугрупп, ассоциированных с некоторыми системами гиперболического типа и исследование асимптотического поведения решений этих систем при нагрузках, близких к почти периодическим; спектральный анализ генераторов возникающих полугрупп; исследование моделей релаксирующих жидкостей, моделей Ильюшина вязкоупругих тел, моделей Олдройта и Максвелла сжимаемых жидкостей; доказательство теорем существования и единственности решений задач Коши для интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с переменными операторными коэффициентами;

Методы исследования, достоверность и обоснованность результатов. Работа носит теоретический характер. Все результаты в ней формулируются в виде математических теорем и сопровождаются строгими доказательствами.

В работе применяются методы функционального анализа, методы теории дифференциально операторных уравнений и теория C_0 -полугрупп операторов, спектральная теория операторов и операторных пучков.

Исследуемые в работе интегро-дифференциальные уравнения и системы трактуются в операторной форме и специальным образом сводятся к задачам Коши для дифференциально операторных уравнений первого порядка в некоторых гильбертовых пространствах. Операторные блок-матрицы этих уравнений имеют вполне определенную структуру, общую для моделей параболического и гиперболического типа.

Положения, выносимые на защиту, и их научная новизна: На за-

щиту выносятся следующие результаты автора:

1. Метод отыскания асимптотик решений изучаемых систем гиперболического типа при внешних нагрузках, близких к почти периодическим.
2. Теоремы о равномерной экспоненциальной устойчивости полугрупп, генерируемых операторными блоками специального вида. Теорема об асимптотике решений неполного интегро-дифференциального уравнения второго порядка с ядром разностного типа, являющимся суммой конечного количества экспоненциальных функций с некоммутирующими операторными коэффициентами. Теорема о структуре спектра генератора и теоремы о p -базисности системы его собственных или корневых элементов в специальном частном случае.
3. Теоремы о разрешимости и теоремы о спектре в задачах о малых движениях вязкой либо идеальной релаксирующей жидкости, в задаче о малых движениях начально-изотропного вязкоупругого тела, закрепленного на границе занимаемой области, в задачах о малых движениях сжимаемой жидкости Олдройта и Максвелла, заполняющей равномерно вращающееся твердое тело. Теоремы об асимптотическом поведении решений в указанных задачах при нагрузках специального вида.
4. Теоремы об однозначной разрешимости для изучаемых классов интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с неограниченными переменными операторными коэффициентами.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Выводы работы.

1. Метод отыскания асимптотических формул может быть использован для численных расчетов в задачах о движениях вязкоупругих систем при внешних нагрузках специального вида и, в частности, для численных методов решения рассмотренных задач.

2. Теоремы о равномерной экспоненциальной устойчивости полугрупп с генераторами специального вида и теоремы о спектре таких генераторов могут быть использованы при исследовании устойчивости систем с памятью, описываемой ядрами экспоненциального типа.
3. Исследованные физические модели дают представление о возможных типах волновых движений, возникающих в этих системах. Эти представления могут быть применены в других задачах математической физики с памятью.
4. Применяемые к рассмотренным моделям схемы исследования могут быть использованы в других задачах математической физики с памятью.
5. Доказанные теоремы об однозначной разрешимости для изучаемых классов интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с неограниченными переменными операторными коэффициентами могут быть использованы при исследовании различных систем с эффектами памяти.

Апробация результатов. Основные результаты по теме диссертации получены в ходе выполнения научно-исследовательских проектов: РНФ № 14-21-00066, выполняемый в Воронежском государственном университете, и № 14.Z50.31.0037 Министерство образования и науки РФ.

Основные результаты диссертации докладывались на Международной конференции "Modern Analysis and Applications" dedicated to the centenary of Mark Krein (Odessa, Ukraine, 2007), на Международной конференции "Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам" (Батилиман, 2011, 2012, 2014–2018), на Научном семинаре под руководством профессора Н.Д. Копачевского (КФУ, Симферополь, 2014–2019), на Международной научной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа — V, VI, VII" (Ростов-на-Дону, 2015–2017), на Научном семинаре под руководством профессора В.Г. Звягина (ВГУ, Воро-

неж, 2015), на Международной научной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна" (Воронеж, 2016, 2019), на Международной научной конференции "IX Международный симпозиум Ряды Фурье и их приложения" (Дюрсо, 2016), на Воронежской весенней математической школе "Современные методы в качественной теории краевых задач" – "Понтрягинские чтения – XXVII, XXVIII" (Воронеж, 2016, 2017), на Научном семинаре под руководством профессора В.В. Власова и профессора К.А. Мирзоева (МГУ, Москва, 2016, 2017, 2019), на Научном семинаре под руководством профессора А.А. Шкаликова (МГУ, Москва, 2016, 2017), на Научном семинаре под руководством д.ф.-м.н. Д.В. Георгиевского (МГУ, Москва, 2016), на Научном семинаре под руководством академика РАН, профессора В.А. Садовниченко (МГУ, Москва, 2017), на Международной научной конференции "Современные методы и проблемы математической гидродинамики" (Воронеж, 2018, 2019), на Научном семинаре под руководством профессора А.Л. Скубачевского (РУДН, Москва, 2018), на Научном семинаре под руководством профессора Г.А. Чечкина (МГУ, Москва, 2019).

Публикации. Личный вклад автора. Основные результаты диссертации получены автором и опубликованы в 13 статьях в журналах [30–38, 201–204] из списка ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 5 глав, списка сокращений и условных обозначений и библиографии. Общий объем диссертации 293 страницы, из них 267 страниц текста. Библиография включает 204 наименования на 26 страницах.

Автор глубоко благодарен своему научному консультанту профессору Николаю Дмитриевичу Копачевскому за постоянное внимание к работе, за многочисленные обсуждения и поддержку.

Обзор литературы

Задачи о движении твердых тел с полостями, заполненными жидкостями, являются классическими. Начало их исследования восходит к работам G.G. Stokes'a, Н. Helmholtz'a, Н. Lamb'a, Н.Е. Жуковского. В последние годы эти задачи снова стали актуальными в связи с развитием танкерной, авиационной и космической техники.

Развитие современной техники вызвало также интенсивное применение полимерных и других материалов с ярко выраженными реологическими свойствами. Хотя основы теории вязкоупругости были заложены в классических трудах L. Boltzmann'a, J.C. Maxwell'a и V. Volterra, бурное ее развитие началось лишь с шестидесятых годов прошлого столетия — за короткий период опубликованы монографии [15, 41, 48, 57, 59, 125].

Одним из важных вопросов при изучении динамики какой либо системы является вопрос о существовании решений этой системы и поведении этих решений при больших временах. Как отмечалось во введении в пионерских работах [122, 123] С.М. Dafermos, в связи с задачей о малых движениях вязкоупругого тела, рассмотрел задачу об асимптотическом поведении решений следующего интегро-дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$:

$$\frac{d^2 \mathbf{u}(t)}{dt^2} = -A\mathbf{u}(t) + \int_{-\infty}^t G(t-s)\mathbf{u}(s) ds, \quad \mathbf{u}(s) = \mathbf{v}(s), \quad s \in (-\infty, 0]. \quad (1)$$

где A — самосопряженный положительно определенный оператор с дискретным спектром, а оператор-функция $G(t)$ подчинена ему и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Было доказано, что решения приведенного уравнения убывают к нулю при $t \rightarrow +\infty$, однако без оценки скорости убывания.

В дальнейшем исследования подобного рода вопросов для различных систем были проведены в многочисленных статьях ряда авторов. Изучались вопросы экспоненциальной и полиномиальной устойчивости решений для различных систем, в том числе и абстрактных, описываемых интегро-дифференциаль-

ными уравнениями. В работе [131] исследуется вопрос экспоненциальной стабилизации решений задачи Коши в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$

$$\frac{d^2 \mathbf{u}(t)}{dt^2} = -A\mathbf{u}(t) + \int_0^t g(t-s)A\mathbf{u}(s) ds + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}^1 \quad (2)$$

с помощью обратной связи вида $\mathbf{f}(t) = -C_0\mathbf{u}(t) - C_1\mathbf{u}'(t)$, где C_l — компактные неотрицательные операторы. В (2) предполагается, что оператор A самосопряжен, неотрицателен и имеет дискретный спектр. В работах [130, 132] аналогичные вопросы решаются для специальной системы операторных уравнений, полученные результаты применяются к исследованию вопроса стабилизации вязкоупругого стержня со свободным концом.

В [147] исследуется вопрос существования "limiting equation" для уравнения типа (2), рассматриваемого в банаховом пространстве, и изучаются периодические решения уравнения типа (1). В [148] рассматривается уравнение типа (1) с малым параметром при второй производной и изучается вопрос квазистатических приближений в вязкоупругости.

В [113] исследуется вопрос экспоненциальной устойчивости решений уравнения типа (1) с $G(t) = g(t)A$, где $A \gg 0$ оператор с дискретным спектром. В [188] без условия $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$ изучается дополнительно вопрос о полиномиальной устойчивости для рассматриваемого уравнения. В [179] вопрос экспоненциальной устойчивости решений исследуется для уравнения типа (2), возмущенного в правой части слагаемым $-\beta\mathbf{u}'(t)$ ($\beta > 0$). В [189] вопрос полиномиальной и экспоненциальной устойчивости исследуется для полного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. При этом ядро интегрального слагаемого имеет вид $G(t) = g(t)A$, где $A \gg 0$, $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$, а операторные коэффициенты при функции и ее первой производной являются функциями степенного порядка оператора A . Работы [108, 109, 116] посвящены исследованию устойчивости решений уравнения (2), возмущенного в правой части полулинейным слагаемым. В недавней работе [178] проводится обзор литературы по вопросам управ-

ления, связанным с уравнением (2). В [138] предлагается новый подход к исследованию интегро-дифференциальных уравнений, основанный на информации о начальном состоянии системы.

В [105, 106] рассмотрена задача Коши для полного дифференциально-операторного уравнения второго порядка гиперболического типа, доказано утверждение об убывании решений с ростом времени, однако без оценки скорости. В [26, 27] доказана равномерная экспоненциальная устойчивость полугруппы, ассоциированной с полным дифференциально операторным уравнением второго порядка. Аналогичные вопросы изучались в [118–120, 155, 156, 197]. В работах [10, 11] изучается асимптотическое поведение ограниченных полугрупп линейных операторов, действующих в банаховых пространствах, спектр генераторов которых содержит конечное количество мнимых точек. В [12] получены спектральные критерии почти периодичности на бесконечности ограниченных решений дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами. Определен новый класс асимптотически конечномерных полугрупп операторов и доказана почти периодичность на бесконечности их орбит.

В работе [124] исследуется вопрос убывания энергии в вязкоупругом теле. Вопросы асимптотического поведения решений задач в теории вязкоупругости исследуются в [121, 177, 184, 187]. В работе [175] рассмотрена задача о малых движениях вязкоупругого тела с учетом температурных воздействий, получены результаты, аналогичные [122, 123]. Вопросы экспоненциальной устойчивости различных систем, возникающих в термовязко-упругости исследуются в [137, 139, 142, 166, 167, 169]. В монографии [168] к исследованию вопросов экспоненциальной устойчивости в задачах вязко- и термовязко-упругости систематически применяются методы функционального анализа и, в частности, теория полугрупп линейных операторов. Монографии [112, 140] посвящены математическим вопросам теории вязко- и термовязко-упругости.

В работах [111, 165, 196] исследуются вопросы устойчивости волнового уравнения с граничной диссипацией энергии. В [110] аналогичные вопросы изу-

чаются для волнового уравнения, возмущенного вязкоупругим демпфирующим слагаемым и слагаемым с запаздывающим аргументом. Доказывается экспоненциальная устойчивость системы при условии достаточной малости амплитуды слагаемого с запаздывающим аргументом. В [114] вопрос экспоненциальной устойчивости исследуется для системы, состоящей из волнового уравнения и некоторого уравнения параболического типа, связанных через систему граничных условий.

Описанные выше вопросы исследуются в [126, 128, 134, 141, 172, 174, 185, 189, 190] для одномерных систем, описывающих модели Тимошенко вязкоупругих стержней и близкие к ним.

В главе 1 предложен метод вычисления асимптотик решений в эволюционных задачах, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями гиперболического типа с правой частью, близкой к почти периодической. В частности, доказаны теоремы о равномерной экспоненциальной устойчивости полугруппы, генерируемой операторным блоком специального вида (см. теоремы 1.1, 1.2). Полученные утверждения применены к исследованию асимптотического поведения решений задач (1.34) и (1.56) (см. теоремы 1.3, 1.4), а также некоторых систем из теории гидро- и вязко-упругости (см. теоремы 2.13, 3.11, 4.6) при условии, что внешняя сила близка к периодической. Это метод в главах 2- 4 применен и к задачам, описываемым интегро-дифференциальными уравнениями параболического типа. При этом существенную роль играет спектральный анализ соответствующих интегро-дифференциальных уравнений.

Как отмечалось во введении, в работах [6, 7, 54, 56] рассмотрена задача о колебании вязкой несжимаемой жидкости, частично заполняющей неподвижный контейнер. В этих работах впервые возник нелинейный операторный пучок, ассоциированный с задачей о нормальных колебаниях изучаемой системы. Были получены основные утверждения о спектре этого пучка и с помощью теоремы М.В. Келдыша (см. [45, 46]) доказана в некотором специальном виде двукратная полнота системы собственных и присоединенных элементов

этого пучка. В дальнейшем различными вопросами спектральной теории операторных пучков и их приложениями в механике сплошных сред занималось большое количество авторов. Библиография по этим вопросам весьма обширна, приведем здесь лишь монографии [25, 49, 58, 74, 99, 101, 161, 162] и статьи, в которых исследуются вопросы, близкие к рассматриваемым в данной работе. Отметим, что в [49, 161, 162] систематически применяется метод ортогонального проектирования полей скоростей в линеаризованных уравнениях Навье-Стокса или Эйлера на специальные подпространства соленоидальных полей. Этот метод впервые был применен независимо С.Л. Соболевым [96], Е. Норф'ом [154] и С.Г. Крейном [53].

В [63] рассматривается идеальная несжимаемая равномерно вращающаяся жидкость, заполняющая все пространство. Изучается асимптотика при $t \rightarrow +\infty$ решения задачи Коши для соответствующей системы Соболева. В [65, 66, 69] аналогичные вопросы изучаются для идеальной сжимаемой жидкости. В работах [8, 9, 17] изучаются спектральные задачи, связанные с задачей о колебании идеальной сжимаемой жидкости, заполняющей тонкую упругую оболочку. В [64, 67] рассматривается вязкая несжимаемая равномерно вращающаяся жидкость, заполняющая все пространство. Изучается асимптотика при $t \rightarrow +\infty$ решения соответствующей задачи Коши, оценивается скорость убывания решения. В [16, 98] исследуются вопросы разрешимости нелинейных начально-краевых задач, описывающих движения вязкой сжимаемой жидкости в ограниченной области. В [42, 43, 68, 70, 170, 191] исследуются вопросы асимптотики и стабилизации решений начально-краевых задач для уравнений баротропной вязкой жидкости, заполняющей полупространство или ограниченную область. В [145] рассматривается спектральная задача, ассоциированная с задачей о колебании вязкой баротропной жидкости, заполняющей ограниченную область. Изучается поведение существенного спектра задачи, а также асимптотика решений начально-краевой задачи при уменьшении вязкости. В частности доказано, что точки существенного спектра стремятся в бесконечность при уменьшении

вязкости. В [89] исследуются спектральные свойства операторов, возникающих при изучении вязкой либо идеальной баротропной вращающейся жидкости, заполняющей ограниченную область. Для вязкой жидкости доказано, что существенный спектр соответствующего оператора состоит из двух действительных точек, оставшийся спектр дискретен и расположен в некоторой секториальной области. В [89, 145] при изучении существенных спектров операторов используются результаты работы [150] методы исследования которой требуют бесконечной гладкости границы рассматриваемой области. Отметим здесь, что в [176] к исследованию существенного спектра оператора Навье-Стокса применяется другой подход, при котором граница области предполагается класса C^2 .

В [88] рассматриваются нелинейные модели жидкостей Максвелла, Олдройта и Кельвина-Фойгта и предполагается, что внешняя нагрузка не зависит от времени. Доказывается, что решения динамических задач, описывающих модели Олдройта и Кельвина-Фойгта вязкоупругих жидкостей, экспоненциально при $t \rightarrow +\infty$ сходятся к решению стационарного уравнения Навье-Стокса с той же правой частью и измененной соответствующим образом вязкостью. В [76] другими методами исследуется устойчивость нулевого решения в математической модели вязкоупругой жидкости Олдройта. В [52] исследуются нелинейные модели жидкостей Олдройта и Кельвина-Фойгта и предполагается, что внешняя нагрузка периодична и "достаточно мала". Доказывается, что если начальные данные "достаточно малы", то соответствующие динамические задачи имеют экспоненциально устойчивые периодические (с тем же самым периодом) решения. Вопросы существования и единственности решений задач, описывающих модели Максвелла, Олдройта и Кельвина-Фойгта вязкоупругих жидкостей исследовались в работах А.П. Осколкова [77–87] и многих других авторов. Различные математические вопросы, связанные с моделью жидкости Кельвина-Фойгта исследуются в монографии [40] (см. также указанную там литературу).

В работах [71, 72] исследуются спектральные свойства операторного пучка,

возникающего при изучении несжимаемой вязкоупругой жидкости Олдройта, частично заполняющей неподвижный открытый сосуд. Это, по-видимому, одно из первых исследований в этом направлении. Результаты указанных работ отражены в [162, гл. 11]. В [4, 5] исследуются абстрактное интегро-дифференциальное уравнение, порожденное моделью Олдройта вязкоупругой несжимаемой жидкости, заполняющей ограниченную область. В этих работах, кроме методов спектральной теории операторных пучков, применяются также методы теории операторов, действующих в пространстве с индефинитной метрикой. Доказано, что существенный спектр задачи состоит из конечного количества точек на действительной оси, а оставшийся спектр дискретен, является вещественным за исключением конечного количества комплексно сопряженных собственных значений и содержит последовательность собственных значений, сгущающихся к бесконечности. В [162, гл. 11] исследуются уравнения движения идеальной релаксирующей жидкости при некотором модельном ограничении на динамическое давление. Доказано, что существенный спектр операторного пучка, ассоциированного с этой задачей, представляет собой отрезок на вещественной оси. Оставшийся спектр дискретен, лежит в некоторой вертикальной полосе, симметричен относительно действительной оси и содержит две последовательности собственных значений, сгущающихся к бесконечности. В приведенных работах исследуются также свойства корневых элементов возникающих пучков.

В [173] исследуется полнота системы обобщенных собственных элементов, ассоциированных с системой автономных функционально-дифференциальных уравнений в специальном гильбертовом пространстве. В [157] исследуется структура спектра оператора, ассоциированного с функционально-дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом. В [29, 50, 51] исследуются спектральные свойства усредненных задач механики сильно неоднородных сред: проблемы "двойной пористости", проблемы колебания смеси двух вязких сжимаемых жидкостей и колебания среды, состоящей из упругого каркаса и вязкой жидкости. В работах [102–104] исследуются спектральные свойства краевых за-

дач, описывающих поперечные и продольные колебания слоистых композитных материалов — компонентами таких композитов являются взаимно чередующиеся слои изотропных упругого и вязкоупругого материалов. В работе [94] рассматривается задача точного управления системой, описываемой уравнением струны с интегральной "памятью". Доказывается, что данную систему можно привести в состояние покоя за конечное время с помощью распределенного управляющего воздействия, ограниченного по абсолютной величине. В [95] изучаются задачи распределенного и граничного управления некоторыми системами с интегральным последствием. В [19, 20, 136] проводится спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Главная часть рассматриваемых уравнений представляет собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Указанные уравнения представляют собой абстрактную форму интегро-дифференциального уравнения Гуртина—Пипкина (см. [151]), описывающего процесс распространения тепла в средах с памятью, процесс распространения звука в вязкоупругих средах, а также возникают в задачах усреднения в перфорированных средах (закон Дарси). В [198] для описанного уравнения получено представление сильного решения в виде ряда из экспоненциальных функций, отвечающих точкам спектра символа соответствующего уравнения. В [199, 200] исследуются спектральные вопросы для абстрактных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа, возникающих из теории вязкоупругости, и содержащих некоммутирующие операторы. В недавней работе [127] исследуется спектр генератора сжимающей полугруппы, ассоциированной с интегро-дифференциальным уравнением, возникающим из теории вязкоупругости. Отметим в заключение, что в монографии [18] анализ спектров символов интегро-дифференциальных уравнений используется, в частности, при построении решений этих уравнений.

В главах 2-4 настоящей работы исследуются вопросы асимптотического по-

ведения решений некоторых задач теории гидро- и вязко-упругости при условии, что внешняя сила близка к периодической. Выводятся асимптотические формулы, оценивается скорость сходимости. Проводится также спектральный анализ рассматриваемых систем. Доказываются утверждения о структуре и локализации спектра, о свойствах корневых элементов, о представлении решений.

В связи с задачами динамики не вполне упругих сред актуальны вопросы, связанные с решениями интегро-дифференциальных операторных уравнений первого и второго порядка в банаховом либо гильбертовом пространстве. В работах [117, 149, 152] с помощью теоремы Т. Като (см. [158–160]) исследуется интегро-дифференциальное уравнение первого порядка с переменными операторными коэффициентами. В [143] изучается задача Коши для вырожденного уравнения. В работе [129] рассматривается случай операторного ядра разностного типа. В [171, 193] изучается случай, когда главный оператор является генератором голоморфной полугруппы в каждый отдельный момент времени. Монография [183] (см. также указанную в ней литературу) посвящена уравнениям Вольтерра и их приложениям к различным задачам. В частности, рассматриваются приложения к задачам вязко- и термовязко-упругости. Отметим, что в [181] развивается подход к исследованию эволюционных уравнений, отличный от применяемого Т. Като. В [182] полученные результаты применяются к исследованию интегро-дифференциального уравнения первого порядка, главный оператор которого может иметь переменную область определения. В [195] к исследованию локальной по времени разрешимости абстрактных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с постоянным главным оператором и нелинейным ядром применяется теория косинус оператор-функций. Для того же типа уравнений в [194] изучаются вопросы глобальной разрешимости. В [163] доказываются теоремы о разрешимости для некоторых классов полных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве. В монографии [18] рассматриваются некоторые классы функционально-дифференциальных уравнений параболического и гиперболического ти-

па, доказываются теоремы о разрешимости, а также проводится спектральный анализ символов таких уравнений.

В главе 5 настоящей работы на основе теоремы Т. Като исследуются вопросы разрешимости для интегро-дифференциальных уравнений первого и второго порядка с переменными операторными коэффициентами (см. теоремы 5.4-5.8).

Глава 1

Интегро-дифференциальные уравнения гиперболического типа и связанные с ними полугруппы

1.1. Введение

В первой главе предложен метод вычисления асимптотик решений в эволюционных задачах, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями гиперболического типа с правой частью, близкой к периодической. В § 1.2 доказаны теоремы 1.1, 1.2 о равномерной экспоненциальной устойчивости полугруппы, генерируемой операторным блоком специального вида. В теореме 1.1 установлена оценка типа соответствующей полугруппы. Основная идея доказательства состоит в использовании техники спектрального сдвига с применением теоремы Л. Герхарта. В теореме 1.2 значительно ослабляются условия на операторы в конструкции, при этом равномерная экспоненциальная устойчивость полугруппы доказана без оценки ее типа. Идея доказательства состоит в применении следствия из теоремы Л. Герхарта для сжимающих полугрупп.

В § 1.3 изучается асимптотическое поведение решений некоторых систем при нагрузках, представляющих собой сумму конечного количества гармоник с медленно меняющимися во времени коэффициентами, доказаны теоремы 1.3, 1.4. В п. 1.3.1 рассмотрена задача Коши для неполного интегро-дифференциального уравнения второго порядка, а в п. 1.3.2 — специальная система интегро-дифференциальных уравнений первого порядка гиперболического типа, которая будет использована в главе 4. Основная идея состоит в сведении изучаемых задач к задачам Коши для дифференциально операторного уравнения первого порядка с главным оператором специального вида с последующим при-

менением теорем 1.1, 1.2.

В § 1.4 изучаются спектральные свойства рассматриваемой операторной блок-матрицы. В п. 1.4.1 доказаны теоремы 1.5, 1.6 о структуре спектра изучаемого оператора и связанного с ним операторного пучка. В п. 1.4.2 доказана теорема 1.7 о пересчете корневых элементов изучаемого оператора и соответствующего операторного пучка.

В § 1.5 рассматривается частный случай изучаемого оператора, доказываются теоремы 1.9, 1.10 о p -базисности системы собственных или корневых элементов.

Результаты главы 1 изложены в статьях [32, 34, 35].

1.2. Экспоненциальная устойчивость и оценка типа полугруппы с генератором специального вида

Пусть H , H_l ($l = \overline{0, m}$) — гильбертовы пространства. Пусть задан самосопряженный и положительно определенный оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$, заданы ограниченные операторы $Q_l \in \mathcal{L}(H, H_l)$ ($l = \overline{0, m}$) и неотрицательные числа $\gamma_l \geq 0$ такие, что $(Q_l^* Q_l u, u)_H \geq \gamma_l \|u\|_H^2$ при всех $u \in H$. Будем считать также, что дан упорядоченный набор неотрицательных чисел $0 =: b_0 < b_1 < \dots < b_m$.

Определим гильбертово пространство $\mathcal{H} := H \oplus \left(\oplus_{l=0}^m H_l \right)$, состоящее из элементов вида $\xi := (u; w)^\tau := (u; (u_0; u_1; \dots; u_m)^\tau)^\tau$ (символ τ обозначает операцию транспонирования). В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ определим оператор $\mathcal{A}$ по следующей формуле:

$$\mathcal{A} = \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} 0 & Q^* \\ -Q & \mathcal{G} \end{pmatrix} \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) = \begin{pmatrix} 0 & A^{1/2} Q^* \\ -Q A^{1/2} & \mathcal{G} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

$$Q := (Q_0, Q_1, \dots, Q_m)^\tau, \quad \mathcal{G} := \text{diag}(0, b_1 I, \dots, b_m I), \quad \mathcal{I} := \text{diag}(I, I, \dots, I),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ \xi = (u; w)^\tau \in \mathcal{H} \mid u \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad Q^* w \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \right\}. \quad (1.2)$$

Т е о р е м а 1.1. Пусть существует $Q_0^{-1} \in \mathcal{L}(H_0, H)$ и $\gamma_q = \gamma_q(Q_q^* Q_q) > 0$ при некотором $q \in \{1, \dots, m\}$. Обозначим через λ_k^+ наименьший положительный корень уравнения $g_k(\lambda) = 0$ ($k = 1, 2$), где

$$g_1(\lambda) := \|Q_0^{-1}\|^{-2} - \lambda^2 \|A^{-1/2}\|^2 - \lambda \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \lambda} \|Q_l\|^2, \quad (1.3)$$

$$g_2(\lambda) := \gamma_q + 2\lambda \left[\sum_{q < l \leq m} \frac{\gamma_l}{b_l - b_q + 2\lambda} - \frac{\|Q_0\|^2}{b_q - 2\lambda} - \sum_{1 \leq l < q} \frac{\|Q_l\|^2}{b_q - b_l - 2\lambda} \right]. \quad (1.4)$$

Определим число

$$\omega_0 := \min \left\{ \frac{b_q - b_{q-1}}{2}, \frac{b_q}{3}, \lambda_1^+, \lambda_2^+ \right\}. \quad (1.5)$$

Тогда оператор $-\mathcal{A}$ является генератором равномерно экспоненциально устойчивой C_0 -полугруппы $\mathcal{U}(t)$. Более того, для любого $\omega \in (0, \omega_0)$ существует $M = M(\omega) \geq 1$ такое, что

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M e^{-\omega t} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ := [0, +\infty). \quad (1.6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство будет проведено в несколько шагов, следует некоторым идеям из [26] и опирается на теорему Л. Герхарта (см. [144], [135, гл. 5, § 1, теорема 1.11]). Пусть оператор $-\mathcal{A}$ генерирует C_0 -полугруппу ограниченных операторов $\mathcal{U}(t)$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Полугруппа $\mathcal{U}(t)$ равномерно экспоненциально устойчива, то есть существуют константы $\omega > 0$ и $M \geq 1$ такие, что выполнено (1.6), тогда и только тогда, когда резольвентное множество $\rho(-\mathcal{A})$ генератора полугруппы содержит открытую полуплоскость $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda > 0\}$ и

$$\sup_{\operatorname{Re} \lambda < 0} \|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < +\infty, \quad \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) := (\mathcal{A} - \lambda)^{-1}. \quad (1.7)$$

З а м е ч а н и е 1.1. В дальнейших рассуждениях понадобятся факторизации Шура–Фробениуса операторных блоков с ограниченными операторными коэффициентами и формулы обращения этих блоков. Пусть $A_{kl} \in \mathcal{L}(H_l, H_k)$

$(k, l = 1, 2)$, $A_{22}^{-1} \in \mathcal{L}(H_2)$, $D_1 := A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$. Если $D_1^{-1} \in \mathcal{L}(H_1)$, то существует

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} &= \left[\begin{pmatrix} I & A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{pmatrix} \right]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} D_1^{-1} & -D_1^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}D_1^{-1} & A_{22}^{-1}[A_{22} + A_{21}D_1^{-1}A_{12}]A_{22}^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Пусть $A_{11}^{-1} \in \mathcal{L}(H_1)$, $D_2 := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$. Если $D_2^{-1} \in \mathcal{L}(H_2)$, то существует

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} &= \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} \right]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1}[A_{11} + A_{12}D_2^{-1}A_{21}]A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1} \\ -D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & D_2^{-1} \end{pmatrix}. \blacktriangleright \end{aligned} \quad (1.9)$$

1. Покажем, что оператор $\mathcal{A}$ является генератором C_0 -полугруппы. Запишем оператор $\mathcal{A}$ относительно разложения $\mathcal{H} = H \oplus H_0 \oplus (\oplus_{l=1}^m H_l)$:

$$\mathcal{A} = \text{diag}(A^{1/2}, I, \hat{I}) \begin{pmatrix} 0 & Q_0^* & \hat{Q}^* \\ -Q_0 & 0 & 0 \\ -\hat{Q} & 0 & \hat{G} \end{pmatrix} \text{diag}(A^{1/2}, I, \hat{I}), \quad (1.10)$$

$$\hat{Q} := (Q_1, \dots, Q_m)^\tau, \quad \hat{G} := \text{diag}(b_1 I, \dots, b_m I), \quad \hat{I} := \text{diag}(I, \dots, I).$$

Воспользовавшись тем, что операторы Q_0 и (см. [44, гл. 3, § 3, п. 3]) Q_0^* непрерывно обратимы, осуществим факторизацию среднего блока в (1.10) в форме Шура-Фробениуса (см. (1.9)) и найдем, что $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, где

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & -(Q_0^*)^{-1}\hat{Q}^* \\ 0 & 0 & \hat{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -Q_0^{-1} & 0 \\ (Q_0^*)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{G}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -\hat{Q}Q_0^{-1} & \hat{I} \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Из (1.11) и $\text{Ker}(\mathcal{A}^{-1})^* = \{\emptyset\}$ следует, что оператор $\mathcal{A}$ плотно определен и замкнут.

Пусть $\xi = (u; w)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, тогда $u \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ и из факторизации (1.1) оператора $\mathcal{A}$ в симметричной форме получим, что оператор $\mathcal{A}$ аккретивен:

$$\text{Re}(\mathcal{A}\xi, \xi)_{\mathcal{H}} = \text{Re} \left(\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2}u \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A^{1/2}u \\ w \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{G}^{1/2}w\|_{\oplus_{l=0}^m H_l}^2 \geq 0.$$

Из (1.11) следует, что оператор $\mathcal{A} - \lambda$ непрерывно обратим при всех $\lambda \in (-\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1}, 0)$, а значит (см. [55, гл. 1, § 4, теорема 4.3]) оператор $\mathcal{A}$ максимален. Следовательно, оператор $-\mathcal{A}$ является генератором сжимающей C_0 -полугруппы.

2. Зафиксируем $\omega \in (0, \omega_0)$ и выберем $\omega < \varepsilon < \omega_0$. Оценим резольвенту оператора $\mathcal{A} - \varepsilon$ на множестве $C_r(-\varepsilon) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda + \varepsilon| \leq r\}$, где $r < \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \in C_r(-\varepsilon)} \|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A} - \varepsilon)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} &= \sup_{\lambda \in C_r(-\varepsilon)} \|(\mathcal{I} - (\lambda + \varepsilon)\mathcal{A}^{-1})^{-1} \mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \\ &\leq \sup_{\lambda \in C_r(-\varepsilon)} \frac{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}}{1 - |\lambda + \varepsilon| \cdot \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}} \leq \frac{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}}{1 - r\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Пусть $\lambda \notin C_r(-\varepsilon) \cup \sigma(\mathcal{G} - \varepsilon) \cup \sigma(L(\lambda + \varepsilon))$, где $\sigma(\mathcal{G} - \varepsilon)$, $\sigma(L(\lambda + \varepsilon))$ — спектры оператора $\mathcal{G} - \varepsilon$ и пучка $L(\lambda + \varepsilon)$ соответственно (см. (1.11)). С использованием факторизации (1.8) найдем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A} - \varepsilon) &= \text{diag}(A^{-1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} -(\lambda + \varepsilon)A^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - (\lambda + \varepsilon) \end{pmatrix}^{-1} \text{diag}(A^{-1/2}, \mathcal{I}) = \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ \mathcal{R}_{\lambda+\varepsilon}(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{-1}(\lambda + \varepsilon) & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{\lambda+\varepsilon}(\mathcal{G}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & -\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_{\lambda+\varepsilon}(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1/2}L^{-1}(\lambda + \varepsilon)A^{-1/2} & -A^{-1/2}L^{-1}(\lambda + \varepsilon)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_{\lambda+\varepsilon}(\mathcal{G}) \\ \mathcal{R}_{\lambda+\varepsilon}(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda + \varepsilon)A^{-1/2} & \mathcal{R}_{\lambda+\varepsilon}(\mathcal{G})[\mathcal{I} - \mathcal{Q}L^{-1}(\lambda + \varepsilon)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_{\lambda+\varepsilon}(\mathcal{G})] \end{pmatrix} = \\ &=: \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{11}(\lambda) & \mathcal{F}_{12}(\lambda) \\ \mathcal{F}_{21}(\lambda) & \mathcal{F}_{22}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad L(\lambda + \varepsilon) := -(\lambda + \varepsilon)A^{-1} + \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_{\lambda+\varepsilon}(\mathcal{G})\mathcal{Q}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться, что

$$\begin{aligned}
& \frac{(\lambda + \varepsilon)(b_q - \varepsilon - \lambda)}{\lambda(b_q - 3\varepsilon - \lambda)} L(\lambda + \varepsilon) = \\
& = \frac{(\lambda + \varepsilon)(b_q - \varepsilon - \lambda)}{\lambda(b_q - 3\varepsilon - \lambda)} \left[-(\lambda + \varepsilon)A^{-1} - \frac{1}{\lambda} Q_0^* Q_0 + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \lambda} Q_l^* Q_l \right] = \\
& = - \left[\lambda - \frac{\varepsilon^2(b_q - \varepsilon)}{b_q - 3\varepsilon} \cdot \frac{1}{\lambda} - \frac{2\varepsilon(b_q - 2\varepsilon)^2}{b_q - 3\varepsilon} \cdot \frac{1}{b_q - 3\varepsilon - \lambda} \right] A^{-1} - \\
& - \left[\frac{b_q - \varepsilon}{b_q - 3\varepsilon} \cdot \frac{1}{\lambda} + \frac{2\varepsilon}{b_q - 3\varepsilon} \cdot \frac{1}{b_q - 3\varepsilon - \lambda} \right] Q_0^* Q_0 + \\
& + \left[\frac{\varepsilon}{b_q - 3\varepsilon} \cdot \frac{1}{\lambda} + \frac{b_q - 2\varepsilon}{b_q - 3\varepsilon} \cdot \frac{1}{b_q - 3\varepsilon - \lambda} \right] Q_q^* Q_q + \\
& + \sum_{l=1, l \neq q} \left[\frac{\varepsilon(b_q - \varepsilon)}{(b_q - 3\varepsilon)(b_l - \varepsilon)} \cdot \frac{1}{\lambda} + \frac{2\varepsilon(b_q - 2\varepsilon)}{(b_q - 3\varepsilon)(b_l - b_q + 2\varepsilon)} \cdot \frac{1}{b_q - 3\varepsilon - \lambda} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{b_l(b_q - b_l)}{(b_l - \varepsilon)(b_q - b_l - 2\varepsilon)} \cdot \frac{1}{b_l - \varepsilon - \lambda} \right] Q_l^* Q_l = \\
& = -\lambda A^{-1} - \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{b_q - \varepsilon}{b_q - 3\varepsilon} \left[Q_0^* Q_0 - \varepsilon^2 A^{-1} - \varepsilon \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \varepsilon} Q_l^* Q_l \right] + \\
& + \frac{1}{b_q - 3\varepsilon - \lambda} \cdot \frac{b_q - 2\varepsilon}{b_q - 3\varepsilon} \left[Q_q^* Q_q + 2\varepsilon(b_q - 2\varepsilon)A^{-1} + \sum_{l=0, l \neq q} \frac{2\varepsilon}{b_l - b_q + 2\varepsilon} Q_l^* Q_l \right] + \\
& + \sum_{1 \leq l < q} \frac{b_l(b_q - b_l)}{(b_l - \varepsilon)(b_q - b_l - 2\varepsilon)} \cdot \frac{1}{b_l - \varepsilon - \lambda} Q_l^* Q_l + \\
& + \sum_{q < l \leq m} \frac{b_l(b_l - b_q)}{(b_l - \varepsilon)(b_l - b_q + 2\varepsilon)} \cdot \frac{1}{b_l - \varepsilon - \lambda} Q_l^* Q_l = \\
& =: -\lambda A^{-1} + \frac{1}{-\lambda} S_{0,\varepsilon} + \sum_{l=1, l \neq q}^m \frac{1}{b_l - \varepsilon - \lambda} S_{l,\varepsilon} + \frac{1}{b_q - 3\varepsilon - \lambda} S_{q,\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$L(\lambda + \varepsilon) = \frac{1}{g_\varepsilon(\lambda)} L_\varepsilon(\lambda), \quad g_\varepsilon(\lambda) := \frac{(\lambda + \varepsilon)(b_q - \varepsilon - \lambda)}{\lambda(b_q - 3\varepsilon - \lambda)}, \quad (1.14)$$

$$L_\varepsilon(\lambda) := -\lambda A^{-1} + \frac{1}{-\lambda} S_{0,\varepsilon} + \sum_{l=1, l \neq q}^m \frac{1}{b_l - \varepsilon - \lambda} S_{l,\varepsilon} + \frac{1}{b_q - 3\varepsilon - \lambda} S_{q,\varepsilon},$$

$$\begin{aligned}
S_{0,\varepsilon} &:= \frac{b_q - \varepsilon}{b_q - 3\varepsilon} \left[Q_0^* Q_0 - \varepsilon^2 A^{-1} - \varepsilon \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \varepsilon} Q_l^* Q_l \right], \\
S_{q,\varepsilon} &:= \frac{b_q - 2\varepsilon}{b_q - 3\varepsilon} \left[Q_q^* Q_q + 2\varepsilon(b_q - 2\varepsilon)A^{-1} + 2\varepsilon \sum_{l=0, l \neq q}^m \frac{1}{b_l - b_q + 2\varepsilon} Q_l^* Q_l \right], \\
S_{l,\varepsilon} &:= \frac{b_l(b_q - b_l)}{(b_l - \varepsilon)(b_q - b_l - 2\varepsilon)} Q_l^* Q_l, \quad 1 \leq l < q, \\
S_{l,\varepsilon} &:= \frac{b_l(b_l - b_q)}{(b_l - \varepsilon)(b_l - b_q + 2\varepsilon)} Q_l^* Q_l, \quad q < l \leq m.
\end{aligned}$$

Из $\omega < \varepsilon < \omega_0$ и (1.5) следует, очевидно, что операторы $S_{l,\varepsilon}$ ($l = \overline{1, m}$, $l \neq q$) неотрицательны. Покажем, что операторы $S_{0,\varepsilon}$ и $S_{q,\varepsilon}$ положительно определены. При любом $u \in H$ имеем

$$\begin{aligned}
\|u\|_H &= \|Q_0^{-1} Q_0 u\|_H \leq \|Q_0^{-1}\| \|Q_0 u\|_{H_0}, \\
(Q_0^* Q_0 u, u)_H &= \|Q_0 u\|_{H_0}^2 \geq \|Q_0^{-1}\|^{-2} \|u\|_H^2, \\
(S_{0,\varepsilon} u, u)_H &= \frac{b_q - \varepsilon}{b_q - 3\varepsilon} \left[\|Q_0 u\|_{H_0}^2 - \varepsilon^2 \|A^{-1/2} u\|_H^2 - \varepsilon \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \varepsilon} \|Q_l u\|_{H_l}^2 \right] \geq \\
&\geq \frac{b_q - \varepsilon}{b_q - 3\varepsilon} \left[\|Q_0^{-1}\|^{-2} - \varepsilon^2 \|A^{-1/2}\|^2 - \varepsilon \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \varepsilon} \|Q_l\|^2 \right] \|u\|_H^2 = \\
&= \frac{b_q - \varepsilon}{b_q - 3\varepsilon} g_1(\varepsilon) \|u\|_H^2. \quad (1.15)
\end{aligned}$$

Из (1.3), (1.5), (1.15) следует, что $S_{0,\varepsilon} \gg 0$ в H .

Далее, при любом $u \in H$, с учетом (1.5), имеем

$$\begin{aligned}
(S_{q,\varepsilon} u, u)_H &= \frac{b_q - 2\varepsilon}{b_q - 3\varepsilon} \left[\|Q_q u\|_{H_q}^2 + 2\varepsilon(b_q - 2\varepsilon) \|A^{-1/2} u\|_H^2 - \frac{2\varepsilon}{b_q - 2\varepsilon} \|Q_0 u\|_{H_0}^2 - \right. \\
&\quad \left. - 2\varepsilon \sum_{1 \leq l < q} \frac{1}{b_q - b_l - 2\varepsilon} \|Q_l u\|_{H_l}^2 + 2\varepsilon \sum_{q < l \leq m} \frac{1}{b_l - b_q + 2\varepsilon} \|Q_l u\|_{H_l}^2 \right] \geq \\
&\geq \frac{b_q - 2\varepsilon}{b_q - 3\varepsilon} \left[\gamma_q + 2\varepsilon \left\{ \sum_{q < l \leq m} \frac{\gamma_l}{b_l - b_q + 2\varepsilon} - \frac{\|Q_0\|^2}{b_q - 2\varepsilon} - \sum_{1 \leq l < q} \frac{\|Q_l\|^2}{b_q - b_l - 2\varepsilon} \right\} \right] \|u\|_H^2 = \\
&= \frac{b_q - 2\varepsilon}{b_q - 3\varepsilon} g_2(\varepsilon) \|u\|_H^2. \quad (1.16)
\end{aligned}$$

Из (1.4), (1.5), (1.16) следует, что $S_{q,\varepsilon} \gg 0$ в H .

3. Построим вспомогательный оператор и его резольвенту. Определим гильбертово пространство $\mathcal{H}_\oplus := H \oplus \left(\bigoplus_{l=0}^m H \right)$, состоящее из элементов вида $\xi := (u; v)^\tau := (u; (v_0; v_1; \dots; v_m)^\tau)^\tau$. Опираясь на свойства операторов $S_{l,\varepsilon}$ ($l = \overline{0, m}$), определим в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\oplus$ оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ по формуле:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\varepsilon &:= \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}_\varepsilon^* \\ -\mathcal{Q}_\varepsilon & \mathcal{G}_\varepsilon \end{pmatrix} \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}), \\ \mathcal{Q}_\varepsilon &:= (S_{0,\varepsilon}^{1/2}, S_{1,\varepsilon}^{1/2}, \dots, S_{m,\varepsilon}^{1/2})^\tau, \\ \mathcal{G}_\varepsilon &:= \text{diag}(0, (b_1 - \varepsilon)I, \dots, \underbrace{(b_q - 3\varepsilon)I}_{q+1\text{-е место}}, \dots, (b_m - \varepsilon)I), \\ D(\mathcal{A}_\varepsilon) &= \left\{ \xi = (u; v)^\tau \in \mathcal{H}_\oplus \mid u \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \mathcal{Q}_\varepsilon^* v \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \right\}. \end{aligned}$$

Оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ замкнут на своей естественной области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon)$ и является максимальным аккретивным оператором — оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ имеет такую же структуру как и оператор $\mathcal{A}$ (см. (1.1), (1.2)). Следовательно, оператор $-(\mathcal{A}_\varepsilon + \delta)$ — генератор равномерно экспоненциально устойчивой C_0 -полугруппы сжатий в $\mathcal{H}_\oplus$ при любом $\delta > 0$. По критерию Л. Герхарта (см. (1.7)) получим, что

$$\sup_{\text{Re } \lambda < 0} \|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}_\varepsilon + \delta)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\oplus)} = \sup_{\text{Re } \lambda < -\delta} \|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}_\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\oplus)} < +\infty \quad \forall \delta > 0. \quad (1.17)$$

При $\lambda \in \Pi(-\delta) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Re } \lambda < -\delta\}$, аналогично представлению (1.13), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}_\varepsilon) &= \begin{pmatrix} A^{-1/2} L_\varepsilon^{-1}(\lambda) A^{-1/2} & -A^{-1/2} L_\varepsilon^{-1}(\lambda) \mathcal{Q}_\varepsilon^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}_\varepsilon) \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}_\varepsilon) \mathcal{Q}_\varepsilon L_\varepsilon^{-1}(\lambda) A^{-1/2} & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}_\varepsilon) [\mathcal{I} - \mathcal{Q}_\varepsilon L_\varepsilon^{-1}(\lambda) \mathcal{Q}_\varepsilon^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}_\varepsilon)] \end{pmatrix} = \\ &=: \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{11}(\lambda) & \mathcal{M}_{12}(\lambda) \\ \mathcal{M}_{21}(\lambda) & \mathcal{M}_{22}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad L_\varepsilon(\lambda) = -\lambda A^{-1} + \mathcal{Q}_\varepsilon^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}_\varepsilon) \mathcal{Q}_\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Из (1.17), (1.18) следует, что оператор-функции

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{11}(\lambda) &= \lambda A^{-1/2} [\lambda L_\varepsilon(\lambda)]^{-1} A^{-1/2}, \\
\mathcal{M}_{12}(\lambda) &= \left(A^{-1/2} [\lambda L_\varepsilon(\lambda)]^{-1} S_{0,\varepsilon}^{1/2}, \frac{-\lambda}{b_1 - \varepsilon - \lambda} A^{-1/2} [\lambda L_\varepsilon(\lambda)]^{-1} S_{1,\varepsilon}^{1/2}, \dots, \right. \\
&\quad \left. \dots, \underbrace{\frac{-\lambda}{b_q - 3\varepsilon - \lambda} A^{-1/2} [\lambda L_\varepsilon(\lambda)]^{-1} S_{q,\varepsilon}^{1/2}, \dots, \frac{-\lambda}{b_m - \varepsilon - \lambda} A^{-1/2} [\lambda L_\varepsilon(\lambda)]^{-1} S_{m,\varepsilon}^{1/2}}_{q+1\text{-е место}}, \right. \\
\mathcal{M}_{21}(\lambda) &= \left(-S_{0,\varepsilon}^{1/2} [\lambda L_\varepsilon(\lambda)]^{-1} A^{-1/2}, \frac{\lambda}{b_1 - \varepsilon - \lambda} S_{1,\varepsilon}^{1/2} [\lambda L_\varepsilon(\lambda)]^{-1} A^{-1/2}, \dots, \right. \\
&\quad \left. \dots, \underbrace{\frac{\lambda}{b_q - 3\varepsilon - \lambda} S_{q,\varepsilon}^{1/2} [\lambda L_\varepsilon(\lambda)]^{-1} A^{-1/2}, \dots, \frac{\lambda}{b_m - \varepsilon - \lambda} S_{m,\varepsilon}^{1/2} [\lambda L_\varepsilon(\lambda)]^{-1} A^{-1/2}}_{q+1\text{-е место}} \right)^\tau, \\
\mathcal{M}_{22}(\lambda) &= \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}_\varepsilon) - \begin{pmatrix} \lambda^{-1} S_{0,\varepsilon}^{1/2} [\lambda L_\varepsilon(\lambda)]^{-1} S_{0,\varepsilon}^{1/2} & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

равномерно ограничены в полуплоскости $\Pi(-\delta)$ в равномерной операторной топологии. Отсюда и из $S_{0,\varepsilon}^{-1/2} \in \mathcal{L}(H)$ (см. (1.15)) следует, что оператор-функции

$$\begin{aligned}
&\lambda A^{-1/2} [\lambda L_\varepsilon(\lambda)]^{-1} A^{-1/2}, \quad \lambda^{-1} [\lambda L_\varepsilon(\lambda)]^{-1}, \\
&A^{-1/2} [\lambda L_\varepsilon(\lambda)]^{-1}, \quad [\lambda L_\varepsilon(\lambda)]^{-1} A^{-1/2}
\end{aligned} \tag{1.19}$$

также равномерно ограничены в полуплоскости $\Pi(-\delta)$ при любом $\delta > 0$.

4. Оценим резольвенту оператора $\mathcal{A} - \varepsilon$. Из (1.13)-(1.14) и (1.19) найдем, что оператор-функции

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{11}(\lambda) &= g_\varepsilon(\lambda) \cdot \lambda A^{-1/2} [\lambda L_\varepsilon(\lambda)]^{-1} A^{-1/2}, \\
\mathcal{F}_{12}(\lambda) &= -g_\varepsilon(\lambda) \cdot A^{-1/2} [\lambda L_\varepsilon(\lambda)]^{-1} \cdot \lambda \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_{\lambda+\varepsilon}(\mathcal{G}), \\
\mathcal{F}_{21}(\lambda) &= g_\varepsilon(\lambda) \cdot \lambda \mathcal{R}_{\lambda+\varepsilon}(\mathcal{G}) \mathcal{Q} \cdot [\lambda L_\varepsilon(\lambda)]^{-1} A^{-1/2}, \\
\mathcal{F}_{22}(\lambda) &= \mathcal{R}_{\lambda+\varepsilon}(\mathcal{G}) - g_\varepsilon(\lambda) \cdot \lambda \mathcal{R}_{\lambda+\varepsilon}(\mathcal{G}) \mathcal{Q} \cdot \lambda^{-1} [\lambda L_\varepsilon(\lambda)]^{-1} \cdot \lambda \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_{\lambda+\varepsilon}(\mathcal{G})
\end{aligned}$$

равномерно ограничены в $\Pi(-\delta) \setminus C_r(-\varepsilon)$ в равномерной операторной топологии при любом $\delta > 0$. Отсюда, из (1.12) и (1.13) следует, что

$$\sup_{\operatorname{Re} \lambda < -\delta} \|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A} - \varepsilon)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \sup_{\operatorname{Re} \lambda < 0} \|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A} - \varepsilon + \delta)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < +\infty \quad \forall \omega < \varepsilon < \omega_0, \quad \delta > 0. \tag{1.20}$$

Из (1.20) при $\delta := \varepsilon - \omega > 0$ и теоремы Л. Герхарта (см. (1.7)) получим, что оператор $-(\mathcal{A} - \omega)$ является генератором равномерно экспоненциально устойчивой C_0 -полугруппы в $\mathcal{H}$. Отсюда следует, что оператор $-\mathcal{A}$ является генератором C_0 -полугруппы $\mathcal{U}(t)$, удовлетворяющей оценке (1.6). Теорема доказана. ■

Наличие экспоненциальной устойчивости полугруппы, генерируемой оператором $-\mathcal{A}$, без оценки ее типа можно установить и при более слабых условиях на операторные коэффициенты. А именно, имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 1.2. *Оператор $-\mathcal{A}$ является генератором C_0 -полугруппы сжимающих операторов, если $\sum_{l=0}^m Q_l^* Q_l \gg 0$, и генератором равномерно экспоненциально устойчивой C_0 -полугруппы (см. (1.6)), если $\sum_{l=1}^m Q_l^* Q_l \gg 0$, $Q_0 Q_0^* \gg 0$*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство будет проведено в несколько шагов. Доказательство второго пункта следует идеям из [168] и опирается на следствие из теоремы Л. Герхарта (см. [144], [168, гл. 1, § 1.3, теорема 1.3.2]). Пусть оператор $-\mathcal{A}$ генерирует C_0 -полугруппу $\mathcal{U}(t)$ сжимающих операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Полугруппа $\mathcal{U}(t)$ равномерно экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда $i\mathbb{R} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda = i\beta, \beta \in \mathbb{R}\} \subset \rho(\mathcal{A})$ и

$$\sup_{\beta \in \mathbb{R}} \|\mathcal{R}_{i\beta}(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < +\infty, \quad \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) = (\mathcal{A} - \lambda)^{-1}. \quad (1.21)$$

1. Пусть $\sum_{l=0}^m Q_l^* Q_l \gg 0$. Покажем, что оператор $\mathcal{A}$ имеет резольвенту при $\lambda < 0$. Из (1.8) как и в (1.13) найдем, что оператор $\mathcal{A} - \lambda$ представим в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{A} - \lambda &= \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} -\lambda A^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix} \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) = \\ &= \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}), \end{aligned} \quad (1.22)$$

где $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) := (\mathcal{G} - \lambda)^{-1}$, $L(\lambda) := -\lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}$.

При любых $\lambda < 0$ и $0 \neq u \in H$ найдем, что

$$\begin{aligned} \|L(\lambda)u\|_H &= \|[L(\lambda)]^*u\|_H \geq \frac{|(L(\lambda)u, u)_H|}{\|u\|_H} = \frac{(L(\lambda)u, u)_H}{\|u\|_H} = \\ &= -\lambda \cdot \frac{\|A^{-1/2}u\|_H^2}{\|u\|_H} + \frac{((\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}u, \mathcal{Q}u)_{\oplus_{l=1}^m H_l}}{\|u\|_H} \geq \\ &\geq \frac{1}{\|u\|_H} \left[-\frac{\|Q_0u\|_H^2}{\lambda} + \sum_{l=1}^m \frac{\|Q_lu\|_H^2}{b_l - \lambda} \right] \geq \\ &\geq \left(\max_{l=1, m} \{b_l\} - \lambda \right)^{-1} \cdot \gamma \left(\sum_{l=0}^m Q_l^* Q_l \right) \cdot \|u\|_H, \end{aligned}$$

где $\gamma \left(\sum_{l=0}^m Q_l^* Q_l \right) > 0$ — нижняя грань оператора $\sum_{l=0}^m Q_l^* Q_l$. Следовательно, существует $L^{-1}(\lambda) \in \mathcal{L}(H)$. Отсюда и из (1.22) следует, что при $\lambda < 0$ существует $(\mathcal{A} - \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Аналогичными вычислениями можно убедиться, что при $\lambda < 0$ существует также $[(\mathcal{A} - \lambda)^{-1}]^* = (\mathcal{A}^* - \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Из $\text{Ker}[(\mathcal{A} - \lambda)^{-1}]^* = \{\emptyset\}$ следует, что оператор $\mathcal{A}$ плотно определен. Оператор $\mathcal{A}$ аккретивен (см. доказательство теоремы 1.1, п. 1.). Из $\{\lambda < 0\} \subset \rho(\mathcal{A})$ следует, что оператор $\mathcal{A}$ замкнут и максимален (см. [55, гл. 1, § 4, теорема 4.3]). Таким образом, оператор $-\mathcal{A}$ генерирует сжимающую C_0 -полугруппу.

З а м е ч а н и е 1.2. Из (1.22) получим представление для резольвенты оператора $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) &= \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & -\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2} & -A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2} & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) - \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \end{pmatrix}, \quad (1.23) \\ &\quad L(\lambda) := -\lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q} \end{aligned}$$

при всех $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G}) \cup \sigma(L(\lambda))$, где $\sigma(\mathcal{G}) = \{0, b_1, \dots, b_m\}$, $\sigma(L(\lambda))$ — спектры оператора $\mathcal{G}$ и операторного пучка $L(\lambda)$ соответственно. ►

2. Пусть $\sum_{l=1}^m Q_l^* Q_l \gg 0$, $Q_0 Q_0^* \gg 0$. Согласно п. 1. оператор $-\mathcal{A}$ является генератором C_0 -полугруппы сжимающих операторов. Запишем оператор $\mathcal{A}$ относительно разложения $\mathcal{H} = H \oplus H_0 \oplus \hat{H}$, где $\hat{H} := (\oplus_{l=1}^m H_l)$, в следующем виде (см. (1.10)):

$$\mathcal{A} = \text{diag}(A^{1/2}, I, \hat{I}) \begin{pmatrix} 0 & Q_0^* & \hat{Q}^* \\ -Q_0 & 0 & 0 \\ -\hat{Q} & 0 & \hat{G} \end{pmatrix} \text{diag}(A^{1/2}, I, \hat{I}), \quad (1.24)$$

$$\hat{Q} := (Q_1, \dots, Q_m)^\tau, \quad \hat{G} := \text{diag}(b_1 I, \dots, b_m I), \quad \hat{I} := \text{diag}(I, \dots, I),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ \xi = (u; u_0; \hat{u})^\tau \in \mathcal{H} \mid u \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad Q_0^* u_0 + \hat{Q}^* \hat{u} \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \right\}$$

и покажем, что $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

С использованием (1.8) преобразуем средний операторный блок в (1.24):

$$\begin{pmatrix} 0 & Q_0^* & \hat{Q}^* \\ -Q_0 & 0 & 0 \\ -\hat{Q} & 0 & \hat{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & \hat{Q}^* \hat{G}^{-1} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \hat{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{Q}^* \hat{G}^{-1} \hat{Q} & Q_0^* & 0 \\ -Q_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -\hat{G}^{-1} \hat{Q} & 0 & \hat{I} \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Для любых $\hat{u} \in \hat{H}$ имеет место оценка:

$$(\hat{Q}^* \hat{G}^{-1} \hat{Q} \hat{u}, \hat{u})_{\hat{H}} = (\hat{G}^{-1} \hat{Q} \hat{u}, \hat{Q} \hat{u})_{\hat{H}} \geq \min_{l=1, m} \left\{ \frac{1}{b_l} \right\} \cdot \gamma \left(\sum_{l=1}^m Q_l^* Q_l \right) \cdot \|\hat{u}\|_{\hat{H}}^2,$$

где $\gamma(\sum_{l=1}^m Q_l^* Q_l) > 0$ — нижняя грань оператора $\sum_{l=1}^m Q_l^* Q_l$. Следовательно, существует $[\hat{Q}^* \hat{G}^{-1} \hat{Q}]^{-1} \in \mathcal{L}(\hat{H})$. Далее, для любых $u_0 \in H_0$ имеет место оценка:

$$(Q_0 [\hat{Q}^* \hat{G}^{-1} \hat{Q}]^{-1} Q_0^* u_0, u_0)_{H_0} \geq \gamma([\hat{Q}^* \hat{G}^{-1} \hat{Q}]^{-1}) \cdot \gamma(Q_0 Q_0^*) \cdot \|u_0\|_{H_0}^2,$$

где $\gamma([\hat{Q}^* \hat{G}^{-1} \hat{Q}]^{-1}) > 0$, $\gamma(Q_0 Q_0^*) > 0$ — нижние грани соответствующих операторов. Следовательно, существует $(Q_0 [\hat{Q}^* \hat{G}^{-1} \hat{Q}]^{-1} Q_0^*)^{-1} \in \mathcal{L}(H_0)$.

Используя (1.9) и проведенные рассуждения, обратим часть среднего опе-

раторного блока в правой части (1.25):

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \widehat{Q}^* \widehat{G}^{-1} \widehat{Q} & Q_0^* \\ -Q_0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} &= \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ -Q_0 [\widehat{Q}^* \widehat{G}^{-1} \widehat{Q}]^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{Q}^* \widehat{G}^{-1} \widehat{Q} & 0 \\ 0 & Q_0 [\widehat{Q}^* \widehat{G}^{-1} \widehat{Q}]^{-1} Q_0^* \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \times \left. \begin{pmatrix} I & [\widehat{Q}^* \widehat{G}^{-1} \widehat{Q}]^{-1} Q_0^* \\ 0 & I \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} I & -[\widehat{Q}^* \widehat{G}^{-1} \widehat{Q}]^{-1} Q_0^* \\ 0 & I \end{pmatrix} \times \\
&\quad \times \begin{pmatrix} [\widehat{Q}^* \widehat{G}^{-1} \widehat{Q}]^{-1} & 0 \\ 0 & (Q_0 [\widehat{Q}^* \widehat{G}^{-1} \widehat{Q}]^{-1} Q_0^*)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q_0 [\widehat{Q}^* \widehat{G}^{-1} \widehat{Q}]^{-1} & I \end{pmatrix} =: \\
&=: \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{11} &:= C - C Q_0^* (Q_0 C Q_0^*)^{-1} Q_0 C, \quad C_{12} := -C Q_0^* (Q_0 C Q_0^*)^{-1}, \\
C_{21} &:= (Q_0 C Q_0^*)^{-1} Q_0 C, \quad C_{22} := (Q_0 C Q_0^*)^{-1}, \quad C := \left[\sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} Q_l^* Q_l \right]^{-1}.
\end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 1.3. Найдём представление для оператора C_{11} . По теореме [115, гл. 8, § 1, теорема 2] о полярном разложении плотно определенного замкнутого оператора существует единственный частично изометричный оператор U , действующий из H_0 в H , такой, что

$$\begin{aligned}
Q_0 C^{1/2} &= (Q_0 C Q_0^*)^{1/2} U^*, \quad C^{1/2} Q_0^* = U (Q_0 C Q_0^*)^{1/2}, \\
U^* U &= I, \quad U U^* = P, \quad P = P^2 = P^*, \quad P H = H \ominus \text{Ker}(Q_0 C^{1/2}).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
C_{11} &:= C - C Q_0^* (Q_0 C Q_0^*)^{-1} Q_0 C = C^{1/2} (I - P) C^{1/2} = C^{1/2} P_0 C^{1/2}, \\
P_0 &:= I - P, \quad P_0 = P_0^2 = P_0^*, \quad P_0 H = \text{Ker}(Q_0 C^{1/2}). \blacktriangleright
\end{aligned} \quad (1.27)$$

Из (1.24), (1.25), (1.26) теперь получим, что

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \widehat{G}^{-1} \widehat{Q} & 0 & \widehat{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{G}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & -\widehat{Q}^* \widehat{G}^{-1} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{I} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \quad (1.28)$$

3. Покажем, что оператор $-\mathcal{A}$ генерирует равномерно экспоненциально устойчивую C_0 -полугруппу.

С учетом (1.28) зафиксируем $0 < r < \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1}$, тогда

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq r\}} \|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} &= \sup_{\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq r\}} \|(\mathcal{I} - \lambda \mathcal{A}^{-1})^{-1} \mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \\ &\leq \sup_{\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq r\}} \frac{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}}{1 - |\lambda| \cdot \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}} \leq \frac{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}}{1 - r \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Предположим, что (1.21) не имеет места. Тогда, учитывая (1.29), существуют последовательности $\{\xi_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ и $\{\beta_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ такие, что

$$\|\xi_k\|_{\mathcal{H}} = 1, \quad |\beta_k| > r, \quad \|\mathcal{A}\xi_k - i\beta_k\xi_k\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow +\infty).$$

Отсюда и из (1.24) имеем

$$\begin{cases} A^{1/2}[Q_0^*u_{0k} + \widehat{Q}^*\widehat{u}_k] - i\beta_k u_k =: v_k, \\ -Q_0 A^{1/2}u_k - i\beta_k u_{0k} =: v_{0k}, \\ -\widehat{Q} A^{1/2}u_k + (\widehat{G} - i\beta_k)\widehat{u}_k =: \widehat{v}_k, \end{cases} \quad (1.30)$$

$$\|v_k\|_H \rightarrow 0, \quad \|v_{0k}\|_{H_0} \rightarrow 0, \quad \|\widehat{v}_k\|_{\widehat{H}} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow +\infty),$$

$$\|u_k\|_H^2 + \|u_{0k}\|_{H_0}^2 + \|\widehat{u}_k\|_{\widehat{H}}^2 = 1, \quad |\beta_k| > r \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Умножим правую и левую части первого уравнения в системе из (1.30) скалярно на элемент u_k справа, второго уравнения — на элемент u_{0k} , а третьего уравнения — на элемент $\widehat{u}_k$. Преобразуем первое из полученных соотношений с помощью второго и третьего. Получим

$$i\beta_k \left[-\|u_k\|_H^2 + \|u_{0k}\|_{H_0}^2 + \|\widehat{u}_k\|_{\widehat{H}}^2 \right] + \|\widehat{G}^{1/2}\widehat{u}_k\|_{\widehat{H}}^2 = (v_k, u_k)_H + (u_{0k}, v_{0k})_{H_0} + (\widehat{u}_k, \widehat{v}_k)_{\widehat{H}}.$$

Выделяя действительную и мнимую части из последнего соотношения, найдем, что

$$\begin{aligned} -\|u_k\|_H^2 + \|u_{0k}\|_{H_0}^2 + \|\widehat{u}_k\|_{\widehat{H}}^2 &= \beta_k^{-1} \operatorname{Im} \left[(v_k, u_k)_H + (u_{0k}, v_{0k})_{H_0} + (\widehat{u}_k, \widehat{v}_k)_{\widehat{H}} \right], \\ \gamma(\widehat{G}) \cdot \|\widehat{u}_k\|_{\widehat{H}}^2 &\leq \|\widehat{G}^{1/2}\widehat{u}_k\|_{\widehat{H}}^2 = \operatorname{Re} \left[(v_k, u_k)_H + (u_{0k}, v_{0k})_{H_0} + (\widehat{u}_k, \widehat{v}_k)_{\widehat{H}} \right], \end{aligned} \quad (1.31)$$

где $\gamma(\widehat{G}) = \min_{l=\overline{1,m}} \{b_l\} = b_1 > 0$ — нижняя грань оператора $\widehat{G}$ (см. (1.24)).

Из (1.30) и (1.31) теперь получим, что

$$\|u_k\|_H^2 \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \|u_{0k}\|_{H_0}^2 \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \|\widehat{u}_k\|_{\widehat{H}}^2 \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow +\infty). \quad (1.32)$$

Далее, из третьего соотношения в системе из (1.30) найдем, что

$$\begin{aligned} \|\widehat{u}_k - (\widehat{G} - i\beta_k)^{-1}\widehat{v}_k\|_{\widehat{H}}^2 &= \|(\widehat{G} - i\beta_k)^{-1}\widehat{Q}A^{1/2}u_k\|_{\widehat{H}}^2 = \\ &= ((\widehat{G}^2 + \beta_k^2)^{-1}\widehat{Q}A^{1/2}u_k, \widehat{Q}A^{1/2}u_k)_{\widehat{H}} = \frac{1}{\beta_k^2}((\widehat{I} + \frac{1}{\beta_k^2}\widehat{G}^2)^{-1}\widehat{Q}A^{1/2}u_k, \widehat{Q}A^{1/2}u_k)_{\widehat{H}} \geq \\ &\geq \gamma((\widehat{I} + \frac{1}{\beta_k^2}\widehat{G}^2)^{-1}) \cdot \gamma(\widehat{Q}^*\widehat{Q}) \cdot \frac{\|A^{1/2}u_k\|_H^2}{\beta_k^2}, \end{aligned}$$

где $\gamma(\widehat{Q}^*\widehat{Q}) > 0$, $\gamma((\widehat{I} + \beta_k^{-2}\widehat{G}^2)^{-1}) \geq \gamma_0 > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, поскольку $|\beta_k| > r$.

Из последнего соотношения, (1.30) и (1.32) получим, что

$$\frac{\|A^{1/2}u_k\|_H^2}{\beta_k^2} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow +\infty). \quad (1.33)$$

Теперь из второго соотношения в системе из (1.30) и (1.33) получим противоречие с (1.32):

$$\begin{aligned} \|u_{0k}\|_{H_0}^2 &= \left\| -\frac{1}{i\beta_k}Q_0A^{1/2}u_k - \frac{1}{i\beta_k}v_{0k} \right\|_{H_0}^2 \leq \frac{2}{\beta_k^2}\|Q_0A^{1/2}u_k\|_{H_0}^2 + \frac{2}{\beta_k^2}\|v_{0k}\|_{H_0}^2 \leq \\ &\leq 2\|Q_0\|_{\mathcal{L}(H,H_0)}^2 \cdot \frac{\|A^{1/2}u_k\|_H^2}{\beta_k^2} + \frac{2}{\beta_k^2}\|v_{0k}\|_{H_0}^2 \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Таким образом, согласно теореме Л. Герхарта, оператор $-\mathcal{A}$ генерирует равномерно экспоненциально устойчивую C_0 -полугруппу $\mathcal{U}(t)$, то есть полугруппу, удовлетворяющую оценке (1.6). Теорема доказана. $\blacksquare$

З а м е ч а н и е 1.4. Теорема 1.2 останется справедливой если в конструкции оператора $\mathcal{A}$ (см. (1.24)) оператор $\widehat{G}$ будет ограничен ($\widehat{G} \in \mathcal{L}(\widehat{H})$) и равномерно аккретивен:

$$\exists \gamma > 0 : \quad \operatorname{Re}(\widehat{G}\widehat{u}, \widehat{u})_{\widehat{H}} \geq \gamma\|\widehat{u}\|_{\widehat{H}}^2 \quad \forall \widehat{u} \in \widehat{H}. \blacktriangleright$$

1.3. Асимптотика решений некоторых систем операторных уравнений гиперболического типа

1.3.1. Асимптотика решений неполных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка при нагрузках специального вида

Рассмотрим задачу Коши для неполного интегро-дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве H :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -Au + \sum_{l=1}^m \int_0^t \exp(-b_l(t-s)) C_l^* C_l u(s) ds + f(t), \quad (1.34)$$

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1,$$

где оператор A самосопряжен и положительно определен, а оператор C_l , действующий из H в гильбертово пространство H_l , плотно определен и замкнут при каждом $l = \overline{1, m}$. Как и в § 1.2, будем считать, что числа b_l ($l = \overline{1, m}$) положительны, различны и упорядочены: $0 =: b_0 < b_1 < b_2 < \dots < b_m$.

Пусть $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(C_l^* C_l)$ ($l = \overline{1, m}$), существуют числа $a_1 \in (0, 1)$, $a_2 > 0$ и номер $q \in \{1, \dots, m\}$ такие, что выполнены следующие неравенства:

$$\sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} \|C_l u\|_{H_l}^2 \leq a_1 \|A^{1/2} u\|_H^2, \quad \|C_q u\|_{H_q}^2 \geq a_2 \|A^{1/2} u\|_H^2 \quad \forall u \in \mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{D}(C_q). \quad (1.35)$$

Введем операторы $Q_l := b_l^{-1/2} C_l A^{-1/2}$, $Q_l^+ := b_l^{-1/2} A^{-1/2} C_l^*$ ($l = \overline{1, m}$). Из неравенств (1.35) следует, что $Q_l \in \mathcal{L}(H, H_l)$, а оператор Q_l^+ расширяется по непрерывности до оператора $Q_l^* \in \mathcal{L}(H, H_l)$. Из (1.35) также следует, что $I - \sum_{l=1}^m Q_l^* Q_l \gg 0$. Действительно, для любого $u \in H$

$$\left(\left[I - \sum_{l=1}^m Q_l^* Q_l \right] u, u \right)_H = \|u\|_H^2 - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} \|C_l A^{-1/2} u\|_{H_l}^2 \geq (1 - a_1) \|u\|_H^2.$$

Введем оператор $Q_0 := (I - \sum_{l=1}^m Q_l^* Q_l)^{1/2}$. Определим теперь число ω_0 по формуле (1.5).

О п р е д е л е н и е 1.1. *Сильным решением* задачи Коши (1.34) назовем функцию $u \in C^2(\mathbb{R}_+; H)$ такую, что 1) $u(t) \in \mathcal{D}(A)$, $u'(t) \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$ и Au , $A^{1/2}u' \in C(\mathbb{R}_+; H)$, 2) в (1.34) выполнено уравнение для любого $t \in \mathbb{R}_+$ и начальные условия.

Здесь и далее $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$.

Т е о р е м а 1.3. 1. *Задача Коши (1.34) имеет единственное сильное решение, если $u^0 \in \mathcal{D}(A)$, $u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $f \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$, а операторы в уравнении удовлетворяют условиям (1.35).*

2. *Если к тому же $f(t) = g(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} f_k(t)$, где $g, f_k \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n}$ ненулевые, то для любого $\omega \in (0, \omega_0)$ существуют константы $M_k = M_k(M, \omega, A, C_l (l = \overline{1, m})) \geq 1$ ($k = 1, 2$) такие, что при $t \in \mathbb{R}_+$*

$$\begin{aligned} & \left\| A^{1/2} \left(u(t) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right) \right\|_H^2 + \\ & \quad + \left\| u'(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right\|_H^2 \leq \\ & \leq M_1 e^{-2\omega t} \left[\|A^{1/2} u^0\|_H^2 + \|u^1\|_H^2 + \sum_{k=0}^n \|f_k(0)\|_H^2 \right] + \\ & \quad + M_2 \left[\int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left[\|g(s)\|_H + \sum_{k=0}^n \|f'_k(s)\|_H \right] ds \right]^2, \quad (1.36) \end{aligned}$$

$$M(\lambda) := I + \lambda^2 A^{-1} - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \lambda} (C_l A^{-1/2})^* (C_l A^{-1/2}). \quad (1.37)$$

3. В частности,

$$\begin{aligned} & \left\| A^{1/2} \left(u(t) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right) \right\|_H^2 + \\ & \quad + \left\| u'(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right\|_H^2 \rightarrow 0, \quad (1.38) \end{aligned}$$

если $\|g(t)\|_H \rightarrow 0$, $\|f'_k(t)\|_H \rightarrow 0$, $k = \overline{0, n}$ при $t \rightarrow +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем в несколько шагов.

Отметим, что здесь утверждение о разрешимости является следствием теоремы 5.5, однако может быть доказано и другими способами. Возможно, например, использование утверждений из [129], [152], [162, гл. 11, § 6, п. 4]. Мы сводим задачу (1.34) к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка, чтобы использовать затем свойства соответствующей C_0 -полугруппы.

1. Предположим, что задача (1.34) имеет сильное решение и сведем ее к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка.

Пусть $u(t)$ сильное решение задачи Коши (1.34) и $u^0 \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \subset \mathcal{D}(C_l)$. Из $A^{1/2}u', A^{1/2}u \in C(\mathbb{R}_+; H)$ следует (см. [55, гл. 3, § 1, п. 1]), что $(A^{1/2}u(t))' = A^{1/2}u'(t)$ и мы можем при каждом $l = \overline{1, m}$ провести следующее преобразование:

$$\int_0^t e^{-b_l(t-s)} b_l Q_l A^{1/2} u(s) ds = Q_l A^{1/2} u(t) - e^{-b_l t} Q_l A^{1/2} u^0 - \int_0^t e^{-b_l(t-s)} Q_l A^{1/2} u'(s) ds.$$

С помощью этого соотношения преобразуем уравнение из (1.34):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} &= -A^{1/2} \left[A^{1/2} u - \sum_{l=1}^m Q_l^* \int_0^t e^{-b_l(t-s)} b_l Q_l A^{1/2} u(s) ds \right] + f(t) = \\ &= -A^{1/2} \left[Q_0^* Q_0 A^{1/2} u + \sum_{l=1}^m Q_l^* \int_0^t e^{-b_l(t-s)} Q_l A^{1/2} u'(s) ds + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^m e^{-b_l t} Q_l^* Q_l A^{1/2} u^0 \right] + f(t). \end{aligned} \quad (1.39)$$

Введем по $u(t)$ следующие функции:

$$\begin{aligned} v(t) &:= u'(t), \quad v_0(t) := Q_0 A^{1/2} u(t), \\ v_l(t) &:= \int_0^t e^{-b_l(t-s)} Q_l A^{1/2} u'(s) ds \quad (l = \overline{1, m}), \end{aligned} \quad (1.40)$$

тогда $v \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$, $v_l \in C^1(\mathbb{R}_+; H_l)$ ($l = \overline{0, m}$, $H_0 := H$). Из (1.39) и (1.40) по-

лучим систему уравнений и начальных условий:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -A^{1/2} \left[Q_0^* v_0 + \sum_{l=1}^m Q_l^* v_l + \sum_{l=1}^m e^{-b_l t} Q_l^* Q_l A^{1/2} u^0 \right] + f(t), \\ \frac{dv_0}{dt} = - \left[-Q_0 A^{1/2} v \right], \\ \frac{dv_l}{dt} = - \left[-Q_l A^{1/2} v + b_l v_l \right], \quad l = \overline{1, m}, \\ v(0) = u^1, \quad v_0(0) = Q_0 A^{1/2} u^0, \quad v_l(0) = 0 \quad (l = \overline{1, m}). \end{cases} \quad (1.41)$$

Эту систему запишем в виде задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = H \oplus (\oplus_{l=0}^m H_l)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -\mathcal{A}(\xi + \xi_{u^0}(t)) + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0, \\ \xi(t) &:= (v(t); w(t))^\tau := (v(t); (v_0(t); v_1(t); \dots; v_m(t)))^\tau, \\ \xi_{u^0}(t) &:= (0; (Q_0^*)^{-1} \sum_{l=1}^m e^{-b_l t} Q_l^* Q_l A^{1/2} u^0; 0; \dots; 0)^\tau, \\ \xi^0 &:= (u^1; Q_0 A^{1/2} u^0; 0; \dots; 0)^\tau, \quad \mathcal{F}(t) := (f(t); 0; 0; \dots; 0)^\tau. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Оператор $\mathcal{A}$ определяется по формулам (1.1)-(1.2) и удовлетворяет теореме 1.1:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) = \begin{pmatrix} 0 & A^{1/2} \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} A^{1/2} & \mathcal{G} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{Q} &:= (Q_0, Q_1, \dots, Q_m)^\tau, \quad \mathcal{G} := \text{diag}(0, b_1 I, \dots, b_m I), \quad \mathcal{I} := \text{diag}(I, I, \dots, I), \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}) &= \left\{ \xi = (v; w)^\tau \in \mathcal{H} \mid v \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \right\}. \end{aligned}$$

2. Осуществим в задаче (1.42) замену $\zeta(t) := \xi(t) + \xi_{u^0}(t)$. Получим задачу

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\mathcal{A}\zeta + \xi'_{u^0}(t) + \mathcal{F}(t), \quad \zeta(0) = \zeta^0 := (u^1; (Q_0^*)^{-1} A^{1/2} u^0; 0; \dots; 0)^\tau. \quad (1.43)$$

По теореме 1.1 оператор $-\mathcal{A}$ генерирует равномерно экспоненциально устойчивую C_0 -полугруппу $\mathcal{U}(t)$. Из условий на начальные данные следует, что $v(0) = u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $\mathcal{Q}^* w(0) = Q_0^* ((Q_0^*)^{-1} A^{1/2} u^0) = A^{-1/2} (A u^0) \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, то есть $\zeta^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Из условия на функцию $f(t)$ следует, что $\xi'_{u^0} + \mathcal{F} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$. Из

теоремы [55, гл. 1, § 6, теорема 6.5] о разрешимости абстрактной задачи Коши следует, что задача Коши (1.43) имеет единственное решение $\zeta(t)$ такое, что $\zeta(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$ и $\mathcal{A}\zeta \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\zeta \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$.

При переходе от задачи Коши (1.34) к (1.42) осуществлялась операция замыкания некоторых операторов. Поясним связь решений этих двух задач.

Построим (единственное) решение задачи (1.42) $\xi(t) := \zeta(t) - \xi_{u^0}(t) = (v(t); v_0(t); v_1(t); \dots; v_m(t))^T$. Тогда имеют место включения

$$\begin{aligned} \xi &\in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}), \quad A^{1/2}v \in C(\mathbb{R}_+; H), \\ A^{1/2} \left[Q_0^* v_0 + \sum_{l=1}^m e^{-b_l t} Q_l^* Q_l A^{1/2} u^0 + \sum_{l=1}^m Q_l^* v_l \right] &\in C(\mathbb{R}_+; H) \end{aligned}$$

и выполнены уравнения системы (1.41).

Определим функцию $u(t) := A^{-1/2} Q_0^{-1} v_0(t)$ и покажем, что $u(t)$ есть (единственное) сильное решение задачи Коши (1.34). Действительно, из (1.41), (1.42) следует, что

$$\begin{aligned} u(0) &= A^{-1/2} Q_0^{-1} v_0(0) = A^{-1/2} Q_0^{-1} (Q_0 A^{1/2} u^0) = u^0, \\ u'(0) &= A^{-1/2} Q_0^{-1} v'_0(0) = A^{-1/2} Q_0^{-1} (Q_0 A^{1/2} v(0)) = v(0) = u^1, \end{aligned}$$

то есть начальные условия выполнены. Далее,

$$u'(t) = A^{-1/2} Q_0^{-1} v'_0(t) = v(t), \quad u''(t) = v'(t), \quad A^{1/2} u'(t) = A^{1/2} v(t),$$

а значит $u'', A^{1/2} u' \in C(\mathbb{R}_+; H)$. Осталось доказать, что $Au \in C(\mathbb{R}_+; H)$ и уравнение из (1.34) выполнено для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Воспользовавшись тем, что $(A^{1/2} u(t))' = A^{1/2} u'(t)$ (см. [55, гл. 3, § 1, п. 1]), из системы (1.41) найдем

$$v_0(t) = Q_0 A^{1/2} u(t), \tag{1.44}$$

$$v_l(t) = Q_l A^{1/2} u(t) - e^{-b_l t} Q_l A^{1/2} u^0 - \int_0^t e^{-b_l(t-s)} b_l Q_l A^{1/2} u(s) ds \quad (l = \overline{1, m}).$$

Из первого уравнения системы (1.41) и (1.44) теперь найдем, что

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 u}{dt^2} &= -A^{1/2} \left[Q_0^* Q_0 A^{1/2} u + \sum_{l=1}^m Q_l^* Q_l A^{1/2} u - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)} b_l Q_l^* Q_l A^{1/2} u(s) ds \right] + f(t) = \\
&= -A^{1/2} \left[A^{1/2} u - \sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)} b_l Q_l^* Q_l A^{1/2} u(s) ds \right] + f(t) = \\
&= -A \left[u - \int_0^t \left\{ \sum_{l=1}^m e^{-b_l(t-s)} b_l A^{-1/2} Q_l^* Q_l A^{1/2} \right\} u(s) ds \right] + f(t). \quad (1.45)
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$u(t) - \int_0^t \left\{ \sum_{l=1}^m e^{-b_l(t-s)} b_l A^{-1/2} Q_l^* Q_l A^{1/2} \right\} u(s) ds =: g(t), \quad (1.46)$$

$$Ag \in C(\mathbb{R}_+; H).$$

Введем на $\mathcal{D}(A)$ норму $\| \cdot \|_{H(A)} := \| A \cdot \|_H$, эквивалентную норме графика оператора A . Полученное банахово пространство обозначим через $H(A)$. Соотношение (1.46) будем рассматривать как уравнение Вольтерра в банаховом пространстве $H(A)$. Из оценки

$$\begin{aligned}
\| b_l A^{-1/2} Q_l^* Q_l A^{1/2} u \|_{H(A)} &= \| b_l A^{1/2} Q_l^* Q_l A^{-1/2} (Au) \|_H = \\
&= \| b_l^{1/2} A^{1/2} Q_l^* C_l A^{-1} (Au) \|_H = \| b_l^{1/2} A^{1/2} Q_l^* \|_{\mathcal{D}(C_l^*)} \| C_l A^{-1} (Au) \|_H = \\
&= \| C_l^* C_l A^{-1} (Au) \|_H \leq \| C_l^* C_l A^{-1} \|_{\mathcal{L}(H)} \cdot \| u \|_{H(A)} \quad \forall u \in H(A)
\end{aligned}$$

следует, что ядро интегрального уравнения (1.46) есть непрерывная оператор-функция со значениями в $\mathcal{L}(H(A))$. Из условия $g \in C(\mathbb{R}_+; H(A))$ следует, что уравнение (1.46) имеет единственное решение $u \in C(\mathbb{R}_+; H(A) = \mathcal{D}(A))$. Следовательно, $Au \in C(\mathbb{R}_+; H)$ и из (1.45) следует уравнение из (1.34).

3. Докажем неравенство (1.36). Пусть $f(t) = g(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} f_k(t)$, где $g, f_k \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n}$ ненулевые. Представим функцию $\mathcal{F}(t)$

из (1.42), (1.43) следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(t) &= \mathcal{T}(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{F}_k(t), \quad \mathcal{T}(t) := (g(t); 0; 0; \dots; 0)^\tau, \\ \mathcal{F}_k(t) &:= (f_k(t); 0; 0; \dots; 0)^\tau \quad (k = \overline{0, n}),\end{aligned}\tag{1.47}$$

где $\mathcal{T}, \mathcal{F}_k \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $k = \overline{0, n}$. Из (1.11), (1.23) и (1.1) найдем:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0(t) &= \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}_0(t) = (0; (Q_0^*)^{-1}A^{-1/2}f_0(t); 0; \dots; 0)^\tau, \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) &= (A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}f_k(t); \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}f_k(t))^\tau = \\ &= (A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}f_k(t); \frac{1}{-\lambda}Q_0L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}f_k(t); \frac{1}{b_1 - \lambda}Q_1L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}f_k(t); \\ &\quad \dots; \frac{1}{b_m - \lambda}Q_mL^{-1}(\lambda)A^{-1/2}f_k(t))^\tau \quad \forall \lambda \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad k = \overline{1, n}.\end{aligned}\tag{1.48}$$

Пусть $u(t)$ сильное решение задачи Коши (1.34). Из представления $Q_0^*Q_0 = I - \sum_{l=1}^m Q_l^*Q_l$, из (1.37), (1.47), (1.48), (1.40), (1.42) получим после простых вычислений, что при $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}&\left\| A^{1/2} \left(u(t) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right) \right\|_H^2 + \\ &\quad + \left\| u'(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right\|_H^2 = \\ &= \left\| u'(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A^{-1/2} \left[I - \sigma_k^2 A^{-1} - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - i\sigma_k} (C_l A^{-1/2})^* (C_l A^{-1/2}) \right]^{-1} A^{-1/2} f_k(t) \right\|_H^2 + \\ &\quad + \left\| A^{1/2} \left(u(t) - A^{-1/2} \left[I - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} (C_l A^{-1/2})^* (C_l A^{-1/2}) \right]^{-1} A^{-1/2} f_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} \left[I - \sigma_k^2 A^{-1} - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - i\sigma_k} (C_l A^{-1/2})^* (C_l A^{-1/2}) \right]^{-1} A^{-1/2} f_k(t) \right\|_H^2 =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| u'(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A^{-1/2} \left[I - \sigma_k^2 A^{-1} - \sum_{l=1}^m \frac{b_l}{b_l - i\sigma_k} Q_l^* Q_l \right]^{-1} A^{-1/2} f_k(t) \right\|_H^2 + \\
&\quad + \left\| A^{1/2} \left(u(t) - A^{-1/2} \left[I - \sum_{l=1}^m Q_l^* Q_l \right]^{-1} A^{-1/2} f_0(t) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} \left[I - \sigma_k^2 A^{-1} - \sum_{l=1}^m \frac{b_l}{b_l - i\sigma_k} Q_l^* Q_l \right]^{-1} A^{-1/2} f_k(t) \right) \right\|_H^2 = \\
&= \left\| u'(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} \left[-i\sigma_k A^{-1} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{-i\sigma_k} Q_0^* Q_0 + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - i\sigma_k} Q_l^* Q_l \right]^{-1} A^{-1/2} f_k(t) \right\|_H^2 + \\
&\quad + \left\| A^{1/2} \left(u(t) - A^{-1/2} (Q_0^* Q_0)^{-1} A^{-1/2} f_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \frac{1}{-i\sigma_k} A^{-1/2} \left[-i\sigma_k A^{-1} + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{-i\sigma_k} Q_0^* Q_0 + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - i\sigma_k} Q_l^* Q_l \right]^{-1} A^{-1/2} f_k(t) \right) \right\|_H^2.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (1.1), (1.13) (см. формулу для пучка $L(\lambda)$) получим, что

$$\begin{aligned}
&\left\| A^{1/2} \left(u(t) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right) \right\|_H^2 + \\
&\quad + \left\| u'(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right\|_H^2 = \\
&= \left\| u'(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right\|_H^2 + \\
&\quad + \left\| Q_0^{-1} \left(Q_0 A^{1/2} u(t) - (Q_0^*)^{-1} A^{-1/2} f_0(t) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \frac{1}{-i\sigma_k} Q_0 L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right) \right\|_H^2 \leqslant \\
&\leqslant \left\| v(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right\|_H^2 + \\
&\quad + \|Q_0^{-1}\|^2 \left\| v_0(t) - (Q_0^*)^{-1} A^{-1/2} f_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \frac{1}{-i\sigma_k} Q_0 L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right\|_H^2 + \\
&\quad + \sum_{l=1}^m \left\| v_l(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \frac{1}{b_l - i\sigma_k} Q_l L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right\|_H^2 \leqslant
\end{aligned}$$

$$\leq \max\{1, \|Q_0^{-1}\|^2\} \cdot \left\| \xi(t) - \mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) \right\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (1.49)$$

Напомним, что по теореме 1.1 оператор $-\mathcal{A}$ — генератор равномерно экспоненциально устойчивой C_0 -полугруппы $\mathcal{U}(t)$, удовлетворяющей неравенству (1.6). Будем искать (единственное) решение задачи (1.43) при $\mathcal{F}(t) = \mathcal{T}(t) + \mathcal{F}_0(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{F}_k(t)$ в виде $\zeta(t) = \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) + \eta(t)$. Тогда функция $\eta(t)$ будет решением задачи

$$\frac{d\eta}{dt} = -\mathcal{A}\eta + \xi'_{u^0}(t) + \mathcal{T}(t) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}'_k(t), \quad (1.50)$$

$$\eta(0) = \zeta^0 - \sum_{k=0}^n \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \quad (1.51)$$

Из (1.50)-(1.51) и $\xi(t) := \zeta(t) - \xi_{u^0}(t)$ найдем, что

$$\begin{aligned} \xi(t) = & \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) - \xi_{u^0}(t) + \mathcal{U}(t) \left(\zeta^0 - \sum_{k=0}^n \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0) \right) + \\ & + \int_0^t \mathcal{U}(t-s) \left(\xi'_{u^0}(s) + \mathcal{T}(s) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k s} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}'_k(s) \right) ds. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Из (1.52), (1.47) и (1.6) найдем, что

$$\begin{aligned} & \left\| \xi(t) - \mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \\ & = \left\| \mathcal{U}(t) \left(\zeta^0 - \sum_{k=0}^n \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0) \right) - \xi_{u^0}(t) + \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t \mathcal{U}(t-s) \left(\xi'_{u^0}(s) + \mathcal{T}(s) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k s} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}'_k(s) \right) ds \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \\ & \leq \left[M e^{-\omega t} \left(\|\zeta^0\|_{\mathcal{H}} + \sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_{\lambda}(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sum_{k=0}^n \|f_k(0)\|_H \right) + \|\xi_{u^0}(t)\|_{\mathcal{H}} + \right. \\ & \quad \left. + M \int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left(\|\xi'_{u^0}(s)\|_{\mathcal{H}} + \|g(s)\|_H + \sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_{\lambda}(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sum_{k=0}^n \|f'_k(s)\|_H \right) ds \right]^2. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Используя формулы для $\xi_{u^0}(t)$ и ζ^0 (см. (1.42), (1.43)), из (1.53) найдем

$$\begin{aligned}
& \left\| \xi(t) - \mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \\
& \leq \left[M e^{-\omega t} \left(\|u^1\|_H^2 + \|(Q_0^*)^{-1}\|^2 \|A^{1/2}u^0\|_H^2 \right)^{1/2} + \right. \\
& \quad + M e^{-\omega t} \sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sum_{k=0}^n \|f_k(0)\|_H + \\
& \quad + M e^{-\omega t} \|A^{1/2}u^0\|_H \sum_{l=1}^m \|(Q_0^*)^{-1}Q_l^*Q_l\| \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \left\{ \frac{1}{M} e^{-(b_l - \omega)t} + \int_0^t b_l e^{-(b_l - \omega)s} ds \right\} + \\
& \quad \left. + M \int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left(\|g(s)\|_H + \sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sum_{k=0}^n \|f'_k(s)\|_H \right) ds \right]^2 \leq \\
& \leq N e^{-2\omega t} \left(\|A^{1/2}u^0\|_H^2 + \|u^1\|_H^2 + \sum_{k=0}^n \|f_k(0)\|_H^2 \right) + \\
& \quad + (n+4)M^2 \left[\int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left(\|g(s)\|_H + \sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sum_{k=0}^n \|f'_k(s)\|_H \right) ds \right]^2, \\
& \tag{1.54}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N := (n+4)M^2 \max \left\{ 1, \|(Q_0^*)^{-1}\|^2 + \sum_{l=1}^m \|(Q_0^*)^{-1}Q_l^*Q_l\| \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \left\{ \frac{1}{M} e^{-(b_l - \omega)t} + \right. \right. \\
\left. \left. + \int_0^t b_l e^{-(b_l - \omega)s} ds \right\}, \sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2 \right\}. \tag{1.55}
\end{aligned}$$

Из (1.49), (1.54), (1.55) следует (1.36) с константами

$$M_1 = N \max\{1, \|Q_0^{-1}\|^2\},$$

$$M_2 = (n+4)M^2 \max\{1, \sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2\} \cdot \max\{1, \|Q_0^{-1}\|^2\}.$$

4. Докажем формулу (1.38). Пусть $\|g(t)\|_H \rightarrow 0$, $\|f'_k(t)\|_H \rightarrow 0$ ($k = \overline{0, n}$) при $t \rightarrow +\infty$. Достаточно доказать, что интегральное слагаемое в (1.36) стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Обозначим $h(t) := \|g(t)\|_H + \sum_{k=0}^n \|f'_k(t)\|_H$. Фик-

сируем $\varepsilon > 0$ и выберем последовательно числа $t_{\varepsilon,1}$ и $t_{\varepsilon,2}$ следующим образом:

$$t_{\varepsilon,1} > 0 : \sup_{t \geq t_{\varepsilon,1}} h(t) < \frac{\varepsilon \omega}{2}, \quad t_{\varepsilon,2} := \frac{1}{\omega} \ln \left[\frac{2}{\varepsilon \omega} (e^{\omega t_{\varepsilon,1}} - 1) \sup_{t \geq 0} h(t) \right].$$

Теперь для любого $t \geq t(\varepsilon) := \max\{t_{\varepsilon,1}, t_{\varepsilon,2}\}$ найдем, что

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\omega(t-s)} h(s) ds &= \int_0^{t_{\varepsilon,1}} e^{-\omega(t-s)} h(s) ds + \int_{t_{\varepsilon,1}}^t e^{-\omega(t-s)} h(s) ds \leq \\ &\leq \frac{e^{-\omega t}}{\omega} (e^{\omega t_{\varepsilon,1}} - 1) \sup_{t \geq 0} h(t) + \frac{1}{\omega} \sup_{t \geq t_{\varepsilon,1}} h(t) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема доказана. ■

1.3.2. Асимптотика решений специальной системы

интегро-дифференциальных уравнений первого порядка при нагрузках специального вида

Рассмотрим абстрактную задачу Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка в гильбертовых пространствах H и H_0 :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + B^* u_0 + \sum_{l=1}^m \int_0^t \exp(-b_l(t-s)) C_l^* C_l u(s) ds = f(t), \\ \frac{du_0}{dt} - Bu = 0, \quad u(0) = u^0, \quad u_0(0) = u_0^0, \end{cases} \quad (1.56)$$

где оператор B действует из H в H_0 , плотно определен и замкнут, а оператор C_l , действующий из H в гильбертово пространство H_l , плотно определен и замкнут при каждом $l = \overline{1, m}$. Как и в § 1.2, будем считать, что числа b_l ($l = \overline{1, m}$) положительны, различны и упорядочены: $0 =: b_0 < b_1 < b_2 < \dots < b_m$.

Пусть A такой самосопряженный положительно определенный в H оператор, что $\mathcal{D}(A^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B)$, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(C_l^* C_l)$ ($l = \overline{1, m}$).

Введем операторы $Q_0 := BA^{-1/2}$, $Q_l := C_l A^{-1/2}$ ($l = \overline{1, m}$). Из неравенства Гайнца [55, гл. 1, § 7, теорема 7.1] найдем, что $Q_l \in \mathcal{L}(H, H_l)$.

С использованием введенных операторов Q_l ($l = \overline{0, m}$) запишем задачу (1.56) в следующей расширенной форме:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + A^{1/2} \left\{ Q_0^* u_0 + \sum_{l=1}^m Q_l^* \int_0^t \exp(-b_l(t-s)) Q_l A^{1/2} u(s) ds \right\} = f(t), \\ \frac{du_0}{dt} - Q_0 A^{1/2} u = 0, \quad u(0) = u^0, \quad u_0(0) = u_0^0. \end{cases} \quad (1.57)$$

О п р е д е л е н и е 1.2. Функции $u \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R}_+; H_0)$ назовем *решением* задачи (1.57), если 1) $u(t) \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $u_0(t) \in H_0$ при любом $t \in \mathbb{R}_+$, выражение в фигурных скобках принимает значения из $\mathcal{D}(A^{1/2})$ и $A^{1/2}\{\dots\} \in C(\mathbb{R}_+; H)$, 2) в (1.57) выполнены уравнения для любого $t \in \mathbb{R}_+$ и начальные условия.

Т е о р е м а 1.4. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Пусть $\sum_{l=0}^m Q_l^* Q_l \gg 0$, $u^0 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $u_0^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, $f \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$. Тогда решение задачи (1.57) существует и единственно.
2. Пусть $\sum_{l=1}^m Q_l^* Q_l \gg 0$, $Q_0 Q_0^* \gg 0$, $f(t) = g(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} f_k(t)$, где $g, f_k \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n}$ ненулевые. Тогда существуют абсолютные константы $\omega > 0$, $M_0 \geq 1$ такие, что при $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} & \left\| u(t) - A^{-1/2} C^{1/2} P_0 C^{1/2} A^{-1/2} f_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right\|_H^2 + \\ & + \left\| u_0(t) - (Q_0 C Q_0^*)^{-1} Q_0 C A^{-1/2} f_0(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \frac{1}{i\sigma_k} Q_0 L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right\|_{H_0}^2 \leq \\ & \leq M_0 e^{-2\omega t} \left[\|u^0\|_H^2 + \|u_0^0\|_{H_0}^2 + \sum_{k=0}^n \|f_k(0)\|_H^2 \right] + \\ & + M_0 \left[\int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left[\|g(s)\|_H + \sum_{k=0}^n \|f'_k(s)\|_H \right] ds \right]^2, \quad (1.58) \end{aligned}$$

$$C := \left[\sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} Q_l^* Q_l \right]^{-1}, \quad L(\lambda) := -\lambda A_0^{-1} - \frac{1}{\lambda} Q_0^* Q_0 + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \lambda} Q_l^* Q_l,$$

где P_0 — ортопроектор пространства H на $\text{Ker}(Q_0 C^{1/2})$.

3. В частности,

$$\begin{aligned} & \left\| u(t) - A^{-1/2} C^{1/2} P_0 C^{1/2} A^{-1/2} f_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right\|_H^2 + \\ & + \left\| u_0(t) - (Q_0 C Q_0^*)^{-1} Q_0 C A^{-1/2} f_0(t) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \frac{1}{i\sigma_k} Q_0 L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right\|_{H_0}^2 \rightarrow 0, \quad (1.59) \end{aligned}$$

если $\|g(t)\|_H \rightarrow 0$, $\|f'_k(t)\|_H \rightarrow 0$ ($k = \overline{0, n}$) при $t \rightarrow +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем в несколько шагов.

1. Пусть $u(t)$, $u_0(t)$ — решение задачи (1.57) (см. определение 1.2). Определим следующие функции:

$$u_l(t) := \int_0^t e^{-b_l(t-s)} Q_l A^{1/2} u(s) ds \quad (l = \overline{1, m}). \quad (1.60)$$

Функции $u_l(t)$ ($l = \overline{1, m}$) непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}_+$. Продифференцированные соотношения (1.60) и преобразованные уравнения системы (1.57) составляют следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -A^{1/2} \left[Q_0^* u_0 + \sum_{l=1}^m Q_l^* u_l \right] + f(t), \\ \frac{du_0}{dt} = - \left[-Q_0 A^{1/2} u \right], \\ \frac{du_l}{dt} = - \left[-Q_l A^{1/2} u + b_l u_l \right] \quad (l = \overline{1, m}), \\ u(0) = u^0, \quad u_0(0) = u_0^0, \quad u_l(0) = 0 \quad (l = \overline{1, m}). \end{cases} \quad (1.61)$$

Систему (1.61) запишем в виде задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = H \oplus (\oplus_{l=0}^m H_l)$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0. \quad (1.62)$$

$$\xi(t) := (u(t); w(t))^\tau := (u(t); (u_0(t); u_1(t); \dots; u_m(t))^\tau)^\tau,$$

$$\xi^0 := (u^0; u_0^0; 0; \dots; 0)^\tau, \quad \mathcal{F}(t) := (f(t); 0; 0; \dots; 0)^\tau.$$

Оператор $\mathcal{A}$ определяется по формулам (1.1)-(1.2):

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) = \begin{pmatrix} 0 & A^{1/2}\mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q}A^{1/2} & \mathcal{G} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{Q} &:= (Q_0, Q_1, \dots, Q_m)^\tau, \quad \mathcal{G} := \text{diag}(0, b_1 I, \dots, b_m I), \quad \mathcal{I} := \text{diag}(I, I, \dots, I), \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}) &= \left\{ \xi = (u; w)^\tau \in \mathcal{H} \mid u \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \right\}.\end{aligned}$$

2. Докажем утверждение о разрешимости задачи (1.57). По теореме 1.2 оператор $-\mathcal{A}$ является генератором сжимающей C_0 -полугруппы. Пусть $u^0 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $u_0^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, $\xi^0 := (u^0; w^0)^\tau$, $w^0 := (u_0^0; 0; \dots; 0)^\tau$. Тогда найдем, что

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \mathcal{Q}^* w^0 = Q_0^* u_0^0 = Q_0^* \Big|_{\mathcal{D}(B^*)} u_0^0 = A^{-1/2} B^* u_0^0 \in \mathcal{D}(A^{1/2}),$$

то есть $\xi^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Из условий теоремы и (1.62) следует, что $\mathcal{F} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$. Из [55, гл. 1, § 6, теорема 6.5] следует, что задача Коши (1.62) имеет единственное решение $\xi \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(\mathcal{A}))$.

Пусть функция $\xi(t)$ — единственное решение задачи Коши (1.62), то есть $\xi(t) = (u(t); w(t))^\tau$, где $w(t) = (u_0(t); u_1(t); \dots; u_m(t))^\tau$, причем $\mathcal{A}\xi \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\xi \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$. Тогда $u(t)$, $u_0(t)$ — решение системы (1.57) в смысле определения 1.2.

3. Пусть $\sum_{l=1}^m Q_l^* Q_l \gg 0$, $Q_0 Q_0^* \gg 0$. Докажем неравенство (1.58). Пусть $f(t) = g(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} f_k(t)$, где $g, f_k \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n}$ ненулевые. Представим функцию $\mathcal{F}(t)$ из (1.62) следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(t) &= \mathcal{T}(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{F}_k(t), \quad \mathcal{T}(t) := (g(t); 0; 0; \dots; 0)^\tau, \\ \mathcal{F}_k(t) &:= (f_k(t); 0; 0; \dots; 0)^\tau \quad (k = \overline{0, n}).\end{aligned}\tag{1.63}$$

Из (1.28) и (1.23) найдем, что

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0(t) &= \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}_0(t) = (A^{-1/2}C_{11}A^{-1/2}f_0(t); C_{21}A^{-1/2}f_0(t); \\
&\quad b_1^{-1}Q_1C_{11}A^{-1/2}f_0(t); \dots; b_m^{-1}Q_mC_{11}A^{-1/2}f_0(t))^\tau, \\
\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) &= (A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}f_k(t); \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}f_k(t))^\tau = \\
&= (A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}f_k(t); \frac{1}{-\lambda}Q_0L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}f_k(t); \\
&\quad \frac{1}{b_1-\lambda}Q_1L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}f_k(t); \frac{1}{b_2-\lambda}Q_2L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}f_k(t); \\
&\quad \dots; \frac{1}{b_m-\lambda}Q_mL^{-1}(\lambda)A^{-1/2}f_k(t))^\tau \quad \forall \lambda \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (1.64)
\end{aligned}$$

Из (1.64) и (1.62) теперь получим, что

$$\begin{aligned}
&\left\| u(t) - A^{-1/2}C_{11}A^{-1/2}f_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2}L^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}f_k(t) \right\|_H^2 + \\
&\quad + \left\| u_0(t) - C_{21}A^{-1/2}f_0(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \frac{1}{i\sigma_k} Q_0L^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}f_k(t) \right\|_{H_0}^2 \leq \\
&\leq \left\| \xi(t) - \mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) \right\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (1.65)
\end{aligned}$$

Напомним, что по теореме 1.2 оператор $-\mathcal{A}$ — генератор равномерно экспоненциально устойчивой C_0 -полугруппы $\mathcal{U}(t)$, удовлетворяющей неравенству (1.6). Будем искать (единственное) решение задачи (1.62) при $\mathcal{F}(t) = \mathcal{T}(t) + \mathcal{F}_0(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{F}_k(t)$ в виде $\xi(t) = \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) + \zeta(t)$. Тогда функция $\zeta(t)$ будет решением задачи Коши

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\mathcal{A}\zeta + \mathcal{T}(t) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}'_k(t), \quad \zeta(0) = \xi^0 - \sum_{k=0}^n \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \quad (1.66)$$

Из (1.66) найдем, что

$$\begin{aligned}
\xi(t) &= \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) + \mathcal{U}(t) \left(\xi^0 - \sum_{k=0}^n \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0) \right) + \\
&\quad + \int_0^t \mathcal{U}(t-s) \left(\mathcal{T}(s) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k s} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}'_k(s) \right) ds,
\end{aligned}$$

а значит, учитывая (1.6), (1.63) и (1.62), что

$$\begin{aligned}
& \left\| \xi(t) - \mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \\
& = \left\| \mathcal{U}(t) \left(\xi^0 - \sum_{k=0}^n \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0) \right) + \right. \\
& \quad \left. + \int_0^t \mathcal{U}(t-s) \left(\mathcal{T}(s) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k s} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}'_k(s) \right) ds \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \\
& \leq \left[M e^{-\omega t} \left(\|\xi^0\|_{\mathcal{H}} + \sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_{\lambda}(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sum_{k=0}^n \|f_k(0)\|_H \right) + \right. \\
& \quad \left. + M \int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left(\|g(s)\|_H + \sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_{\lambda}(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sum_{k=0}^n \|f'_k(s)\|_H \right) ds \right]^2 = \\
& = \left[M e^{-\omega t} \left(\|u^0\|_H^2 + \|u_0^0\|_{H_0}^2 \right)^{1/2} + M e^{-\omega t} \sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_{\lambda}(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sum_{k=0}^n \|f_k(0)\|_H + \right. \\
& \quad \left. + M \int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left(\|g(s)\|_H + \sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_{\lambda}(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sum_{k=0}^n \|f'_k(s)\|_H \right) ds \right]^2 \leq \\
& \leq (n+3)M^2 \max \left\{ 1, \sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_{\lambda}(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2 \right\} e^{-2\omega t} \left(\|u^0\|_H^2 + \|u_0^0\|_{H_0}^2 + \sum_{k=0}^n \|f_k(0)\|_H^2 \right) + \\
& \quad + (n+3)M^2 \left[\int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left(\|g(s)\|_H + \sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_{\lambda}(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sum_{k=0}^n \|f'_k(s)\|_H \right) ds \right]^2.
\end{aligned} \tag{1.67}$$

Из (1.65) и (1.67), с учетом (1.26) и (1.27) (см. замечание 1.3), следует неравенство (1.58) константой

$$M_0 = (n+3)M^2 \max \left\{ 1, \sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_{\lambda}(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2 \right\}.$$

4. Для проверки соотношения (1.59) нужно повторить дословно рассуждения п. 4. доказательства теоремы 1.3. Теорема доказана. $\blacksquare$

1.4. Спектральная задача для генератора и соответствующего операторного пучка, пересчет корневых элементов

1.4.1. О существенном и дискретном спектре оператора $\mathcal{A}$, об асимптотике и локализации спектра

Рассмотрим задачу о спектре оператора $\mathcal{A}$ (см. (1.1)-(1.2)):

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}, \quad (1.68)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр. Всюду далее будем изучать оператор $\mathcal{A}$ в предположении, что $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ и $\mathcal{Q}^*\mathcal{Q} = \sum_{l=0}^m Q_l^*Q_l \gg 0$ (см. (1.1)), так как в рассматриваемых далее приложениях эти условия выполнены.

При $\lambda \notin \{0, b_1, \dots, b_m\} = \sigma(\mathcal{G})$ с (1.68) свяжем спектральную задачу

$$\begin{aligned} L(\lambda)u &:= [-\lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}]u = \\ &= \left[-\lambda A^{-1} - \frac{1}{\lambda} \mathcal{Q}_0^*\mathcal{Q}_0 + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \lambda} \mathcal{Q}_l^*\mathcal{Q}_l \right] u = 0, \quad u \in H. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Т е о р е м а 1.5. Пусть $\mathcal{Q}^*\mathcal{Q} = \sum_{l=0}^m \mathcal{Q}_l^*\mathcal{Q}_l \gg 0$, тогда спектр оператора $\mathcal{A}$, за исключением точек $\{0, b_1, \dots, b_m\} = \sigma(\mathcal{G})$, совпадает со спектром пучка $L(\lambda)$ и расположен симметрично относительно действительной оси.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним здесь формулу для резольвенты оператора $\mathcal{A}$ (см. (1.23)), верную при $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G}) \cup \sigma(L(\lambda))$:

$$\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2} & -A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2} & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})[\mathcal{I} - \mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})] \end{pmatrix}. \quad (1.70)$$

Пусть $\lambda \in \rho(L(\lambda))$, тогда из (1.70) следует, что $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$.

Пусть теперь $\lambda \in \rho(\mathcal{A}) \setminus \sigma(\mathcal{G})$. Предположим, что $\lambda \notin \rho(L(\lambda))$. Тогда $L^{-1}(\lambda)$ существует, однако неограничен.

По теореме о полярном разложении плотно определенного замкнутого оператора [115, гл. 8, § 1, теорема 2, теорема 3] существует единственный частично изометричный оператор $\mathcal{U}$, действующий из H в $\oplus_{l=0}^m H_l$, такой, что

$$\mathcal{Q} = \mathcal{U}(\mathcal{Q}^* \mathcal{Q})^{1/2}, \quad \mathcal{Q}^* = (\mathcal{Q}^* \mathcal{Q})^{1/2} \mathcal{U}^*, \quad \mathcal{U}^* \mathcal{U} = \mathcal{I}, \quad \mathcal{R}(\mathcal{Q}^*) = \mathcal{R}((\mathcal{Q}^* \mathcal{Q})^{1/2}) = H.$$

Отсюда следует, что существует последовательность $\{w_k\}_{k=1}^\infty \subset \oplus_{l=0}^m H_l$ такая, что $\|w_k\| = 1$, $\|L^{-1}(\lambda) \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) w_k\|_H \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q} L^{-1}(\lambda) \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) w_k\|^2 &\geq \|\mathcal{G} - \lambda\|_{\mathcal{L}(\oplus_{l=0}^m H_l)}^{-2} \|\mathcal{Q} L^{-1}(\lambda) \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) w_k\|^2 \geq \\ &\geq \|\mathcal{G} - \lambda\|_{\mathcal{L}(\oplus_{l=0}^m H_l)}^{-2} \gamma(\mathcal{Q}^* \mathcal{Q}) \|L^{-1}(\lambda) \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) w_k\|_H^2 \rightarrow +\infty \quad (k \rightarrow +\infty), \end{aligned}$$

где $\gamma(\mathcal{Q}^* \mathcal{Q}) > 0$ — нижняя грань оператора $\mathcal{Q}^* \mathcal{Q}$. Отсюда и из (1.70) получим противоречие с предположением $\lambda \in \rho(\mathcal{A}) \setminus \sigma(\mathcal{G})$. Таким образом, $\lambda \in \rho(L(\lambda))$.

Из проведенных рассуждений следует, что $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(L(\lambda))$.

Симметричность расположения спектра оператора $\mathcal{A}$ относительно действительной оси следует из самосопряженности пучка $L(\lambda)$: $L^*(\lambda) = L(\bar{\lambda})$ (см. [60, гл. 4, § 30, п. 1]). Теорема доказана. $\blacksquare$

О п р е д е л е н и е 1.3. [44, гл. 5, § 3, п. 2] Числовой областью значений (или полем значений) оператора $\mathcal{A}$ называется множество

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}) := \{(\mathcal{A}\xi, \xi)_{\mathcal{H}} \mid \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \|\xi\|_{\mathcal{H}} = 1\} \subset \mathbb{C}.$$

О п р е д е л е н и е 1.4. [135, гл. 4, § 1, п. 20] Существенным спектром оператора $\mathcal{A}$ называется множество

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{оператор } \mathcal{A} - \lambda \text{ нефредгольмов}\}.$$

Т е о р е м а 1.6. Пусть $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ и $\mathcal{Q}^* \mathcal{Q} = \sum_{l=0}^m Q_l^* Q_l \gg 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $Q_q^* Q_q \gg 0$ при некотором $q \in \{0, 1, \dots, m\}$, то точка b_q может быть

лишь изолированным собственным значением оператора $\mathcal{A}$ конечной либо бесконечной кратности.

2. Для существенного спектра оператора $\mathcal{A}$ справедлива формула

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \setminus \{0, b_1, \dots, b_m\} = \sigma_{ess}(L(\lambda)) \subset [0, b_m]$$

и множество $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$.

3. Имеет место включение $\sigma(\mathcal{A}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \lambda \neq 0\} \subset \Lambda(0)$ и при $Q_0 Q_0^* \gg 0$, $\sum_{l=1}^m Q_l^* Q_l \gg 0$ существует $\beta > 0$ такое, что $\sigma(\mathcal{A}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \lambda \neq 0\} \subset \Lambda(\beta)$, где $\Lambda(\beta) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \beta \leq \operatorname{Re} \lambda < b_m/2\}$.

4. Если собственные значения оператора $(\mathcal{Q}^* \mathcal{Q})^{1/2} A (\mathcal{Q}^* \mathcal{Q})^{1/2}$ имеют степенное асимптотическое распределение, то оператор $\mathcal{A}$ имеет две ветви комплексно сопряженных собственных значений $\{\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A})\}_{k=1}^\infty$, расположенных в полосе $\Lambda(0)$ со следующей асимптотикой при $k \rightarrow +\infty$:

$$\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A}) = \pm i \lambda_k^{1/2} ((\mathcal{Q}^* \mathcal{Q})^{1/2} A (\mathcal{Q}^* \mathcal{Q})^{1/2}) (1 + o(1)).$$

5. Если норма $\|A^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(H)}$ достаточно мала, то ни одна из точек множества $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \setminus \{0, b_1, \dots, b_m\}$ не лежит в замыкании комплексно сопряженных ветвей собственных значений из $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, а при $b_q \in \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ и $\sum_{l \neq q} Q_l^* Q_l \gg 0$ и точка b_q не лежит в этом замыкании.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем в несколько шагов.

1. Запишем уравнение $\mathcal{A}\xi = \lambda\xi$ ($\xi = (u; u_0; u_1; \dots; u_m)^T$) в виде системы:

$$\begin{cases} A^{1/2} \left[Q_0^* u_0 + \sum_{l=1}^m Q_l^* u_l \right] = \lambda u, \\ -Q_0 A^{1/2} u = \lambda u_0, \\ -Q_l A^{1/2} u + b_l u_l = \lambda u_l, \quad l = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (1.71)$$

Пусть $q = 0$ и $Q_0^* Q_0 \gg 0$. Положим в (1.71) $\lambda = b_0 = 0$. Из второго уравнения найдем, что $u = 0$, а из третьего, что $u_l = 0$ ($l = \overline{1, m}$). Теперь из первого

уравнения системы (1.71) получим, что $A^{1/2}Q_0^*u_0 = 0$. Таким образом, точка $b_0 = 0$ может быть собственным значением конечной или бесконечной кратности оператора $\mathcal{A}$. Для доказательства изолированности этой точки запишем пучок $L(\lambda)$ (см. (1.69)) в проколотой окрестности точки $\lambda = 0$ в виде

$$L(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}Q_0^*Q_0\left[I + G_0(\lambda)\right], \quad G_0(\lambda) := \lambda(Q_0^*Q_0)^{-1}\left[\lambda A^{-1} - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \lambda} Q_l^*Q_l\right].$$

Отсюда, из $\|G_0(\lambda)\|_H \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$, теоремы об обращении оператора, близкого к единичному и (1.70) следует требуемое утверждение.

Пусть $q \in \{1, \dots, m\}$ и $Q_q^*Q_q \gg 0$. Положим в (1.71) $\lambda = b_q$. Из третьего уравнения при $l = q$ найдем, что $u = 0$, а из второго уравнения, что $u_0 = 0$. Из третьего уравнения получим, что $u_l = 0$ ($l = 1, \dots, q-1, q+1, \dots, m$). Теперь из первого уравнения системы (1.71) получим, что $A^{1/2}Q_q^*u_q = 0$. Таким образом, точка b_q может быть собственным значением конечной или бесконечной кратности оператора $\mathcal{A}$. Для доказательства изолированности этой точки запишем пучок $L(\lambda)$ (см. (1.69)) в проколотой окрестности точки $\lambda = b_q$ в виде

$$L(\lambda) = \frac{1}{b_q - \lambda}Q_q^*Q_q\left[I + G_q(\lambda)\right],$$

$$G_q(\lambda) := (b_q - \lambda)(Q_q^*Q_q)^{-1}\left[-\lambda A^{-1} - \frac{1}{\lambda}Q_0^*Q_0 + \sum_{l \neq q} \frac{1}{b_l - \lambda} Q_l^*Q_l\right].$$

Отсюда, из $\|G_q(\lambda)\|_H \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow b_q$, теоремы об обращении оператора, близкого к единичному и (1.70) следует требуемое утверждение.

2. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Из (1.70), с учетом (1.69), найдем $(\mathcal{A} + \varepsilon)^{-1} = \mathcal{R}_{-\varepsilon}(\mathcal{A})$:

$$(\mathcal{A} + \varepsilon)^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1/2}L^{-1}(-\varepsilon)A^{-1/2} & -A^{-1/2}L^{-1}(-\varepsilon)Q^*\mathcal{R}_{-\varepsilon}(\mathcal{G}) \\ \mathcal{R}_{-\varepsilon}(\mathcal{G})QL^{-1}(-\varepsilon)A^{-1/2} & \mathcal{R}_{-\varepsilon}(\mathcal{G})[\mathcal{I} - QL^{-1}(-\varepsilon)Q^*\mathcal{R}_{-\varepsilon}(\mathcal{G})] \end{pmatrix}.$$

Отсюда, из $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ и из [44, гл. 4, § 5, п. 6, теорема 5.35] (теорема о сохранении существенного спектра при относительно компактных возмущениях) получим, что $\sigma_{ess}((\mathcal{A} + \varepsilon)^{-1}) = \sigma_{ess}(\text{diag}(0, \mathcal{R}_{-\varepsilon}(\mathcal{G})[\mathcal{I} - QL^{-1}(-\varepsilon)Q^*\mathcal{R}_{-\varepsilon}(\mathcal{G})]))$. Из самосопряженности оператора $\text{diag}(0, \mathcal{R}_{-\varepsilon}(\mathcal{G})[\mathcal{I} - QL^{-1}(-\varepsilon)Q^*\mathcal{R}_{-\varepsilon}(\mathcal{G})])$ и максимальной аккретивности оператора $\mathcal{A}$ следует, что $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}_+$.

Множество $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ является связным, а оператор $\mathcal{A}$ имеет регулярные точки. Отсюда и из [146, гл. 17, § 2, теорема 2.1] (см. также [44, гл. 4, § 5, п. 2, теорема 5.17] — теорема об устойчивости индекса и дефекта замкнутого оператора) следует, что множество $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$.

Из (1.1)-(1.2) найдем, что $0 \leq \operatorname{Re}(\mathcal{A}\xi, \xi)_{\mathcal{H}} \leq b_m \|\xi\|^2$ для любого $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Отсюда следует (см. определение 1.3), что $\mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq b_m\}$. Из [44, гл. 5, § 3, п. 1, теорема 3.2] теперь следует, что $\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq b_m\}$, а значит $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq b_m\} \cap \mathbb{R}_+ = [0, b_m]$.

Покажем, что $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \setminus \{0, b_1, \dots, b_m\} = \sigma_{ess}(L(\lambda))$. Пусть $\lambda \notin \sigma_{ess}(L(\lambda))$. Тогда из [146, гл. 17, § 3, теорема 3.1] (теорема о произведении фредгольмовых операторов) и (1.1) найдем, что оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{A} - \lambda &= \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda A^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

фредгольмов. Следовательно, для существенного спектра оператора $\mathcal{A}$ получаем включение $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \subset \sigma_{ess}(L(\lambda))$.

Предположим теперь, что $\lambda \notin \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ и $\lambda \in \sigma_{ess}(L(\lambda))$. В этом случае получим противоречие, так как регулярные точки, отличные от $0, b_1, \dots, b_m$, и изолированные собственные значения конечной кратности оператора $\mathcal{A}$ являются регулярными точками и изолированными собственными значениями конечной кратности для пучка $L(\lambda)$.

3. Пусть $\lambda^{(+i)} \in \sigma(\mathcal{A}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \lambda \neq 0\}$. Тогда $\lambda^{(+i)}$, являющееся собственным значением оператора $\mathcal{A}$ (см. п. 2 теоремы 1.6), является также собственным значением пучка $L(\lambda)$ (см. (1.69)). То есть, существует $0 \neq u^{(+i)} \in H$ такой, что $L(\lambda^{(+i)})u^{(+i)} = 0$. Умножая последнее равенство скалярно на $u^{(+i)}$, получим

уравнение, которому удовлетворяет $\lambda^{(+i)}$:

$$-\lambda p - \frac{1}{\lambda} q_0 + \sum_{l=1}^m \frac{q_l}{b_l - \lambda} = 0, \quad (1.72)$$

$$p := \frac{\|A^{-1/2}u^{(+i)}\|_H^2}{\|u^{(+i)}\|_H^2}, \quad q_l := \frac{\|Q_l u^{(+i)}\|_{H_l}^2}{\|u^{(+i)}\|_H^2} \quad (l = \overline{0, m}), \quad \sum_{l=0}^m q_l > 0.$$

Уравнение (1.72) имеет не более m действительных положительных корней и еще два корня — пару комплексно сопряженных чисел, либо пару действительных положительных чисел. Рассмотрим ситуацию, когда имеется пара комплексно сопряженных корней $\lambda^{(+i)}$ и $\lambda^{(-i)} := \overline{\lambda^{(+i)}}$. В этом случае обозначим действительные корни уравнения (1.72) через $\lambda^{(l)}$ и запишем (1.72) в виде

$$\begin{aligned} (-1)^m p (\lambda - \lambda^{(+i)})(\lambda - \lambda^{(-i)}) \prod_{l=1}^m (\lambda - \lambda^{(l)}) = \\ = \lambda^{m+2} (-1)^m p + \lambda^{m+1} (-1)^{m+1} p \left[2\operatorname{Re} \lambda^{(\pm i)} + \sum_{l=1}^m \lambda^{(l)} \right] + \dots = 0, \end{aligned} \quad (1.73)$$

где для определенности предполагается, что уравнение (1.72) имеет ровно m действительных положительных корней.

С другой стороны, уравнение (1.72) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \lambda^2 p \prod_{l=1}^m (b_l - \lambda) + q_0 \prod_{l=1}^m (b_l - \lambda) - \lambda \sum_{l=1}^m q_l \prod_{k=1, k \neq l}^m (b_k - \lambda) = \\ = \lambda^{m+2} (-1)^m p + \lambda^{m+1} (-1)^{m+1} p \sum_{l=1}^m b_l + \dots = 0. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Приравнявая коэффициенты при λ^{m+1} в уравнениях (1.73) и (1.74), теперь найдем, что $\lambda^{(\pm i)} \in \Lambda(0)$:

$$0 \leq \operatorname{Re} \lambda^{(\pm i)} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m (b_l - \lambda^{(l)}) < \frac{b_m}{2}.$$

Предположим теперь дополнительно, что $\sum_{l=1}^m Q_l^* Q_l \gg 0$, $Q_0 Q_0^* \gg 0$. Тогда требуемое утверждение следует из теоремы 1.2.

Утверждение $\lambda^{(\pm i)} \in \Lambda(\beta)$ можно доказать и непосредственно. Действительно, выделим из (1.72) действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda \left[p + \frac{q_0}{|\lambda|^2} + \sum_{l=1}^m \frac{q_l}{|b_l - \lambda|^2} \right] &= \sum_{l=1}^m \frac{q_l b_l}{|b_l - \lambda|^2}, \\ \operatorname{Im} \lambda \left[\frac{q_0}{|\lambda|^2} + \sum_{l=1}^m \frac{q_l}{|b_l - \lambda|^2} - p \right] &= 0. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Из теоремы 1.2 следует, что $0 \in \rho(\mathcal{A})$, а значит $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda > 0\}$ (см. п. 2.). Допустим, что оператор $\mathcal{A}$ имеет в $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \lambda > 0\}$ последовательность собственных значений $\{\lambda_k^{(+i)}\}_{k=1}^{+\infty}$ такую, что $\operatorname{Re} \lambda_k^{(+i)} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$. При этом $|\lambda_k^{(+i)}| \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$, так как дискретный спектр оператора $\mathcal{A}$ может сгущаться только к ∞ и к $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$. Таким образом, числа $\lambda_k^{(+i)}$ удовлетворяют уравнениям (1.72) при

$$p = p_k := \frac{\|A^{-1/2} u_k^{(+i)}\|_H^2}{\|u_k^{(+i)}\|_H^2}, \quad q_l = q_{lk} := \frac{\|Q_l u_k^{(+i)}\|_{H_l}^2}{\|u_k^{(+i)}\|_H^2} \quad (l = \overline{0, m}). \quad (1.76)$$

Можно считать, что существуют

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} p_k = p_0 \geq 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} q_{lk} = q_{l0} \geq 0 \quad (l = \overline{0, m}), \quad \sum_{l=1}^m q_{l0} > 0, \quad (1.77)$$

иначе мы ограничимся соответствующими подпоследовательностями. Последнее неравенство в (1.77) следует из $\sum_{l=1}^m Q_l^* Q_l \gg 0$.

Теперь из (1.77) и (1.75) найдем

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \operatorname{Re} \lambda_k^{(+i)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{l=1}^m \frac{q_{lk} b_l |\lambda_k^{(+i)}|^2}{|b_l - \lambda_k^{(+i)}|^2}}{2 \left[q_{0k} + \sum_{l=1}^m \frac{q_{lk} |\lambda_k^{(+i)}|^2}{|b_l - \lambda_k^{(+i)}|^2} \right]} = \frac{\sum_{l=1}^m q_{l0} b_l}{2 \left[q_{00} + \sum_{l=1}^m q_{l0} \right]} > 0,$$

что противоречит предположению $\operatorname{Re} \lambda_k^{(+i)} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$. Следовательно, $\lambda^{(\pm i)} \in \Lambda(\beta)$ при некотором $\beta > 0$.

4. Пусть собственные значения оператора $A_{\mathcal{Q}} := (\mathcal{Q}^* \mathcal{Q})^{1/2} A (\mathcal{Q}^* \mathcal{Q})^{1/2}$ имеют степенное асимптотическое распределение. Если $\lambda \in \Lambda(0)$ — собственное

значение оператора $\mathcal{A}$, то существует $0 \neq u \in H$ такой, что $-\lambda L(\lambda)u = 0$. Обозначим $T := (\mathcal{Q}^* \mathcal{Q})^{1/2}$ и преобразуем последнее уравнение следующим образом (см. (1.69)):

$$\begin{aligned} -\lambda L(\lambda)u &= [\lambda^2 A^{-1} + \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})(\mathcal{G} - \lambda - \mathcal{G})\mathcal{Q}]u = \\ &= [\lambda^2 A^{-1} + \mathcal{Q}^* \mathcal{Q} - \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{G}\mathcal{Q}]u = \\ &= T[I + \lambda^2 A_{\mathcal{Q}}^{-1} - T^{-1} \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{G}\mathcal{Q}T^{-1}]Tu = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в области $\Lambda(0)$ задача $-\lambda L(\lambda)u = 0$ эквивалентна задаче

$$[I + \lambda^2 A_{\mathcal{Q}}^{-1} - T^{-1} \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{G}\mathcal{Q}T^{-1}]v = 0, \quad v := Tu \in H. \quad (1.78)$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \|(I - \lambda A_{\mathcal{Q}}^{-1/2})^{-1} T^{-1} \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{G}\mathcal{Q}T^{-1} (I + \lambda A_{\mathcal{Q}}^{-1/2})^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} &= O(|\lambda|^{-1}), \\ \lambda &\rightarrow \infty, \quad \lambda \in \Lambda(0). \end{aligned}$$

Отсюда, из степенной асимптотики собственных значений $\lambda_k(A_{\mathcal{Q}})$ оператора $A_{\mathcal{Q}}$ и теоремы об асимптотике спектра пучка вида (1.78) (см. [75], [1]) следует, что пучок $L(\lambda)$ (оператор $\mathcal{A}$) имеет в области $\Lambda(0)$ две ветви (комплексно сопряженных) собственных значений $\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A}) = \pm i \lambda_k^{1/2}(A_{\mathcal{Q}})(1 + o(1))$ ($k \rightarrow +\infty$).

5а. Докажем, что точки из множества $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \setminus \{0, b_1, \dots, b_m\}$ не могут быть предельными для комплексно сопряженных ветвей собственных значений из $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, если норма $\|A^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(H)}$ достаточно мала.

Предположим, что оператор $\mathcal{A}$ имеет ветвь собственных значений $\{\lambda_k^{(+i)}\}_{k=1}^\infty \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \lambda > 0\}$, стремящихся к числу $\gamma \in \sigma_{ess}(\mathcal{A}) \setminus \{0, b_1, \dots, b_m\}$. Тогда числа $\lambda_k^{(+i)}$ есть корни уравнения (1.72) с коэффициентами (1.76), причем последовательность $\{u_k^{(+i)}\}_{k=1}^\infty$ такова, что $[-\lambda_k^{(+i)} A^{-1} + \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_{\lambda_k^{(+i)}}(\mathcal{G})\mathcal{Q}]u_k^{(+i)} = 0$. При этом числа $\lambda_k^{(-i)} := \overline{\lambda_k^{(+i)}}$ также будут собственными значениями оператора $\mathcal{A}$ (см. теорему 1.5) и будут корнями уравнения (1.72) при тех же коэффициентах. Таким образом, числа $\lambda_k^{(\pm i)}$ будут корнями функций

$$f_k(\lambda) := -\lambda p_k - \frac{1}{\lambda} q_{0k} + \sum_{l=1}^m \frac{q_{lk}}{b_l - \lambda}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Можно считать, как и в (1.76)-(1.77), что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} p_k = p^0 \geq 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} q_{lk} = q_l^0 \geq 0 \quad (l = \overline{0, m}), \quad \sum_{l=0}^m q_l^0 > 0.$$

В противном случае мы ограничимся соответствующими подпоследовательностями. По предельным коэффициентам определим функцию

$$f(\lambda) := -\lambda p^0 - \frac{1}{\lambda} q_0^0 + \sum_{l=1}^m \frac{q_l^0}{b_l - \lambda}.$$

Итак, последовательность функций $\{f_k(\lambda)\}_{k=1}^\infty$ сходится равномерно к функции $f(\lambda)$ в каждой замкнутой ограниченной области, не содержащей точек из множества $\{0, b_1, \dots, b_m\}$. По теореме Гурвица (см. [62, гл. 4., § 3, п. 3.6]) функция $f(\lambda)$ имеет в точке $\lambda = \gamma$ кратный нуль, то есть $f'(\gamma) = 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} 0 = f'(\gamma) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} f'_k(\gamma) = \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\|u_k^{(+i)}\|_H^2} \left[-\|A^{-1/2} u_k^{(+i)}\|_H^2 + \frac{\|Q_0 u_k^{(+i)}\|_{H_0}^2}{\gamma^2} + \sum_{l=1}^m \frac{\|Q_l u_k^{(+i)}\|_{H_l}^2}{(b_l - \gamma)^2} \right] \geq \\ &\geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\|u_k^{(+i)}\|_H^2} \left[-\|A^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(H)}^2 \cdot \|u_k^{(+i)}\|_H^2 + \right. \\ &\quad \left. + \min \left\{ \frac{1}{\gamma^2}, \frac{1}{(b_l - \gamma)^2} \quad (l = \overline{1, m}) \right\} (\mathcal{Q}^* \mathcal{Q} u_k^{(+i)}, u_k^{(+i)})_H \right] \geq \\ &\geq \min \left\{ \frac{1}{\gamma^2}, \frac{1}{(b_l - \gamma)^2} \quad (l = \overline{1, m}) \right\} \gamma (\mathcal{Q}^* \mathcal{Q}) - \|A^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(H)}^2, \end{aligned}$$

где $\gamma(\mathcal{Q}^* \mathcal{Q}) > 0$ — нижняя грань оператора $\mathcal{Q}^* \mathcal{Q}$. Из последней оценки получим противоречие: $0 = f'(\gamma) > 0$, если норма $\|A^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(H)}$ достаточно мала.

5b. Докажем теперь, что если $b_q \in \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ при некотором $q \in \{0, 1, \dots, m\}$, $\sum_{l \neq q} Q_l^* Q_l \gg 0$ и норма $\|A^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(H)}$ достаточно мала, то точка b_q не может быть предельной для комплексно сопряженных ветвей собственных значений из $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

В системе (1.71), отвечающей спектральной задаче для оператора $\mathcal{A}$, переставим на второе место уравнение с номером q из третьей строчки. В результате получим систему, отвечающую спектральной задаче для оператора, действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = H \oplus H_q \oplus (\oplus_{l \neq q} H_l)$ и, как можно прове-

ритель, унитарно эквивалентного оператору $\mathcal{A}$. Обозначим оператор полученной системы через $\mathcal{A}_q$. При этом $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}_q)$.

Запишем оператор $\mathcal{A}_q$ относительно разложения $\mathcal{H} = H \oplus H_q \oplus (\oplus_{l \neq q} H_l)$, аналогично представлению (1.10), в форме:

$$\mathcal{A}_q = \text{diag}(A^{1/2}, I, \widehat{I}) \begin{pmatrix} 0 & Q_q^* & \widehat{Q}_q^* \\ -Q_q & b_q & 0 \\ -\widehat{Q}_q & 0 & \widehat{G}_q \end{pmatrix} \text{diag}(A^{1/2}, I, \widehat{I}), \quad (1.79)$$

$$\widehat{Q}_q := (Q_0, Q_1, \dots, Q_{q-1}, Q_{q+1}, \dots, Q_m)^\tau,$$

$$\widehat{G}_q := \text{diag}(0, b_1 I, \dots, b_{q-1} I, b_{q+1} I, \dots, b_m I), \quad \widehat{I} := \text{diag}(I, \dots, I),$$

$$\xi := (u; u_q; w_q)^\tau = (u; u_q; (u_0; \dots; u_{q-1}; u_{q+1}; \dots; u_m)^\tau)^\tau.$$

При $\lambda \notin \sigma(\widehat{G}_q)$ свяжем с задачей о спектре для оператора $\mathcal{A}_q$ следующую спектральную задачу (см. пучок (1.69) и его связь с задачей (1.68)):

$$\begin{aligned} L_q(\lambda) \begin{pmatrix} u \\ u_q \end{pmatrix} &:= \left[\begin{pmatrix} -\lambda A^{-1} & Q_q^* \\ -Q_q & b_q - \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{Q}_q^* \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{R}_\lambda(\widehat{G}_q) \begin{pmatrix} \widehat{Q}_q & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u \\ u_q \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\lambda A^{-1} + \widehat{Q}_q^* \mathcal{R}_\lambda(\widehat{G}_q) \widehat{Q}_q & Q_q^* \\ -Q_q & b_q - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Допустим, что оператор $\mathcal{A}_q$ имеет ветвь собственных значений $\{\lambda_k^{(+i)}\}_{k=1}^\infty \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Im} \lambda > 0\}$, стремящихся к числу b_q . Тогда существует последовательность $\{(u_k^{(+i)}; u_{q,k}^{(+i)})^\tau\}_{k=1}^\infty \subset H \oplus H_q$ такая, что $L_q(\lambda_k^{(+i)})(u_k^{(+i)}; u_{q,k}^{(+i)})^\tau = 0$. Из этого соотношения, с использованием (1.80), получим уравнение, которому удовлетворяют $\lambda_k^{(+i)}$ и $\lambda_k^{(-i)} := \overline{\lambda_k^{(+i)}}$:

$$\begin{aligned} f_{q,k}(\lambda) &:= \frac{1}{\|(u_k^{(+i)}; u_{q,k}^{(+i)})^\tau\|_{H \oplus H_q}^2} \left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} L_q(\lambda) \begin{pmatrix} u_k^{(+i)} \\ u_{q,k}^{(+i)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_k^{(+i)} \\ u_{q,k}^{(+i)} \end{pmatrix} \right)_{H \oplus H_q} = \\ &= \|(u_k^{(+i)}; u_{q,k}^{(+i)})^\tau\|_{H \oplus H_q}^{-2} \left[-\lambda \|A^{-1/2} u_k^{(+i)}\|_H^2 + \sum_{l \neq q} \frac{1}{b_l - \lambda} \|Q_l u_k^{(+i)}\|_{H_l}^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2\text{Re}(Q_q^* u_{q,k}^{(+i)}, u_k^{(+i)})_H + (\lambda - b_q) \|u_{q,k}^{(+i)}\|_{H_q}^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда найдем, что если норма $\|A^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(H)}$ достаточно мала, то

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow +\infty} f'_{q,k}(b_q) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \|(u_k^{(+i)}; u_{q,k}^{(+i)})^\tau\|_{H \oplus H_q}^{-2} \left[-\|A^{-1/2}u_k^{(+i)}\|_H^2 + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l \neq q} \frac{1}{(b_l - b_q)^2} \|Q_l u_k^{(+i)}\|_{H_l}^2 + \|u_{q,k}^{(+i)}\|_{H_q}^2 \right] \geq \\
&\geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \|(u_k^{(+i)}; u_{q,k}^{(+i)})^\tau\|_{H \oplus H_q}^{-2} \left[-\|A^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(H)}^2 \cdot \|u_k^{(+i)}\|_H^2 + \right. \\
&\quad \left. + \min \left\{ \frac{1}{(b_l - b_q)^2}, l \neq q \right\} \sum_{l \neq q} \|Q_l u_k^{(+i)}\|_{H_l}^2 + \|u_{q,k}^{(+i)}\|_{H_q}^2 \right] \geq \\
&\geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \|(u_k^{(+i)}; u_{q,k}^{(+i)})^\tau\|_{H \oplus H_q}^{-2} \left[-\|A^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(H)}^2 \cdot \|u_k^{(+i)}\|_H^2 + \right. \\
&\quad \left. + \min \left\{ \frac{1}{(b_l - b_q)^2}, l \neq q \right\} \gamma \left(\sum_{l \neq q} Q_l^* Q_l \right) \|u_k^{(+i)}\|_H^2 + \|u_{q,k}^{(+i)}\|_{H_q}^2 \right] \geq \\
&\geq \min \left\{ \min \left\{ \frac{1}{(b_l - b_q)^2}, l \neq q \right\} \gamma \left(\sum_{l \neq q} Q_l^* Q_l \right), 1 \right\} - \|A^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(H)}^2 > 0,
\end{aligned}$$

где $\gamma(\sum_{l \neq q} Q_l^* Q_l) > 0$ — нижняя грань оператора $\sum_{l \neq q} Q_l^* Q_l$. Отсюда, с использованием теоремы Гурвица, как и в п. **5а**, приходим к противоречию с наличием у оператора $\mathcal{A}_q$ ветви собственных значений из $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, стремящихся к числу b_q . Теорема доказана. $\blacksquare$

1.4.2. О пересчете корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ и пучка $L(\lambda)$

Для дальнейших рассуждений нам понадобятся вспомогательные леммы о связи цепочки из собственного и присоединенного к нему элементов пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ с некоторой функцией из $\mathcal{H}$ и о связи цепочек элементов некоторых специальных оператор-функций.

О п р е д е л е н и е 1.5. [60, гл. 2, § 11, с. 61] Пусть λ_0 собственное значение (с.з.), а η_0 отвечающий ему собственный элемент (с.э.) оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, то есть $\mathcal{A}(\lambda_0)\eta_0 = 0$. Элементы $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$ называют *присоединенными* к с.э. η_0 , если $\sum_{k=0}^j (k!)^{-1} \mathcal{A}^{(k)}(\lambda_0)\eta_{j-k} = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$). Число

n называют *длиной цепочки* $\{\eta_k\}_{k=0}^{n-1}$ из собственного и присоединенных элементов (с.п.э.).

Л е м м а 1.1. [60, гл. 2, § 11, лемма 11.3] Элементы $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ образуют цепочку из собственного и присоединенных элементов $\mathcal{A}(\lambda)$, отвечающую числу λ_0 , тогда и только тогда, когда существует функция $\eta(\lambda)$, голоморфная в некоторой окрестности точки λ_0 , такая, что $\eta(\lambda_0) \neq 0$, $\eta^{(k)}(\lambda_0) = k! \eta_k$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) и что функция $\mathcal{A}(\lambda)\eta(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль кратности, большей или равной n .

О п р е д е л е н и е 1.6. [60, гл. 2, § 11, с. 62] Пусть $\eta(\lambda)$ — функция из $\mathcal{H}$, причем $\eta(\lambda_0) \neq 0$ и $\mathcal{A}(\lambda_0)\eta(\lambda_0) = 0$. Если порядок нуля функции $\mathcal{A}(\lambda)\eta(\lambda)$ в точке λ_0 равен n , то $\eta(\lambda)$ называется *производящей функцией* для цепочки из собственного и присоединенных элементов $\{(k!)^{-1}\eta^{(k)}(\lambda_0)\}_{k=0}^{n-1}$ оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$. Число n будем называть *рангом* производящей функции $\eta(\lambda)$.

Рассмотрим операторный пучок $\mathcal{A}(\lambda)$, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = H \oplus \mathcal{H}_0$ и соответствующую спектральную задачу:

$$\mathcal{A}(\lambda)\eta := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11}(\lambda) & \mathcal{A}_{12}(\lambda) \\ \mathcal{A}_{21}(\lambda) & \mathcal{A}_{22}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (v; w)^\tau \in \mathcal{H} = H \oplus \mathcal{H}_0. \quad (1.81)$$

При $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$ с задачей (1.81) свяжем спектральную задачу:

$$L(\lambda)v = [\mathcal{A}_{11}(\lambda) - \mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)]v = 0, \quad v \in H. \quad (1.82)$$

З а м е ч а н и е 1.5. В области $\mathbb{C} \setminus \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$, с учетом (1.8), спектральную задачу (1.81) можно переписать следующим образом:

$$\mathcal{A}(\lambda)\eta = \begin{pmatrix} I & \mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda) \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{22}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda) & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда после замены $(v; \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)v + w)^\tau =: (v; w_v)^\tau$ найдем, что в области $\mathbb{C} \setminus \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$ спектральные задачи (1.81) и (1.82) эквивалентны. ►

Л е м м а 1.2. Пусть $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$. Функция $\eta(\lambda) := (v(\lambda); w(\lambda))^T$ из $\mathcal{H}$ является производящей функцией ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке λ_0 ($\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$) тогда и только тогда, когда $v(\lambda)$ является производящей функцией ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке λ_0 и

$$w(\lambda) = -\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)v(\lambda) + (\lambda - \lambda_0)^n \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)p(\lambda), \quad (1.83)$$

где $p(\lambda)$ — функция, голоморфная в некоторой окрестности точки λ_0 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство этой леммы следует рассуждениям [60, гл. 2, § 12, лемма 12.3]. Начнем с достаточности. Пусть $v(\lambda)$ является производящей функцией ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке $\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$ и выполнено соотношение (1.83). Поскольку $L(\lambda)v(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль кратности $\geq n$, то из вида $L(\lambda)$ получим, что

$$L(\lambda)v(\lambda) = [\mathcal{A}_{11}(\lambda) - \mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)]v(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n q(\lambda), \quad (1.84)$$

где $q(\lambda)$ — некоторая функция, голоморфная в окрестности точки λ_0 . Подставим (1.83) в (1.84) и запишем полученное соотношение вместе с (1.83) в виде одного векторно-матричного выражения в $\mathcal{H}$, после простых преобразований получим, что

$$\mathcal{A}(\lambda)(v(\lambda); w(\lambda))^T = (\lambda - \lambda_0)^n (q(\lambda) + \mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)p(\lambda); p(\lambda))^T.$$

Отсюда следует, что $\eta(\lambda) = (v(\lambda); w(\lambda))^T$ есть производящая функция ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке λ_0 . Достаточность доказана.

Пусть теперь функция $\eta(\lambda) = (v(\lambda); w(\lambda))^T$ является производящей функцией ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке λ_0 . По условию теоремы $\mathcal{A}(\lambda)\eta(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль кратности $\geq n$, следовательно:

$$\mathcal{A}_{11}(\lambda)v(\lambda) + \mathcal{A}_{12}(\lambda)w(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n r(\lambda), \quad (1.85)$$

$$\mathcal{A}_{21}(\lambda)v(\lambda) + \mathcal{A}_{22}(\lambda)w(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n p(\lambda), \quad (1.86)$$

где $r(\lambda)$, $p(\lambda)$ — некоторые функции, голоморфные в окрестности точки λ_0 . Из (1.86) следует (1.83). Подставив (1.83) в (1.85) получим, что

$$L(\lambda)v(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n (r(\lambda) - \mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)p(\lambda)).$$

Отсюда следует, что $L(\lambda)v(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль порядка не ниже n . Лемма доказана. $\blacksquare$

В качестве следствия из леммы 1.2 получим следующую лемму о пересчете корневых элементов спектральных задач (1.81) и (1.82).

Л е м м а 1.3. Пусть набор элементов $\{\eta_k = (v_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ является цепочкой из собственного и присоединенных элементов задачи (1.81), отвечающей собственному значению λ_0 ($\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$), тогда $\{v_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов задачи (1.82), отвечающая собственному значению λ_0 .

Обратно, пусть набор элементов $\{v_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов спектральной задачи (1.82), отвечающая собственному значению λ_0 , тогда $\{\eta_k = (v_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$, где

$$w_k = - \sum_{l=0}^k \frac{1}{(k-l)!} \frac{d^{k-l}}{d\lambda^{k-l}} \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda) \mathcal{A}_{21}(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} v_l, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad (1.87)$$

— цепочка из собственного и присоединенных элементов спектральной задачи (1.81).

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 1.2, если функция $\eta(\lambda) = (v(\lambda); w(\lambda))^\tau$ из $\mathcal{H}$ является производящей функцией ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке $\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$, то функция $v(\lambda)$ является производящей функцией ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке λ_0 . Отсюда и из леммы 1.1 следует прямое утверждение.

Обратно, пусть функция $v(\lambda)$ является производящей функцией из H ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке λ_0 . Определим функцию $w(\lambda)$ по формуле (1.83). Тогда по лемме 1.2 функция $\eta(\lambda) = (v(\lambda); w(\lambda))^\tau$ из $\mathcal{H}$ является производящей функ-

цией ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке λ_0 . При этом (см. определение 1.6)

$$\begin{aligned} w_k &= -\frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} \left[\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda) \mathcal{A}_{21}(\lambda) v(\lambda) + (\lambda - \lambda_0)^n \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda) p(\lambda) \right] \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \\ &= -\frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} \frac{d^{k-l}}{d\lambda^{k-l}} \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda) \mathcal{A}_{21}(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \frac{d^l v(\lambda)}{d\lambda^l} \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \\ &= -\sum_{l=0}^k \frac{1}{(k-l)!} \frac{d^{k-l}}{d\lambda^{k-l}} \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda) \mathcal{A}_{21}(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} v_l \quad (k = \overline{0, n-1}). \end{aligned}$$

Лемма доказана. ■

В качестве следствия из леммы 1.3 получим следующую теорему о связи собственных и присоединенных элементов оператора $\mathcal{A}$ и пучка $L(\lambda)$ (см. спектральные задачи (1.68) и (1.69) соответственно).

Т е о р е м а 1.7. Пусть набор элементов $\{\xi_k = (u_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ является цепочкой из собственного и присоединенных элементов задачи (1.68), отвечающей собственному значению λ_0 ($\lambda_0 \notin \{0, b_1, \dots, b_m\}$), тогда набор элементов $\{v_k\}_{k=0}^{n-1} := \{A^{1/2} u_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов задачи (1.69), отвечающая собственному значению λ_0 .

Обратно, пусть набор элементов $\{v_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов спектральной задачи (1.69), отвечающая собственному значению λ_0 , тогда набор элементов $\{\xi_k = (A^{-1/2} v_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$, где $w_k = \sum_{l=0}^k (\mathcal{G} - \lambda_0)^{-(k-l+1)} \mathcal{Q} v_l$, — цепочка из собственного и присоединенных элементов спектральной задачи (1.68).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть λ_0 ($\lambda_0 \notin \{0, b_1, \dots, b_m\}$) собственное значение задачи (1.68) и $\xi(\lambda)$ производящая функция для цепочки из собственного и присоединенных элементов $\{\xi_k := (k!)^{-1} \xi^{(k)}(\lambda_0)\}_{k=0}^{n-1}$ (см. определение 1.6).

Запишем задачу (1.68) в виде $(\mathcal{A} - \lambda)\xi = \mathcal{B}\mathcal{A}(\lambda)\mathcal{B}\xi = 0$, $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (1.1)–(1.2)), где $\mathcal{B} := \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I})$, а оператор-функция $\mathcal{A}(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ имеет вид:

$$\mathcal{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11}(\lambda) & \mathcal{A}_{12}(\lambda) \\ \mathcal{A}_{21}(\lambda) & \mathcal{A}_{22}(\lambda) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -\lambda A^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix}. \quad (1.88)$$

Отсюда следует, что $\mathcal{B}\xi(\lambda) = (A^{1/2}u(\lambda); w(\lambda))^\tau$ — производящая функция для оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$. Согласно лемме 1.2, $v(\lambda) := A^{1/2}u(\lambda)$ — производящая функция для оператор-функции $L(\lambda)$ и первое утверждение в теореме доказано.

Пусть теперь λ_0 собственное значение спектральной задачи (1.69) и $v(\lambda)$ производящая функция для цепочки из собственного и присоединенных элементов $\{v_k := (k!)^{-1}v^{(k)}(\lambda_0)\}_{k=0}^{n-1}$ (см. определение 1.6) оператор-функции $L(\lambda)$. Тогда в соответствии с леммой 1.3 получим, что

$$(v_k; w_k)^\tau := \left(v_k; - \sum_{l=0}^k \frac{1}{(k-l)!} \frac{d^{k-l}}{d\lambda^{k-l}} \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda) \mathcal{A}_{21}(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} v_l \right)^\tau, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad (1.89)$$

— цепочка из собственного и присоединенных элементов оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_0 . Для вторых компонент из (1.89), с учетом вида $\mathcal{A}_{22}(\lambda)$ и $\mathcal{A}_{21}(\lambda)$ (см. (1.88) и определение 1.6), имеем:

$$\begin{aligned} w_k &= - \sum_{l=0}^k \frac{1}{(k-l)!} \frac{d^{k-l}}{d\lambda^{k-l}} \mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda) \mathcal{A}_{21}(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} v_l = \\ &= \sum_{l=0}^k \frac{1}{(k-l)!} \frac{d^{k-l}}{d\lambda^{k-l}} (\mathcal{G} - \lambda)^{-1} \mathcal{Q} \Big|_{\lambda=\lambda_0} v_l = \sum_{l=0}^k (\mathcal{G} - \lambda_0)^{-(k-l+1)} \mathcal{Q} v_l. \end{aligned}$$

Таким образом, набор элементов $\{\eta_k = (v_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ является цепочкой из собственного и присоединенных элементов оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$, отвечающей с.з. λ_0 . Отсюда следует, что набор элементов $\{\xi_k = (A^{-1/2}v_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов задачи (1.68). Теорема доказана. ■

1.5. Частный случай. Теорема о p -базисности системы корневых элементов генератора

1.5.1. Спектральная задача

Рассмотрим частный случай оператора $\mathcal{A}$ (см. (1.1)-(1.2)). Пусть H — гильбертово пространство, $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ — самосопряженный и положитель-

но определенный оператор, $\beta_l > 0$ ($l = \overline{0, m}$), $0 =: b_0 < b_1 < \dots < b_m$.

Определим гильбертово пространство $\mathcal{H} := H \oplus \left(\oplus_{l=0}^m H \right)$, состоящее из элементов вида $\xi := (v; w)^\tau := (v; (v_0; v_1; \dots; v_m)^\tau)^\tau$. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ определим оператор $\mathcal{A}$ по формулам (1.1)-(1.2):

$$\mathcal{A} = \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) = \begin{pmatrix} 0 & A^{1/2} \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} A^{1/2} & \mathcal{G} \end{pmatrix}, \quad (1.90)$$

$$\mathcal{Q} := (\beta_0^{1/2}, \beta_1^{1/2}, \dots, \beta_m^{1/2})^\tau, \quad \mathcal{G} := \text{diag}(0, b_1 I, \dots, b_m I), \quad \mathcal{I} := \text{diag}(I, I, \dots, I),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ \xi = (v; w)^\tau \in \mathcal{H} \mid v \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \mathcal{Q}^* w = \sum_{l=0}^m \beta_l^{1/2} v_l \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \right\}. \quad (1.91)$$

Всюду далее будем предполагать, что $A^{-1} \in \mathfrak{S}_q(H)$ при некотором $q > 0$.

Рассмотрим спектральную задачу (1.68) для оператора $\mathcal{A}$ и спектральную задачу (1.69) для операторного пучка $L(\lambda)$.

Пусть $\lambda_k = \lambda_k(A^{-1})$, $u_k = u_k(A^{-1})$ ($k \in \mathbb{N}$) — k -е собственное значение и соответствующий ему нормированный к единице собственный элемент оператора A^{-1} . Тогда u_k — собственный элемент операторного пучка $L(\lambda)$ и спектр задачи (1.69), а значит и задачи (1.68), может быть полностью найден из следующей последовательности характеристических уравнений:

$$\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1} \mathcal{Q} \equiv -\frac{1}{\lambda} \beta_0 + \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} = \lambda \lambda_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.92)$$

Здесь и далее $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}^*$ и $\mathcal{G}$ мы будем понимать также как вектор-столбец, вектор-строку и матрицу соответственно, действующие в $\mathbb{C}^{m+1}$.

Определим характеристические функции

$$g_k(\lambda) := \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1} \mathcal{Q} - \lambda \lambda_k \equiv -\frac{1}{\lambda} \beta_0 + \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} - \lambda \lambda_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1.93)$$

$$g_\infty(\lambda) := \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1} \mathcal{Q} \equiv -\frac{1}{\lambda} \beta_0 + \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} \equiv -\frac{1}{\lambda} \left[\sum_{l=0}^m \beta_l - \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l b_l}{b_l - \lambda} \right].$$

Обозначим через γ_p ($p = \overline{1, m}$) корни уравнения $g_\infty(\lambda) = 0$, занумерованные в порядке возрастания. Простые геометрические рассуждения показывают, что $0 < \gamma_1 < b_1 < \gamma_2 < b_2 < \dots < \gamma_m < b_m$ и $g'_\infty(\gamma_p) > 0$ для любого $p = \overline{1, m}$.

Обозначим через $\lambda_k^{(p)}$ ($p = \overline{1, m+2}$) корни уравнения $g_k(\lambda) = 0$ при каждом $k \in \mathbb{N}$. Можно проверить, что это уравнение всегда имеет m действительных корней $\lambda_k^{(p)} \in (\gamma_p, b_p)$ ($p = \overline{1, m}$) и еще два корня. Если $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ ($p = \overline{1, m}$), то $g'_k(\lambda_k^{(p)}) > 0$. Оставшиеся два корня $\lambda_k^{(m+1)}$ и $\lambda_k^{(m+2)}$ являются комплексно сопряженными начиная с некоторого номера k_0 . В силу конечной кратности собственных значений оператора A^{-1} легко видеть также, что может быть только конечное количество номеров $k \in \mathbb{N}$ при которых характеристическое уравнение $g_k(\lambda) = 0$ имеет кратные (действительные) корни.

Применение асимптотических методов к уравнениям (1.93) приводит к следующей теореме (см. также теоремы 1.5 и 1.6).

Т е о р е м а 1.8. *Спектр оператора $\mathcal{A}$ (или пучка $L(\lambda)$) расположен в правой открытой полуплоскости и в $\mathbb{C} \setminus \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ состоит из изолированных конечнократных собственных значений, которые расположены симметрично относительно действительной полуоси. Все собственные значения можно разбить на $(m+2)$ -е серии со следующим асимптотическим поведением*

$$\begin{aligned} \lambda_k^{(p)}(\mathcal{A}) &= \gamma_p + \frac{\gamma_p}{g'_\infty(\gamma_p)} \lambda_k(A^{-1}) + O(\lambda_k^2(A^{-1})), \quad p = 1, 2, \dots, m, \\ \lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A}) &= \pm i \alpha^{1/2} \lambda_k^{-1/2}(A^{-1}) + \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l b_l}{2\alpha} + O(\lambda_k^{1/2}(A^{-1})), \quad \alpha := \sum_{l=0}^m \beta_l \end{aligned}$$

при $k \rightarrow +\infty$.

1.5.2. Некоторые леммы о системах векторов в $\mathbb{C}^{m+2}$

В соответствии с теоремой 1.7 собственные элементы оператора $\mathcal{A}$, после группировки по сериям (см. теорему 1.8), могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_k^{(p)} &= (A^{-1/2} u_k; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1} \mathcal{Q} u_k)^\tau = (\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1} \mathcal{Q})^\tau u_k \equiv \\ &\equiv \left(\lambda_k^{1/2}; \frac{-\beta_0^{1/2}}{\lambda_k^{(p)}}; \frac{\beta_1^{1/2}}{b_1 - \lambda_k^{(p)}}; \dots; \frac{\beta_m^{1/2}}{b_m - \lambda_k^{(p)}} \right)^\tau u_k, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

В связи с этой формулой докажем ряд вспомогательных утверждений.

Л е м м а 1.4. Пусть $J := \text{diag}(1, -I)$ — матрица в $\mathbb{C}^{m+2} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{m+1}$,

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(p)} &:= R_{k,p}(\lambda_k^{1/2}(A^{-1}); (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q})^\tau, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ R_{k,p} &:= \begin{cases} [g'_\infty(\gamma_p)]^{-1/2}, & p = \overline{1, m}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ [2\lambda_k(A^{-1})]^{-1/2}, & p = m+1, m+2, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.94)$$

При любых $p, q = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$ имеют место следующие формулы:

$$(J\varphi_k^{(p)}, \varphi_k^{(q)})_{\mathbb{C}^{m+2}} = 0 \quad (\lambda_k^{(p)} \neq \overline{\lambda_k^{(q)}}), \quad (J\varphi_k^{(p)}, \overline{\varphi_k^{(p)}})_{\mathbb{C}^{m+2}} = -g'_k(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}^2. \quad (1.95)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\lambda_k^{(p)} \neq \overline{\lambda_k^{(q)}}$ из (1.92), (1.93), $g_k(\lambda_k^{(p)}) = 0$ и тождества Гильберта найдем, что

$$\begin{aligned} (J\varphi_k^{(p)}, \varphi_k^{(q)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= R_{k,p}R_{k,q} \left[\lambda_k - ((\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}, (\mathcal{G} - \lambda_k^{(q)})^{-1}\mathcal{Q})_{\mathbb{C}^{m+1}} \right] = \\ &= R_{k,p}R_{k,q} \left[\lambda_k - \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \overline{\lambda_k^{(q)}})^{-1}(\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q} \right] = \\ &= R_{k,p}R_{k,q} \left[\lambda_k - \frac{1}{\overline{\lambda_k^{(q)}} - \lambda_k^{(p)}} \left[\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \overline{\lambda_k^{(q)}})^{-1}\mathcal{Q} - \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q} \right] \right] = \\ &= R_{k,p}R_{k,q} \left[\lambda_k - \frac{1}{\overline{\lambda_k^{(q)}} - \lambda_k^{(p)}} [\overline{\lambda_k^{(q)}}\lambda_k - \lambda_k^{(p)}\lambda_k] \right] = 0. \end{aligned}$$

Далее, из (1.92) имеем

$$(J\varphi_k^{(p)}, \overline{\varphi_k^{(p)}})_{\mathbb{C}^{m+2}} = R_{k,p}^2 \left[\lambda_k - \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-2}\mathcal{Q} \right] = -g'_k(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}^2.$$

Лемма доказана. ■

Л е м м а 1.5. Пусть $M_k := M_k(\varphi_k^{(1)}, \varphi_k^{(2)}, \dots, \varphi_k^{(m+2)})$ ($k \in \mathbb{N}$) — матрица, столбцами которой являются векторы $\varphi_k^{(p)}$ ($p = \overline{1, m+2}$). Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Существует $C_1 > 0$ такое, что $\|M_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leq C_1$ при любых $k \in \mathbb{N}$.
2. Если $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ ($p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$), то $\det M_k \neq 0$.
3. В условиях пункта 2. существует $C_2 > 0$ такое, что $\|M_k^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leq C_2$ при любых $k \in \mathbb{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 1.8 несложно вывести, что нормы $\|\varphi_k^{(p)}\|_{\mathbb{C}^{m+2}}$ равномерно ограничены при $p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$. Отсюда и из оценки

$$\|M_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leq \left[\sum_{p=1}^{m+2} \|\varphi_k^{(p)}\|_{\mathbb{C}^{m+2}}^2 \right]^{1/2}$$

следует первое утверждение леммы.

Далее, с помощью формул (1.94), (1.95) из леммы 1.4 найдем, что

$$M_k^T J M_k = -\text{diag}(g'_k(\lambda_k^{(1)})R_{k,1}^2, g'_k(\lambda_k^{(2)})R_{k,2}^2, \dots, g'_k(\lambda_k^{(m+2)})R_{k,m+2}^2).$$

Отсюда следует, что

$$(-1)^{m+1} (\det M_k)^2 = \det M_k^T J M_k = (-1)^{m+2} \prod_{p=1}^{m+2} g'_k(\lambda_k^{(p)}) R_{k,p}^2,$$

а значит, учитывая (1.94) и $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ ($p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$), что

$$(\det M_k)^2 = -1 \cdot \frac{-g'_k(\lambda_k^{(m+1)})}{2\lambda_k} \cdot \frac{-g'_k(\lambda_k^{(m+2)})}{2\lambda_k} \cdot \prod_{p=1}^m \frac{g'_k(\lambda_k^{(p)})}{g'_\infty(\gamma_p)} \neq 0.$$

Далее, с использованием (1.92), (1.93), теоремы 1.8 и (1.92) вычислим

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} (\det M_k)^2 &= \\ &= - \prod_{p=1}^m \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{g'_k(\lambda_k^{(p)})}{g'_\infty(\gamma_p)} \cdot \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-g'_k(\lambda_k^{(m+1)})}{2\lambda_k} \cdot \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-g'_k(\lambda_k^{(m+2)})}{2\lambda_k} = -1. \end{aligned}$$

Отсюда, из 1. и оценки $\|M_k^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leq |\det M_k|^{-1} \|M_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}^{m+1}$ (см. [44, гл. 1, § 4, п. 2, формула (4.12)]) следует третье утверждение в лемме. Лемма доказана. ■

Л е м м а 1.6. Система векторов

$$\begin{aligned} \varphi_\infty^{(p)} &:= [g'_\infty(\gamma_p)]^{-1/2} (0; (\mathcal{G} - \gamma_p)^{-1} \mathcal{Q})^\tau, \quad p = \overline{1, m}, \\ \varphi_\infty^{(m+1)} &\equiv \varphi_\infty^{(+i\infty)} := 2^{-1/2} (1; +i\alpha^{-1/2} \mathcal{Q})^\tau, \\ \varphi_\infty^{(m+2)} &\equiv \varphi_\infty^{(-i\infty)} := 2^{-1/2} (1; -i\alpha^{-1/2} \mathcal{Q})^\tau, \quad \alpha = \sum_{l=0}^m \beta_l. \end{aligned} \tag{1.96}$$

является ортонормированным базисом в $\mathbb{C}^{m+2} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{m+1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проводится, как и в лемме 1.4, прямой проверкой с учетом (1.92), (1.93), $g_\infty(\gamma_p) = 0$ и тождества Гильберта. ■

Л е м м а 1.7. Пусть $M_\infty := M_\infty(\varphi_\infty^{(1)}, \varphi_\infty^{(2)}, \dots, \varphi_\infty^{(m+2)})$ — матрица, столбцами которой являются векторы $\varphi_\infty^{(p)}$ ($p = \overline{1, m+2}$). Тогда $M_\infty^* = M_\infty^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проводится прямой проверкой с использованием леммы 1.6. ■

З а м е ч а н и е 1.6. Система (1.96) является предельной для системы (1.94) при $k \rightarrow +\infty$. Далее из системы (1.96) и собственных элементов оператора A будет сконструирован ортонормированный базис пространства $\mathcal{H}$. Дальнейшая идея состоит в том, чтобы оценить уклонение системы собственных (а в вырожденном случае — системы корневых) элементов оператора $\mathcal{A}$ от построенного ортонормированного базиса пространства $\mathcal{H}$. ►

В связи с замечанием 1.6 докажем следующую вспомогательную лемму.

Л е м м а 1.8. Существует $C > 0$ такое, что при любых $k \in \mathbb{N}$

$$\|M_k - M_\infty\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leq C[\lambda_k(A^{-1})]^{1/2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в лемме 1.5 воспользуемся следующей формулой

$$\|M_k - M_\infty\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leq \left[\sum_{p=1}^{m+2} \|\varphi_k^{(p)} - \varphi_\infty^{(p)}\|_{\mathbb{C}^{m+2}}^2 \right]^{1/2}. \quad (1.97)$$

Из (1.94), (1.96), теоремы 1.8 при $p = \overline{1, m}$ и тождества Гильберта имеем

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(p)} - \varphi_\infty^{(p)} &= [g'_\infty(\gamma_p)]^{-1/2} \left(\lambda_k^{1/2}; \left[(\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1} - (\mathcal{G} - \gamma_p)^{-1} \right] \mathcal{Q} \right)^\tau = \\ &= [g'_\infty(\gamma_p)]^{-1/2} \left(\lambda_k^{1/2}; [\lambda_k^{(p)} - \gamma_p] (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1} (\mathcal{G} - \gamma_p)^{-1} \mathcal{Q} \right)^\tau = \\ &= \lambda_k^{1/2} \cdot [g'_\infty(\gamma_p)]^{-1/2} \left(1; \lambda_k^{1/2} \left[\frac{\gamma_p}{g'_\infty(\gamma_p)} + O(\lambda_k) \right] (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1} (\mathcal{G} - \gamma_p)^{-1} \mathcal{Q} \right)^\tau \end{aligned}$$

при $k \rightarrow +\infty$. Отсюда следует, что

$$\exists C_p > 0 : \quad \|\varphi_k^{(p)} - \varphi_\infty^{(p)}\|_{\mathbb{C}^{m+2}} \leq C_p [\lambda_k(A^{-1})]^{1/2}, \quad p = \overline{1, m}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.98)$$

Из (1.94), (1.96), теоремы 1.8 при $p = m + 1$ и тождества Гильберта имеем

$$\begin{aligned}
\varphi_k^{(m+1)} - \varphi_\infty^{(m+1)} &= \frac{1}{2^{1/2}} \left(0; \left[\frac{1}{\lambda_k^{1/2}} (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+1)})^{-1} - i\alpha^{-1/2} I \right] \mathcal{Q} \right)^\tau = \\
&= \frac{1}{2^{1/2}} \left(0; \left[I - i\alpha^{-1/2} \lambda_k^{1/2} (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+1)}) \right] (\lambda_k^{1/2} \mathcal{G} - \lambda_k^{1/2} \lambda_k^{(m+1)})^{-1} \mathcal{Q} \right)^\tau = \\
&= \lambda_k^{1/2} \cdot \frac{1}{2^{1/2}} \left(0; \left[\frac{i\alpha^{-3/2}}{2} \sum_{l=1}^m \beta_l b_l I - i\alpha^{-1/2} \mathcal{G} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + O(\lambda_k^{1/2}) \right] (\lambda_k^{1/2} \mathcal{G} - \lambda_k^{1/2} \lambda_k^{(m+1)})^{-1} \mathcal{Q} \right)^\tau
\end{aligned}$$

при $k \rightarrow +\infty$. Аналогичные вычисления справедливы и при $p = m + 2$. Таким образом, неравенства (1.98) имеют место при $p = m + 1$ и $p = m + 2$. Теперь из (1.97) и (1.98) следует утверждение леммы. Лемма доказана. $\blacksquare$

1.5.3. О p -базисности системы корневых элементов оператора $\mathcal{A}$

Следствием лемм 1.6 и 1.7 является следующее утверждение.

Л е м м а 1.9. Система элементов $\{\xi_{k,\infty}^{(p)} := \varphi_\infty^{(p)} u_k\}_{p=\overline{1,m+2}, k \in \mathbb{N}}$ является ортонормированным базисом пространства $\mathcal{H}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ортонормированность введенной системы следует из леммы 1.6 и ортонормированности системы $\{u_k\}_{k=1}^\infty$. Покажем, что введенная система полна в $\mathcal{H}$. Пусть существует $\xi = (v; v_0; v_1; \dots; v_m)^\tau \in \mathcal{H}$ такой, что $(\xi_{k,\infty}^{(p)}, \xi)_{\mathcal{H}} = 0$ при всех $p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$. Последнее означает, что

$$M_\infty^\tau \left((u_k, v)_H; (u_k, v_0)_H; (u_k, v_1)_H; \dots; (u_k, v_m)_H \right)^\tau = 0$$

при $k \in \mathbb{N}$. Отсюда, из леммы 1.7 и из полноты системы $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ в пространстве H тогда получим, что $v = v_0 = v_1 = \dots = v_m = 0$. То есть, $\xi = 0$. Лемма доказана. $\blacksquare$

С помощью набора матриц S_k ($k \in \mathbb{N}$), действующих в $\mathbb{C}^{m+2}$, определим оператор $\mathcal{S}$ по следующей формуле

$$\mathcal{S}\xi := \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\xi_{k,\infty}^{(1)}; \dots; \xi_{k,\infty}^{(m+2)} \right) S_k \begin{pmatrix} (\xi, \xi_{k,\infty}^{(1)})_{\mathcal{H}} \\ \vdots \\ (\xi, \xi_{k,\infty}^{(m+2)})_{\mathcal{H}} \end{pmatrix} := \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\sum_{p=1}^{m+2} \xi_{k,\infty}^{(p)} \sum_{q=1}^{m+2} S_k^{pq} (\xi, \xi_{k,\infty}^{(q)})_{\mathcal{H}} \right]$$

и будем писать при этом $\mathcal{S} \longleftrightarrow S_k$.

Л е м м а 1.10. *Имеют место следующие утверждения.*

1. $\|\mathcal{S}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|S_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}$.
2. Пусть $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Если $\mathcal{S} \longleftrightarrow S_k$, то $\mathcal{S}^* \longleftrightarrow S_k^*$.
3. Пусть $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, тогда $\mathcal{ST} \longleftrightarrow S_k T_k$. В частности, $\mathcal{S}^{-1} \longleftrightarrow S_k^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Лемма доказывается непосредственной проверкой с использованием ортонормированности системы $\{\xi_{k,\infty}^{(p)}\}_{p=\overline{1,m+2}, k \in \mathbb{N}}$.

■

Основываясь на доказанных фактах, установим теоремы о p -базисности (см. определение 2.6) специальным образом нормированной системы собственных элементов оператора $\mathcal{A}$ в невырожденном случае и о p -базисности системы корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ в вырожденном случае.

Т е о р е м а 1.9. *Пусть $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ ($p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$). Тогда система собственных элементов $\{\xi_k^{(p)} := \varphi_k^{(p)} u_k\}_{p=\overline{1,m+2}, k \in \mathbb{N}}$ оператора $\mathcal{A}$ образует p -базис пространства $\mathcal{H}$ при $p \geq 2q$ (напомним, что $A^{-1} \in \mathfrak{S}_q(H)$ при $q > 0$).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\mathcal{S} \longleftrightarrow S_k := M_\infty^* M_k$ и покажем, что $\mathcal{S}\xi_{l,\infty}^{(q)} = \xi_l^{(q)}$ при $q = \overline{1, m+2}$, $l \in \mathbb{N}$. Учитывая, что $S_k^{pq} = \overline{(\varphi_\infty^{(p)}, \varphi_k^{(q)})_{\mathbb{C}^{m+2}}}$ и

$(\xi_l^{(q)}, \xi_{k,\infty}^{(p)})_{\mathcal{H}} = 0$ при $l \neq k$, вычислим

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\xi_{l,\infty}^{(q)} &= \left(\xi_{l,\infty}^{(1)}; \dots; \xi_{l,\infty}^{(m+2)}\right) M_{\infty}^* M_l \left(0; \dots; 0; 1_q; 0; \dots; 0\right)^{\tau} = \\ &= \left(\xi_{l,\infty}^{(1)}; \dots; \xi_{l,\infty}^{(m+2)}\right) \left(\overline{(\varphi_{\infty}^{(1)}, \varphi_l^{(q)})_{\mathbb{C}^{m+2}}}; \dots; \overline{(\varphi_{\infty}^{(m+2)}, \varphi_l^{(q)})_{\mathbb{C}^{m+2}}}\right)^{\tau} = \\ &= \sum_{p=1}^{m+2} \overline{(\varphi_{\infty}^{(p)}, \varphi_l^{(q)})_{\mathbb{C}^{m+2}}} \xi_{l,\infty}^{(p)} = \sum_{p=1}^{m+2} (\varphi_l^{(q)}, \varphi_{\infty}^{(p)})_{\mathbb{C}^{m+2}} \xi_{l,\infty}^{(p)} = \\ &= \sum_{p=1}^{m+2} (\xi_l^{(q)}, \xi_{l,\infty}^{(p)})_{\mathcal{H}} \xi_{l,\infty}^{(p)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{m+2} (\xi_l^{(q)}, \xi_{k,\infty}^{(p)})_{\mathcal{H}} \xi_{k,\infty}^{(p)} = \xi_l^{(q)}. \end{aligned}$$

Из леммы 1.10, условия $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ ($p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$), лемм 1.5 и 1.7 следует, что оператор $\mathcal{S}$ непрерывно обратим: $\mathcal{S}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Отсюда и из леммы 1.9 тогда следует, что система элементов $\{\xi_k^{(p)}\}_{p=\overline{1, m+2}, k \in \mathbb{N}}$ — базис Рисса пространства $\mathcal{H}$. Для доказательства теоремы остается показать, что $\mathcal{S} = \mathcal{I} + \mathcal{T}$, где $\mathcal{T} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ при $p \geq 2q$.

Положим $T_k := M_k - M_{\infty}$, тогда с учетом лемм 1.7 и 1.10 получим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\longleftrightarrow M_{\infty}^* M_k = M_{\infty}^* (M_{\infty} + T_k) = I + M_{\infty}^* T_k \longleftrightarrow \mathcal{I} + \mathcal{T}, \\ \mathcal{T}^* \mathcal{T} &\longleftrightarrow (T_k^* M_{\infty})(M_{\infty}^* T_k) = T_k^* T_k. \end{aligned}$$

Обозначим через $\lambda_k((\mathcal{T}^* \mathcal{T})^{1/2})$ и $\lambda_k((T^* T)^{1/2})$ собственные значения оператора $(\mathcal{T}^* \mathcal{T})^{1/2}$ и матрицы $(T^* T)^{1/2}$ соответственно, занумерованные в порядке убывания и с учетом кратности. Тогда из последних соотношений и леммы 1.9 получим, что

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{+\infty} \lambda_r^p((\mathcal{T}^* \mathcal{T})^{1/2}) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^{m+2} \lambda_l^p((T_k^* T_k)^{1/2}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^{m+2} [\lambda_l(T_k^* T_k)]^{p/2} \leq \\ &\leq (m+2) \sum_{k=1}^{+\infty} [\lambda_{\max}(T_k^* T_k)]^{p/2} = (m+2) \sum_{k=1}^{+\infty} \|T_k^* T_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}^{p/2} \leq \\ &\leq (m+2) \sum_{k=1}^{+\infty} \|T_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}^p \leq (m+2) C^p \sum_{k=1}^{+\infty} [\lambda_k(A^{-1})]^{p/2} < +\infty \end{aligned}$$

при $p/2 \geq q$, так как $A^{-1} \in \mathfrak{S}_q(H)$. Следовательно, $\mathcal{T} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ при $p \geq 2q$.

Теорема доказана. ■

З а м е ч а н и е 1.7. В теореме 1.9 оператор, отображающий ортонормированный базис $\{\xi_{k,\infty}^{(p)}\}_{p=\overline{1,m+2}, k \in \mathbb{N}}$ пространства $\mathcal{H}$ в систему собственных элементов $\{\xi_k^{(p)}\}_{p=\overline{1,m+2}, k \in \mathbb{N}}$ оператора $\mathcal{A}$, построен явно. При $q \leq 1$ достаточно однако было установить (см. [23, гл. 3, § 7, п. 8], а также [24]), что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{m+2} \|\xi_k^{(p)} - \xi_{k,\infty}^{(p)}\|^{2q} < +\infty. \blacktriangleright$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда при некотором $k \in \mathbb{N}$ уравнение $g_k(\lambda) = 0$ имеет кратный корень. В этом случае может быть один или два двукратных корня, либо один трехкратный корень.

Разберем случай двукратного корня. В этом случае при некоторых $k \in \mathbb{N}$ (таких номеров конечное количество) будет либо $\lambda_k^{(m+1)} = \lambda_k^{(m+2)} \in \mathbb{R}$, либо $\lambda_k^{(p_1)} = \lambda_k^{(m+1)}$, $\lambda_k^{(p_2)} = \lambda_k^{(m+2)}$ при некоторых $p_1, p_2 \in \{1, \dots, m\}$. Не ограничивая общности, предположим первую ситуацию. Пусть u — это первый присоединенный элемент к собственному элементу u_k пучка $L(\lambda)$ в точке $\lambda_k^{(m+2)}$ (см. определение 1.5). Тогда $L'(\lambda_k^{(m+2)})u_k = g'_k(\lambda_k^{(m+2)})u_k = 0$ и

$$L'(\lambda_k^{(m+2)})u_k + L(\lambda_k^{(m+2)})u = g'_k(\lambda_k^{(m+2)})u_k + L(\lambda_k^{(m+2)})u = L(\lambda_k^{(m+2)})u = 0.$$

Таким образом, в качестве первого присоединенного к u_k элемента можно взять элемент u_k .

Пусть $\xi_{k0}^{(m+2)} = (\lambda_k^{1/2}u_k; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-1}\mathcal{Q}u_k)^\tau$ — собственный элемент оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению $\lambda_k^{(m+2)}$ (см. теорему 1.7). Вычислим в соответствии с теоремой 1.7 присоединенный элемент η_1 оператора $\mathcal{A}$. Поскольку присоединенный элемент определяется с точностью до собственного элемента, то можно считать, что $\xi_{k1}^{(m+2)} = \eta_1 - \xi_{k0}^{(m+2)} = (0; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-2}\mathcal{Q}u_k)^\tau$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ имеет следующую цепочку из собственного и присоединенного к нему элемента:

$$\begin{aligned} \xi_{k0}^{(m+2)} &= (\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-1}\mathcal{Q})^\tau u_k =: \varphi_{k0}^{(m+2)}u_k, \\ \xi_{k1}^{(m+2)} &= (0; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-2}\mathcal{Q})^\tau u_k =: \varphi_{k1}^{(m+2)}u_k. \end{aligned} \tag{1.99}$$

Разберем теперь ситуацию, когда при некотором $k \in \mathbb{N}$ уравнение $g_k(\lambda) = 0$ имеет трехкратный корень. В этом случае при некотором $p \in \{1, \dots, m\}$ будет $\lambda_k^{(p)} = \lambda_k^{(m+1)} = \lambda_k^{(m+2)} \in \mathbb{R}$. Пусть u — это второй присоединенный элемент к собственному элементу u_k пучка $L(\lambda)$ в точке $\lambda_k^{(p)}$. Тогда $L''(\lambda_k^{(p)})u_k = g_k''(\lambda_k^{(p)})u_k = g_\infty''(\lambda_k^{(p)})u_k = 0$, $L'(\lambda_k^{(p)})u_k = g_k'(\lambda_k^{(p)})u_k = 0$ и

$$\begin{aligned} 2^{-1}L''(\lambda_k^{(p)})u_k + L'(\lambda_k^{(p)})u_k + L(\lambda_k^{(p)})u &= \\ &= 2^{-1}g_\infty''(\lambda_k^{(p)})u_k + g_k'(\lambda_k^{(p)})u_k + L(\lambda_k^{(p)})u = L(\lambda_k^{(p)})u = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в качестве второго присоединенного к u_k элемента можно взять элемент u_k .

Вычислим, в соответствии с теоремой 1.7, первый η_1 и второй η_2 присоединенные элементы оператора $\mathcal{A}$. Легко проверить, что цепочкой из собственного и присоединенных к нему элементов будет также $\xi_{k0}^{(p)}$, $\xi_{k1}^{(p)} := \eta_1 - \xi_{k0}^{(p)}$, $\xi_{k2}^{(p)} := \eta_2 - \eta_1$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \xi_{k0}^{(p)} &= (\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1} \mathcal{Q})^\tau u_k =: \varphi_{k0}^{(p)} u_k, \\ \xi_{k1}^{(p)} &= \begin{pmatrix} 0 & ; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-2} \mathcal{Q} \end{pmatrix}^\tau u_k =: \varphi_{k1}^{(p)} u_k, \\ \xi_{k2}^{(p)} &= \begin{pmatrix} 0 & ; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-3} \mathcal{Q} \end{pmatrix}^\tau u_k =: \varphi_{k2}^{(p)} u_k. \end{aligned} \tag{1.100}$$

Далее будем считать, что система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ нормируется следующим образом. Если собственный элемент не имеет присоединенного, то он выбирается по формуле из теоремы 1.7. Если собственный элемент имеет один или два присоединенных элемента, то соответствующая цепочка выбирается по формуле (1.99) или (1.100) соответственно.

Отметим, что собственных элементов оператора $\mathcal{A}$, имеющих один или два присоединенных элемента может быть лишь конечное количество.

Т е о р е м а 1.10. Система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$, нормированных специальным образом, образует p -базис пространства $\mathcal{H}$ при $p \geq 2q$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ полна в $\mathcal{H}$. Рассмотрим для простоты ситуацию, когда

у оператора $\mathcal{A}$ есть одно собственное значение $\lambda_s^{(p)}$, которому отвечает цепочка из собственного и одного или двух присоединенных элементов. Проведем доказательство в несколько этапов.

1. Пусть собственному значению $\lambda_s^{(m+2)}$ оператора $\mathcal{A}$ отвечает цепочка из собственного и присоединенного к нему элемента, определяемых по формулам (1.99). Предположим, что рассматриваемая система не полна в $\mathcal{H}$ и существует $\xi = (v; v_0; v_1; \dots; v_m)^T \in \mathcal{H}$ такой, что

$$\begin{aligned} (\xi_k^{(p)}, \xi)_{\mathcal{H}} &= 0, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, \\ (\xi_s^{(p)}, \xi)_{\mathcal{H}} &= 0, \quad p = \overline{1, m}, \quad (\xi_{s0}^{(m+2)}, \xi)_{\mathcal{H}} = 0, \quad (\xi_{s1}^{(m+2)}, \xi)_{\mathcal{H}} = 0. \end{aligned} \quad (1.101)$$

Первая строчка в (1.101) означает, что

$$M_k^T((u_k, v)_H; (u_k, v_0)_H; (u_k, v_1)_H; \dots; (u_k, v_m)_H)^T = 0$$

при $k = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots$ (см. лемму 1.5). Отсюда следует, что

$$(u_k, v)_H = (u_k, v_0)_H = \dots = (u_k, v_m)_H = 0, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{s\}. \quad (1.102)$$

Вторая строчка в (1.101) означает, что

$$M_{s,1}^T((u_s, v)_H; (u_s, v_0)_H; (u_s, v_1)_H; \dots; (u_s, v_m)_H)^T = 0,$$

где $M_{s,1} = M_{s,1}(\varphi_s^{(1)}, \varphi_s^{(2)}, \dots, \varphi_s^{(m)}, \varphi_{s0}^{(m+2)}, \varphi_{s1}^{(m+2)})$ — матрица, столбцами которой являются соответствующие векторы. Покажем, что $\det M_{s,1} \neq 0$, тогда из последней системы, соотношений (1.102) и полноты в H системы $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ получим, что $v = v_0 = v_1 = \dots = v_m = 0$. То есть, $\xi = 0$.

Пусть, как и в лемме 1.4, $J = \text{diag}(1, -I)$. Несложно проверить, что

$$\begin{aligned} (J\varphi_{s0}^{(m+2)}, \varphi_{s0}^{(m+2)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= 0, \quad (J\varphi_{s0}^{(m+2)}, \varphi_{s1}^{(m+2)})_{\mathbb{C}^{m+2}} = -\frac{1}{2} g_s''(\lambda_s^{(m+2)}) \neq 0, \\ (J\varphi_{s1}^{(m+2)}, \varphi_{s1}^{(m+2)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= -\frac{1}{3!} g_s'''(\lambda_s^{(m+2)}). \end{aligned} \quad (1.103)$$

Для дальнейших вычислений понадобится формула, которая может быть получена последовательным дифференцированием тождества Гильберта:

$$(\mathcal{G} - \lambda)^{-n}(\mathcal{G} - \mu)^{-1} = \frac{1}{(\mu - \lambda)^n} (\mathcal{G} - \mu)^{-1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(\mu - \lambda)^{k+1}} (\mathcal{G} - \lambda)^{-(n-k)},$$

$$\mu, \lambda \in \rho(\mathcal{G}), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.104)$$

С использованием соотношений $g_s(\lambda_s^{(p)}) = 0$ ($p = \overline{1, m}$) (см. (1.93)), $g_s(\lambda_s^{(m+2)}) = g'_s(\lambda_s^{(m+2)}) = 0$, формулы (1.104) при $n = 2$, можно найти, что при всех $p = \overline{1, m}$

$$\begin{aligned} (J\varphi_s^{(p)}, \varphi_{s1}^{(m+2)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= -R_{s,p}((\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}, (\mathcal{G} - \lambda_s^{(m+2)})^{-2}\mathcal{Q})_{\mathbb{C}^{m+1}} = \\ &= -R_{s,p}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m+2)})^{-2}(\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1}\mathcal{Q} = \\ &= -R_{s,p}\mathcal{Q}^*\left[\frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m+2)})^2} - \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m+2)})^{-2}}{\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m+2)}} - \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m+2)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m+2)})^2}\right]\mathcal{Q} = \\ &= -R_{s,p}\left[\frac{\lambda_s^{(p)}\lambda_k}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m+2)})^2} - \frac{\lambda_k}{\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m+2)}} - \frac{\lambda_s^{(m+2)}\lambda_k}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m+2)})^2}\right] = 0. \end{aligned} \quad (1.105)$$

Из (1.103) и (1.105) найдем, что

$$M_{s,1}^\tau J M_{s,1} = \begin{pmatrix} -g'_s(\lambda_s^{(1)})R_{s,1}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -g'_s(\lambda_s^{(2)})R_{s,2}^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2!}g''_s(\lambda_s^{(m+2)}) \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2!}g''_s(\lambda_s^{(m+2)}) & -\frac{1}{3!}g'''_s(\lambda_s^{(m+2)}) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (-1)^{m+1}(\det M_{s,1})^2 &= \det M_{s,1}^\tau J M_{s,1} = \\ &= (-1)^{m+1}\left[\frac{1}{2!}g''_s(\lambda_s^{(m+2)})\right]^2 \prod_{p=1}^m g'_s(\lambda_s^{(p)})R_{s,p}^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\det M_{s,1} \neq 0$.

2. Пусть теперь собственному значению $\lambda_s^{(p)}$ оператора $\mathcal{A}$ отвечает цепочка из собственного и двух присоединенных элементов, определяемых по формулам (1.100). Не ограничивая общности можно считать, что $p = m$. Предположим, что система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ не полна в $\mathcal{H}$ и существует

$\xi = (v; v_0; v_1; \dots; v_m)^\tau \in \mathcal{H}$ такой, что

$$(\xi_k^{(p)}, \xi)_{\mathcal{H}} = 0, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, \quad (1.106)$$

$$(\xi_s^{(p)}, \xi)_{\mathcal{H}} = 0, \quad p = \overline{1, m-1}, \quad (\xi_{s0}^{(m)}, \xi)_{\mathcal{H}} = 0, \quad (\xi_{s1}^{(m)}, \xi)_{\mathcal{H}} = 0, \quad (\xi_{s2}^{(m)}, \xi)_{\mathcal{H}} = 0.$$

Первая строчка в (1.106), как и выше, влечет (1.102). Вторая строчка в (1.106) означает, что

$$M_{s,2}^\tau ((u_s, v)_H; (u_s, v_0)_H; (u_s, v_1)_H; \dots; (u_s, v_m)_H)^\tau = 0,$$

где $M_{s,2} = M_{s,2}(\varphi_s^{(1)}, \dots, \varphi_s^{(m-1)}, \varphi_{s0}^{(m)}, \varphi_{s1}^{(m)}, \varphi_{s2}^{(m)})$ — матрица, столбцами которой являются соответствующие векторы. Покажем, что $\det M_{s,2} \neq 0$, тогда из последней системы, соотношений (1.102) и полноты в H системы $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ получим, как и выше, что $v = v_0 = v_1 = \dots = v_m = 0$ и, значит, $\xi = 0$.

Несложно проверить, что

$$\begin{aligned} (J\varphi_{s0}^{(m)}, \varphi_{s0}^{(m)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= 0, \quad (J\varphi_{s0}^{(m)}, \varphi_{s1}^{(m)})_{\mathbb{C}^{m+2}} = 0, \\ (J\varphi_{s0}^{(m)}, \varphi_{s2}^{(m)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= (J\varphi_{s1}^{(m)}, \varphi_{s1}^{(m)})_{\mathbb{C}^{m+2}} = -\frac{1}{3!} g_s'''(\lambda_s^{(m)}) \neq 0, \\ (J\varphi_{s1}^{(m)}, \varphi_{s2}^{(m)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= -\frac{1}{4!} g_s^{(4)}(\lambda_s^{(m)}), \quad (J\varphi_{s2}^{(m)}, \varphi_{s2}^{(m)})_{\mathbb{C}^{m+2}} = -\frac{1}{5!} g_s^{(5)}(\lambda_s^{(m)}), \\ (J\varphi_s^{(p)}, \varphi_{s1}^{(m)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= 0, \quad p = 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (1.107)$$

Здесь последнее соотношение выводится также как в (1.105). Далее, с использованием соотношений $g_s(\lambda_s^{(p)}) = 0$ ($p = \overline{1, m-1}$) (см. (1.93)), $g_s(\lambda_s^{(m)}) = g_s'(\lambda_s^{(m)}) = g_s''(\lambda_s^{(m)}) = 0$, формулы (1.104) при $n = 3$ можно найти, что при всех $p = \overline{1, m-1}$

$$\begin{aligned} (J\varphi_s^{(p)}, \varphi_{s2}^{(m)})_{\mathbb{C}^{m+2}} &= -R_{s,p}((\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1} \mathcal{Q}, (\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-3} \mathcal{Q})_{\mathbb{C}^{m+1}} = \\ &= -R_{s,p} \mathcal{Q}^* (\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-3} (\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1} \mathcal{Q} = \\ &= -R_{s,p} \mathcal{Q}^* \left[\frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^3} - \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-3}}{\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-2}}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^2} - \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^3} \right] \mathcal{Q} = \\ &= -R_{s,p} \left[\frac{\lambda_s^{(p)} \lambda_k}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^3} - \frac{\lambda_k}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^2} - \frac{\lambda_s^{(m)} \lambda_k}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m+2)})^3} \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.108)$$

Из (1.107) и (1.108) найдем, что

$$\begin{aligned}
 M_{s,2}^\tau J M_{s,2} &= \\
 &= \begin{pmatrix} -g'_s(\lambda_s^{(1)})R_{s,1}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g'_s(\lambda_s^{(2)})R_{s,2}^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)}) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)}) & -\frac{1}{4!}g_s^{(4)}(\lambda_s^{(m)}) \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)}) & -\frac{1}{4!}g_s^{(4)}(\lambda_s^{(m)}) & -\frac{1}{5!}g_s^{(5)}(\lambda_s^{(m)}) \end{pmatrix}, \\
 (-1)^{m+1}(\det M_{s,2})^2 &= \det M_{s,2}^\tau J M_{s,2} = (-1)^{m-1} \left[\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)}) \right]^3 \prod_{p=1}^{m-1} g'_s(\lambda_s^{(p)})R_{s,p}^2 \neq 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, $\det M_{s,2} \neq 0$, и система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ полна в $\mathcal{H}$.

3. Построим теперь, как и в теореме 1.9, оператор $\mathcal{S} \longleftrightarrow S_k := M_\infty^* M_k$ с заменой вырожденных матриц M_s на какие либо невырожденные. При этом оператор $\mathcal{S}$ будет непрерывно обратим и по-прежнему представим в виде $\mathcal{S} = \mathcal{I} + \mathcal{T}$, где $\mathcal{T} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ ($p \geq 2q$), так как вырожденных матриц M_s может быть лишь конечное количество. Таким образом, система $\{\mathcal{S}\xi_{k,\infty}^{(p)}\}_{p=\overline{1,m+2}, k \in \mathbb{N}}$ есть p -базис ($p \geq 2q$) пространства $\mathcal{H}$, который отличается от системы специальным образом нормированных корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ лишь на конечное количество элементов. Отсюда следует, что система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$, учитывая ее полноту, есть также p -базис ($p \geq 2q$) пространства $\mathcal{H}$. Теорема доказана. $\blacksquare$

В качестве следствия из леммы 1.4 и теоремы 1.9 (невырожденный случай) сформулируем следующее утверждение.

Т е о р е м а 1.11. Пусть $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ ($p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$). Тогда система

$$\xi_k^{(p)} := R_{k,p}(\lambda_k^{1/2}(A^{-1}); (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q})^\tau u_k, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$R_{k,p} := \begin{cases} [g'_\infty(\gamma_p)]^{-1/2}, & p = \overline{1, m}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ [2\lambda_k(A^{-1})]^{-1/2}, & p = m+1, m+2, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

собственных элементов оператора $\mathcal{A}$ образует p -базис пространства $\mathcal{H}$ при $p \geq 2q$, согласно теореме 1.9, и имеет следующую биортогональную систему:

$$\zeta_k^{(p)} := -[g'_k(\overline{\lambda_k^{(p)}})R_{k,p}]^{-1}(\lambda_k^{1/2}(A^{-1}); -(\mathcal{G} - \overline{\lambda_k^{(p)}})^{-1}\mathcal{Q})^\tau u_k, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теорема доказывается непосредственной проверкой. ■

З а м е ч а н и е 1.8. Из доказательства теоремы 1.9 (или теоремы 1.10) видно, что если есть только условие $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$, то система собственных (или корневых) элементов оператора $\mathcal{A}$ будет образовывать базис Рисса в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. ►

1.6. Выводы к первой главе

1. Доказаны теоремы 1.1, 1.2 о равномерной экспоненциальной устойчивости полугруппы, генерируемой операторным блоком специального вида. В теоремах 1.3, 1.4, с использованием теорем 1.1, 1.2, найдены асимптотические формулы для решений некоторых систем при нагрузках, представляющих собой сумму конечного количества гармоник с медленно меняющимися во времени коэффициентами.
2. Доказаны теоремы 1.5, 1.6 о структуре спектра и теорема 1.7 о пересчете корневых элементов изучаемого операторного блока и связанного с ним операторного пучка.

3. Доказаны теоремы [1.9](#), [1.10](#) о p -базисности системы собственных или корневых элементов изучаемого операторного блока в специальном частном случае.

Глава 2

Модели релаксирующих жидкостей

2.1. Введение

Во второй главе изучаются модели релаксирующих жидкостей. В § 2.2 выводятся уравнения, описывающие малые, относительно равномерного вращения, движения идеальной либо вязкой релаксирующей жидкости, заполняющей ограниченную область трехмерного пространства.

В § 2.3 изучается модель вязкой релаксирующей жидкости, доказана теорема 2.1 об однозначной сильной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи. В п. 2.3.2–2.3.5 исследуется спектр главного оператора, возникающего в рассматриваемой задаче, а также некоторые свойства решений эволюционной задачи. В теореме 2.2 доказано утверждение о существенном и дискретном спектре изучаемого оператора. В лемме 2.15 и теоремах 2.4, 2.5 доказаны утверждения о локализации и асимптотике спектра изучаемого оператора. В теореме 2.10 установлено свойство p -базисности системы корневых элементов изучаемого оператора в случае, когда система не вращается и находится в невесомости. В теореме 2.11 найдено представление для решения эволюционной задачи, а также асимптотика решения при внешних нагрузках специального вида.

В § 2.4 изучается модель идеальной релаксирующей жидкости, доказана теорема 2.12 об однозначной сильной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи. В теореме 2.13, с использованием теоремы 1.1, доказана формула асимптотического поведения решения изучаемой задачи при нагрузках специального вида в случае, когда система не вращается. В п. 2.4.2 изучаются спектральные свойства главного оператора. В теоремах 2.14, 2.15 доказаны утверждения о существенном спектре изучаемого оператора, о локализации и асимптотике дискретного спектра. В теоремах 2.16, 2.17 установлены некоторые

свойства корневых элементов изучаемого оператора. В п. 2.4.3 рассматривается случай, когда система находится в невесомости и не вращается. В этом случае изучаемый оператор является частным случаем оператора, изученного в § 1.5.

Результаты главы 2 изложены в статьях [36, 201–203].

2.2. Уравнения движения релаксирующих жидкостей

Рассмотрим контейнер, равномерно вращающийся вокруг оси, сонаправленной с действием силы тяжести, и полностью заполненный вязкой (или идеальной) неоднородной жидкостью. Будем считать, что жидкость занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор, нормальный к границе $\partial\Omega$ и направленный вне области Ω . Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с контейнером, таким образом, что ось Ox_3 совпадает с осью вращения и направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится в области Ω . В этом случае равномерная скорость вращения контейнера запишется в виде $\omega_0 \mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_3$ — орт оси вращения Ox_3 , а $\omega_0 > 0$, для определенности. Будем считать, что внешнее стационарное поле сил $\mathbf{F}_0$ является гравитационным и действует вдоль оси вращения, то есть $\mathbf{F}_0 = -g\mathbf{e}_3$, $g > 0$.

Рассмотрим состояние относительного равновесия жидкости. Из уравнения Навье-Стокса движения вязкой жидкости (или уравнения Эйлера движения идеальной жидкости), записанного в подвижной системе координат, найдем формулу для градиента стационарного давления (см. [49, гл. 5, § 1, п. 1]):

$$\begin{aligned} \nabla P_0 &= \rho_0 \left(-\omega_0^2 \mathbf{e}_3 \times (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}) - g\mathbf{e}_3 \right) = \\ &= \rho_0 \nabla \left(\frac{\omega_0^2}{2} |\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}|^2 - gx_3 \right) = \rho_0 \nabla \left(\frac{\omega_0^2}{2} (x_1^2 + x_2^2) - gx_3 \right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор текущей точки области Ω , а ρ_0 — стационарная плотность жидкости.

В состоянии относительного равновесия динамические составляющие давления и плотности, отвечающие за эффекты релаксации в жидкости, отсутству-

ют. Поэтому будем считать, что в состоянии относительного равновесия жидкость баротропна и удовлетворяет следующему уравнению состояния: $P_0 = a_\infty^2 \rho_0$, где a_∞ — скорость звука в жидкости. Из этого уравнения и соотношения (2.1) заключаем, что ρ_0 и a_∞^2 могут быть в общем случае функциями параметра $z := 2^{-1}\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) - gx_3$. Далее будем считать, что в жидкости задана скорость звука $a_\infty^2 = \text{const}$, тогда стационарная плотность может быть найдена из (2.1) как функция параметра z следующим образом: $\rho_0(z) = \rho_0(0) \exp(za_\infty^{-2})$, где $\rho_0(0)$ — плотность жидкости в начале координат. При этом стационарная плотность ρ_0 будет постоянной только если в системе отсутствует вращение и гравитационное поле, то есть при $\omega_0 = 0$ и $g = 0$.

Представим теперь полное давление и плотность жидкости в виде: $\hat{P}(t, x) = P_0(z) + p(t, x)$, $\hat{\rho}(t, x) = \rho_0(z) + \tilde{\rho}(t, x)$, где $p(t, x)$ и $\tilde{\rho}(t, x)$ — это динамическое давление и плотность соответственно, возникающие при малых движениях жидкости относительно стационарного состояния (состояния твердотельного вращения). Предположим, что динамические составляющие удовлетворяют следующему реологическому соотношению:

$$P_m\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla p(t, x) = a_\infty^2\left(P_m\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + \rho_0(z)Q_{m-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)\nabla\tilde{\rho}(t, x), \quad (2.2)$$

где $P_m(\lambda)$, $Q_{m-1}(\lambda)$ — полиномы степеней m и $m - 1$ соответственно. Предположим, что корни полинома $P_m(\lambda)$ вещественны, различны и отрицательны, обозначим их через $-b_l$ ($l = \overline{1, m}$), а дробь $Q_{m-1}(\lambda)P_m^{-1}(\lambda)$ имеет следующее разложение:

$$\frac{Q_{m-1}(\lambda)}{P_m(\lambda)} = \sum_{l=1}^m \frac{k_l}{b_l + \lambda}, \quad (2.3)$$

где $k_l > 0$ ($l = \overline{1, m}$). Из определяющего соотношения (2.2) с помощью преобразования Лапласа и представлений (2.3) можно вывести (см. [39, с. 43-46]) следующее уравнение состояния:

$$\nabla p(t, x) = a_\infty^2 \nabla \tilde{\rho}(t, x) - a_\infty^2 \rho_0(z) \sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \nabla (k_l \tilde{\rho}(s, x)) ds, \quad (2.4)$$

В (2.4) мы пренебрегли экспоненциально затухающим во времени слагаемым, порождаемым состоянием жидкости в начальный момент времени. Это слагаемое можно считать отнесенным к полю внешних сил. Числа b_l^{-1} имеют смысл времен релаксации в системе, а k_l — некоторые структурные постоянные. В качестве математического обобщения будем считать, что $k_l = k_l(x)$ — непрерывно дифференцируемые положительные и отделенные от нуля функции. При отсутствии вращения и гравитационного поля ($\omega_0 = 0$, $g = 0$) функции $k_l(x)$ будем считать положительными константами.

Осуществим линеаризацию уравнения Навье–Стокса, записанного в подвижной системе координат, относительно состояния относительного равновесия и преобразуем его с помощью уравнения состояния (2.4). Полученное уравнение и уравнение неразрывности составят систему уравнений, описывающих малые движения вязкой релаксирующей жидкости, заполняющей равномерно вращающееся твердое тело:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}(t, x)}{\partial t} - 2\omega_0(\mathbf{u}(t, x) \times \mathbf{e}_3) - \\ - \rho_0^{-1}(z)(\mu \Delta \mathbf{u}(t, x) + (\eta + 3^{-1}\mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}(t, x)) + \\ + \nabla \left(\frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)} \tilde{\rho}(t, x) \right) - \sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \nabla (a_\infty^2 k_l(x) \tilde{\rho}(s, x)) ds = \mathbf{f}(t, x), \\ \frac{\partial \tilde{\rho}(t, x)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0(z) \mathbf{u}(t, x)) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \end{array} \right. \quad (2.5)$$

где $\mathbf{u}(t, x)$ — поле скоростей жидкости в подвижной системе координат, μ и η — динамическая и вторая вязкости жидкости, $\mathbf{f}(t, x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное поле.

Осуществим в системе (2.5), с целью ее симметризации, следующую замену

$$a_\infty \rho_0^{-1/2}(z) \tilde{\rho}(t, x) =: \rho(t, x). \quad (2.6)$$

Получим основную систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}(t, x)}{\partial t} - 2\omega_0(\mathbf{u}(t, x) \times \mathbf{e}_3) + \nabla(a_\infty \rho_0^{-1/2}(z)\rho(t, x)) - \\ - \rho_0^{-1}(z)(\mu \Delta \mathbf{u}(t, x) + (\eta + 3^{-1}\mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}(t, x)) - \\ - \sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \nabla(a_\infty \rho_0^{1/2}(z)k_l(x)\rho(s, x)) ds = \mathbf{f}(t, x), \\ \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + a_\infty \rho_0^{-1/2}(z) \operatorname{div}(\rho_0(z)\mathbf{u}(t, x)) = 0 \quad (\text{в } \Omega). \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Систему (2.7) дополним граничным условием прилипания:

$$\mathbf{u}(t, x) = \mathbf{0} \quad (\text{на } \partial\Omega) \quad (2.8)$$

и начальными условиями:

$$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^0(x), \quad \rho(0, x) = \rho^0(x). \quad (2.9)$$

З а м е ч а н и е 2.1. Начально-краевая задача (2.7)-(2.9) описывает малые движения *вязкой релаксирующей жидкости*, заполняющей равномерно вращающуюся ограниченную область. Если система не вращается, то нужно в (2.7) положить $\omega_0 = 0$. Если система находится в невесомости, то нужно в (2.7) положить $g = 0$. Соответствующим образом изменится и параметр z .

Чтобы получить задачу о малых движениях *идеальной релаксирующей жидкости*, заполняющей равномерно вращающуюся ограниченную область, нужно в (2.7) положить $\mu = 0$, $\eta = 0$, а условие прилипания (2.8) заменить на условие непротекания:

$$\mathbf{u}(t, x) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega). \quad \blacktriangleright \quad (2.10)$$

Всюду далее будем предполагать, что физические параметры связаны следующим неравенством, характеризующим малость времен релаксации b_l^{-1} или структурных функций $k_l(x)$:

$$\varphi_0(x) := 1 - \sum_{l=1}^m \frac{\rho_0(z)k_l(x)}{b_l} > 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad \left(z = \frac{\omega_0^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) - gx_3 \right). \quad (2.11)$$

Если $\omega_0 = 0$, $g = 0$, то структурные функций $k_l(x)$ будем считать положительными константами. При этом $\varphi_0(x)$ также будет константой.

2.3. Вязкая релаксирующая жидкость. Эволюционная задача, спектральная задача, представление и асимптотика решения

2.3.1. Эволюционная задача, основное операторное уравнение, теорема о разрешимости

Операторная формулировка задачи

Для формулировки задачи (2.7)-(2.9) в операторной форме введем основные пространства и операторы. Введем векторное пространство $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ с весом $\rho_0(z)$ со скалярным произведением и нормой следующего вида:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} := \int_{\Omega} \rho_0(z) \mathbf{u}(x) \cdot \overline{\mathbf{v}(x)} d\Omega, \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 = \int_{\Omega} \rho_0(z) |\mathbf{u}(x)|^2 d\Omega. \quad (2.12)$$

Очевидно, в силу свойств функции $\rho_0(z)$, что нормы в пространствах $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ и $\mathbf{L}_2(\Omega)$ эквивалентны, а значит $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ — гильбертово.

Введем скалярное гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ функций суммируемых со своими квадратами по области Ω , а также его подпространство $L_{2, \rho_0}(\Omega) := \{f \in L_2(\Omega) \mid (f, \rho_0^{1/2})_{L_2(\Omega)} = 0\}$ ($L_{2, \Omega} := L_{2, \text{const}}(\Omega)$). Определим ортопроектор

$$\Pi f := f - (f, \rho_0^{1/2})_{L_2(\Omega)} \|\rho_0^{1/2}\|_{L_2(\Omega)}^{-2} \rho_0^{1/2}(z) \quad (2.13)$$

пространства $L_2(\Omega)$ на подпространство $L_{2, \rho_0}(\Omega)$.

Определим оператор $S\mathbf{u} := i(\mathbf{u} \times \mathbf{e}_3)$, $\mathcal{D}(S) = \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$. Имеет место лемма, доказательство которой подобно доказательству аналогичной леммы о свойствах кориолисова (гироскопического) оператора из [49, гл. 5, § 1, п. 2].

Л е м м а 2.1. *Оператор S является самосопряженным и ограниченным в $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$: $S = S^*$, $S \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$; более того, $\|S\| = 1$.*

Пусть граница $\partial\Omega$ области Ω — класса C^2 .

Л е м м а 2.2. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\begin{aligned} -\rho_0^{-1}(z)(\alpha\Delta\mathbf{u} + \beta\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}) - \gamma\nabla[a_\infty^2\rho_0^{-1}(z)\operatorname{div}(\rho_0(z)\mathbf{u})] &= \mathbf{w} \quad (\text{в } \Omega), \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad (\text{на } \partial\Omega), \quad \alpha > 0, \quad \beta \geq 0, \quad \gamma \geq 0. \end{aligned}$$

Для каждого поля $\mathbf{w} \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ существует и единственно обобщенное решение этой задачи, выражаемое формулой $\mathbf{u} = A^{-1}(\alpha, \beta, \gamma)\mathbf{w}$. Оператор $A(\alpha, \beta, \gamma)$ является самосопряженным положительно определенным, $A^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 3/2$. Кроме того, $\mathbf{H}_{A(\alpha, \beta, \gamma)} := \mathcal{D}(A^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma)) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) \mid \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ (на } \partial\Omega)\}$ и для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{A(\alpha, \beta, \gamma)}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{A(\alpha, \beta, \gamma)} &= (A^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma)\mathbf{u}, A^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma)\mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} = \\ &= \alpha\mathcal{J}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \beta\mathcal{D}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \gamma\mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \\ \mathcal{J}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \nabla u_i(x) \cdot \overline{\nabla v_i(x)} d\Omega, \quad \mathcal{D}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{u}(x) \overline{\operatorname{div}\mathbf{v}(x)} d\Omega, \\ \mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \int_{\Omega} \frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)} \operatorname{div}(\rho_0(z)\mathbf{u}(x)) \overline{\operatorname{div}(\rho_0(z)\mathbf{v}(x))} d\Omega. \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. См. [93, гл. 24]. ■

Определим оператор $B\mathbf{u} := a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\operatorname{div}(\rho_0(z)\mathbf{u})$, $\mathcal{D}(B) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0) \mid \operatorname{div}(\rho_0(z)\mathbf{u}) \in L_2(\Omega), \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ (на } \partial\Omega)\} \supset \mathcal{D}(A^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma))$.

Л е м м а 2.3. Сопряженный оператор имеет вид $B^*\rho = -\nabla(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho)$, $\mathcal{D}(B^*) = W_2^1(\Omega) \cap L_{2, \rho_0}(\Omega)$. Кроме того, $B^*BA^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(B)$. Вычислим

$$\begin{aligned} (B\mathbf{u}, \rho)_{L_{2, \rho_0}(\Omega)} &= \int_{\Omega} a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\operatorname{div}(\rho_0(z)\mathbf{u})\bar{\rho} d\Omega = \\ &= - \int_{\Omega} \rho_0(z)\mathbf{u} \cdot \overline{\nabla(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho)} d\Omega + \int_S a_\infty\rho_0^{1/2}(z)\bar{\rho}\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \\ &= - \int_{\Omega} \rho_0(z)\mathbf{u} \cdot \overline{\nabla(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho)} d\Omega = (\mathbf{u}, -\nabla(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho))_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}. \end{aligned}$$

Отсюда и из определения сопряженного оператора следуют формулы для B^* .

2. Для доказательства $B^*BA^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$ понадобятся некоторые вспомогательные оценки и рассуждения. Рассмотрим задачу

$$L\mathbf{u} := -(\alpha\Delta\mathbf{u} + \beta\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}) - \gamma\rho_0(z)\nabla[a_\infty^2\rho_0^{-1}(z)\operatorname{div}(\rho_0(z)\mathbf{u})] = \mathbf{f} \quad (\text{в } \Omega),$$

$$B_L\mathbf{u} := \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad (\text{на } \partial\Omega).$$

Можно проверить, что матричное дифференциальное выражение L определяет невырожденную правильно эллиптическую по Дуглису–Ниренбергу систему, а граничное условие B_L удовлетворяет условию дополненности (см. [21, с. 379], [97]). Из теоремы о нормальной разрешимости из [97, с. 241] следует, что существуют константы $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, не зависящие от $\mathbf{u}$, такие, что

$$c_1\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}_2^2(\Omega)}^2 \leq \|L\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2 \leq c_2\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}_2^2(\Omega)}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^2(\Omega, B_L), \quad (2.14)$$

$$\mathbf{W}_2^2(\Omega, B_L) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^2(\Omega) \mid B_L\mathbf{u} = \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ (на } \partial\Omega)\} = \mathcal{D}(A(\alpha, \beta, \gamma)),$$

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}_2^2(\Omega)}^2 := \sum_{k=1}^3 \left[\|u_k\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u_k\|_{L_2(\Omega)}^2 \right].$$

Далее, из неравенства Эрлинга–Ниренберга (см. [13, с. 33]) следует, что существует константа $c_3 > 0$, не зависящая от $\mathbf{u}$, такая, что

$$\left\| \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_3 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}_2^2(\Omega)}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^2(\Omega), \quad k, j = 1, 2, 3. \quad (2.15)$$

Пусть теперь $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(A(\alpha, \beta, \gamma)) = \mathbf{W}_2^2(\Omega, B_L)$. Из (2.14), (2.15) получим следующие оценки

$$\begin{aligned} \|B^*B\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 &= \int_{\Omega} \left| \nabla \left(\frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)} \operatorname{div}(\rho_0(z)\mathbf{u}) \right) \right|^2 d\Omega \leq c_4 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}_2^2(\Omega)}^2 \leq c_4 c_1^{-1} \|L\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq c_4 c_1^{-1} \max_{x \in \bar{\Omega}} \rho_0(z) \int_{\Omega} \rho_0(z) |\rho_0^{-1}(z) L\mathbf{u}|^2 d\Omega = c_5 \|A(\alpha, \beta, \gamma)\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2, \end{aligned}$$

где $c_5 = c_5(c_1, c_3, \rho_0, a_\infty, \Omega) > 0$ — некоторая абсолютная константа. Отсюда после замены $A(\alpha, \beta, \gamma)\mathbf{u} = \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ следует требуемое утверждение. Лемма доказана. ■

Л е м м а 2.4. Операторы $M_l \rho := \Pi \rho_0(z) k_l \Pi \rho$ ($l = \overline{1, m}$) являются ограниченными самосопряженными и положительно определенными в $L_{2, \rho_0}(\Omega)$. Кроме того, $M_l \mathcal{D}(B^*) \subset \mathcal{D}(B^*)$, $B^* M_l B A^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$ ($l = \overline{1, m}$).

Определим операторы $A := A(\mu, \eta + \mu/3, 0)$, $Q := B A^{-1/2}$, $Q^+ := A^{-1/2} B^*$.

Л е м м а 2.5. Оператор Q ограничен: $Q \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0), L_{2, \rho_0}(\Omega))$. Оператор Q^+ расширяется по непрерывности до ограниченного оператора Q^* : $\overline{Q^+} = Q^*$, $Q^+ = Q^*|_{\mathcal{D}(B^*)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(B) := \mathcal{D}(A^{1/2})$. Оценим

$$\begin{aligned} \|B\mathbf{u}\|_{L_{2, \rho_0}(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} a_{\infty}^2 \rho_0^{-1}(z) |\operatorname{div}(\rho_0(z)\mathbf{u})|^2 d\Omega \leq 2a_{\infty}^2 \int_{\Omega} \left(\rho_0^{-1}(z) |\nabla \rho_0(z)|^2 |\mathbf{u}|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \rho_0(z) |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 \right) d\Omega \leq c_6 \int_{\Omega} E(\mathbf{u}, \mathbf{u}) d\Omega = c_6 \|A^{1/2} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2, \\ E(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &:= \left(\eta - \frac{2}{3} \mu \right) |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 + \frac{\mu}{2} \sum_{j,k=1}^3 \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right|^2, \end{aligned}$$

где $c_6 = c_6(a_{\infty}, \rho_0, \Omega) > 0$ — некоторая абсолютная константа. Отсюда после замены $A^{1/2} \mathbf{u} = \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ следует ограниченность оператора Q . Далее, из ограниченности оператора Q^* и просто проверяемого соотношения $Q^+ = Q^*|_{\mathcal{D}(B^*)}$ следуют оставшиеся утверждения леммы. Лемма доказана. $\blacksquare$

С помощью введенных операторов перепишем задачу (2.7)-(2.9) в виде задачи Коши для системы двух дифференциально-операторных уравнений в гильбертовых пространствах $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ и $L_{2, \rho_0}(\Omega)$:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + (2\omega_0 i S + A)\mathbf{u} - B^* \rho + \sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)} B^* M_l \rho(s) ds = \mathbf{f}(t), \\ \frac{d\rho}{dt} + B\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \rho(0) = \rho^0. \end{cases} \quad (2.16)$$

О п р е д е л е н и е 2.1. Поле $\mathbf{u} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A))$ и функцию $\rho \in C^1(\mathbb{R}_+, L_{2, \rho_0}(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}_+, \mathcal{D}(B^*))$ назовем *сильным решением* задачи (2.16)

и, соответственно, начально-краевой задачи (2.7)-(2.9), если в (2.16) выполнены уравнения при любом $t \in \mathbb{R}_+$ и начальные условия.

Переход к основному дифференциально-операторному уравнению, теорема о разрешимости

Пусть $\mathbf{u}(t)$, $\rho(t)$ — сильное решение задачи (2.16) (в смысле определения 2.1). Тогда из леммы 2.5 следует, что $\mathbf{u}(t)$, $\rho(t)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + A^{1/2} \left\{ 2\omega_0 i A^{-1/2} S \mathbf{u} + A^{1/2} \mathbf{u} - Q^+ \rho + \sum_{l=1}^m Q^* \int_0^t e^{-b_l(t-s)} M_l \rho(s) ds \right\} = \mathbf{f}(t), \\ \frac{d\rho}{dt} + Q A^{1/2} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \rho(0) = \rho^0. \end{cases}$$

Из $\rho \in C^1(\mathbb{R}_+, L_{2,\rho_0}(\Omega))$ и $M_l \in \mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega))$ следует, что

$$\int_0^t e^{-b_l(t-s)} M_l \rho(s) ds = \frac{1}{b_l} M_l \rho - \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \frac{1}{b_l} M_l \frac{d\rho(s)}{ds} ds - e^{-b_l t} \frac{1}{b_l} M_l \rho^0.$$

Из этого соотношения и последней системы следует, что $\mathbf{u}(t)$, $\rho(t)$ удовлетворяют также следующей системе

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + A^{1/2} \left\{ 2\omega_0 i A^{-1/2} S \mathbf{u} + A^{1/2} \mathbf{u} - Q^* \left[I - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right] \rho - \right. \\ \left. - \sum_{l=1}^m Q^* \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \frac{1}{b_l} M_l \frac{d\rho(s)}{ds} ds - \sum_{l=1}^m e^{-b_l t} \frac{1}{b_l} Q^* M_l \rho^0 \right\} = \mathbf{f}(t), \\ \frac{d\rho}{dt} + Q A^{1/2} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \rho(0) = \rho^0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Пусть функция $g \in C(\Omega)$, $0 < g_1 \leq g(x) \leq g_2$. По аналогии с $L_{2,\rho_0}(\Omega)$ определим пространство $L_{2,g}(\Omega) := \{f \in L_2(\Omega) \mid (f, g^{1/2})_{L_2(\Omega)} = 0\}$.

Определим операторы $T_l \rho := (k_l \rho_0)^{1/2} \Pi \rho$ ($l = \overline{1, m}$), $T_0 \rho := \varphi_0^{1/2} \Pi \rho$ (функ-

цию $\varphi_0(x)$ см. в (2.11)). С использованием (2.11) несложно проверить, что

$$\begin{aligned} T_l, (T_l^*)^{-1} &\in \mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega), L_{2,k_l^{-1}}(\Omega)), & T_l^{-1}, T_l^* &\in \mathcal{L}(L_{2,k_l^{-1}}(\Omega), L_{2,\rho_0}(\Omega)), \\ T_0, (T_0^*)^{-1} &\in \mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega), L_{2,\varphi_0^{-1}\rho_0}(\Omega)), & T_0^{-1}, T_0^* &\in \mathcal{L}(L_{2,\varphi_0^{-1}\rho_0}(\Omega), L_{2,\rho_0}(\Omega)), \\ M_l &= T_l^* T_l \quad (l = \overline{1, m}), & I - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l &= T_0^* T_0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Введем по функции $\rho(t)$ следующие объекты:

$$T_0 \rho(t) =: r_0(t), \quad \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \frac{1}{\sqrt{b_l}} T_l \frac{d\rho(s)}{ds} ds =: r_l(t) \quad (l = \overline{1, m}). \quad (2.19)$$

Функции $r_0(t)$ и $r_l(t)$ ($l = \overline{1, m}$) непрерывно дифференцируемы. Из (2.17) следует, что они удовлетворяют следующей системе уравнений и начальных условий:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -A^{1/2} \left[2\omega_0 i A^{-1/2} S \mathbf{u} + A^{1/2} \mathbf{u} - Q^* T_0^* r_0 - \sum_{l=1}^m \frac{1}{\sqrt{b_l}} Q^* T_l^* r_l - \right. \\ \left. - \sum_{l=1}^m e^{-b_l t} \frac{1}{b_l} Q^* M_l \rho^0 \right] + \mathbf{f}(t), \\ \frac{dr_0}{dt} = -[T_0 Q A^{1/2} \mathbf{u}], \quad \frac{dr_l}{dt} = -\left[\frac{1}{\sqrt{b_l}} T_l Q A^{1/2} \mathbf{u} + b_l r_l \right] \quad (l = \overline{1, m}), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad r_0(0) = T_0 \rho^0, \quad r_l(0) = 0 \quad (l = \overline{1, m}). \end{cases} \quad (2.20)$$

Систему (2.20) будем трактовать как задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в ортогональной сумме гильбертовых пространств $\mathcal{H} := \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0) \oplus (L_{2,\varphi_0^{-1}\rho_0}(\Omega) \oplus_{l=1}^m L_{2,k_l^{-1}}(\Omega))$:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -\mathcal{A}(\xi + \xi_{\rho^0}(t)) + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0, \\ \xi(t) &:= (\mathbf{u}(t); w(t))^\tau = (\mathbf{u}(t); (r_0(t); r_1(t); \dots; r_m(t)))^\tau, \\ \xi_{\rho^0}(t) &:= (0; (T_0^*)^{-1} \sum_{l=1}^m e^{-b_l t} \frac{1}{b_l} M_l \rho^0; 0; \dots; 0)^\tau, \\ \xi^0 &:= (\mathbf{u}^0; T_0 \rho^0; 0; \dots; 0)^\tau, \quad \mathcal{F}(t) := (\mathbf{f}(t); 0; 0; \dots; 0)^\tau. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Для оператора $\mathcal{A}$, как можно проверить, справедливы следующие формулы:

$$\mathcal{A} = \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) + \begin{pmatrix} 2\omega_0 i S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{Q}A^{-1/2} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \text{diag}(A, \mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*) \begin{pmatrix} I & A^{-1/2}\mathcal{Q}^* \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\omega_0 i S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{Q}TA^{-1/2} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \text{diag}(A^{1/2}T^{-1}A^{1/2}, \mathcal{G} + \mathcal{Q}T\mathcal{Q}^*) \begin{pmatrix} I & A^{-1/2}T\mathcal{Q}^* \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ \xi = (\mathbf{u}; w)^\tau \in \mathcal{H} \mid \mathbf{u} + A^{-1/2}\mathcal{Q}^*w \in \mathcal{D}(A) \right\}, \quad (2.24)$$

где $I, \mathcal{I}$ — единичные операторы, $T := (I + 2\omega_0 i A^{-1/2} S A^{-1/2})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$,

$$\mathcal{Q} := \left(-T_0 Q, \frac{-1}{\sqrt{b_1}} T_1 Q, \dots, \frac{-1}{\sqrt{b_m}} T_m Q \right)^\tau, \quad \mathcal{G} := \text{diag}(0, b_1 I, \dots, b_m I).$$

Осуществим в задаче (2.21) замену искомой функции $\zeta(t) := \xi(t) + \xi_{\rho^0}(t)$, с учетом (2.18) получим следующую задачу Коши

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\mathcal{A}\zeta + \xi'_{\rho^0}(t) + \mathcal{F}(t), \quad \zeta(0) = \zeta^0 := (\mathbf{u}^0; (T_0^*)^{-1}\rho^0; 0; \dots; 0)^\tau. \quad (2.25)$$

О п р е д е л е н и е 2.2. Сильным решением задачи Коши (2.25) назовем функцию $\zeta \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ такую, что в (2.25) выполнено уравнение для любого $t \in \mathbb{R}_+$ и начальное условие.

Л е м м а 2.6. Оператор $\mathcal{A}$ максимальный секториальный. Более того,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\text{Im}\lambda| \leq \|\mathcal{Q}^*\|^2 (2\omega_0)^{-1} \text{Re}\lambda + 2\omega_0, \quad 0 \leq \text{Re}\lambda \leq 4\omega_0^2 \|\mathcal{Q}^*\|^{-2} \} \\ \cup \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\text{Im}\lambda| \leq 2\|\mathcal{Q}^*\|(\text{Re}\lambda)^{1/2}, \quad \text{Re}\lambda \geq 4\omega_0^2 \|\mathcal{Q}^*\|^{-2} \}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{W}(\mathcal{A})$ — числовая область значений оператора $\mathcal{A}$ (см. определение 1.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем в несколько шагов.

1. Заметим, что $\mathcal{D}(A) \oplus (T_0^*)^{-1}\mathcal{D}(B^*) \oplus_{l=1}^m (T_l^*)^{-1}\mathcal{D}(B^*) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$, а значит оператор $\mathcal{A}$ плотно определен. Далее, из факторизации (2.23) оператора $\mathcal{A}$ в форме Шура-Фробениуса следует, что оператор $\mathcal{A}$ замкнут на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

2. Докажем, что оператор $\mathcal{A}$ секториален. Пусть $\xi = (\mathbf{u}; w)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, тогда $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ и из факторизации (2.22) оператора $\mathcal{A}$ симметричной форме и леммы 2.2 получим, что (здесь мы следуем идеям из [44, гл. 5, § 3, п. 10])

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mathcal{A}\xi, \xi)_{\mathcal{H}} &= \operatorname{Re} \left(\begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2}\mathbf{u} \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A^{1/2}\mathbf{u} \\ w \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}} = \|A^{1/2}\mathbf{u}\|^2 + \|\mathcal{G}^{1/2}w\|^2, \\ |\operatorname{Im}(\mathcal{A}\xi, \xi)_{\mathcal{H}}| &= |\operatorname{Im}[(\mathcal{Q}^*w, A^{1/2}\mathbf{u}) - (\mathcal{Q}A^{1/2}\mathbf{u}, w) + 2\omega_0 i(S\mathbf{u}, \mathbf{u})]| \\ &= |2\operatorname{Im}(\mathcal{Q}^*w, A^{1/2}\mathbf{u}) + 2\omega_0 i(S\mathbf{u}, \mathbf{u})| \leq 2\|A^{1/2}\mathbf{u}\|\|\mathcal{Q}^*w\| + 2\omega_0\|\mathbf{u}\|^2. \end{aligned}$$

Из этих оценок при любом $\alpha > 0$ получим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mathcal{A}\xi, \xi)_{\mathcal{H}} - \alpha|\operatorname{Im}(\mathcal{A}\xi, \xi)_{\mathcal{H}}| &\geq (\|A^{1/2}\mathbf{u}\| - \alpha\|\mathcal{Q}^*w\|)^2 - \\ &- \alpha^2\|\mathcal{Q}^*w\|^2 + \|\mathcal{G}^{1/2}w\|^2 - 2\omega_0\alpha\|\mathbf{u}\|^2 \geq -\max\{\alpha^2\|\mathcal{Q}^*\|^2, 2\omega_0\alpha\} \cdot \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re}([\mathcal{A} + \gamma(\alpha)]\xi, \xi)_{\mathcal{H}} - \alpha|\operatorname{Im}([\mathcal{A} + \gamma(\alpha)]\xi, \xi)_{\mathcal{H}}| \geq 0,$$

где $\gamma(\alpha) := \max\{\alpha^2\|\mathcal{Q}^*\|^2, 2\omega_0\alpha\}$. Таким образом,

$$|\operatorname{Im}([\mathcal{A} + \gamma(\alpha)]\xi, \xi)_{\mathcal{H}}| \leq \alpha^{-1}\operatorname{Re}([\mathcal{A} + \gamma(\alpha)]\xi, \xi)_{\mathcal{H}} \quad \forall \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad \alpha > 0.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg(\lambda + \gamma(\alpha))| \leq \arctg \alpha^{-1}\}$ при любом $\alpha > 0$, то есть оператор $\mathcal{A}$ секториален.

Формула из формулировки леммы получается построением огибающих соответствующих семейств прямых.

3. Докажем, что оператор $\mathcal{A}$ максимален. Для этого достаточно показать (см. [55, гл. 1, § 4, теорема 4.3]), что оператор $\mathcal{A} - \lambda$ непрерывно обратим при

$\lambda < 0$. Из (2.22) найдем, что оператор $\mathcal{A} - \lambda$ представим в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{A} - \lambda &= \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} I - \lambda A^{-1} + 2\omega_0 i A^{-1/2} S A^{-1/2} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix} \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) = \\ &= \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}), \end{aligned} \quad (2.26)$$

где $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) := (\mathcal{G} - \lambda)^{-1}$, $L(\lambda) := I - \lambda A^{-1} + 2\omega_0 i A^{-1/2} S A^{-1/2} + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1} \mathcal{Q}$.

Легко видеть, что $\text{Re} L(\lambda) \gg 0$, $\text{Re}[L(\lambda)]^* \gg 0$ при $\lambda < 0$. Следовательно, $L(\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$. Отсюда и из (2.26) следует, что при $\lambda < 0$ существует $(\mathcal{A} - \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, а значит оператор $\mathcal{A}$ максимален. Лемма доказана. ■

З а м е ч а н и е 2.2. Из (2.26) получим представление для резольвенты оператора $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) &= \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & -\mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1/2} L^{-1}(\lambda) A^{-1/2} & -A^{-1/2} L^{-1}(\lambda) \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q} L^{-1}(\lambda) A^{-1/2} & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) - \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q} L^{-1}(\lambda) \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \end{pmatrix}, \quad (2.27) \\ L(\lambda) &:= I - \lambda A^{-1} + 2\omega_0 i A^{-1/2} S A^{-1/2} + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1} \mathcal{Q} \end{aligned}$$

при любых $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G}) \cup \sigma(L(\lambda))$, где $\sigma(\mathcal{G}) = \{0, b_1, \dots, b_m\}$, $\sigma(L(\lambda))$ — спектры оператора $\mathcal{G}$ и операторного пучка $L(\lambda)$ соответственно. ►

Т е о р е м а 2.1. Пусть поле $\mathbf{f}$ локально гильдерово: для любого $\tau \in \mathbb{R}_+$ существуют $K(\tau) > 0$, $k(\tau) \in (0, 1]$ такие, что

$$\|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} \leq K|t - s|^k$$

при всех $0 \leq s, t \leq \tau$. Тогда для любых $\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(A)$ и $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$ существует и единственно сильное (в смысле определения 2.1) решение задачи (2.16).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем в несколько шагов.

1. Пусть $\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(A)$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, $\zeta^0 := (\mathbf{u}^0; w^0)^\tau = (\mathbf{u}^0; (T_0^*)^{-1}\rho^0; 0; \dots; 0)^\tau$ (см. (2.25)), тогда $\zeta^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Действительно, из (2.24) и леммы 2.5 имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^0 + A^{-1/2}Q^*w^0 &= \mathbf{u}^0 - A^{-1/2}Q^*T_0^*(T_0^*)^{-1}\rho^0 = \mathbf{u}^0 - A^{-1/2}Q^*|_{\mathcal{D}(B^*)}\rho^0 = \\ &= \mathbf{u}^0 - A^{-1/2}Q^+\rho^0 = A^{-1}[A\mathbf{u}^0 - B^*\rho^0] \in \mathcal{D}(A). \end{aligned}$$

Из условия на поле $\mathbf{f}(t)$ следует, что функция $\xi'_{\rho^0}(t) + \mathcal{F}(t)$ из (2.25) также локально гельдерова.

По теореме [22, гл. 1, § 5, теорема 5.9] оператор $-\mathcal{A}$ порождает сильно непрерывную полугруппу операторов, голоморфную в некотором секторе, содержащем положительную полуось. По теореме [22, гл. 2, § 1, теорема 1.4] задача Коши (2.25) имеет единственное сильное (в смысле определения 2.2) решение $\zeta(t)$.

2. Из условия $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$ и леммы 2.4 следует, что $\xi_{\rho^0} \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(\mathcal{A}))$. Очевидно также, что $\xi_{\rho^0} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$. Таким образом, для (единственного) решения задачи (2.21) имеем $\xi = \zeta - \xi_{\rho^0} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(\mathcal{A}))$. Это означает, что функции $\mathbf{u}(t)$, $r_l(t)$ ($l = \overline{0, m}$) удовлетворяют системе (см. (2.20))

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -A^{1/2}\left[A^{1/2}\mathbf{u} - Q^*T_0^*r_0 - \sum_{l=1}^m \frac{1}{\sqrt{b_l}} Q^*T_l^*r_l\right] - 2\omega_0 i S\mathbf{u} + \\ \quad + \sum_{l=1}^m e^{-b_l t} \frac{1}{b_l} B^* M_l \rho^0 + \mathbf{f}(t), \\ \frac{dr_0}{dt} = -[T_0 Q A^{1/2}\mathbf{u}], \quad \frac{dr_l}{dt} = -\left[\frac{1}{\sqrt{b_l}} T_l Q A^{1/2}\mathbf{u} + b_l r_l\right] \quad (l = \overline{1, m}), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad r_0(0) = T_0 \rho^0, \quad r_l(0) = 0 \quad (l = \overline{1, m}), \end{cases} \quad (2.28)$$

причем все слагаемые в (2.28) непрерывны, выражение в квадратных скобках в первом уравнении принимает значения из $\mathcal{D}(A^{1/2})$ и $A^{1/2}[\dots]$ — непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция.

Введем функцию $\rho(t) := T_0^{-1}r_0(t)$ и покажем, что $\mathbf{u}(t)$, $\rho(t)$ — сильное решение системы (2.16) в смысле определения 2.1.

Из (2.28) и (2.18), найдем, что функция

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}(t) - A^{-1/2} Q^* T_0^* r_0(t) - \sum_{l=1}^m \frac{1}{\sqrt{b_l}} A^{-1/2} Q^* T_l^* r_l(t) = \\
& = \mathbf{u}(t) + \int_0^t A^{-1/2} Q^* T_0^* T_0 Q A^{1/2} \mathbf{u}(s) ds - A^{-1/2} Q^* T_0^* T_0 \rho^0 + \\
& \quad + \sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \frac{1}{b_l} A^{-1/2} Q^* T_l^* T_l Q A^{1/2} \mathbf{u}(s) ds = \\
& = \mathbf{u}(t) + \int_0^t A^{-1/2} Q^* \left[I + \sum_{l=1}^m \frac{e^{-b_l(t-s)} - 1}{b_l} M_l \right] Q A^{1/2} \mathbf{u}(s) ds - A^{-1/2} Q^* T_0^* T_0 \rho^0
\end{aligned}$$

непрерывна на $\mathbb{R}_+$ со значениями в $\mathcal{D}(A)$. Отсюда, из $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, леммы 2.4 и леммы 2.5 следует, что

$$\mathbf{u}(t) + \int_0^t A^{-1/2} Q^* \left[I + \sum_{l=1}^m \frac{e^{-b_l(t-s)} - 1}{b_l} M_l \right] Q A^{1/2} \mathbf{u}(s) ds =: \mathbf{v}(t), \quad (2.29)$$

$$A\mathbf{v} \in C(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)).$$

Введем на $\mathcal{D}(A)$ норму $\|\cdot\|_{H(A)} := \|A \cdot\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}$, эквивалентную норме графика оператора A . Полученное банахово пространство обозначим через $H(A)$. Соотношение (2.29) будем рассматривать как уравнение Вольтерра в банаховом пространстве $H(A)$. С использованием лемм 2.4 и 2.5 проведем оценку

$$\begin{aligned}
& \left\| A^{-1/2} Q^* \left[I + \sum_{l=1}^m \frac{e^{-b_l(t-s)} - 1}{b_l} M_l \right] Q A^{1/2} \mathbf{u} \right\|_{H(A)} = \\
& = \left\| A^{1/2} Q^*|_{\mathcal{D}(B^*)} \left[I + \sum_{l=1}^m \frac{e^{-b_l(t-s)} - 1}{b_l} M_l \right] B A^{-1} (A\mathbf{u}) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} = \\
& = \left\| B^* \left[I + \sum_{l=1}^m \frac{e^{-b_l(t-s)} - 1}{b_l} M_l \right] B A^{-1} (A\mathbf{u}) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} \leq \\
& \leq \left[\|B^* B A^{-1}\| + \sum_{l=1}^m \frac{|e^{-b_l(t-s)} - 1|}{b_l} \|B^* M_l B A^{-1}\| \right] \cdot \|\mathbf{u}\|_{H(A)} \quad \forall \mathbf{u} \in H(A)
\end{aligned}$$

из которой следует, что ядро интегрального уравнения (2.29) есть непрерывная оператор-функция со значениями в $\mathcal{L}(H(A))$. Из условия $\mathbf{v} \in C(\mathbb{R}_+; H(A))$

следует, что (2.29) имеет единственное решение $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; H(A) = \mathcal{D}(A))$.

Таким образом, $\mathbf{u} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A))$. Теперь из (2.28) получим, что $\rho = T_0^{-1}r_0 \in C^1(\mathbb{R}_+, L_{2,\rho_0}(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}_+, \mathcal{D}(B^*))$. При этом скобки в первом уравнении из (2.28) можно раскрыть и найти, что функции $\mathbf{u}(t)$ и $\rho(t)$ удовлетворяют системе (2.16). Теорема доказана. ■

2.3.2. Задача о спектре вязкой вращающейся релаксирующей жидкости. О существенном спектре

Основные спектральные задачи

Будем разыскивать решения однородного уравнения $(\mathcal{F}(t) \equiv 0)$ из (2.21) при $\xi_{\rho^0}(t) \equiv 0$ в форме $\xi(t) = \exp(-\lambda t)\xi$, где λ — спектральный параметр, а ξ — амплитудный элемент. В результате придем к следующей основной спектральной задаче:

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}, \quad (2.30)$$

которую будем ассоциировать с *задачей о спектре вязкой вращающейся релаксирующей жидкости*.

При $\lambda \notin \{0, b_1, \dots, b_m\} = \sigma(\mathcal{G})$ с задачей (2.30) свяжем также следующую спектральную задачу для операторного пучка (см. замечание 2.2)

$$\begin{aligned} L(\lambda)\mathbf{u} &:= [I - \lambda A^{-1} + 2\omega_0 i A^{-1/2} S A^{-1/2} + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1} \mathcal{Q}] \mathbf{u} = \\ &= \left[I - \lambda A^{-1} + 2\omega_0 i A^{-1/2} S A^{-1/2} - \frac{1}{\lambda} \mathcal{Q}^* T_0^* T_0 \mathcal{Q} + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l(b_l - \lambda)} \mathcal{Q}^* T_l^* T_l \mathcal{Q} \right] \mathbf{u} = 0, \\ &\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Для исследования существенного спектра оператора $\mathcal{A}$ нам понадобятся некоторые вспомогательные сведения из теории эллиптических краевых задач. При этом будем считать, что граница $\partial\Omega$ области Ω класса C^∞ .

Определение локальных координат и эллиптической краевой задачи

Приведем необходимые определения и факты из теории эллиптических краевых задач (см. [21, 47, 97, 164]). Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных не выше второго порядка

$$\mathcal{L}(x, D)\mathbf{u}(x) = \mathbf{f}(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.32)$$

где $x = (x_1; x_2; x_3) \in \Omega$, $D := (D_1; D_2; D_3) := (-i\frac{\partial}{\partial x_1}; -i\frac{\partial}{\partial x_2}; -i\frac{\partial}{\partial x_3})$, $\mathbf{u}(x) := (u_1(x); \dots; u_n(x))^T$, $\mathbf{f}(x) := (f_1(x); \dots; f_n(x))^T$. Пусть $\mathcal{L}(x, \xi)$, $\xi := (\xi_1; \xi_2; \xi_3)^T$ — полиномиальная матрица, получаемая из (2.32) заменой символа D на ξ . Будем считать далее, что (2.32) определяет невырожденную систему Дуглиса–Ниренберга (см. [21, с. 375], а также [97]).

О п р е д е л е н и е 2.3. (см. [21]) Оператор $\mathcal{L}(x, D)$ называется *эллиптическим* в замкнутой области $\bar{\Omega}$, если $\pi \det \mathcal{L}(x, \xi) \neq 0$ для любого $x \in \bar{\Omega}$ и $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, где символ π обозначает старшую однородную часть многочлена.

Известно, что $\pi \det \mathcal{L}(x, \xi) = \det \pi \mathcal{L}(x, \xi)$, где $\pi \mathcal{L}$ — главная часть матрицы $\mathcal{L}$ (о выделении главной части системы Дуглиса–Ниренберга см. [21, с. 377]).

Возьмем произвольную точку $z_0 \in \partial\Omega$ и введем, следуя [47, 164], в окрестности этой точки следующую локальную систему координат. Пусть локально граница $\partial\Omega$ задается бесконечно дифференцируемыми функциями $z_i = z_i(y_1, y_2)$, $i = 1, 2, 3$ параметров y_1, y_2 , которые выбираются так, что $y_i = \text{const}$ есть линии кривизны. В векторной записи $z = z(y')$, где $y' := (y_1; y_2)$. Обозначим через $N(y')$ внутреннюю единичную нормаль к $\partial\Omega$. В окрестности границы $\partial\Omega$ введем координаты y_1, y_2, y_3 , где y_3 — расстояние от точки x до $\partial\Omega$. Тогда $x = z(y') + y_3 N(y')$. При этом нумерация y_1, y_2 задается так, чтобы направление векторного произведения $\partial z / \partial y_1 \times \partial z / \partial y_2$ совпадало с нормалью $N(y')$. Пусть $E_i(y')$ ($i = 1, 2$) — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности $\partial\Omega$, тогда $\partial z / \partial y_i \cdot \partial z / \partial y_j = E_i(y') \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

Рассмотрим теперь систему краевых условий

$$\mathcal{B}(x, D)\mathbf{u}(x) = \mathbf{g}(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.33)$$

где $\mathcal{B}(x, D)$ — матрица размером $3 \times n$, составленная из линейных дифференциальных операторов не выше первого порядка. Перепишем операторы краевой задачи (2.32), (2.33) во введенной выше локальной системе координат и рассмотрим главные части этих операторов:

$$\pi\mathcal{L}(y, -i\frac{\partial}{\partial y}) = \pi\mathcal{L}(y, -i\frac{\partial}{\partial y'}, -i\frac{\partial}{\partial y_3}), \quad \pi\mathcal{B}(y, -i\frac{\partial}{\partial y}) = \pi\mathcal{B}(y, -i\frac{\partial}{\partial y'}, -i\frac{\partial}{\partial y_3}).$$

О п р е д е л е н и е 2.4. (см. [21, с. 380], а также [47, с. 12]) Краевая задача (2.32), (2.33) называется *эллиптической*, если выполнено определение 2.3 и условие Шапиро–Лопатинского:

$$\operatorname{rank} \int_{\gamma_+} \pi\mathcal{B}((y', 0), \xi', \xi_3) [\pi\mathcal{L}((y', 0), \xi', \xi_3)]^{-1} (I_n, \xi_3 I_n) d\xi_3 = 3$$

для любого y' из области определения параметров локальной системы координат, для любого $\xi' \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и $\xi_3 \in \mathbb{R}$. Здесь I_n — единичная матрица в $\mathbb{R}^n$, а через $(I_n, \xi_3 I_n)$ обозначена матрица размера $n \times 2n$; γ_+ — спрямляемый контур в верхней ξ_3 -полуплоскости, обходящий в положительном направлении все ξ_3 -корни уравнения $\det \pi\mathcal{L}((y', 0), \xi', \xi_3) = 0$, лежащие в верхней полуплоскости.

Для проверки условия Шапиро–Лопатинского понадобятся также следующие леммы и обозначения из [47].

Л е м м а 2.7. (см. [47, с. 14]) В построенной выше локальной системе координат операторы $\partial/\partial x_i$ принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^2 (1 - K_j y_3)^{-1} E_j^{-1}(y') \frac{\partial z_i}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_j} + N_i \frac{\partial}{\partial y_3},$$

где K_j ($j = 1, 2$) — главные кривизны поверхности $\partial\Omega$.

Введем некоторые обозначения. Пусть

$$\beta := (\beta_1; \beta_2; \beta_3)^\tau, \quad \beta_l := \sum_{j=1}^2 E_j^{-1}(y') \frac{\partial z_l}{\partial y_j} \xi_j \quad (l = 1, 2, 3), \quad \alpha := \beta + \xi_3 N, \quad (2.34)$$

тогда $\beta^\tau N = 0$, $N^\tau \beta = 0$, $N^\tau N = 1$. Положим $|\xi'|^2 := |\beta|^2$, тогда $|\xi'|^2 := \beta^\tau \beta = E_1^{-1} \xi_1^2 + E_2^{-1} \xi_2^2$. В локальной системе координат под символом $|\xi|^2$ будем понимать следующее выражение $|\xi|^2 := |\xi'|^2 + \xi_3^2$.

Л е м м а 2.8. (см. [47, с. 15]) Во введенной выше локальной системе координат при $y_3 = 0$ имеют место следующие формулы для главных символов:

$$\sigma_0\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right) = i\alpha_l, \quad \sigma_0(\nabla) = i\alpha, \quad \sigma_0(\operatorname{div}) = i\alpha^\tau, \quad \sigma_0(\Delta) = -|\xi|^2 = -(|\xi'|^2 + \xi_3^2).$$

Л е м м а 2.9. (см. [47, с. 16]) Справедливы следующие формулы для контурных интегралов, в которых контур интегрирования лежит в верхней ξ_3 -полуплоскости и в положительном направлении окружает точку $\xi_3 = i|\xi'|$:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_+} \frac{d\xi_3}{|\xi|^2} &= \frac{2\pi}{2|\xi'|}, & \int_{\gamma_+} \frac{\xi_3 d\xi_3}{|\xi|^2} &= \frac{2\pi i}{2}, & \int_{\gamma_+} \frac{\xi_3^2 d\xi_3}{|\xi|^2} &= -\frac{2\pi|\xi'|}{2}, & \int_{\gamma_+} \frac{d\xi_3}{|\xi|^4} &= \frac{2\pi}{4|\xi'|^3}, \\ \int_{\gamma_+} \frac{\xi_3 d\xi_3}{|\xi|^4} &= 0, & \int_{\gamma_+} \frac{\xi_3^2 d\xi_3}{|\xi|^4} &= \frac{2\pi}{4|\xi'|}, & \int_{\gamma_+} \frac{\xi_3^3 d\xi_3}{|\xi|^4} &= \frac{2\pi i}{2}, & |\xi|^2 &= |\xi'|^2 + \xi_3^2. \end{aligned}$$

О существенном и дискретном спектре оператора $\mathcal{A}$ и пучка $L(\lambda)$

Напомним здесь определение существенного спектра оператора $\mathcal{A}$ (см. определение 1.4)

О п р е д е л е н и е 2.5. [135, гл. 4, § 1, п. 20] Существенным спектром оператора $\mathcal{A}$ (задачи (2.30)) называется множество

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{оператор } \mathcal{A} - \lambda \text{ нефредгольмов}\}.$$

Можно проверить, что задача (2.30) определяет невырожденную систему Дуглиса–Ниренберга (см. [21, с. 375], а также [97]). Из работы [150] следует,

что $\mathcal{A} - \lambda$ фредгольмов тогда и только тогда, когда соответствующая краевая задача является эллиптической. Выпишем краевую задачу, отвечающую уравнению (2.30), при этом умножив первое уравнение возникающей системы на $\rho_0(z)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\mu \Delta \mathbf{u}(x) + (\eta + 3^{-1}\mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}(x)) - 2\omega_0 \rho_0(z) (\mathbf{u}(x) \times e_3) + \\ \quad + \rho_0(z) \nabla (a_\infty \rho_0^{-1/2}(z) \varphi_0^{1/2}(x) r_0(x)) + \\ \quad + \rho_0(z) \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l^{1/2}} \nabla (a_\infty k_l^{1/2}(x) r_l(x)) - \lambda \rho_0(z) \mathbf{u}(x) = \mathbf{0}, \\ a_\infty \rho_0^{-1/2}(z) \varphi_0^{1/2}(x) \operatorname{div}(\rho_0(x) \mathbf{u}(x)) - \lambda r_0(x) = 0, \\ a_\infty k_l^{1/2}(x) b_l^{-1/2} \operatorname{div}(\rho_0(z) \mathbf{u}(x)) + (b_l - \lambda) r_l(x) = 0, \quad l = \overline{1, m}, \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{u}(x) = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (2.35)$$

Обозначим $\mu' := \eta + 3^{-1}\mu$ и выделим из системы и краевого условия в (2.35) главные части:

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\mu \Delta \mathbf{u}(x) + \mu' \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}(x)) + a_\infty \rho_0^{1/2}(z) \varphi_0^{1/2}(x) \nabla r_0(x) + \\ \quad + \sum_{l=1}^m \frac{a_\infty \rho_0(z) k_l^{1/2}(x)}{b_l^{1/2}} \nabla r_l(x) = \mathbf{0}, \\ a_\infty \rho_0^{1/2}(z) \varphi_0^{1/2}(x) \operatorname{div} \mathbf{u}(x) - \lambda r_0(x) = 0, \\ a_\infty \rho_0(z) k_l^{1/2}(x) b_l^{-1/2} \operatorname{div} \mathbf{u}(x) + (b_l - \lambda) r_l(x) = 0, \quad l = \overline{1, m}, \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{u}(x) = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Обозначим через $\mathcal{L}_\lambda(x, D)$ матричный дифференциальный оператор системы из (2.35) — это матрица размера $(m+4) \times (m+4)$, а через $\mathcal{B}(x, D) := (I_3, 0_{3 \times m+1})$ матрицу, отвечающую граничным условиям из (2.35) — это матрица размера $3 \times (m+4)$. В этом случае главная часть $\pi \mathcal{L}_\lambda(x, D)$ оператора $\mathcal{L}_\lambda(x, D)$ определяется системой из (2.36), а $\pi \mathcal{B}(x, D) = \mathcal{B}(x, D)$.

Таким образом, существенный спектр исследуемой задачи будет состоять из точек $\lambda \in \mathbb{C}$, в которых нарушается эллиптичность краевой задачи (2.35).

Л е м м а 2.10. Дифференциальный оператор $\mathcal{L}_\lambda(x, D)$ эллипичен в замкнутой области $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ при $\lambda \notin \Lambda_E$, где

$$\Lambda_E := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \varphi_\lambda(x) := 1 - \sum_{l=1}^m \frac{\rho_0(z)k_l(x)}{b_l - \lambda} = \lambda \frac{3\eta + 4\mu}{3a_\infty^2 \rho_0(z)}, \quad x \in \overline{\Omega} \right\}. \quad (2.37)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим главный символ $\sigma_0(\mathcal{L}_\lambda(x, D)) = \pi \mathcal{L}_\lambda(x, \xi)$ ($\xi := (\xi_1; \xi_2; \xi_3)^\tau$) системы из (2.35), определяемый системой из (2.36):

$$\pi \mathcal{L}_\lambda(x, \xi) = \begin{pmatrix} \mu|\xi|^2 I_3 + \mu' \xi \xi^\tau & i c_0(x) \xi & i c_1(x) \xi & \dots & i c_m(x) \xi \\ i c_0(x) \xi^\tau & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ i c_1(x) \xi^\tau & 0 & b_1 - \lambda & 0_{1 \times m-2} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ i c_m(x) \xi^\tau & 0 & 0 & 0_{1 \times m-2} & b_m - \lambda \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

где

$$\begin{aligned} c_0(x) &:= a_\infty \rho_0^{1/2}(z) \varphi_0^{1/2}(x), \\ c_l(x) &:= a_\infty b_l^{-1/2} \rho_0(z) k_l^{1/2}(x) \quad (l = \overline{1, m}), \end{aligned} \quad (2.39)$$

а $0_{1 \times m-2}$ — нулевая матрица соответствующего размера.

Обозначим через $\Gamma_\xi := (|\xi|^{-1} \xi, a^\perp, b^\perp)$ матрицу, где вектор-столбцы $a^\perp, b^\perp$ ($|a^\perp| = |b^\perp| = 1$) ортогональны ξ и между собой. Непосредственной проверкой доказываются следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Gamma_\xi^\tau \Gamma_\xi &= I_3, \quad \Gamma_\xi^\tau \xi = (|\xi|, 0, 0)^\tau =: |\xi| e_1, \\ \Gamma_\xi^\tau \xi \xi^\tau \Gamma_\xi &= \text{diag}(|\xi|^2, 0, 0) =: |\xi|^2 P_1. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Обозначим $\mathcal{S} := \text{diag}(\Gamma_\xi, \underbrace{1, \dots, 1}_{m+1 \text{ раз}})$ и, используя (2.40), вычислим:

$$\pi \det \mathcal{L}(x, \xi) = \det \pi \mathcal{L}(x, \xi) = \det \mathcal{S}^\tau \pi \mathcal{L}(x, \xi) \mathcal{S} =$$

$$\begin{aligned}
&= \det \begin{pmatrix} |\xi|^2(\mu I_3 + \mu' P_1) & ic_0(x)|\xi|e_1 & ic_1(x)|\xi|e_1 & \dots & ic_m(x)|\xi|e_1 \\ ic_0(x)|\xi|e_1^\tau & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ ic_1(x)|\xi|e_1^\tau & 0 & b_1 - \lambda & 0_{1 \times m-2} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ic_m(x)|\xi|e_1^\tau & 0 & 0 & 0_{1 \times m-2} & b_m - \lambda \end{pmatrix} = \\
&= |\xi|^6 \mu^2 \left((c_0^2(x) - \lambda(\mu + \mu')) \prod_{l=1}^m (b_l - \lambda) - \lambda \sum_{l=1}^m c_l^2(x) \prod_{k \neq l}^m (b_k - \lambda) \right). \quad (2.41)
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что $\pi \det \mathcal{L}_\lambda(x, \xi) \neq 0$ при $\lambda = b_l$ ($l = \overline{1, m}$) и при любых $x \in \overline{\Omega}$ и $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Преобразуем (2.41) с помощью (2.37) и (2.39):

$$\begin{aligned}
\pi \det \mathcal{L}_\lambda(x, \xi) &= \\
&= a_\infty^2 \rho_0(z) \mu^2 |\xi|^6 \prod_{l=1}^m (b_l - \lambda) \left(\varphi_0(x) - \lambda \frac{\mu + \mu'}{a_\infty^2 \rho_0(z)} - \lambda \sum_{l=1}^m \frac{\rho_0(z) k_l(x)}{b_l(b_l - \lambda)} \right) = \\
&= a_\infty^2 \rho_0(z) \mu^2 |\xi|^6 \prod_{l=1}^m (b_l - \lambda) \left(1 - \lambda \frac{\mu + \mu'}{a_\infty^2 \rho_0(z)} - \sum_{l=1}^m \frac{\rho_0(z) k_l(x)}{b_l - \lambda} \right). \quad (2.42)
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\pi \det \mathcal{L}_\lambda(x, \xi) \neq 0$ для любых $x \in \overline{\Omega}$ и $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, если только $\lambda \notin \Lambda_E$ (напомним, что $\mu' = \eta + 3^{-1}\mu$). Лемма доказана. $\blacksquare$

З а м е ч а н и е 2.3. При $a \neq 0$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $a + b \neq 0$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ имеют место следующие формулы (определение α см. в (2.34)):

$$(a|\xi|^2 I_3 + b\alpha\alpha^\tau)^{-1} = \frac{(a+b)|\xi|^2 I_3 - b\alpha\alpha^\tau}{a(a+b)|\xi|^4}, \quad (2.43)$$

$$\begin{pmatrix} a|\xi|^2 I_3 + b\alpha\alpha^\tau & ic_1\alpha \\ ic_2\alpha^\tau & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1}|\xi|^{-4}(|\xi|^2 I_3 - \alpha\alpha^\tau) & -ic_2^{-1}|\xi|^{-2}\alpha \\ -ic_1^{-1}|\xi|^{-2}\alpha^\tau & c_1^{-1}c_2^{-1}(a+b) \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Действительно, формула (2.43) легко проверяется непосредственно с использованием соотношения $\alpha^\tau \alpha = |\xi|^2 := |\xi'|^2 + \xi_3^2$ (см. (2.34)). Для доказательства (2.44) положим $A_{11} := a|\xi|^2 I_3 + b\alpha\alpha^\tau$ и с использованием (2.43) вычислим

$$\begin{aligned}
\alpha^\tau A_{11}^{-1} &= (b+a)^{-1} |\xi|^{-2} \alpha^\tau, \quad A_{11}^{-1} \alpha = (b+a)^{-1} |\xi|^{-2} \alpha, \\
\alpha^\tau A_{11}^{-1} \alpha &= \frac{\alpha^\tau ((a+b)|\xi|^2 I_3 - b\alpha\alpha^\tau) \alpha}{a(a+b)|\xi|^4} = \frac{1}{a+b}.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (1.9) теперь следует, что

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A_{11} & ic_1\alpha \\ ic_2\alpha^\tau & 0 \end{pmatrix}^{-1} &= \left[\begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ ic_2\alpha^\tau A_{11}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & c_1c_2\alpha^\tau A_{11}^{-1}\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_3 & ic_1A_{11}^{-1}\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \\
&= \begin{pmatrix} I_3 & -ic_1A_{11}^{-1}\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & [c_1c_2\alpha^\tau A_{11}^{-1}\alpha]^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ -ic_2\alpha^\tau A_{11}^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} - (a+b)A_{11}^{-1}\alpha\alpha^\tau A_{11}^{-1} & -ic_2^{-1}(a+b)A_{11}^{-1}\alpha \\ -ic_1^{-1}(a+b)\alpha^\tau A_{11}^{-1} & c_1^{-1}c_2^{-1}(a+b) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a^{-1}|\xi|^{-4}(|\xi|^2 I_3 - \alpha\alpha^\tau) & -ic_2^{-1}|\xi|^{-2}\alpha \\ -ic_1^{-1}|\xi|^{-2}\alpha^\tau & c_1^{-1}c_2^{-1}(a+b) \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleright
\end{aligned}$$

Л е м м а 2.11. Задача (2.35) эллиптична при $\lambda = 0$, $\lambda = b_l$ ($l = \overline{1, m}$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению 2.4, с учетом леммы 2.10, нужно проверить выполнение условия Шапиро–Лопатинского для задачи (2.35).

1. Зафиксируем $z_0 \in \partial\Omega$ и введем в окрестности этой точки локальную систему координат, как описано ранее. Перепишем операторную матрицу системы из (2.35) в локальной системе координат и выделим из нее главную часть. Эта главная часть представляет собой операторную матрицу системы из (2.36), записанную в локальной системе координат. Главный символ последней матрицы имеет вид (2.38) с заменой ξ на α . При этом $\det \pi \mathcal{L}_\lambda((y', 0), \xi', \xi_3)$ вычисляется по формуле (2.42) (а при $\lambda = b_l$ ($l = \overline{1, m}$) — по формуле (2.41)) с заменой $|\xi|^2$ на $|\xi'|^2 + \xi_3^2$. При $\lambda = 0$, $\lambda = b_l$ ($l = \overline{1, m}$) уравнение $\det \pi \mathcal{L}_\lambda((y', 0), \xi', \xi_3) = 0$ имеет трехкратные ξ_3 -корни $\xi_3 = \pm i|\xi'|$.

2. Пусть $\lambda = 0$. С помощью (1.8) (при $A_{22} = \text{diag}(b_1, \dots, b_m)$) и (2.44) (при $a := \mu$, $b := \mu'$, $c := c_0(z_0)$) найдем матрицу, обратную к $\pi\mathcal{L}_0((y', 0), \xi', \xi_3)$:

$$\begin{aligned}
 [\pi\mathcal{L}_0((y', 0), \xi', \xi_3)]^{-1} &= \begin{pmatrix} \mu|\xi|^2 I_3 + \mu' \alpha \alpha^\tau & ic_0 \alpha & ic_1 \alpha & \dots & ic_m \alpha \\ ic_0 \alpha^\tau & 0 & 0 & \dots & 0 \\ ic_1 \alpha^\tau & 0 & b_1 & 0_{1 \times m-2} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ic_m \alpha^\tau & 0 & 0 & 0_{1 \times m-2} & b_m \end{pmatrix}^{-1} = \\
 &= \begin{pmatrix} \left(\mu|\xi|^2 I_3 + \left[\mu' + \sum_{l=1}^m \frac{c_l^2(z_0)}{b_l} \right] \alpha \alpha^\tau & ic_0(z_0) \alpha \\ ic_0(z_0) \alpha^\tau & 0 \end{pmatrix}^{-1} & \mathcal{M}_{4 \times m} \\ \mathcal{M}_{m \times 4} & \mathcal{M}_{m \times m} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^{-1} |\xi|^{-4} (|\xi|^2 I_3 - \alpha \alpha^\tau) & -ic_0^{-1}(z_0) |\xi|^{-2} \alpha \\ -ic_0^{-1}(z_0) |\xi|^{-2} \alpha^\tau & c_0^{-2}(z_0) \left[\mu + \mu' + \sum_{l=1}^m \frac{c_l^2(z_0)}{b_l} \right] \end{pmatrix} & \mathcal{M}_{4 \times m} \\ \mathcal{M}_{m \times 4} & \mathcal{M}_{m \times m} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

где $\mathcal{M}_{4 \times m}$, $\mathcal{M}_{m \times 4}$, $\mathcal{M}_{m \times m}$ — некоторые матрицы соответствующей размерности. Отсюда, учитывая, что $\pi\mathcal{B}((y', 0), \xi', \xi_3) = (I_3, 0_{3 \times m+1})$, найдем ранг следующей матрицы:

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_+} \pi\mathcal{B}((y', 0), \xi', \xi_3) [\pi\mathcal{L}_0((y', 0), \xi', \xi_3)]^{-1} (I_{m+4}, \xi_3 I_{m+4}) d\xi_3 = \\
 = \int_{\gamma_+} \left(\frac{|\xi|^2 I_3 - \alpha \alpha^\tau}{\mu |\xi|^4}, \mathcal{M}_{3 \times m+1}^{(1)} \right) (I_{m+4}, \xi_3 I_{m+4}) d\xi_3, \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

где $\mathcal{M}_{3 \times m+1}^{(1)}$ — некоторая матрица размера $3 \times (m+1)$.

Используя формулы (2.34), а также контурные интегралы из леммы 2.9, вычислим матрицу

$$M := \int_{\gamma_+} \frac{|\xi|^2 I_3 - \alpha \alpha^\tau}{\mu |\xi|^4} d\xi_3 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{I_3}{\mu} \int_{\gamma_+} \frac{d\xi_3}{|\xi|^2} - \frac{\beta\beta^\tau}{\mu} \int_{\gamma_+} \frac{d\xi_3}{|\xi|^4} - \frac{\beta N^\tau + N\beta^\tau}{\mu} \int_{\gamma_+} \frac{\xi_3 d\xi_3}{|\xi|^4} - \frac{NN^\tau}{\mu} \int_{\gamma_+} \frac{\xi_3^2 d\xi_3}{|\xi|^4} = \\
&= \frac{\pi}{2\mu|\xi'|^3} \left(2|\xi'|^2 I_3 - \beta\beta^\tau - |\xi'|^2 NN^\tau \right). \quad (2.46)
\end{aligned}$$

Обозначим через $\Gamma_\alpha := (|\xi'|^{-1}\beta, a^\perp, N)$ матрицу, где вектор-столбец $a^\perp$ ортогонален β , N и $|a^\perp| = 1$. Непосредственно проверяются формулы:

$$\Gamma_\alpha^\tau \Gamma_\alpha = I_3, \quad \Gamma_\alpha^\tau \beta = (|\xi'|, 0, 0)^\tau =: |\xi'|e_1, \quad \Gamma_\alpha^\tau N = (0, 0, 1)^\tau =: e_3, \quad (2.47)$$

$$\Gamma_\alpha^\tau \beta\beta^\tau \Gamma_\alpha = \text{diag}(|\xi'|^2, 0, 0) =: |\xi'|^2 P_1, \quad \Gamma_\alpha^\tau NN^\tau \Gamma_\alpha = \text{diag}(0, 0, 1) =: P_3. \quad (2.48)$$

Используя (2.47)-(2.48) в (2.46), получим, что

$$\det M = \det \Gamma_\alpha^\tau M \Gamma_\alpha = \frac{\pi^3}{8\mu^3|\xi'|^9} \det \left(2|\xi'|^2 I_3 - |\xi'|^2 P_1 - |\xi'|^2 P_3 \right) = \frac{\pi^3}{4\mu^3|\xi'|^3} \neq 0$$

при $\xi' \neq 0$. Отсюда следует, что ранг матрицы (2.45) равен 3 при $\xi' \neq 0$. Согласно определению 2.4 исследуемая задача эллиптична.

3. Аналогично проверяется эллиптичность задачи (2.35) при $\lambda = b_l$ ($l = \overline{1, m}$).

Лемма доказана. ■

Л е м м а 2.12. *Задача (2.35) эллиптична при $\lambda \notin \Lambda_E \cup \Lambda_L$, где*

$$\Lambda_L := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \varphi_\lambda(x) := 1 - \sum_{l=1}^m \frac{\rho_0(z)k_l(x)}{b_l - \lambda} = \lambda \frac{3\eta + 7\mu}{3a_\infty^2 \rho_0(z)}, \quad x \in \partial\Omega \right\}, \quad (2.49)$$

а множество Λ_E определено в лемме 2.10 (см. (2.37)).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего, будем считать, что $\lambda \notin \Lambda_E$, поскольку на множестве Λ_E дифференциальный оператор $\mathcal{L}_\lambda(x, D)$ теряет эллиптичность (см. лемму 2.10) и, следовательно, задача (2.35) не является эллиптической (см. определение 2.4). Будем считать также, что $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq b_l$ ($l = \overline{1, m}$), поскольку в указанных точках эллиптичность задачи (2.35) уже доказана в лемме 2.11. Далее, как и в лемме 2.11, зафиксируем $z_0 \in \partial\Omega$ и введем в окрестности этой точки локальную систему координат, как описано ранее. С помощью (1.8) (при $A_{22} = \text{diag}(-\lambda, b_1 - \lambda, \dots, b_m - \lambda)$), (2.39), (2.49) и (2.43) (при

$a := \mu$, $b := \mu' - a_\infty^2 \rho_0 \lambda^{-1} \varphi_\lambda$) найдем матрицу, обратную к $\pi \mathcal{L}_\lambda((y', 0), \xi', \xi_3)$:

$$\begin{aligned}
 [\pi \mathcal{L}_\lambda((y', 0), \xi', \xi_3)]^{-1} &= \begin{pmatrix} \mu|\xi|^2 I_3 + \mu' \alpha \alpha^\tau & i c_0 \alpha & i c_1 \alpha & \dots & i c_m \alpha \\ i c_0 \alpha^\tau & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ i c_1 \alpha^\tau & 0 & b_1 - \lambda & 0_{1 \times m-2} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ i c_m \alpha^\tau & 0 & 0 & 0_{1 \times m-2} & b_m - \lambda \end{pmatrix}^{-1} = \\
 &= \begin{pmatrix} \left(\mu|\xi|^2 I_3 + \left[\mu' - \frac{c_0^2(z_0)}{\lambda} + \sum_{l=1}^m \frac{c_l^2(z_0)}{b_l - \lambda} \right] \alpha \alpha^\tau \right)^{-1} & \mathcal{M}_{3 \times m+1}^{(2)} \\ \mathcal{M}_{m+1 \times 3} & \mathcal{M}_{m+1 \times m+1} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \left(\mu|\xi|^2 I_3 + \left[\mu' - a_\infty^2 \rho_0(z_0) \frac{\varphi_\lambda(z_0)}{\lambda} \right] \alpha \alpha^\tau \right)^{-1} & \mathcal{M}_{3 \times m+1}^{(2)} \\ \mathcal{M}_{m+1 \times 3} & \mathcal{M}_{m+1 \times m+1} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{(\mu + b(z_0))|\xi|^2 I_3 - b(z_0) \alpha \alpha^\tau}{\mu(\mu + b(z_0))|\xi|^4} & \mathcal{M}_{3 \times m+1}^{(2)} \\ \mathcal{M}_{m+1 \times 3} & \mathcal{M}_{m+1 \times m+1} \end{pmatrix}, \quad b(z_0) := \mu' - a_\infty^2 \rho_0(z_0) \frac{\varphi_\lambda(z_0)}{\lambda},
 \end{aligned}$$

где $\mathcal{M}_{3 \times m+1}^{(2)}$, $\mathcal{M}_{m+1 \times 3}$, $\mathcal{M}_{m+1 \times m+1}$ — некоторые матрицы соответствующей размерности. Отсюда, учитывая, что $\pi \mathcal{B}((y', 0), \xi', \xi_3) = (I_3, 0_{3 \times m+1})$, найдем ранг следующей матрицы:

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_+} \pi \mathcal{B}((y', 0), \xi', \xi_3) [\pi \mathcal{L}_\lambda((y', 0), \xi', \xi_3)]^{-1} (I_{m+4}, \xi_3 I_{m+4}) d\xi_3 &= \\
 &= \int_{\gamma_+} \left(\frac{(\mu + b(z_0))|\xi|^2 I_3 - b(z_0) \alpha \alpha^\tau}{\mu(\mu + b(z_0))|\xi|^4}, \mathcal{M}_{3 \times m+1}^{(2)} \right) (I_{m+4}, \xi_3 I_{m+4}) d\xi_3. \quad (2.50)
 \end{aligned}$$

Используя формулы (2.34), а также контурные интегралы из леммы 2.9, вычислим матрицу

$$\begin{aligned}
 M &:= \int_{\gamma_+} \frac{(\mu + b(z_0))|\xi|^2 I_3 - b(z_0) \alpha \alpha^\tau}{\mu(\mu + b(z_0))|\xi|^4} d\xi_3 = \\
 &= \frac{I_3}{\mu} \int_{\gamma_+} \frac{d\xi_3}{|\xi|^2} - \frac{b\beta\beta^\tau}{\mu + b} \int_{\gamma_+} \frac{d\xi_3}{|\xi|^4} - \frac{b(\beta N^\tau + N\beta^\tau)}{\mu + b} \int_{\gamma_+} \frac{\xi_3 d\xi_3}{|\xi|^4} - \frac{bNN^\tau}{\mu + b} \int_{\gamma_+} \frac{\xi_3^2 d\xi_3}{|\xi|^4} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2\mu|\xi'|^3} \left(2|\xi'|^2 I_3 - \frac{b(z_0)}{\mu + b(z_0)} \beta \beta^\tau - \frac{b(z_0)}{\mu + b(z_0)} |\xi'|^2 N N^\tau \right).$$

Отсюда, из (2.47)-(2.48) и из $b(z_0) = \mu' - a_\infty^2 \rho_0(z_0) \lambda^{-1} \varphi_\lambda(z_0)$ получим, что

$$\begin{aligned} \det M &= \det \Gamma_\alpha^\tau M \Gamma_\alpha = \frac{\pi^3}{8\mu^3 |\xi'|^9} \det \left(2|\xi'|^2 I_3 - \frac{b(z_0)}{\mu + b(z_0)} (|\xi'|^2 P_1 + |\xi'|^2 P_3) \right) = \\ &= \frac{\pi^3 (2\mu + b(z_0))^2}{4\mu^3 (\mu + b(z_0))^2 |\xi'|^3} = \frac{\pi^3 (2\mu + \mu' - a_\infty^2 \rho_0(z_0) \lambda^{-1} \varphi_\lambda(z_0))^2}{4\mu^3 (\mu + \mu' - a_\infty^2 \rho_0(z_0) \lambda^{-1} \varphi_\lambda(z_0))^2 |\xi'|^3} \neq 0 \end{aligned}$$

при $\xi' \neq 0$, если только $\lambda \notin \Lambda_L$ (напомним, что $\mu' = \eta + 3^{-1}\mu$). Отсюда следует, что ранг матрицы (2.50) равен 3 при $\xi' \neq 0$. Согласно определению 2.4 исследуемая задача эллиптическая. Лемма доказана. ■

Т е о р е м а 2.2. $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \Lambda_E \cup \Lambda_L$. Множество $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения 2.5, лемм 2.11, 2.12 и [150] следует формула для существенного спектра оператора $\mathcal{A}$. Далее, в лемме 2.6 доказано, что оператор $\mathcal{A}$ является максимальным секториальным (и аккретивным) оператором. Следовательно, оператор $\mathcal{A} - \lambda$ непрерывно обратим при отрицательных λ и его дефект и индекс равны нулю. Множество $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A})$, очевидно, является связным. Отсюда и из теоремы [44, гл. 4, § 5, п. 2, теорема 5.17] (см. также [146, гл. 17, § 2, теорема 2.1]) об устойчивости индекса и дефекта замкнутого оператора следует, что множество $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$. Теорема доказана. ■

З а м е ч а н и е 2.4. Существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ представляет собой объединение не более, чем $(2m + 2)$ -х отрезков на действительной положительной полуоси.

Если в рассматриваемой модели $\omega_0 = 0$ и $g = 0$, то тогда $\rho_0(z) = \text{const}$. При этом мы считаем, что $k_l(x)$ ($l = \overline{1, m}$) некоторые положительные структурные

постоянные, удовлетворяющие (2.11). Тогда $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ представляет собой набор $(2m + 2)$ -х положительных точек. ►

З а м е ч а н и е 2.5. Из теоремы [146, гл. 17, § 3, теорема 3.1] о произведении фредгольмовых операторов и факторизации (2.26) оператора $\mathcal{A} - \lambda$ следует, что если $L(\lambda)$ фредгольмов, то и $\mathcal{A} - \lambda$ фредгольмов, то есть $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \subset \sigma_{ess}(L(\lambda))$. Обратное включение не вполне очевидно в силу того, что оператор $\mathcal{Q}^* \mathcal{Q}$ не является положительно определенным (см. доказательство теоремы 1.5). ►

Для отыскания $\sigma_{ess}(L(\lambda))$ приведем доказательство двух известных лемм, которые будут использованы в дальнейшем.

Л е м м а 2.13. Пусть функции $a(x)$, $c_1(x)$, $c_2(x)$ непрерывны в $\bar{\Omega}$ и $a(x) \neq 0$, $c_1(x) \neq 0$, $c_2(x) \neq 0$ при $x \in \bar{\Omega}$. Тогда следующая краевая задача эллиптична:

$$\begin{cases} -a(x)\Delta \mathbf{u}(x) - b(x)\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}(x) + c_1(x)\nabla p(x) = \mathbf{v}(x), & x \in \Omega, \\ c_2(x) \operatorname{div} \mathbf{u}(x) = q(x), & x \in \Omega, \quad \mathbf{u}(x) = \mathbf{g}(x), \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{L}(x, D)$ дифференциальный оператор рассматриваемой системы, тогда

$$\mathcal{L}(x, D) = \begin{pmatrix} -a\Delta - b\nabla \operatorname{div} & c_1\nabla \\ c_2 \operatorname{div} & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi\mathcal{L}(x, \xi) = \begin{pmatrix} a|\xi|^2 I_3 + b\xi\xi^\tau & ic_1\xi \\ ic_2\xi^\tau & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Обозначим через $\Gamma_\xi := (|\xi|^{-1}\xi, a^\perp, b^\perp)$ матрицу, где вектор-столбцы $a^\perp$, $b^\perp$ ($|a^\perp| = |b^\perp| = 1$) ортогональны ξ и между собой. Обозначим $\mathcal{S} := \operatorname{diag}(\Gamma_\xi, 1)$ и используя (2.40) проведем следующие вычисления:

$$\begin{aligned} \pi \det \mathcal{L}(x, \xi) &= \det \pi \mathcal{L}(x, \xi) = \det \mathcal{S}^\tau \pi \mathcal{L}(x, \xi) \mathcal{S} = \\ &= \det \begin{pmatrix} a(x)|\xi|^2 I_3 + b(x)P_1 & ic_1(x)|\xi|e_1 \\ ic_2(x)|\xi|e_1^\tau & 0 \end{pmatrix} = a^2(x)c_1(x)c_2(x)|\xi|^6 \neq 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

для любых $x \in \bar{\Omega}$ и $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. То есть оператор $\mathcal{L}(x, D)$ эллиптичен в замкнутой области $\bar{\Omega}$.

Проверим теперь условие Шапиро–Лопатинского. Зафиксируем $z_0 \in \partial\Omega$ и введем в окрестности этой точки локальную систему координат, как описано выше. Перепишем операторную матрицу изучаемой системы в локальной системе координат и выделим из нее главную часть. Главный символ этой главной части имеет вид (2.51) с заменой ξ на α . При этом $\det \pi \mathcal{L}((y', 0), \xi', \xi_3)$ вычисляется по формуле (2.52) с заменой $|\xi|^2$ на $|\xi'|^2 + \xi_3^2$, где $|\xi'|^2 = E_1^{-1}\xi_1^2 + E_2^{-1}\xi_2^2$. Уравнение $\det \pi \mathcal{L}((y', 0), \xi', \xi_3) = 0$ имеет трехкратные ξ_3 -корни $\xi_3 = \pm i|\xi'|$.

Матрица, обратная к $\pi \mathcal{L}((y', 0), \xi', \xi_3)$ вычисляется по формуле (2.44). Учитывая, что $\pi \mathcal{B}((y', 0), \xi', \xi_3) = (I_3, 0_{3 \times 1})$, найдем ранг следующей матрицы:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_+} \pi \mathcal{B}((y', 0), \xi', \xi_3) [\pi \mathcal{L}((y', 0), \xi', \xi_3)]^{-1} (I_4, \xi_3 I_4) d\xi_3 = \\ = \int_{\gamma_+} \left(\frac{|\xi|^2 I_3 - \alpha \alpha^\tau}{a(z_0) |\xi|^4}, \frac{-i\alpha}{c_2(z_0) |\xi|^2} \right) (I_4, \xi_3 I_4) d\xi_3 = \\ = \int_{\gamma_+} \left(\frac{|\xi|^2 I_3 - \alpha \alpha^\tau}{a(z_0) |\xi|^4}, \frac{-i\alpha}{c_2(z_0) |\xi|^2}, \frac{\xi_3 |\xi|^2 I_3 - \xi_3 \alpha \alpha^\tau}{a(z_0) |\xi|^4}, \frac{-i\xi_3 \alpha}{c_2(z_0) |\xi|^2} \right) d\xi_3. \quad (2.53) \end{aligned}$$

Далее, как в (2.46)–(2.48), найдем, что

$$\begin{aligned} \det \int_{\gamma_+} \frac{|\xi|^2 I_3 - \alpha \alpha^\tau}{a(z_0) |\xi|^4} d\xi_3 = \det \Gamma_\alpha^\tau \int_{\gamma_+} \frac{|\xi|^2 I_3 - \alpha \alpha^\tau}{a(z_0) |\xi|^4} d\xi_3 \Gamma_\alpha = \\ = \frac{\pi^3}{8a^3(z_0) |\xi'|^9} \det \left(2|\xi'|^2 I_3 - |\xi'|^2 P_1 - |\xi'|^2 P_3 \right) = \frac{\pi^3}{4a^3(z_0) |\xi'|^3} \neq 0 \end{aligned}$$

при $\xi' \neq 0$. Отсюда следует, что ранг матрицы (2.53) равен 3 при $\xi' \neq 0$. Согласно определению 2.4 исследуемая задача эллиптична. Лемма доказана. $\blacksquare$

Л е м м а 2.14. Пусть функции $a(x)$, $b(x)$ непрерывны в $\bar{\Omega}$, $a(x) \neq 0$, $a(x) + b(x) \neq 0$ при $x \in \bar{\Omega}$, $2a(x) + b(x) \neq 0$ при $x \in \partial\Omega$. Тогда следующая краевая задача эллиптична:

$$-a(x)\Delta \mathbf{u}(x) - b(x)\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}(x) = \mathbf{v}(x), \quad x \in \Omega, \quad \mathbf{u}(x) = \mathbf{g}(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{L}(x, D)$ дифференциальный оператор рассматриваемой системы, тогда

$$\mathcal{L}(x, D) = -a(x)\Delta - b(x)\nabla \operatorname{div}, \quad \pi\mathcal{L}(x, \xi) = a(x)|\xi|^2 I_3 + b(x)\xi\xi^\tau. \quad (2.54)$$

Используя (2.40) проведем следующие вычисления:

$$\begin{aligned} \pi \det \mathcal{L}(x, \xi) &= \det \pi \mathcal{L}(x, \xi) = \det \Gamma_\xi^\tau \pi \mathcal{L}(x, \xi) \Gamma_\xi = \\ &= \det (a(x)|\xi|^2 I_3 + b(x)|\xi|^2 P_1) = a^2(x)(a(x) + b(x))|\xi|^6 \neq 0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

для любых $x \in \bar{\Omega}$ и $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. То есть оператор $\mathcal{L}(x, D)$ эллиптичен в замкнутой области $\bar{\Omega}$.

Проверим теперь условие Шапиро–Лопатинского. Зафиксируем $z_0 \in \partial\Omega$ и введем в окрестности этой точки локальную систему координат, как описано выше. Перепишем операторную матрицу изучаемой системы в локальной системе координат и выделим из нее главную часть. Главный символ этой главной части имеет вид (2.54) с заменой ξ на α . При этом $\det \pi \mathcal{L}((y', 0), \xi', \xi_3)$ вычисляется по формуле (2.55) с заменой $|\xi|^2$ на $|\xi'|^2 + \xi_3^2$, где $|\xi'|^2 = E_1^{-1}\xi_1^2 + E_2^{-1}\xi_2^2$. Уравнение $\det \pi \mathcal{L}((y', 0), \xi', \xi_3) = 0$ имеет трехкратные ξ_3 -корни $\xi_3 = \pm i|\xi'|$.

Матрица, обратную к $\pi \mathcal{L}((y', 0), \xi', \xi_3)$ вычисляется по формуле (2.43). Учитывая, что $\pi \mathcal{B}((y', 0), \xi', \xi_3) = I_3$, найдем ранг следующей матрицы:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_+} \pi \mathcal{B}((y', 0), \xi', \xi_3) [\pi \mathcal{L}((y', 0), \xi', \xi_3)]^{-1} (I_3, \xi_3 I_3) d\xi_3 = \\ = \int_{\gamma_+} \left(\frac{(a+b)|\xi|^2 I_3 - b\alpha\alpha^\tau}{a(a+b)|\xi|^4}, \frac{(a+b)\xi_3|\xi|^2 I_3 - b\xi_3\alpha\alpha^\tau}{a(a+b)|\xi|^4} \right) d\xi_3. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Далее, как в (2.46)–(2.48), найдем, что

$$\begin{aligned} \det \int_{\gamma_+} \frac{(a+b)|\xi|^2 I_3 - b\alpha\alpha^\tau}{a(a+b)|\xi|^4} d\xi_3 &= \det \Gamma_\alpha^\tau \int_{\gamma_+} \frac{(a+b)|\xi|^2 I_3 - b\alpha\alpha^\tau}{a(a+b)|\xi|^4} d\xi_3 \Gamma_\alpha = \\ &= \frac{\pi^3}{8a^3(z_0)|\xi'|^9} \det \left(2|\xi'|^2 I_3 - \frac{b(z_0)}{a(z_0) + b(z_0)} (|\xi'|^2 P_1 + |\xi'|^2 P_3) \right) = \\ &= \frac{\pi^3 (2a(z_0) + b(z_0))^2}{4a^3(z_0)(a(z_0) + b(z_0))^2 |\xi'|^3} \neq 0 \end{aligned}$$

при $\xi' \neq 0$. Отсюда следует, что ранг матрицы (2.56) равен 3 при $\xi' \neq 0$. Согласно определению 2.4 исследуемая задача эллиптична. Лемма доказана. ■

Т е о р е м а 2.3. $\sigma_{ess}(L(\lambda)) = \sigma_{ess}(\mathcal{A})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\lambda \notin \sigma_{ess}(\mathcal{A})$, $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G})$. Рассмотрим краевую задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\rho_0(z)} \left[\mu \Delta \mathbf{u}(x) + \left(\eta + \frac{\mu}{3} \right) \right] \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}(x) - 2\omega_0(\mathbf{u}(x) \times \mathbf{e}_3) + \\ \quad + \frac{1}{\lambda} \nabla \left[\frac{a_\infty^2 \varphi_\lambda(x)}{\rho_0(z)} \operatorname{div}(\rho_0(z) \mathbf{u}(x)) \right] - \lambda \mathbf{u}(x) = \mathbf{v}(x), \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{u}(x) = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (2.57)$$

Выделим из системы и краевого условия в (2.57) главные части:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\rho_0(z)} \left[\mu \Delta \mathbf{u}(x) + \left(\eta + \frac{\mu}{3} - a_\infty^2 \rho_0(z) \frac{\varphi_\lambda(x)}{\lambda} \right) \right] \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}(x) = \mathbf{v}(x), \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{u}(x) = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (2.58)$$

Из $\lambda \notin \sigma_{ess}(\mathcal{A})$, $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G})$, (2.58) и леммы 2.14 найдем, что краевая задача (2.57) является эллиптической (см. определение 2.4). С использованием введенных ранее операторов и пучка (2.31) можно проверить, что краевую задачу (2.57) можно переписать в виде $A^{1/2}L(\lambda)A^{1/2}\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Из [73, лемма 1, с. 52] (с использованием [2, 107]) следует, что оператор $A^{1/2}L(\lambda)A^{1/2}$ фредгольмов как оператор, действующий из $\mathbf{H}_A = \mathcal{D}(A^{1/2})$ в $\mathbf{H}_A^*$ ($\mathbf{H}_A^*$ — пространство, сопряженное к $\mathbf{H}_A$ относительно скалярного произведения в $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$). Отсюда и из теоремы [146, гл. 17, § 3, теорема 3.1] о произведении фредгольмовых операторов следует, что оператор $L(\lambda)$ фредгольмов в $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$. Теорема доказана. ■

2.3.3. Задача о спектре вязкой вращающейся релаксирующей жидкости. Локализация и асимптотика спектра

Локализация спектра оператора $\mathcal{A}$ в общем случае, асимптотика спектра на бесконечности

В приводимых далее утверждениях фигурирует условие на малость нормы $\|A^{-1}\|$ или $\|A^{-1/2}\|$. Эта норма будет тем меньше, чем больше будет максимум функции $\mu\rho_0^{-1}(z)$ по области Ω . Таким образом, малость указанной нормы эквивалентна достаточно большой "вязкости" в системе, а при $\omega_0 = 0$ и $g = 0$ — достаточно большой кинематической вязкости жидкости $\nu = \mu\rho_0^{-1}$.

Л е м м а 2.15. *Точка $\lambda = 0$ является регулярной точкой оператора $\mathcal{A}$. Если $\|A^{-1/2}\| < b_q^{-1/2}$, то точка $\lambda = b_q$ также является регулярной точкой оператора $\mathcal{A}$. В противном случае, точка $\lambda = b_q$ может быть лишь изолированным конечнократным собственным значением оператора $\mathcal{A}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 2.2 следует, что точки $\lambda = 0$, $\lambda = b_l$ ($l = \overline{1, m}$) могут быть лишь изолированными собственными значениями оператора $\mathcal{A}$ конечной кратности.

Запишем резольвентное уравнение $(\mathcal{A} - \lambda)\xi = \xi_0$ в виде системы:

$$\left\{ \begin{array}{ll} A^{1/2} \left[A^{1/2} \mathbf{u} - Q^* T_0^* r_0 - \sum_{l=1}^m \frac{1}{\sqrt{b_l}} Q^* T_l^* r_l \right] + 2\omega_0 i S \mathbf{u} - \lambda \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \\ T_0 Q A^{1/2} \mathbf{u} - \lambda r_0 & = r_{00}, \\ \frac{l}{\sqrt{b_l}} T_l Q A^{1/2} \mathbf{u} + (b_l - \lambda) r_l & = r_{l0}, \quad l = \overline{1, m}. \end{array} \right. \quad (2.59)$$

1. Допустим, что $\lambda = 0$ является собственным значением оператора $\mathcal{A}$. Тогда существует $0 \neq \xi = (\mathbf{u}; r_0; r_1; \dots; r_m)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ такой, что $\mathcal{A}\xi = 0$. Из (2.59),

учитывая, что $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, получим

$$\begin{aligned} (A^{1/2}\mathbf{u} - Q^*T_0^*r_0 - \sum_{l=1}^m \frac{1}{\sqrt{b_l}} Q^*T_l^*r_l, A^{1/2}\mathbf{u}) + 2\omega_0 i(S\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= 0, \\ (T_0QA^{1/2}\mathbf{u}, r_0) &= 0, \quad \left(\frac{l}{\sqrt{b_l}} T_lQA^{1/2}\mathbf{u}, r_l\right) + b_l\|r_l\|^2 = 0, \quad l = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\|A^{1/2}\mathbf{u}\|^2 + \sum_{l=1}^m b_l\|r_l\|^2 = 0$. Следовательно, $\mathbf{u} = 0$, $r_1 = \dots = r_m = 0$, $Q^*T_0^*r = 0$. Отсюда и из $\text{Ker } Q^*T_0^* = \{0\}$ следует, что $\xi = 0$. Таким образом, $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}$.

2. Допустим теперь, что $\lambda = b_q$ ($q = \overline{1, m}$) является (конечнократным) собственным значением оператора $\mathcal{A}$. Из третьей строчки в (2.59) при $l = q$ ($\lambda = b_q$, $\xi_0 = 0$) получим, что $QA^{1/2}\mathbf{u} = 0$. Умножим первое уравнение в (2.59) скалярно на $\mathbf{u}$ и преобразуем полученное выражение с помощью последнего соотношения: $\|A^{1/2}\mathbf{u}\|^2 + 2\omega_0 i(S\mathbf{u}, \mathbf{u}) - b_q\|\mathbf{u}\|^2 = 0$ или $\|A^{1/2}\mathbf{u}\|^2 - b_q\|\mathbf{u}\|^2 = 0$. Если $\|A^{-1/2}\| < b_q^{-1/2}$, то из последнего соотношения следует, что $\mathbf{u} = 0$. Отсюда не сложно вывести, что $\xi = 0$. Таким образом, $\lambda = b_q$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}$. Лемма доказана. $\blacksquare$

З а м е ч а н и е 2.6. Из доказанной леммы следует, что пучок $L(\lambda)$ может не полностью соответствовать оператору $\mathcal{A}$. Спектр оператора $\mathcal{A}$ может содержать некоторые точки из множества $\{b_1, \dots, b_m\}$, на котором пучок $L(\lambda)$ не определен. $\blacktriangleright$

Т е о р е м а 2.4. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ спектр оператора $\mathcal{A}$, за исключением, быть может, конечного числа собственных значений, лежит в полосе $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Re}\lambda > 0, |\text{Im}\lambda| \leq 2\omega_0 + \varepsilon\}$.

2. Спектр оператора $\mathcal{A}$ имеет ветвь собственных значений $\{\lambda_k^{(+\infty)}(\mathcal{A})\}_{k=1}^\infty$ со следующим асимптотическим поведением при $k \rightarrow +\infty$:

$$\lambda_k^{(+\infty)}(\mathcal{A}) = \left\{ \frac{1}{6\pi^2} \left(2\mu^{-3/2} + \left[\eta + \frac{4\mu}{3} \right]^{-3/2} \right) \int_{\Omega} \rho_0^{3/2}(z) d\Omega \right\}^{-2/3} k^{2/3} (1 + o(1)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем в несколько шагов.

1. Начнем со второго утверждения. Оператор $A^{-1/2}SA^{-1/2}$ компактен (см. леммы 2.1, 2.2), $\text{Ker}A^{-1} = \{0\}$, следовательно (см. [60, гл. 1, § 3, лемма 3.1]), $\|(I - \lambda A^{-1})^{-1}A^{-1/2}SA^{-1/2}\| \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{|\arg \lambda| < \varepsilon\}$. Отсюда следует, что существует $R = R(\varepsilon)$ такое, что пучок $L(\lambda)$ (см. (2.31)) непрерывно обратим в $\mathbb{C} \setminus (\{|\arg \lambda| < \varepsilon\} \cup \{|\lambda| < R\})$. Наличие соответствующей ветви собственных значений и ее асимптотика следует из степенной асимптотики собственных значений оператора A и теоремы А.С. Маркуса–В.И. Мацаева (см. [61]). Асимптотика собственных значений оператора A следует из [14, с. 10]. Точнее, согласно [14] собственные значения оператора A имеют асимптотику

$$\lambda_k(A) = C_A^{-2/3} k^{2/3} (1 + o(1)) \quad (k \rightarrow +\infty), \quad (2.60)$$

$$C_A := \frac{1}{24\pi^3} \int_{\Omega} \rho_0^{3/2}(z) d\Omega \int_{|\xi|=1} \text{Tr}\{(\mu|\xi|^2 I_3 + \mu' \xi \xi^\tau)^{-3/2}\} dS(\xi), \quad \mu' = \eta + \frac{\mu}{3}.$$

Как и в лемме 2.10 введем матрицу $\Gamma_\xi := (|\xi|^{-1}\xi, a^\perp, b^\perp)$, где вектор-столбцы $a^\perp, b^\perp$ ($|a^\perp| = |b^\perp| = 1$) ортогональны ξ и между собой. Используя формулы (2.40), найдем собственные значения матрицы в круглых скобках из (2.60):

$$\begin{aligned} \det(\mu|\xi|^2 I_3 - \lambda I_3 + \mu' \xi \xi^\tau) &= \det \Gamma_\xi^\tau (\mu|\xi|^2 I_3 - \lambda I_3 + \mu' \xi \xi^\tau) \Gamma_\xi = \\ &= \det(\mu|\xi|^2 I_3 - \lambda I_3 + \mu' |\xi|^2 P_1) = ((\mu + \mu')|\xi|^2 - \lambda)(\mu|\xi|^2 - \lambda)^2 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\lambda_{1,2} = \mu|\xi|^2$, $\lambda_3 = (\mu + \mu')|\xi|^2$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \int_{|\xi|=1} \text{Tr}\{(\mu|\xi|^2 I_3 + \mu' \xi \xi^\tau)^{-3/2}\} dS(\xi) &= \\ &= \int_{|\xi|=1} (2\mu^{-3/2} + (\mu + \mu')^{-3/2}) |\xi|^{-3} dS(\xi) = 4\pi (2\mu^{-3/2} + (\mu + \mu')^{-3/2}). \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.60) следует асимптотика собственных значений оператора A .

2. Докажем теперь первое утверждение. Достаточно доказать, в силу теоремы 2.2 и леммы 2.15, что найденная ветвь собственных значений попадает в указанную область. Пусть λ собственное значение из указанной ветви, а

$\mathbf{u}$ соответствующий ему собственный элемент пучка $L(\lambda)$, то есть $L(\lambda)\mathbf{u} = 0$. Умножим последнее равенство скалярно на $\mathbf{u}$. После некоторых преобразований (см. (2.18)) получим:

$$1 - \lambda p + 2\omega_0 i s - \frac{1}{\lambda} \left(q - \sum_{l=1}^m \frac{q_l}{b_l - \lambda} \right) = 0, \quad (2.61)$$

$$p := \frac{\|A^{-1/2}\mathbf{u}\|^2}{\|\mathbf{u}\|^2}, \quad s := \frac{(S_A\mathbf{u}, \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|^2}, \quad q := \frac{\|Q\mathbf{u}\|^2}{\|\mathbf{u}\|^2}, \quad q_l := \frac{\|T_l Q\mathbf{u}\|^2}{\|\mathbf{u}\|^2} \quad (l = \overline{1, m}).$$

Выделим действительную и мнимую части из (2.61):

$$1 - p \operatorname{Re} \lambda - q \frac{\operatorname{Re} \lambda}{|\lambda|^2} + \sum_{l=1}^m \frac{q_l}{b_l} \left(\frac{\operatorname{Re} \lambda}{|\lambda|^2} + \frac{b_l - \operatorname{Re} \lambda}{|b_l - \lambda|^2} \right) = 0, \quad (2.62)$$

$$-p \operatorname{Im} \lambda + 2\omega_0 s + q \frac{\operatorname{Im} \lambda}{|\lambda|^2} + \sum_{l=1}^m \frac{q_l}{b_l} \left(\frac{-\operatorname{Im} \lambda}{|\lambda|^2} + \frac{\operatorname{Im} \lambda}{|b_l - \lambda|^2} \right) = 0. \quad (2.63)$$

Учитывая, что (см. (2.18))

$$p > 0, \quad q - \sum_{l=1}^m \frac{q_l}{b_l} = \frac{\|T_0 Q\mathbf{u}\|^2}{\|\mathbf{u}\|^2} \geq 0,$$

из (2.62) получим следующую оценку:

$$\operatorname{Re} \lambda = \frac{1 + \sum_{l=1}^m \frac{q_l}{|b_l - \lambda|^2}}{p + \frac{1}{|\lambda|^2} \left[q - \sum_{l=1}^m \frac{q_l}{b_l} \right] + \sum_{l=1}^m \frac{q_l}{b_l |b_l - \lambda|^2}} > 0.$$

Далее, из (2.63), с учетом (2.62), найдем:

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} \lambda| &= |2\omega_0 s| \cdot \left| p - \left[\frac{q}{|\lambda|^2} - \sum_{l=1}^m \frac{q_l}{b_l} \left(\frac{1}{|\lambda|^2} - \frac{1}{|b_l - \lambda|^2} \right) \right] \right|^{-1} = \\ &= \frac{|2\omega_0 s \operatorname{Re} \lambda|}{\left| 2p \operatorname{Re} \lambda - 1 - \sum_{l=1}^m \frac{q_l}{|b_l - \lambda|^2} \right|} = \frac{2\omega_0 |s|}{p} \cdot \frac{p \operatorname{Re} \lambda}{\left| 2p \operatorname{Re} \lambda - 1 - \sum_{l=1}^m \frac{q_l}{|b_l - \lambda|^2} \right|}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Из леммы 2.1 получим, что

$$\frac{|s|}{p} = \frac{(SA^{-1/2}\mathbf{u}, A^{-1/2}\mathbf{u})}{\|A^{-1/2}\mathbf{u}\|^2} \leq 1,$$

а из (2.62) следует, что $p \operatorname{Re} \lambda \rightarrow 1$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Теперь из (2.64) получим, что $|\operatorname{Im} \lambda| \leq 2\omega_0 + \varepsilon$, если только λ — достаточно большое по абсолютной величине собственное значение оператора $\mathcal{A}$. Теорема доказана. ■

З а м е ч а н и е 2.7. Из лемм 2.6, 2.15, теорем 2.2, 2.4 и [180, гл. 4, § 4, теорема 4.3] (см. также [135, гл. 5, § 1, теорема 1.10]) следует, что оператор $-\mathcal{A}$ генерирует равномерно экспоненциально устойчивую (см. (1.6)) голоморфную полугруппу. При этом тип полугруппы $\omega \in (0, \inf\{\operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\})$. ►

Для последующих вычислений нам понадобится явное представление для оператора $\mathcal{A}^{-1}$.

Л е м м а 2.16. *Запишем оператор $\mathcal{A}$ относительно следующего разложения $\mathcal{H} = \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0) \oplus L_{2, \varphi_0^{-1} \rho_0}(\Omega) \oplus \widehat{H}$, где $\widehat{H} := \oplus_{l=1}^m L_{2, k_l^{-1}}(\Omega)$, в виде (см. (2.22)):*

$$\mathcal{A} = \operatorname{diag}(A^{1/2}, I, \widehat{I}) \begin{pmatrix} I + 2\omega_0 i A^{-1/2} S A^{-1/2} & -Q^* T_0^* & -\widehat{Q}^* \\ T_0 Q & 0 & 0 \\ \widehat{Q} & 0 & \widehat{G} \end{pmatrix} \operatorname{diag}(A^{1/2}, I, \widehat{I}),$$

$$\widehat{Q} := \left(\frac{1}{\sqrt{b_1}} T_1 Q, \dots, \frac{1}{\sqrt{b_m}} T_m Q \right)^\tau, \quad \widehat{G} := \operatorname{diag}(b_1 I, \dots, b_m I), \quad \widehat{I} := \operatorname{diag}(I, \dots, I),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ \xi = (\mathbf{u}; r_0; \widehat{r})^\tau \in \mathcal{H} \mid \mathbf{u} - A^{-1/2} (Q^* T_0^* r_0 + \widehat{Q}^* \widehat{r}) \in \mathcal{D}(A) \right\}.$$

Тогда

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -\widehat{G}^{-1} \widehat{Q} & 0 & \widehat{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{G}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & \widehat{Q}^* \widehat{G}^{-1} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{I} \end{pmatrix},$$

$$C_{11} := C - C Q^* (Q C Q^*)^{-1} Q C, \quad C_{12} := C Q^* (Q C Q^*)^{-1} T_0^{-1},$$

$$C_{21} := -(T_0^*)^{-1} (Q C Q^*)^{-1} Q C, \quad C_{22} := (T_0^*)^{-1} (Q C Q^*)^{-1} T_0^{-1},$$

$$C := \left[I + 2\omega_0 i A^{-1/2} S A^{-1/2} + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l^2} Q^* T_l^* T_l Q \right]^{-1}.$$

Если $\omega_0 = 0$, то

$$C_{11} = C^{1/2} P_0 C^{1/2}, \quad P_0 = P_0^2 = P_0^*, \quad P_0 \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0) = \operatorname{Ker}(Q C^{1/2}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем в несколько шагов.

1. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} -\rho_0^{-1}(z)\left(\mu\Delta\mathbf{u}(x) + \left(\eta + \frac{\mu}{3}\right)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}(x)\right) + \nabla(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho(x)) = \mathbf{v}(x), & x \in \Omega, \\ a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\operatorname{div}(\rho_0(z)\mathbf{u}(x)) = q(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad \mathbf{u}(x) = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega. \quad (2.65)$$

Система (2.65) — это система Дуглиса–Ниренберга. Краевая задача, отвечающая главной части системы (2.65) имеет вид (первое уравнение умножено на $\rho_0(z)$)

$$\begin{cases} -\left(\mu\Delta\mathbf{u}(x) + \left(\eta + \frac{\mu}{3}\right)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}(x)\right) + a_\infty\rho_0^{1/2}(z)\nabla\rho(x) = \rho_0(z)\mathbf{v}(x), & x \in \Omega, \\ a_\infty\rho_0^{1/2}(z)\operatorname{div}\mathbf{u}(x) = q(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad \mathbf{u}(x) = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega$$

и является эллиптической, в силу леммы 2.13. Из [150] следует, что максимальный оператор, являющийся L_2 -реализацией краевой задачи (2.65), фредгольмов. С использованием операторов A , Q , Q^* (см. леммы 2.2, 2.3, 2.5) краевую задачу (2.65) можно переписать в гильбертовом пространстве $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0) \oplus L_{2,\rho_0}(\Omega)$ в следующей операторной форме:

$$\mathcal{B} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -Q^* \\ Q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{1/2}(A^{1/2}\mathbf{u} - Q^*\rho) \\ QA^{1/2}\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}) = \left\{ \zeta = (\mathbf{u}; \rho)^\tau \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0) \oplus L_{2,\rho_0}(\Omega) \mid \mathbf{u} - A^{-1/2}Q^*\rho \in \mathcal{D}(A) \right\}.$$

Оператор $\mathcal{B}$ является максимальным секториальным (и аккретивным) оператором, $\operatorname{Ker}\mathcal{B} = \{0\}$. Эти факты доказываются по аналогии с соответствующими утверждениями в леммах 2.6 и 2.15. Оператор $\mathcal{B}^*$ также является максимальным аккретивным оператором, $\operatorname{Ker}\mathcal{B}^* = \{0\}$. Отсюда и из фредгольмовости оператора $\mathcal{B}$ следует, что существует $\mathcal{B}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0) \oplus L_{2,\rho_0}(\Omega))$.

2. Докажем, что существует $(QQ^*)^{-1} \in \mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega))$. Допустим, что это не верно. Тогда существует некомпактная последовательность $\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset L_{2,\rho_0}(\Omega)$ такая, что $\|\rho_n\|_{L_{2,\rho_0}(\Omega)} = 1$, $\|QQ^*\rho_n\|_{L_{2,\rho_0}(\Omega)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$.

Определим $\zeta_n := (A^{-1/2}Q^*\rho_n; \rho_n)^\tau$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\{\zeta_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{D}(\mathcal{B})$, так как $[A^{-1/2}Q^*\rho_n] - A^{-1/2}Q^*[\rho_n] = 0 \in \mathcal{D}(A)$. Кроме того, имеем

$$\zeta_n \not\rightarrow 0, \quad \mathcal{B}\zeta_n = \mathcal{B} \begin{pmatrix} A^{-1/2}Q^*\rho_n \\ \rho_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ QQ^*\rho_n \end{pmatrix} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty),$$

что противоречит $\mathcal{B}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0) \oplus L_{2,\rho_0}(\Omega))$.

3. Покажем, что $(QCQ^*)^{-1} \in \mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega))$. Легко видеть, что

$$\frac{C^* + C}{2} = C^* \left[I + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l^2} Q^* T_l^* T_l Q \right] C = C \left[I + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l^2} Q^* T_l^* T_l Q \right] C^*.$$

Отсюда следует, что для любых $0 \neq \rho \in L_{2,\rho_0}(\Omega)$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|QCQ^*\rho\| &\geq \frac{|(QCQ^*\rho, \rho)|}{\|\rho\|} \geq \frac{\operatorname{Re}(CQ^*\rho, Q^*\rho)}{\|\rho\|} \geq \frac{\|CQ^*\rho\|^2}{\|\rho\|} \geq \gamma(C^*C)\gamma(QQ^*) \cdot \|\rho\|, \\ \|QC^*Q^*\rho\| &\geq \frac{|(QC^*Q^*\rho, \rho)|}{\|\rho\|} \geq \frac{\operatorname{Re}(C^*Q^*\rho, Q^*\rho)}{\|\rho\|} \geq \dots \geq \gamma(C^*C)\gamma(QQ^*) \cdot \|\rho\|, \end{aligned}$$

где $\gamma(C^*C) > 0$, $\gamma(QQ^*) > 0$ — нижние грани соответствующих операторов. Таким образом, существует $(QCQ^*)^{-1} \in \mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega))$.

4. Для отыскания формулы для $\mathcal{A}^{-1}$ теперь нужно провести вычисления, аналогичные проведенным в п. **2.** теоремы 1.2 при доказательстве (1.28) (ображение оператора (1.24)). При $\omega_0 = 0$ представление для оператора C_{11} находится в соответствии с замечанием 1.3 (см. (1.27)). Лемма доказана. $\blacksquare$

Локализация спектра в случае $\omega_0 = 0$

Установим локализацию спектра оператора $\mathcal{A}$ в случае, когда система не вращается, то есть, когда $\omega_0 = 0$.

Рассуждения будут основаны на применении методов индефинитной метрики, которые можно найти в [3, 162]. В связи с этим обстоятельством будем считать, что $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, где $\mathcal{H}_+ := \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$, $\mathcal{H}_- := L_{2,\varphi_0^{-1}\rho_0}(\Omega) \oplus_{l=1}^m L_{2,k_l^{-1}}(\Omega)$.

Определим оператор $\mathcal{J} := \operatorname{diag}(I, -I)$ и введем в $\mathcal{H}$ индефинитное скалярное произведение по формуле $[\xi_1, \xi_2] := (\mathcal{J}\xi_1, \xi_2)_{\mathcal{H}} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)_{\mathcal{H}_+} - (w_1, w_2)_{\mathcal{H}_-}$.

Введем ортопроекторы $\mathcal{P}_+$ и $\mathcal{P}_-$: $\mathcal{P}_+\mathcal{H} = \mathcal{H}_+$, $\mathcal{P}_-\mathcal{H} = \mathcal{H}_-$. Приведем необходимые понятия и факты из теории пространств с индефинитной метрикой.

Подпространство L_+ пространства Крейна $\mathcal{H}$ называется *неотрицательным*, если $[\xi, \xi] \geq 0$ для любого $\xi \in L_+$ и *максимальным неотрицательным* ($L_+ \in \mathfrak{M}^+$), если оно не является частью другого неотрицательного подпространства. Аналогично определяется *неположительное* подпространство L_- .

Известно [3, гл. 1, § 8, п. 3], что $L_+ \in \mathfrak{M}^+$ тогда и только тогда, когда существует $K_+ : \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-$ ($\|K_+\| \leq 1$) такой, что $L_+ = \{\xi = \xi_+ + K_+\xi_+ : \xi_+ \in \mathcal{H}_+\}$.

Подпространство L_+ называется *равномерно положительным*, если оно является гильбертовым пространством по отношению к скалярному произведению, порождаемому индефинитной метрикой.

Будем говорить, что пространство L_+ *принадлежит классу h^+* , если оно допускает разложение в прямую $\mathcal{J}$ -ортогональную сумму конечномерного изотропного подпространства и равномерно положительного подпространства. В частности, $L_+ \in h^+$, если $K_+ \in \mathfrak{S}_\infty$ (см. [3, гл. 1, § 9, задача 18], [153]).

Если $L_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$ и L_+ $\mathcal{J}$ -ортогонально L_- , то будем говорить, что они образуют *дуальную пару* $\{L_+, L_-\}$. Будем писать $\{L_+, L_-\} \in h$, если $L_\pm \in h^\pm$.

Будем говорить, что непрерывный $\mathcal{J}$ -самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ *принадлежит классу (H)* ($\mathcal{A} \in (H)$), если у него есть хотя бы одна дуальная пара $\{L_+, L_-\}$ инвариантных подпространств и каждая $\mathcal{A}$ -инвариантная дуальная пара принадлежит классу h .

Т е о р е м а 2.5. Пусть $\omega_0 = 0$. Тогда справедливы утверждения.

1. Спектр оператора $\mathcal{A}$ действительный, за исключением, быть может, конечного числа комплексно сопряженных собственных значений.
2. Если λ невещественное собственное значение оператора $\mathcal{A}$, то

$$\gamma_1 < \operatorname{Re} \lambda < \gamma_2, \quad \gamma_1 := [2\|A^{-1/2}\|^2]^{-1}, \quad \gamma_2 := b_m + \|Q\|^2 + \|Q\|(b_m + \|Q\|^2)^{1/2},$$

$$|\lambda|^2 < (b_m + 2\|Q\|^2 + 2\|Q\|(b_m + \|Q\|^2)^{1/2})(b_m + \|Q\|^2).$$

Спектр оператора $\mathcal{A}$ действительный, если выполнено условие

$$2\|A^{-1/2}\|^2 \leq (b_m + \|Q\|^2 + \|Q\|(b_m + \|Q\|^2)^{1/2})^{-1}. \quad (2.66)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем в несколько шагов.

1. Из факторизации (2.23) (при $\omega_0 = 0$) оператора $\mathcal{A}$ в форме Шура–Фробениуса найдем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} I & -A^{-1/2}\mathcal{Q}^* \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \text{diag}(A^{-1}, (\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}) \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathcal{Q}A^{-1/2} & \mathcal{I} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1} - A^{-1/2}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}\mathcal{Q}A^{-1/2} & -A^{-1/2}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1} \\ (\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}\mathcal{Q}A^{-1/2} & (\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Оператор $\mathcal{A}^{-1}$ $\mathcal{J}$ -самосопряженный и ограниченный, следовательно, спектр оператора $\mathcal{A}$ симметричен относительно действительной оси (этот же факт следует и из самосопряженности пучка $L(\lambda)$ при $\omega_0 = 0$). Теорема будет доказана полностью, если оператор $\mathcal{A}^{-1}$ имеет не более конечного числа невещественных собственных значений. Последнее, в свою очередь будет верно, если $\mathcal{A}^{-1} \in (H)$ (см. в [3, гл. 3, § 5, следствие 5.21] условия принадлежности оператора $\mathcal{A}^{-1}$ классу Хелтона). В самом деле, из компактности оператора $A^{-1/2}$ следует, что $\mathcal{P}_+\mathcal{A}^{-1}\mathcal{P}_-$ компактен, а значит (см. [3, гл. 4, § 3, теорема 3.7]) оператор $\mathcal{A}^{-1}$ имеет дуальную инвариантную пару $\{L_+(\mathcal{A}^{-1}), L_-(\mathcal{A}^{-1})\}$. Пусть K_+ угловой оператор инвариантного неотрицательного подпространства $L_+(\mathcal{A}^{-1})$, тогда $K_+ : \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-, \|K_+\| \leq 1$ и

$$L_+(\mathcal{A}^{-1}) = \{(\mathbf{u}; w)^\tau \in \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \mid (\mathbf{u}; w)^\tau = (\mathbf{u}; K_+\mathbf{u})^\tau, \mathbf{u} \in \mathcal{H}_+\}.$$

Пусть $(\mathbf{u}_1; w_1)^\tau = (\mathbf{u}_1; K_+\mathbf{u}_1)^\tau \in L_+(\mathcal{A}^{-1})$, тогда $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{u}_1; K_+\mathbf{u}_1)^\tau = (\mathbf{u}_2; K_+\mathbf{u}_2)^\tau$. Отсюда и из (2.67) следует уравнение для определения углового оператора K_+ :

$$\begin{aligned} (\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}K_+ &= -(\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}\mathcal{Q}A^{-1/2} + \\ &+ K_+(A^{-1} - A^{-1/2}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}\mathcal{Q}A^{-1/2}) - K_+A^{-1/2}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}K_+. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Отсюда и из $A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty$ следует, что $K_+ \in \mathfrak{S}_\infty$.

2. Пусть λ_0 не вещественное собственное значение оператора $\mathcal{A}$, тогда λ_0 есть корень уравнения (2.61) при $\omega_0 = 0$ и некотором фиксированном $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$. Перепишем уравнение (2.61) в следующей форме:

$$0 = (\lambda - \lambda^2 p - q) \prod_{l=1}^m (b_l - \lambda) + \sum_{l=1}^m q_l \prod_{k \neq l}^m (b_k - \lambda) = -p(-1)^m \lambda^{m+2} + \\ + (-1)^m \lambda^{m+1} \left[1 + p \sum_{l=1}^m b_l \right] - (-1)^m \lambda^m \left[q + \sum_{l=1}^m b_l + p \sum_{i < j} b_i b_j \right] + \dots \quad (2.69)$$

Уравнение (2.61) имеет m действительных корней, которые мы обозначим через λ_l , $l = \overline{1, m}$, причем $0 < \lambda_1 < b_1 < \lambda_2 < b_2 < \dots < \lambda_m < b_m$, и еще два корня — λ_0 и $\overline{\lambda_0}$. Обозначим $\xi_0 := \operatorname{Re} \lambda_0$, $\eta_0 := \operatorname{Im} \lambda_0$, тогда

$$0 = -p \prod_{l=1}^m (\lambda_l - \lambda) ((\lambda - \xi_0)^2 + \eta_0^2) = -p(-1)^m \lambda^{m+2} + (-1)^m \lambda^{m+1} p \left[2\xi_0 + \sum_{l=1}^m \lambda_l \right] - \\ - (-1)^m \lambda^m p \left[(\xi_0^2 + \eta_0^2) + 2\xi_0 \sum_{l=1}^m \lambda_l + \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j \right] + \dots \quad (2.70)$$

Приравнивая коэффициенты при λ^{m+1} и λ^m из (2.69) и (2.70), получим

$$2\xi_0 + \sum_{l=1}^m \lambda_l = \frac{1}{p} + \sum_{l=1}^m b_l, \quad (2.71)$$

$$(\xi_0^2 + \eta_0^2) + 2\xi_0 \sum_{l=1}^m \lambda_l + \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j = \frac{q}{p} + \frac{1}{p} \sum_{l=1}^m b_l + \sum_{i < j} b_i b_j. \quad (2.72)$$

Из (2.71) следует, что $2\operatorname{Re} \lambda_0 = 2\xi_0 = p^{-1} + \sum_{l=1}^m (b_l - \lambda_l) > p^{-1} \geq \|A^{-1/2}\|^{-2}$ и оценка снизу на $\operatorname{Re} \lambda_0$ получена.

Далее мы следуем идеям из [162, гл. 11, § 5, п. 11.5.2(2)]. Введем обозначения $\delta := 2^{-1} \sum_{l=1}^m (b_l - \lambda_l)$, $\omega := (2p)^{-1}$, тогда $\xi_0 = \omega + \delta$ (см. (2.71)). Выразим из (2.71) $\sum_{l=1}^m \lambda_l$ и подставим его в (2.72). После ряда преобразований получим

$$\eta_0^2 + 2\delta \sum_{l=1}^m \lambda_l - \sum_{i < j} (b_i b_j - \lambda_i \lambda_j) = -\omega^2 + 2\omega(\delta + q) - \delta^2. \quad (2.73)$$

Из неравенств $0 < \lambda_1 < b_1 < \lambda_2 < b_2 < \dots < \lambda_m < b_m$ можно вывести следующую оценку (см. [162, гл. 11, § 5, п. 11.5.2, формула (5.24)]):

$$\sum_{i < j} (b_i b_j - \lambda_i \lambda_j) < \sum_{j=1}^m (b_j - \lambda_j) \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \right) = 2\delta \sum_{l=1}^m \lambda_l. \quad (2.74)$$

Из (2.74) следует положительность правой части в (2.73), следовательно, $\omega < \delta + q + (2\delta q + q^2)^{1/2}$. Отсюда $\operatorname{Re} \lambda_0 = \xi_0 < 2\delta + q + (2\delta q + q^2)^{1/2} \leq b_m + \|Q\|^2 + \|Q\| [b_m + \|Q\|^2]^{1/2}$ и оценка сверху на $\operatorname{Re} \lambda_0$ получена.

Из оценки на $\operatorname{Re} \lambda_0$ выводится условие (2.66), достаточное для отсутствия не вещественного собственного значения λ_0 .

Далее, выразим из (2.72) $(\xi_0^2 + \eta_0^2) = |\lambda_0|^2$ и преобразуем его с помощью (2.71). С использованием оценки (2.74) получим, что $|\lambda_0|^2 < 2\omega(q + 2\delta)$. После простых оценок отсюда следует неравенство для $|\lambda_0|^2$. Теорема доказана. ■

З а м е ч а н и е 2.8. Отметим, что вместо условия (2.66) можно получить более компактное, однако более грубое достаточное условие отсутствия не вещественного спектра: $\|A^{-1/2}\| \leq (3b_m + 4\|Q\|^2)^{-1/2}$. ►

2.3.4. Задача о спектре вязкой вращающейся релаксирующей жидкости. Свойства корневых элементов

Некоторые свойства корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ и пучка $L(\lambda)$

По аналогии с теоремой 1.7 может быть доказана следующая теорема о связи корневых элементов (см. определение 1.5) оператора $\mathcal{A}$ и пучка $L(\lambda)$.

Т е о р е м а 2.6. Пусть набор элементов $\{\xi_k = (\mathbf{u}_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ является цепочкой из собственного и присоединенных элементов оператора $\mathcal{A}$, отвечающей собственному значению λ_0 ($\lambda_0 \notin \{0, b_1, \dots, b_m\}$), тогда набор элементов $\{\mathbf{v}_k\}_{k=0}^{n-1} := \{A^{1/2} \mathbf{u}_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов пучка $L(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_0 .

Обратно, пусть набор элементов $\{\mathbf{v}_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов пучка $L(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_0 , тогда $\{\xi_k = (A^{-1/2}\mathbf{v}_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$, где $w_k = \sum_{l=0}^k (\mathcal{G} - \lambda_0)^{-(k-l+1)} \mathcal{Q}\mathbf{v}_l$, — цепочка из собственного и присоединенных элементов оператора $\mathcal{A}$.

Возникший в рассматриваемой задаче пучок имеет довольно специальный вид. Докажем одно утверждение для исследования полноты части системы собственных и присоединенных элементов таких пучков.

Т е о р е м а 2.7. Пусть в круге радиуса r определен пучок, действующий в гильбертовом пространстве H :

$$M(\lambda) := \lambda(I + C) - N - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k B_k, \quad (2.75)$$

$$\exists t \in (0, r) : \quad \frac{\|N\|}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} \|B_k\| < 1, \quad (2.76)$$

где $B_1 \in \mathfrak{S}_\infty$, $\operatorname{Re} C \geq 0$, $C \in \mathfrak{S}_\infty$, N — нормальный оператор, спектр которого лежит на конечном числе лучей, $\operatorname{Ker} N = \{0\}$, $N \in \mathfrak{S}_p$ при некотором $p \in (0, \infty)$. Тогда система собственных и присоединенных элементов пучка $M(\lambda)$, отвечающих собственным значениям из круга $|\lambda| < t$, полна в H .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оператор $-C$ максимальный диссипативный, а значит $\|(I + C)^{-1}\| = \|(-C - I)^{-1}\| \leq 1$. Отсюда следует, что условие (2.76) является достаточным для факторизации пучка $(I + C)^{-1}M(\lambda) =: M_C(\lambda)$. По теореме [60, гл. 3, § 23, теорема 23.4] (см. также [49, гл. 1, § 7, п. 6]) для пучка $M_C(\lambda)$ справедливо представление $M_C(\lambda) = A_+(\lambda)(\lambda I - Z)$, где оператор-функция $A_+(\lambda)$ — голоморфна и голоморфно обратима при $|\lambda| < t$. При этом спектр оператора Z лежит в круге $|\lambda| < t$. В этой области задача для операторного пучка $M_C(\lambda)$ сводится к задаче на собственные значения для оператора Z . Рассмотрим подробно представление для пучка $M_C(\lambda)$:

$$\lambda I - (I + C)^{-1}N - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k (I + C)^{-1}B_k = \left(A_+(0) + \frac{A'_+(0)\lambda}{1!} + \dots \right) \cdot (\lambda I - Z). \quad (2.77)$$

Из равенства (2.77), приравнявая коэффициенты при нулевой степени λ , получим $-(I + C)^{-1}N = -A_+(0)Z$, откуда следует, что $Z = A_+^{-1}(0)(I + C)^{-1}N \in \mathfrak{S}_p$. Приравнявая в (2.77) коэффициенты при первой степени λ , получим $A_+(0) = I - (I + C)^{-1}B_1 + A'_+(0)Z = I + S_1$, где $S_1 \in \mathfrak{S}_\infty$. Отсюда $A_+^{-1}(0) = (I + S_1)^{-1} = I + S_2$, где $S_2 \in \mathfrak{S}_\infty$. Из последнего соотношения и $C \in \mathfrak{S}_\infty$ следует, что $Z = (I + S_2)(I + C)^{-1}N = (I + S_3)N$, где $S_3 \in \mathfrak{S}_\infty$. Таким образом, оператор Z есть слабое возмущение оператора N . Учитывая свойства оператора N и обратимость оператора $I + S_3$, из теоремы Келдыша (см. [60, гл. 1, § 4, теорема 4.2]) получаем, что система корневых элементов оператора Z , а следовательно и пучка $M_C(\lambda)$ в указанной области, полна в гильбертовом пространстве H . Остается заметить, что собственные и присоединенные элементы пучков $M_C(\lambda)$ и $M(\lambda)$, отвечающие одному и тому же собственному значению, совпадают. Теорема доказана. ■

Докажем некоторые свойства системы собственных и присоединенных элементов пучка $L(\lambda)$, отвечающих собственным значениям, сгущающимся к бесконечности (см. теорему 2.4). В силу теоремы 2.6 следующие два утверждения могут быть сформулированы в терминах корневых элементов оператора $\mathcal{A}$.

Т е о р е м а 2.8. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Система собственных и присоединенных элементов пучка $L(\lambda)$, отвечающих собственным значениям, лежащим в области $\{|\lambda| > b_m\}$ имеет конечный дефект в $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$.
2. Пусть $0 < t < b_m^{-1}$ таково, что

$$t\|Q^*Q\| + \sum_{l=1}^m \frac{t^2}{1 - tb_l} \|Q^*T_l^*T_lQ\| < 1. \quad (2.78)$$

Если норма $\|A^{-1}\|$ оператора A^{-1} удовлетворяет неравенству

$$\|A^{-1}\| < t \left[1 - t\|Q^*Q\| - \sum_{l=1}^m \frac{t^2}{1 - tb_l} \|Q^*T_l^*T_lQ\| \right], \quad (2.79)$$

то система собственных и присоединенных элементов пучка $L(\lambda)$, отвечающих собственным значениям, лежащим в области $\{|\lambda| > t^{-1}\}$, полна в $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$.

Доказательство. Доказательство первого утверждения следует из [90, теорема 1] (см. также [49, гл. 1, § 7, п. 7]).

Доказательство второго утверждения основано на использовании теоремы 2.7. Положим $M(\lambda) := \lambda L(\lambda^{-1})$. Линейная оболочка системы собственных и присоединенных элементов пучка $L(\lambda)$, отвечающих собственным значениям, лежащим в области $\{|\lambda| > t^{-1}\}$, совпадает с линейной оболочкой системы собственных и присоединенных элементов пучка $M(\lambda)$, отвечающих собственным значениям, лежащим в круге $\{|\lambda| < t\}$. Найдем представление для пучка $M(\lambda)$ в круге $\{|\lambda| < b_m^{-1}\}$. Из (2.31) с использованием (2.18) имеем

$$\begin{aligned} M(\lambda) &= \lambda(I + 2\omega_0 i A^{-1/2} S A^{-1/2}) - A^{-1} - \lambda^2 Q^* (\mathcal{I} - \lambda \mathcal{G})^{-1} Q = \\ &= \lambda(I + 2\omega_0 i A^{-1/2} S A^{-1/2}) - A^{-1} - \lambda^2 Q^* T_0^* T_0 Q - \lambda^2 \sum_{l=1}^m \frac{Q^* T_l^* T_l Q}{b_l (1 - \lambda b_l)} = \\ &= \lambda(I + 2\omega_0 i A^{-1/2} S A^{-1/2}) - A^{-1} - \lambda^2 Q^* T_0^* T_0 Q - \lambda^2 \sum_{l=1}^m \frac{Q^* T_l^* T_l Q}{b_l} \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda b_l)^k = \\ &= \lambda(I + 2\omega_0 i A^{-1/2} S A^{-1/2}) - A^{-1} - \lambda^2 Q^* Q - \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^{k+2} \sum_{l=1}^m b_l^{k-1} Q^* T_l^* T_l Q. \quad (2.80) \end{aligned}$$

Легко видеть, учитывая леммы 2.1, 2.2, что пучок (2.80) имеет вид (2.75). Запишем условие (2.76), достаточное для факторизации пучка (2.80):

$$\exists t \in (0, b_m^{-1}) : \quad \frac{\|A^{-1}\|}{t} + t \|Q^* Q\| + \sum_{k=1}^{+\infty} t^{k+1} \sum_{l=1}^m b_l^{k-1} \|Q^* T_l^* T_l Q\| < 1.$$

Это условие эквивалентно следующему:

$$\exists t \in (0, b_m^{-1}) : \quad \frac{\|A^{-1}\|}{t} + t \|Q^* Q\| + \sum_{l=1}^m \frac{t^2}{1 - t b_l} \|Q^* T_l^* T_l Q\| < 1. \quad (2.81)$$

Пусть $t \in (0, b_m^{-1})$ таково, что выполнено неравенство (2.78) и оператор A^{-1} удовлетворяет (2.79). Тогда (2.81) справедливо и по теореме 2.7 система собственных и присоединенных элементов пучка $M(\lambda)$, отвечающих собственным значениям, лежащим в круге $\{|\lambda| < t\}$, полна в $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$. Теорема доказана. ■

Т е о р е м а 2.9. Пусть $\omega_0 = 0$. Тогда справедливы утверждения.

1. Пусть $0 < t < b_m^{-1}$ таково, что

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\lambda - \lambda^2 \|T_0 Q\|^2 - \lambda^2 \sum_{l=1}^m \frac{\|T_l Q\|^2}{b_l(1 - \lambda b_l)} \right] \Big|_{\lambda=t} > 0. \quad (2.82)$$

Тогда система собственных элементов пучка $L(\lambda)$, отвечающих собственным значениям, лежащим на луче $\{\lambda > t^{-1}\}$, образует p -базис при $p > 3/2$ (см. определение 2.6) в $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ с точностью до конечного дефекта.

2. Пусть $0 < t < b_m^{-1}$ удовлетворяет (2.82). Если норма $\|A^{-1/2}\|$ оператора $A^{-1/2}$ удовлетворяет неравенству

$$\|A^{-1/2}\|^2 < t - t^2 \|T_0 Q\|^2 - t^2 \sum_{l=1}^m \frac{\|T_l Q\|^2}{b_l(1 - t b_l)}, \quad (2.83)$$

то система собственных элементов пучка $L(\lambda)$, отвечающих собственным значениям, лежащим на луче $\{\lambda > t^{-1}\}$, образует p -базис при $p > 3/2$ в $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство основано на использовании теоремы из [28]. Рассмотрим, как и в теореме 2.8, пучок $M(\lambda) := \lambda L(\lambda^{-1})$ при $\omega_0 = 0$. Зафиксируем $0 < t < b_m^{-1}$, удовлетворяющее (2.82), и $\varepsilon > 0$ такое, что

$$1 - \varepsilon^2 \sum_{l=1}^m \|T_l Q\|^2 > 0.$$

Тогда $M'(\lambda) \gg 0$ для любого $\lambda \in [-\varepsilon, t]$. Действительно, если $\lambda \in [-\varepsilon, 0]$, то

$$\begin{aligned} (M'(\lambda)\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \|\mathbf{u}\|^2 - 2\lambda \|T_0 Q\mathbf{u}\|^2 - 2\lambda \sum_{l=1}^m \frac{\|T_l Q\mathbf{u}\|^2}{b_l(1 - \lambda b_l)} - \lambda^2 \sum_{l=1}^m \frac{\|T_l Q\mathbf{u}\|^2}{(1 - \lambda b_l)^2} \geq \\ &\geq \|\mathbf{u}\|^2 - \lambda^2 \sum_{l=1}^m \frac{\|T_l Q\mathbf{u}\|^2}{(1 - \lambda b_l)^2} \geq \left[1 - \varepsilon^2 \sum_{l=1}^m \|T_l Q\|^2 \right] \|\mathbf{u}\|^2. \end{aligned}$$

Если $\lambda \in [0, t]$, то

$$(M'(\lambda)\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2 - 2\lambda \|T_0 Q\mathbf{u}\|^2 - 2\lambda \sum_{l=1}^m \frac{\|T_l Q\mathbf{u}\|^2}{b_l(1 - \lambda b_l)} - \lambda^2 \sum_{l=1}^m \frac{\|T_l Q\mathbf{u}\|^2}{(1 - \lambda b_l)^2} \geq$$

$$\begin{aligned}
&\geq \left[1 - 2\lambda \|T_0 Q\|^2 - 2\lambda \sum_{l=1}^m \frac{\|T_l Q\|^2}{b_l(1 - \lambda b_l)} - \lambda^2 \sum_{l=1}^m \frac{\|T_l Q\|^2}{(1 - \lambda b_l)^2} \right] \|\mathbf{u}\|^2 = \\
&= \frac{d}{d\lambda} \left[\lambda - \lambda^2 \|T_0 Q\|^2 - \lambda^2 \sum_{l=1}^m \frac{\|T_l Q\|^2}{b_l(1 - \lambda b_l)} \right] \|\mathbf{u}\|^2 \geq \\
&\geq \frac{d}{d\lambda} \left[\lambda - \lambda^2 \|T_0 Q\|^2 - \lambda^2 \sum_{l=1}^m \frac{\|T_l Q\|^2}{b_l(1 - \lambda b_l)} \right] \Big|_{\lambda=t} \|\mathbf{u}\|^2.
\end{aligned}$$

Из [28] следует, что система собственных элементов пучка $M(\lambda)$, отвечающих собственным значениям, лежащим на отрезке $[-\varepsilon, t]$, образует p -базис при $p > 3/2$ в $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$, с точностью до конечного дефекта. Отсюда следует первое утверждение.

Для доказательства второго утверждения достаточно установить, в соответствии с [28], что $M(-\varepsilon) \ll 0$ (здесь $\varepsilon > 0$ то же, что выбрано ранее), $M(t) \gg 0$. Первая формула очевидна. Проверим вторую формулу. Пусть оператор $A^{-1/2}$ удовлетворяет (2.83), тогда

$$\begin{aligned}
(M(t)\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= t\|\mathbf{u}\|^2 - \|A^{-1/2}\mathbf{u}\|^2 - t^2\|T_0 Q\mathbf{u}\|^2 - t^2 \sum_{l=1}^m \frac{\|T_l Q\mathbf{u}\|^2}{b_l(1 - tb_l)} \geq \\
&\geq \left[t - t^2\|T_0 Q\|^2 - t^2 \sum_{l=1}^m \frac{\|T_l Q\|^2}{b_l(1 - tb_l)} - \|A^{-1/2}\|^2 \right] \|\mathbf{u}\|^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, система собственных элементов пучка $M(\lambda)$, отвечающих собственным значениям, лежащим на отрезке $[-\varepsilon, t]$, образует p -базис при $p > 3/2$ в $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$. Отсюда следует второе утверждение. Теорема доказана. $\blacksquare$

Теорема о p -базисности системы корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ в случае $\omega_0 = 0$ и $g = 0$, представление решений эволюционной задачи

Пусть $\omega_0 = 0$ и $g = 0$. В этом случае спектр оператора $\mathcal{A}$ не содержит непрерывных компонент и удастся получить некоторые свойства для всей системы корневых элементов, используя методы индефинитной метрики.

О п р е д е л е н и е 2.6. Назовем систему $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ базисом Рисса пространства $\mathcal{H}$, если $\xi_k = \mathcal{T}\zeta_k$, где $\mathcal{T}, \mathcal{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, а $\{\zeta_k\}_{k=1}^\infty$ — ортонормированный

базис пространства $\mathcal{H}$. Если $\mathcal{T} = \mathcal{I} + \mathcal{K}$, где $\mathcal{K} \in \mathfrak{S}_p$ при некотором $p > 0$, то система $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ называется p -базисом $\mathcal{H}$.

О п р е д е л е н и е 2.7. Назовем базис $\mathcal{J}$ -пространства $\mathcal{H}$ почти $\mathcal{J}$ -ортонормированным, если его можно представить как объединение конечного подмножества элементов и $\mathcal{J}$ -ортонормированного подмножества, причем эти подмножества $\mathcal{J}$ -ортогональны друг другу.

Обозначим через $\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A})$ корневой линейал оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению λ ($\lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})$). Введем также следующие обозначения:

$$\mathfrak{F}(\mathcal{A}) := \overline{\text{sp}\{\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A}) \mid \lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})\}}, \quad \mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) := \overline{\text{sp}\{\text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda) \mid \lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})\}}.$$

Будем писать $\lambda \in s(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}$, если $\text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ вырождено, то есть если существует $\xi_0 \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ такое, что $[\xi_0, \xi] = 0$ для любого $\xi \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$.

Основываясь на теореме Т.Я. Азизова–Г.К. Лангера (см. [3, гл. 4, § 2, теорема 2.12]), установим следующую теорему.

Т е о р е м а 2.10. *Имеют место следующие утверждения.*

1. $\text{codim } \mathfrak{F}(\mathcal{A}) \leq \text{codim } \mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) < \infty$.
2. $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) = \mathcal{H} \iff \text{sp}\{\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A}) \mid \lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{A}) \cap (\gamma_1, \gamma_2)\}$ — невырожденное подпространство, где γ_1, γ_2 — числа, определенные в п. 2. теоремы 2.5.
3. $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H} \iff \mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A}) = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ при $\lambda \neq \bar{\lambda}$ и $s(\mathcal{A}) = \emptyset$. Если $\gamma_2 \leq \gamma_1$, то $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$.
4. Если $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$ (соответственно $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$), то в $\mathcal{H}$ существует почти $\mathcal{J}$ -ортонормированный p -базис при $p > 3$, составленный из собственных (соответственно корневых) элементов оператора $\mathcal{A}$. Если $\gamma_2 \leq \gamma_1$, то указанный базис из собственных элементов будет $\mathcal{J}$ -ортонормированным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В теореме 2.5 установлено, что $\mathcal{A}^{-1} \in (H)$. Кроме того, из (2.68) следует, что $K_+ \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 3$, поскольку $\mathcal{A}^{-1} \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 3/2$ (см. лемму 2.2). Из теоремы 2.2 следует, что спектр оператора $\mathcal{A}^{-1}$ имеет

конечное число точек сгущения. Таким образом, оператор $\mathcal{A}^{-1}$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Т.Я. Азизова–Г.К. Лангера.

1. Из равенств $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) = \mathfrak{F}(\mathcal{A}^{-1})$, $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathfrak{F}_0(\mathcal{A}^{-1})$ следует первое утверждение в теореме.

2. $\mathfrak{F}(\mathcal{A}^{-1}) = \mathcal{H} \iff \text{sp}\{\mathfrak{L}_{\lambda^{-1}}(\mathcal{A}^{-1}) | \lambda^{-1} \in s(\mathcal{A}^{-1})\}$ — невырожденное подпространство. Из [3, гл. 4, § 3, замечание 3.8] следует, что при доказательстве равенства $\mathfrak{F}(\mathcal{A}^{-1}) = \mathcal{H}$ невырожденность $\mathfrak{L}_{\lambda^{-1}}(\mathcal{A}^{-1})$ нужно проверять только для тех $\lambda^{-1} \in s(\mathcal{A}^{-1})$, которые являются точками сгущения спектра оператора $\mathcal{A}^{-1}$. Из равенства $\mathfrak{L}_{\lambda^{-1}}(\mathcal{A}^{-1}) = \mathfrak{L}_{\lambda}(\mathcal{A})$ следует, что нужно проверять невырожденность $\mathfrak{L}_{\lambda}(\mathcal{A})$ для $\lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{A}) \cap s(\mathcal{A})$.

Выясним расположение множества $s(\mathcal{A})$. Пусть $\lambda_0 = \bar{\lambda}_0 \in \sigma_p(\mathcal{A})$, $\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{G})$ и $\text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_0)$ вырождено. В силу теоремы 2.6 это эквивалентно тому, что в $\text{Ker}L(\lambda_0)$ существует $\mathbf{v}_0$, что элемент $\xi_0 = (A^{-1/2}\mathbf{v}_0; (\mathcal{G} - \lambda_0)^{-1}\mathcal{Q}\mathbf{v}_0)^\tau$ $\mathcal{J}$ -ортogonalен всем элементам вида $\xi = (A^{-1/2}\mathbf{v}; (\mathcal{G} - \lambda_0)^{-1}\mathcal{Q}\mathbf{v})^\tau$, где $\mathbf{v} \in \text{Ker}L(\lambda_0)$, то есть $[\xi_0, \xi] = 0$. Используя введенные ранее обозначения последнее уравнение можно привести к виду $(L'(\lambda_0)\mathbf{v}_0, \mathbf{v}) = 0$. В частности, имеем два соотношения: $(L(\lambda_0)\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0) = 0$, $(L'(\lambda_0)\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0) = 0$. Из этих соотношений следует, что λ_0 есть кратный корень уравнения (2.61) при $\omega_0 = 0$ и с коэффициентами

$$p := \frac{\|A^{-1/2}\mathbf{v}_0\|^2}{\|\mathbf{v}_0\|^2}, \quad q := \frac{\|\mathcal{Q}\mathbf{v}_0\|^2}{\|\mathbf{v}_0\|^2}, \quad q_l := \rho_0 k_l q \quad (l = \overline{1, m}).$$

Перепишем уравнение (2.61) в виде (2.69). Уравнение (2.61) имеет m действительных корней, которые мы обозначим через λ_l ($\lambda_l \in (b_{l-1}, b_l)$, $l = \overline{1, m}$, $b_0 := 0$), и действительный двукратный корень λ_0 . Положим $\xi_0 := \lambda_0$, $\eta_0 := 0$ и повторим рассуждения п. 2. теоремы 2.5. В результате получим, что $\lambda_0 \in (\gamma_1, \gamma_2)$.

Из леммы 2.15 следует, что $0 \notin \sigma_p(\mathcal{A})$, а значит $0 \notin s(\mathcal{A})$.

Пусть $b_q \notin (\gamma_1, \gamma_2)$, тогда $b_q \leq \gamma_1$, поскольку $b_q \leq b_m < \gamma_2$. Допустим, что $b_q \leq \gamma_1$ и $\text{Ker}(\mathcal{A} - b_q)$ вырождено, то есть существует $\xi_0 \in \text{Ker}(\mathcal{A} - b_q)$ такое, что $[\xi_0, \xi] = 0$ для любого $\xi \in \text{Ker}(\mathcal{A} - b_q)$. В частности, $[\xi_0, \xi_0] = 0$.

Пусть $\xi_0 \in \text{Ker}(\mathcal{A} - b_q)$, тогда из (2.59), (2.18) имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} A^{1/2} \left[A^{1/2} \mathbf{u}_0 - \varphi_0^{1/2} Q^* r_{00} - \sum_{l=1}^m \left[\frac{\rho_0 k_l}{b_l} \right]^{1/2} Q^* r_{l0} \right] - b_q \mathbf{u}_0 = 0, \\ \varphi_0^{1/2} Q A^{1/2} \mathbf{u}_0 - b_q r_{00} = 0, \\ \left[\frac{\rho_0 k_l}{b_l} \right]^{1/2} Q A^{1/2} \mathbf{u}_0 + (b_l - b_q) r_{l0} = 0, \quad l = \overline{1, m}, \quad l \neq q, \\ \left[\frac{\rho_0 k_q}{b_q} \right]^{1/2} Q A^{1/2} \mathbf{u}_0 = 0. \end{array} \right.$$

Умножим здесь первое уравнение скалярно на $\mathbf{u}_0$ и преобразуем его с помощью оставшихся соотношений. Получим, что $\|\mathbf{v}_0\|^2 = b_q \|A^{-1/2} \mathbf{v}_0\|^2$, где $\mathbf{v}_0 := A^{1/2} \mathbf{u}_0$. Отсюда следует, что $b_q \geq \|A^{-1/2}\|^{-2} > \gamma_1$, что противоречит предположению $b_q \leq \gamma_1$.

Таким образом, $s(\mathcal{A}) \subset (\gamma_1, \gamma_2)$ и второе утверждение доказано.

3. Первые части третьего и четвертого утверждений — это переформулировки соответствующих утверждений используемой теоремы Т.Я. Азизова–Г.К. Лангера. Если $\gamma_2 \leq \gamma_1$, то $s(\mathcal{A}) = \emptyset$ и оператор $\mathcal{A}$ не имеет невещественных собственных значений. Следовательно, $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$ и соответствующий p -базис при $p > 3$ в $\mathcal{H}$, составленный из собственных элементов оператора $\mathcal{A}$, будет $\mathcal{J}$ -ортонормированным. Теорема доказана. ■

Пусть в (2.21) $\omega_0 = 0$, $g = 0$ и $\gamma_2 \leq \gamma_1$ (см. теорему 2.5), тогда по теореме 2.10 существует $\mathcal{J}$ -ортонормированный p -базис при $p > 3$ в $\mathcal{H}$, составленный из собственных элементов оператора $\mathcal{A}$. По теореме 2.6 этот базис можно представить через систему собственных элементов пучка $L(\lambda)$ в следующем виде, разделив его на систему позитивных и негативных элементов:

$$\begin{aligned} \{\xi_k^\pm := (A^{-1/2} \mathbf{v}_k^\pm; (\mathcal{G} - \lambda_k^\pm)^{-1} \mathcal{Q} \mathbf{v}_k^\pm)^\tau\}_{k=1}^\infty, \\ \xi_k^\pm \in L_\pm(\mathcal{A}^{-1}), \quad [\xi_k^+, \xi_j^+] = \delta_{kj}, \quad [\xi_k^-, \xi_j^-] = -\delta_{kj}, \quad [\xi_k^+, \xi_j^-] = 0. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Пусть в (2.21) $\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(A)$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$ и функция $\mathbf{f}(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Тогда $\xi_{\rho^0} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(\mathcal{A}))$, по теореме 2.1 задача (2.21) имеет единственное сильное решение (см. определение 2.2) и может

быть переписана в следующей форме:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\xi + \mathcal{F}_0(t), \quad \xi(0) = \xi^0, \quad (2.85)$$

$$\xi(t) := (\mathbf{u}(t); w(t))^\tau = (\mathbf{u}(t); (r_0(t); r_1(t); \dots; r_m(t)))^\tau,$$

$$\xi^0 := (\mathbf{u}^0; \varphi_0^{1/2} \rho^0; 0; \dots; 0)^\tau, \quad \mathcal{F}_0(t) := (\mathbf{f}(t) + \sum_{l=1}^m e^{-b_l t} \frac{\rho_0 k_l}{b_l} B^* \rho^0; 0; 0; \dots; 0)^\tau.$$

Определение φ_0 см. в (2.11). Если $\omega_0 = 0$, $g = 0$, то φ_0 также будет константой.

Представим решение $\xi(t)$ задачи (2.85) в форме

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^+(t) \xi_k^+ + \sum_{j=1}^{\infty} c_j^-(t) \xi_j^-, \quad c_k^+(0) = [\xi^0, \xi_k^+], \quad c_j^-(0) = -[\xi^0, \xi_j^-]. \quad (2.86)$$

Из (2.85), (2.84), (2.86), вида ξ^0 и $\mathcal{F}_0(t)$ найдем, что

$$\begin{aligned} \xi(t) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-\lambda_k^+ t} [\xi^0, \xi_k^+] + \int_0^t e^{-\lambda_k^+ (t-s)} [\mathcal{F}_0(s), \xi_k^+] ds \right) \xi_k^+ - \\ & - \sum_{j=1}^{\infty} \left(e^{-\lambda_j^- t} [\xi^0, \xi_j^-] + \int_0^t e^{-\lambda_j^- (t-s)} [\mathcal{F}_0(s), \xi_j^-] ds \right) \xi_j^-, \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$[\xi^0, \xi_k^\pm] = (\mathbf{u}^0, A^{-1/2} \mathbf{v}_k^\pm)_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} - \frac{\varphi_0}{\lambda_k^\pm} (\rho^0, Q \mathbf{v}_k^\pm)_{L_2, \Omega}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$[\mathcal{F}_0(t), \xi_k^\pm] = (\mathbf{f}(t), A^{-1/2} \mathbf{v}_k^\pm)_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} + \sum_{l=1}^m \frac{\rho_0 k_l e^{-b_l t}}{b_l} (\rho^0, Q \mathbf{v}_k^\pm)_{L_2, \Omega}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Из (2.87) получим в явном виде разложение решения $\mathbf{u}(t)$, $\rho(t)$ задачи (2.16) по нормированной специальным образом системе собственных элементов $\{\mathbf{v}_k^\pm\}_{k=1}^{+\infty}$ пучка $L(\lambda)$, связанных с $\mathcal{J}$ -ортонормированным базисом (2.84):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \rho(t) \end{pmatrix} = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[T_k^+(t) \begin{pmatrix} A^{-1/2} \mathbf{v}_k^+ \\ (\lambda_k^+)^{-1} Q \mathbf{v}_k^+ \end{pmatrix} - T_k^-(t) \begin{pmatrix} A^{-1/2} \mathbf{v}_k^- \\ (\lambda_k^-)^{-1} Q \mathbf{v}_k^- \end{pmatrix} \right], \\ T_k^\pm(t) := & \int_0^t e^{-\lambda_k^\pm (t-s)} (\mathbf{f}(s), A^{-1/2} \mathbf{v}_k^\pm)_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} ds + e^{-\lambda_k^\pm t} (\mathbf{u}^0, A^{-1/2} \mathbf{v}_k^\pm)_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} + \\ & + \left[\sum_{l=1}^m \frac{\rho_0 k_l (\lambda_k^\pm e^{-b_l t} - b_l e^{-\lambda_k^\pm t})}{\lambda_k^\pm b_l (\lambda_k^\pm - b_l)} - \frac{e^{-\lambda_k^\pm t}}{\lambda_k^\pm} \right] (\rho^0, Q \mathbf{v}_k^\pm)_{L_2, \Omega}. \end{aligned}$$

2.3.5. Представление и асимптотика решений эволюционной задачи

Т е о р е м а 2.11. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Пусть $\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(A)$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, а поле $\mathbf{f}$ удовлетворяет условию теоремы 2.1.

Тогда сильное решение задачи (2.16) представимо в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \rho(t) \end{pmatrix} = \mathcal{U}(t) \begin{pmatrix} \mathbf{u}^0 \\ \rho^0 \end{pmatrix} + \int_0^t \mathcal{U}(t-s) \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^m e^{-b_l s} \frac{1}{b_l} B^* M_l \rho^0 + \mathbf{f}(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds,$$

$$\mathcal{U}(t) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2} \begin{pmatrix} \lambda^2 A^{-1/2} L^{-1}(\lambda) A^{-1/2} & -\lambda A^{-1/2} L^{-1}(\lambda) Q^* T_0^* \\ \lambda Q L^{-1}(\lambda) A^{-1/2} & -\lambda T_0^{-1} - Q L^{-1}(\lambda) Q^* T_0^* \end{pmatrix} d\lambda,$$

где контур Γ является границей сектора $\Lambda_{\omega, \theta} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg(\lambda - \omega)| < \theta\}$ и ориентирован так, что $\operatorname{Im} \lambda$ убывает при его обходе. Числа $\omega > 0$ и $\theta \in (0, \pi/2)$ выбраны так, чтобы $\sigma(\mathcal{A}) \subset \Lambda_{\omega, \theta}$ (см. замечание 2.7), $L(\lambda)$ определен в (2.31).

2. Если к тому же $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathbf{f}_k(t)$, где $\mathbf{g}, \mathbf{f}_k \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n}$ ненулевые, то существуют абсолютные константы $M_1, M_2 \geq 1$ такие, что при $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} & \left\| \mathbf{u}(t) - A^{-1/2} C_{11} A^{-1/2} \mathbf{f}_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 + \\ & + \left\| \rho(t) - T_0^{-1} C_{21} A^{-1/2} \mathbf{f}_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \frac{1}{i\sigma_k} Q L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{L_2, \rho_0(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq M_1 e^{-2\omega t} \left[\|\mathbf{u}^0\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 + \|\rho^0\|_{L_2, \rho_0(\Omega)}^2 + \sum_{k=0}^n \|\mathbf{f}_k(0)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 \right] + \\ & + M_2 \left[\int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left[\|\mathbf{g}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} + \sum_{k=0}^n \|\mathbf{f}'_k(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} \right] ds \right]^2, \quad (2.88) \end{aligned}$$

$$C_{11} := C - C Q^* (Q C Q^*)^{-1} Q C, \quad C_{21} := -(T_0^*)^{-1} (Q C Q^*)^{-1} Q C,$$

$$C := \left[I + 2\omega_0 i A^{-1/2} S A^{-1/2} + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l^2} Q^* T_l^* T_l Q \right]^{-1},$$

$$L(\lambda) := I - \lambda A^{-1} + 2\omega_0 i A^{-1/2} S A^{-1/2} - \frac{1}{\lambda} Q^* T_0^* T_0 Q + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l(b_l - \lambda)} Q^* T_l^* T_l Q.$$

Если $\omega_0 = 0$, то формулы для операторов C_{11} , C_{21} в (2.88) могут быть уточнены в соответствии с леммой 2.16.

3. Если $\|\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} \rightarrow 0$, $\|\mathbf{f}'_k(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} \rightarrow 0$ ($k = \overline{0, n}$) при $t \rightarrow +\infty$, то и

$$\begin{aligned} & \left\| \mathbf{u}(t) - A^{-1/2} C_{11} A^{-1/2} \mathbf{f}_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 + \\ & + \left\| \rho(t) - T_0^{-1} C_{21} A^{-1/2} \mathbf{f}_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \frac{1}{i\sigma_k} Q L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{L_2, \rho_0(\Omega)}^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

4. Пусть $\mathbf{f}_0(t) = \nabla p(t)$, $\mathbf{f}_k(t) \equiv 0$ ($k = \overline{1, n}$). Если $\|\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} \rightarrow 0$, $\|p'(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, то и

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 + \left\| \rho(t) - \left[I - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right]^{-1} \Pi \frac{\rho_0^{1/2}(z)}{a_\infty} p(t) \right\|_{L_2, \rho_0(\Omega)}^2 \rightarrow 0. \quad (2.89)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем в несколько шагов.

1. Пусть $\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(A)$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, а поле $\mathbf{f}$ удовлетворяет условию теоремы 2.1. Тогда по теореме 2.1 задача Коши (2.16) имеет единственное сильное решение $\mathbf{u}(t)$, $\rho(t)$, а построенная по $\mathbf{u}(t)$ и $\rho(t)$ функция $\xi(t)$ — сильное решение задачи Коши (2.21). Это решение представимо в следующем виде, учитывая замечание 2.7 и $\xi_{\rho^0} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(\mathcal{A}))$:

$$\xi(t) = \mathcal{U}(t)\xi^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-s) [\mathcal{F}(s) - \mathcal{A}\xi_{\rho^0}(s)] ds, \quad \mathcal{U}(t)\xi^0 := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-\lambda t} \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) \xi^0 d\lambda, \quad (2.90)$$

где контур Γ выбирается как описано в условии теоремы. Дальнейшее доказательство состоит в простых вычислениях с использованием в (2.90) формулы (2.27), формул для ξ^0 , $\mathcal{F}(t)$, $\xi_{\rho^0}(t)$ и $\xi(t)$.

2. Докажем неравенство (2.88). Пусть $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathbf{f}_k(t)$, где $\mathbf{g}$, $\mathbf{f}_k \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n}$ ненулевые. Представим функцию $\mathcal{F}(t)$ из (2.25) ((2.21)) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t) &= \mathcal{T}(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{F}_k(t), \quad \mathcal{T}(t) := (\mathbf{g}(t); 0; 0; \dots; 0)^\tau, \\ \mathcal{F}_k(t) &:= (\mathbf{f}_k(t); 0; 0; \dots; 0)^\tau \quad (k = \overline{0, n}). \end{aligned}$$

Из леммы 2.16 и представления (2.27) для резольвенты оператора $\mathcal{A}$ найдем, что

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0(t) &= \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}_0(t) = (A^{-1/2}C_{11}A^{-1/2}\mathbf{f}_0(t); C_{21}A^{-1/2}\mathbf{f}_0(t); \\ &\quad -b_1^{-3/2}T_1QC_{11}A^{-1/2}\mathbf{f}_0(t); \dots; -b_m^{-3/2}T_mQC_{11}A^{-1/2}\mathbf{f}_0(t))^\tau, \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) &= (A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}\mathbf{f}_k(t); \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}\mathbf{f}_k(t))^\tau = \\ &= (A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}\mathbf{f}_k(t); \frac{-1}{-\lambda}T_0\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}\mathbf{f}_k(t); \\ &\quad \frac{-b_1^{-1/2}}{b_1-\lambda}T_1\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}\mathbf{f}_k(t); \frac{-b_2^{-1/2}}{b_2-\lambda}T_2\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}\mathbf{f}_k(t); \\ &\quad \dots; \frac{-b_m^{-1/2}}{b_m-\lambda}T_m\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}\mathbf{f}_k(t))^\tau \quad \forall \lambda \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad k = \overline{1, n}.\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (2.19), теперь получим, что

$$\begin{aligned}&\left\| \mathbf{u}(t) - A^{-1/2}C_{11}A^{-1/2}\mathbf{f}_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2}L^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}\mathbf{f}_k(t) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 + \\ &\quad + \left\| \rho(t) - T_0^{-1}C_{21}A^{-1/2}\mathbf{f}_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \frac{1}{i\sigma_k} \mathcal{Q}L^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}\mathbf{f}_k(t) \right\|_{L_{2, \rho_0}(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq \left\| \mathbf{u}(t) - A^{-1/2}C_{11}A^{-1/2}\mathbf{f}_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2}L^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}\mathbf{f}_k(t) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 + \\ &\quad + \|T_0^{-1}\|^2 \left\| r_0(t) - C_{21}A^{-1/2}\mathbf{f}_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \frac{1}{i\sigma_k} T_0\mathcal{Q}L^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}\mathbf{f}_k(t) \right\|_{L_{2, \varphi_0^{-1}\rho_0}(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq \max \{1, \|T_0^{-1}\|^2\} \cdot \left\| \xi(t) - \mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) \right\|_{\mathcal{H}}^2.\end{aligned}$$

Эта формула аналогична формуле (1.49) из теоремы 1.3 (или формуле (1.65) из теоремы 1.4). Учитывая замечание 2.7 о равномерной экспоненциальной устойчивости полугруппы, генерируемой оператором $-\mathcal{A}$, повторим рассуждения, проведенные после формулы (1.49) в п. 3. теоремы 1.3. В результате придем к (2.88).

3. Утверждение п. 3. очевидно следует из (2.88) с учетом доказанного в п. 4. теоремы 1.3.

4. Пусть $\mathbf{f}_0(t) = \nabla p(t)$, $\mathbf{f}_k(t) \equiv 0$, $k = \overline{1, n}$. Запишем поле $\mathbf{f}_0(t)$, с использованием (2.13), следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_0(t) &= \nabla p(t) = \nabla \left(p(t) - \int_{\Omega} \rho_0(z) p(t) d\Omega \left[\int_{\Omega} \rho_0(z) d\Omega \right]^{-1} \right) = \\
 &= -\nabla \left(\frac{a_{\infty}}{\rho_0^{1/2}(z)} \left\{ -\frac{\rho_0^{1/2}(z)}{a_{\infty}} \left(p(t) - \int_{\Omega} \rho_0(z) p(t) d\Omega \left[\int_{\Omega} \rho_0(z) d\Omega \right]^{-1} \right) \right\} \right) = \\
 &= B^* \left\{ -\frac{\rho_0^{1/2}(z)}{a_{\infty}} \left(p(t) - \int_{\Omega} \rho_0(z) p(t) d\Omega \left[\int_{\Omega} \rho_0(z) d\Omega \right]^{-1} \right) \right\} = \\
 &= -B^* \Pi \frac{\rho_0^{1/2}(z)}{a_{\infty}} p(t). \tag{2.91}
 \end{aligned}$$

Из (2.88) (см. формулы для операторов C_{11} , C_{21}), (2.91), леммы 2.5 и (2.18) теперь найдем, что

$$\begin{aligned}
 &\left\| \mathbf{u}(t) - A^{-1/2} C_{11} A^{-1/2} \mathbf{f}_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 + \\
 &+ \left\| \rho(t) - T_0^{-1} C_{21} A^{-1/2} \mathbf{f}_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \frac{1}{i\sigma_k} Q L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{L_{2, \rho_0}(\Omega)}^2 = \\
 &= \left\| \mathbf{u}(t) - A^{-1/2} C_{11} A^{-1/2} \mathbf{f}_0(t) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 + \left\| \rho(t) - T_0^{-1} C_{21} A^{-1/2} \mathbf{f}_0(t) \right\|_{L_{2, \rho_0}(\Omega)}^2 = \\
 &= \left\| \mathbf{u}(t) + A^{-1/2} (C - C Q^* (Q C Q^*)^{-1} Q C) A^{-1/2} B^* \Pi \frac{\rho_0^{1/2}(z)}{a_{\infty}} p(t) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 + \\
 &+ \left\| \rho(t) + T_0^{-1} (-(T_0^*)^{-1} (Q C Q^*)^{-1} Q C) A^{-1/2} B^* \Pi \frac{\rho_0^{1/2}(z)}{a_{\infty}} p(t) \right\|_{L_{2, \rho_0}(\Omega)}^2 = \\
 &= \left\| \mathbf{u}(t) + A^{-1/2} (C - C Q^* (Q C Q^*)^{-1} Q C) Q^* \Pi \frac{\rho_0^{1/2}(z)}{a_{\infty}} p(t) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 + \\
 &+ \left\| \rho(t) + T_0^{-1} (-(T_0^*)^{-1} (Q C Q^*)^{-1} Q C) Q^* \Pi \frac{\rho_0^{1/2}(z)}{a_{\infty}} p(t) \right\|_{L_{2, \rho_0}(\Omega)}^2 = \\
 &= \left\| \mathbf{u}(t) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 + \left\| \rho(t) - \left[I - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right]^{-1} \Pi \frac{\rho_0^{1/2}(z)}{a_{\infty}} p(t) \right\|_{L_{2, \rho_0}(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

Отсюда и из п. 3. следует (2.89). Теорема доказана. ■

2.4. Идеальная релаксирующая жидкость. Эволюционная задача, асимптотика решения, спектральная задача, представление решения в частном случае

2.4.1. Эволюционная задача, теорема о разрешимости и об асимптотическом поведении решений при нагрузках специального вида

Постановка задачи и проектирование уравнений движения

Задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей равномерно вращающуюся ограниченную область, описывается следующей системой уравнений, граничных и начальных условий (см. замечание 2.1, (2.7), (2.9), (2.10)):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}(t, x)}{\partial t} - 2\omega_0(\mathbf{u}(t, x) \times \mathbf{e}_3) + \nabla(a_\infty \rho_0^{-1/2}(z)\rho(t, x)) - \\ \quad - \sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \nabla(a_\infty \rho_0^{1/2}(z)k_l(x)\rho(s, x)) ds = \mathbf{f}(t, x), \\ \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + a_\infty \rho_0^{-1/2}(z) \operatorname{div}(\rho_0(z)\mathbf{u}(t, x)) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \\ \mathbf{u}(t, x) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega), \quad \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^0(x), \quad \rho(0, x) = \rho^0(x). \end{array} \right. \quad (2.92)$$

Для перехода к операторной формулировке задачи (2.92) применим метод ортогонального проектирования уравнений движения на специальные подпространства [49]. Можно проверить, что имеет место разложение гильбертова пространства $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ (см. (2.12)) (аналог разложения Г. Вейля пространства векторных полей $\mathbf{L}_2(\Omega)$ (см. [49, гл. 2, § 1, п. 8])) в следующую ортогональную сумму:

$$\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0) = \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \mathbf{G}(\Omega, \rho_0), \quad (2.93)$$

$$\mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0) := \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0) \mid \operatorname{div}(\rho_0(z)\mathbf{u}) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \mathbf{u}_n := \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega) \right\},$$

$$\mathbf{G}(\Omega, \rho_0) := \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0) \mid \mathbf{u} = \nabla \varphi, \quad \int_{\Omega} \varphi d\Omega = 0 \right\}.$$

Здесь операции $\operatorname{div} \mathbf{u}$ и $\mathbf{u}_n$ понимаются в смысле теории обобщенных функций (распределений), см. [49, гл. 2, § 1, п. 6]. Введем ортопроекторы P_0 и P_G пространства $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ на $\mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0)$ и $\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$ соответственно. Будем разыскивать поле $\mathbf{u}$ в виде:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \nabla \varphi, \quad \text{где } \mathbf{v} \in \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad \nabla \varphi \in \mathbf{G}(\Omega, \rho_0). \quad (2.94)$$

Подставим представление (2.94) в уравнения из (2.92) и применим к правой и левой частям первого уравнения ортопроекторы P_0 и P_G , отвечающие разложению (2.93). Преобразуем также граничное и начальные условия (2.92). В результате получим следующую задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{v}(t, x)}{\partial t} - 2\omega_0 P_0(\mathbf{v}(t, x) \times \mathbf{e}_3) - 2\omega_0 P_0(\nabla \varphi(t, x) \times \mathbf{e}_3) = P_0 \mathbf{f}(t, x), \\ \frac{\partial \nabla \varphi(t, x)}{\partial t} - 2\omega_0 P_G(\mathbf{v}(t, x) \times \mathbf{e}_3) - 2\omega_0 P_G(\nabla \varphi(t, x) \times \mathbf{e}_3) + \\ \quad + \nabla(a_\infty \rho_0^{-1/2}(z) \rho(t, x)) - \\ \quad - \sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \nabla(a_\infty \rho_0^{1/2}(z) k_l(x) \rho(s, x)) ds = P_G \mathbf{f}(t, x), \\ \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + a_\infty \rho_0^{-1/2}(z) \operatorname{div}(\rho_0(z) \nabla \varphi(t, x)) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \\ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \partial \Omega), \\ \mathbf{v}(0, x) = P_0 \mathbf{u}^0(x), \quad \nabla \varphi(0, x) = P_G \mathbf{u}^0(x), \quad \rho(0, x) = \rho^0(x). \end{array} \right. \quad (2.95)$$

Операторная формулировка задачи

Введем операторы S_{11} , S_{12} , S_{21} , S_{22} :

$$\begin{aligned} S_{11} \mathbf{v} &:= iP_0(\mathbf{v} \times \mathbf{e}_3), & S_{12} \nabla \varphi &:= iP_0(\nabla \varphi \times \mathbf{e}_3), \\ S_{21} \mathbf{v} &:= iP_G(\mathbf{v} \times \mathbf{e}_3), & S_{22} \nabla \varphi &:= iP_G(\nabla \varphi \times \mathbf{e}_3). \end{aligned} \quad (2.96)$$

Обозначим через S операторный блок, составленный из операторов S_{jk} и действующий в гильбертовом пространстве $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0) = \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$. Имеет место лемма, доказательство которой подобно доказательству аналогичной леммы о свойствах кориолисова оператора из [49, гл. 5, § 1, п. 2] (см. лемму 2.1).

Л е м м а 2.17. Оператор S является самосопряженным и ограниченным в $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$: $S = S^*$, $S \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$; более того, $\|S\| = 1$. Спектр оператора S_{11} существенный и заполняет отрезок $[-1, 1]$: $\sigma(S_{11}) = \sigma_{ess}(S_{11}) = [-1, 1]$ (см. [186]).

Будем считать далее, что граница $\partial\Omega$ области Ω класса C^2 .

Л е м м а 2.18. Введем пространство

$$\mathbf{H}_A := \left\{ \nabla\varphi \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) \mid \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ (на } \partial\Omega), \quad \int_{\Omega} \varphi d\Omega = 0 \right\}$$

с нормой, порожденной скалярным произведением следующего вида:

$$(\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2)_A := \int_{\Omega} \frac{a_{\infty}^2}{\rho_0(z)} \operatorname{div}(\rho_0(z)\nabla\varphi_1) \overline{\operatorname{div}(\rho_0(z)\nabla\varphi_2)} d\Omega.$$

Пространство $\mathbf{H}_A$ является гильбертовым, оно компактно вложено в пространство $\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$. Порождающий оператор A гильбертовой пары $(\mathbf{H}_A; \mathbf{G}(\Omega, \rho_0))$, являющийся самосопряженным и положительно определенным в $\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$, обладает дискретным спектром. Для каждого поля $\nabla q \in \mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$ существует и единственно обобщенное решение задачи

$$-\nabla\left(\frac{a_{\infty}^2}{\rho_0(z)} \operatorname{div}(\rho_0(z)\nabla\varphi)\right) = \nabla q \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega), \quad \int_{\Omega} \varphi d\Omega = 0,$$

выражаемое формулой $\nabla\varphi = A^{-1}\nabla q$. Более того, $A^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathbf{G}(\Omega, \rho_0))$ при $p > 3/2$ и справедлива следующая асимптотическая формула при $k \rightarrow +\infty$ для собственных значений оператора A :

$$\lambda_k(A) = \left\{ \frac{1}{6\pi^2 a_{\infty}^6} \int_{\Omega} \rho_0^{-3/2}(z) d\Omega \right\}^{-2/3} k^{2/3} (1 + o(1)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем в несколько шагов.

1. Покажем, что $\mathbf{H}_A$ гильбертово пространство. Рассмотрим задачу

$$L\varphi := -\operatorname{div}(\rho_0(z)\nabla\varphi) = f \quad (\text{в } \Omega), \quad B\varphi := \frac{\partial\varphi}{\partial n} = g \quad (\text{на } \partial\Omega). \quad (2.97)$$

Можно проверить, что дифференциальное выражение L правильно эллиплично, а граничное условие B накрывает его (см. [13, гл. 3, § 6, п. 1, с. 222]). Таким образом, задача (2.97) эллиптична, а ее ядро, то есть решение задачи (2.97) при $f \equiv 0$, $g \equiv 0$, как несложно проверить, состоит из констант. Из [13, гл. 3, § 6, п. 2, лемма 6.3] следует, что существует такая константа $c > 0$, что

$$c^{-1}\|\varphi\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \leq \|L\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c\|\varphi\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \quad \forall \varphi \in W_2^2(\Omega, B), \quad (2.98)$$

$$W_2^2(\Omega, B) := \{\varphi \in W_2^2(\Omega) \mid \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ (на } \partial\Omega), \quad (\varphi, 1)_{L_2(\Omega)} = 0\}.$$

Из (2.98) для каждого поля $\nabla\varphi \in \mathbf{H}_A$ выведем следующие неравенства:

$$\|\nabla\varphi\|_A^2 \geq c^{-1}a_\infty^2 \min_{x \in \bar{\Omega}} \rho_0^{-1}(z) \|\varphi\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \geq c^{-1}a_\infty^2 \min_{x \in \bar{\Omega}} \rho_0^{-1}(z) \|\nabla\varphi\|_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)}^2, \quad (2.99)$$

$$\|\nabla\varphi\|_A^2 \leq ca_\infty^2 \max_{x \in \bar{\Omega}} \rho_0^{-1}(z) \|\varphi\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \leq cc_1 a_\infty^2 \max_{x \in \bar{\Omega}} \rho_0^{-1}(z) \|\nabla\varphi\|_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)}^2, \quad (2.100)$$

где $c_1 > 0$ некоторая константа. Таким образом, $\mathbf{H}_A$ — гильбертово пространство.

2. Пространство $\mathbf{H}_A$ является плотным множеством в $\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$. Из неравенства (2.99), с учетом того, что $\|\nabla\varphi\|_{\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)}^2 \leq \max_{x \in \bar{\Omega}} \rho_0(z) \|\nabla\varphi\|_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)}^2$ для каждого $\nabla\varphi \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) \cap \mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$, следует, что $\mathbf{H}_A$ и $\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$ образуют гильбертову пару $(\mathbf{H}_A; \mathbf{G}(\Omega, \rho_0))$.

Найдем порождающий оператор A указанной гильбертовой пары; он определяется из тождества (см. [49, гл. 1, § 3, п. 1, формула (3.5)])

$$(A\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2)_{\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)} = (\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2)_A, \quad \nabla\varphi_1 \in \mathcal{D}(A), \quad \nabla\varphi_2 \in \mathbf{H}_A. \quad (2.101)$$

Для дважды дифференцируемого поля $\nabla\varphi_1$, с использованием формулы Грина для оператора Лапласа, тождество (2.101) можно преобразовать следу-

ющим образом:

$$\begin{aligned}
 (A\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2)_{\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)} &= \int_{\Omega} \frac{a_{\infty}^2}{\rho_0(z)} \operatorname{div}(\rho_0(z)\nabla\varphi_1) \operatorname{div}(\rho_0(z)\nabla\varphi_2) d\Omega = \\
 &= - \int_{\Omega} \rho_0(z) \nabla \left(\frac{a_{\infty}^2}{\rho_0(z)} \operatorname{div}(\rho_0(z)\nabla\varphi_1) \right) \cdot \nabla\varphi_2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} a_{\infty}^2 \operatorname{div}(\rho_0(z)\nabla\varphi_1) \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} dS = \\
 &= \left(- \nabla \left(\frac{a_{\infty}^2}{\rho_0(z)} \operatorname{div}(\rho_0(z)\nabla\varphi_1) \right), \nabla\varphi_2 \right)_{\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)}.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что дважды дифференцируемое решение уравнения $A\nabla\varphi_1 = \nabla q$ является решением задачи

$$-\nabla \left(\frac{a_{\infty}^2}{\rho_0(z)} \operatorname{div}(\rho_0(z)\nabla\varphi_1) \right) = \nabla q \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega), \quad \int_{\Omega} \varphi_1 d\Omega = 0.$$

Эта задача имеет единственное обобщенное решение $\nabla\varphi_1 = A^{-1}\nabla q$ для каждого поля $\nabla q \in \mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$.

Из неравенств (2.99)-(2.100) и компактности вложения пространства $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$ в $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ следует, что пространство $\mathbf{H}_A$ компактно вложено в $\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$. Это влечет компактность оператора A^{-1} , а значит оператор A обладает дискретным спектром. Асимптотическая формула для собственных значений оператора A следует из общих формул из работы [14]. Лемма доказана. $\blacksquare$

Определим оператор $B\nabla\varphi := a_{\infty}\rho_0^{-1/2}(z) \operatorname{div}(\rho_0(z)\nabla\varphi)$, $\mathcal{D}(B) := \mathbf{H}_A$. Тогда $B : \mathcal{D}(B) \subset \mathbf{G}(\Omega, \rho_0) \rightarrow L_{2, \rho_0}(\Omega)$, $\operatorname{Ker} B = \{0\}$. По аналогии с леммой 2.3 доказывается следующая лемма.

Л е м м а 2.19. *Сопряженный оператор имеет вид $B^*\rho = -\nabla(a_{\infty}\rho_0^{-1/2}(z)\rho)$, $\mathcal{D}(B^*) = W_2^1(\Omega) \cap L_{2, \rho_0}(\Omega)$. Кроме того, $\operatorname{Ker} B^* = \{0\}$.*

З а м е ч а н и е 2.9. По теореме о полярном представлении замкнутого оператора [115, гл. 8, § 1] существует унитарный оператор $U : \mathbf{G}(\Omega, \rho_0) \rightarrow L_{2, \rho_0}(\Omega)$ такой, что $B = UA^{1/2}$. $\blacktriangleright$

С использованием ортопроекторов (2.13) определим операторы M_l ($l = \overline{1, m}$), относительно которых имеет место лемма 2.4. Напомним, что $I - \sum_{l=1}^m b_l^{-1} M_l \gg 0$ в силу условия (2.11).

С помощью введенных операторов задачу (2.95) перепишем в виде основной задачи Коши для следующей системы дифференциально-операторных уравнений в гильбертовых пространствах $\mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0)$, $\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$ и $L_{2, \rho_0}(\Omega)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -2\omega_0 i [S_{11}\mathbf{v} + S_{12}\nabla\varphi] + P_0\mathbf{f}(t), \\ \frac{d\nabla\varphi}{dt} = -2\omega_0 i [S_{21}\mathbf{v} + S_{22}\nabla\varphi] + \\ \quad + B^*\rho - \sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)} B^* M_l \rho(s) ds + P_G\mathbf{f}(t), \\ \frac{d\rho}{dt} = -B\nabla\varphi, \quad \mathbf{v}(0) = P_0\mathbf{u}^0, \quad \nabla\varphi(0) = P_G\mathbf{u}^0, \quad \rho(0) = \rho^0. \end{array} \right. \quad (2.102)$$

О п р е д е л е н и е 2.8. Поля $\mathbf{v} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0))$, $\nabla\varphi \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{G}(\Omega, \rho_0))$ и функцию $\rho \in C^1(\mathbb{R}_+; L_{2, \rho_0}(\Omega))$ назовем *сильным решением* задачи Коши (2.102) и, в свою очередь, начально-краевой задачи (2.92), если $\nabla\varphi(t) \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A^{1/2})$, $\rho(t) \in \mathcal{D}(B^*)$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$ и $B^*\rho \in C(\mathbb{R}_+; \mathbf{G}(\Omega, \rho_0))$, $B\nabla\varphi \in C(\mathbb{R}_+; L_{2, \rho_0}(\Omega))$, в (2.102) выполнены уравнения для любого $t \in \mathbb{R}_+$ и начальные условия.

Переход к основному дифференциально-операторному уравнению, теорема о разрешимости

Пусть $\nabla\varphi(t)$, $\rho(t)$ — сильное решение системы (2.102) (см. определение 2.8). С использованием лемм 2.18, 2.19, замечания 2.9 и интегрирования по частям можно проверить, что функции $\mathbf{v}(t)$, $\nabla\varphi(t)$ и $\rho(t)$ удовлетворяют также следу-

ющей системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -2\omega_0 i [S_{11}\mathbf{v} + S_{12}\nabla\varphi] + P_0\mathbf{f}(t), \\ \frac{d\nabla\varphi}{dt} = -2\omega_0 i [S_{21}\mathbf{v} + S_{22}\nabla\varphi] + \\ \quad + A^{1/2} \left\{ U^* \left[I - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right] \rho + \sum_{l=1}^m e^{-b_l t} \frac{1}{b_l} U^* M_l \rho^0 + \right. \\ \quad \left. + \sum_{l=1}^m U^* \left[\frac{1}{b_l} M_l \right]^{1/2} \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \left[\frac{1}{b_l} M_l \right]^{1/2} \frac{d\rho(s)}{ds} ds \right\} + P_G\mathbf{f}(t), \\ \frac{d\rho}{dt} = -U A^{1/2} \nabla\varphi. \end{array} \right. \quad (2.103)$$

Введем по $\rho(t)$ следующие функции:

$$\begin{aligned} u_0(t) &:= - \left[I - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right]^{1/2} \rho(t), \\ u_l(t) &:= - \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \left[\frac{1}{b_l} M_l \right]^{1/2} \frac{d\rho(s)}{ds} ds \quad (l = \overline{1, m}). \end{aligned} \quad (2.104)$$

Функции $u_0(t)$, $u_l(t)$ ($l = \overline{1, m}$) непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}_+$.

Из (2.103), (2.104) получим, что они удовлетворяют следующей системе уравнений и начальных условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \left\{ 2\omega_0 i [S_{11}\mathbf{v} + S_{12} A^{-1/2} A^{1/2} \nabla\varphi] \right\} + P_0\mathbf{f}(t), \\ \frac{d\nabla\varphi}{dt} = -A^{1/2} \left\{ 2\omega_0 i [A^{-1/2} S_{21}\mathbf{v} + A^{-1/2} S_{22} A^{-1/2} A^{1/2} \nabla\varphi] + \right. \\ \quad + U^* \left[I - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right]^{1/2} u_0 + \sum_{l=1}^m U^* \left[\frac{1}{b_l} M_l \right]^{1/2} u_l - \\ \quad \left. - \sum_{l=1}^m e^{-b_l t} \frac{1}{b_l} U^* M_l \rho^0 \right\} + P_G\mathbf{f}(t), \\ \frac{du_0}{dt} = - \left\{ - \left[I - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right]^{1/2} U A^{1/2} \nabla\varphi \right\}, \\ \frac{du_l}{dt} = - \left\{ - \left[\frac{1}{b_l} M_l \right]^{1/2} U A^{1/2} \nabla\varphi + b_l u_l \right\} \quad (l = \overline{1, m}), \\ \mathbf{v}(0) = P_0\mathbf{u}^0, \quad \nabla\varphi(0) = P_G\mathbf{u}^0, \\ u_0(0) = - \left[I - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right]^{1/2} \rho^0, \quad u_l(0) = 0 \quad (l = \overline{1, m}). \end{array} \right. \quad (2.105)$$

Определим операторы

$$\begin{aligned}
 T_{11} &:= 2\omega_0 i S_{11}, & T_{22} &:= 2\omega_0 i A^{-1/2} S_{22} A^{-1/2}, \\
 T_{12} &:= 2\omega_0 i S_{12} A^{-1/2}, & T_{21} &:= 2\omega_0 i A^{-1/2} S_{21}, \\
 Q_0 &:= \left[I - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right]^{1/2} U, & Q_l &:= \left[\frac{1}{b_l} M_l \right]^{1/2} U \quad (l = \overline{1, m})
 \end{aligned} \tag{2.106}$$

и перепишем систему (2.105) следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= - \left[T_{11} \mathbf{v} + T_{12} A^{1/2} \nabla \varphi \right] + P_0 \mathbf{f}(t), \\
 \frac{d\nabla \varphi}{dt} &= - A^{1/2} \left[T_{21} \mathbf{v} + T_{22} A^{1/2} \nabla \varphi + Q_0^* u_0 + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{l=1}^m Q_l^* u_l - \sum_{l=1}^m e^{-b_l t} Q_l^* Q_l U^* \rho^0 \right] + P_G \mathbf{f}(t), \\
 \frac{du_0}{dt} &= - \left[- Q_0 A^{1/2} \nabla \varphi \right], \\
 \frac{du_l}{dt} &= - \left[- Q_l A^{1/2} \nabla \varphi + b_l u_l \right] \quad (l = \overline{1, m}), \\
 \mathbf{v}(0) &= P_0 \mathbf{u}^0, \quad \nabla \varphi(0) = P_G \mathbf{u}^0, \quad u_0(0) = -Q_0 U^* \rho^0, \quad u_l(0) = 0 \quad (l = \overline{1, m}).
 \end{aligned} \right. \tag{2.107}$$

Систему (2.107) вместе с начальными условиями запишем в виде задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\omega_0} := \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \mathbf{G}(\Omega, \rho_0) \oplus \left(\oplus_{l=0}^m L_{2, \rho_0}(\Omega) \right)$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}_{\omega_0}(\xi + \xi_{\rho^0}(t)) + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0, \tag{2.108}$$

$$\xi(t) := (\mathbf{v}(t); \nabla \varphi(t); w(t))^\tau := (\mathbf{v}(t); \nabla \varphi(t); u_0(t); u_1(t); \dots; u_m(t))^\tau,$$

$$\xi_{\rho^0}(t) := (0; 0; -(Q_0^*)^{-1} \sum_{l=1}^m e^{-b_l t} Q_l^* Q_l U^* \rho^0; 0; \dots; 0)^\tau, \tag{2.109}$$

$$\xi^0 := (P_0 \mathbf{u}^0; P_G \mathbf{u}^0; -Q_0 U^* \rho^0; 0; \dots; 0)^\tau, \quad \mathcal{F}(t) := (P_0 \mathbf{f}(t); P_G \mathbf{f}(t); 0; 0; \dots; 0)^\tau.$$

Оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ определяется по следующим формулам:

$$\mathcal{A}_{\omega_0} = \text{diag}(I, A^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{21} & T_{22} & \mathcal{Q}^* \\ 0 & -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \text{diag}(I, A^{1/2}, \mathcal{I}), \quad (2.110)$$

$$\mathcal{Q} := (Q_0, Q_1, \dots, Q_m)^\tau, \quad \mathcal{G} := \text{diag}(0, b_1 I, \dots, b_m I), \quad \mathcal{I} := \text{diag}(I, I, \dots, I),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\omega_0}) = \left\{ \xi = (\mathbf{v}; \nabla \varphi; w)^\tau \in \mathcal{H} \mid \mathbf{v} \in \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad \nabla \varphi \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \right\}.$$

Л е м м а 2.20. *Оператор $-\mathcal{A}_{\omega_0}$ генератор сжимающей C_0 -полугруппы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ плотно определен, так как множество $\mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \mathcal{D}(A^{1/2}) \oplus (\oplus_{l=0}^m \mathcal{D}(B^*))$ содержится в $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\omega_0})$ и плотно в $\mathcal{H}$. Оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ аккретивен. Действительно, из леммы 2.17, (2.106) и (2.110) следует, что

$$\text{Re}(\mathcal{A}_{\omega_0} \xi, \xi)_{\mathcal{H}} = (\mathcal{G}w, w)_{\oplus_{l=0}^m L_{2, \rho_0}(\Omega)} = \sum_{l=1}^m b_l \|u_l\|_{L_{2, \rho_0}(\Omega)}^2 \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\omega_0}).$$

Осталось доказать, что оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ замкнут и максимален. Для этого достаточно установить, что оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ имеет на отрицательной полуоси регулярные точки (см. [55, гл. 1, § 4, теорема 4.3]). В связи с этим рассмотрим операторный пучок следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\lambda) &:= \begin{pmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda A^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{Q}^* \end{pmatrix} \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \begin{pmatrix} 0, \mathcal{Q} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.111)$$

где $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) := (\mathcal{G} - \lambda)^{-1}$ — резольвента оператора $\mathcal{G}$. Из (2.106) и (2.110) найдем, что при всех $\lambda < 0$

$$\text{Re} \mathcal{L}(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q} \end{pmatrix} \gg 0.$$

Отсюда и из факторизации оператора $\mathcal{A}_{\omega_0} - \lambda$ в форме Шура–Фробениуса (1.8):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\omega_0} - \lambda &= \text{diag}(I, A^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & 0 \\ T_{21} & T_{22} - \lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \text{diag}(I, A^{1/2}, \mathcal{I}) \quad (2.112) \end{aligned}$$

теперь найдем, что при всех $\lambda < 0$ оператор $\mathcal{A}_{\omega_0} - \lambda$ непрерывно обратим и

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}_{\omega_0}) &= \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & A^{-1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\mathcal{L}^{-1}(\lambda)]_{11} & [\mathcal{L}^{-1}(\lambda)]_{12} & 0 \\ [\mathcal{L}^{-1}(\lambda)]_{21} & [\mathcal{L}^{-1}(\lambda)]_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & A^{-1/2} & -\mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Лемма доказана. ■

Т е о р е м а 2.12. *Задача Коши (2.102) имеет единственное сильное (в смысле определения 2.8) решение, если $P_0 \mathbf{u}^0 \in \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0)$, $P_G \mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(B)$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Осуществим в задаче (2.108) замену искомой функции $\zeta(t) := \xi(t) + \xi_{\rho^0}(t)$, с учетом (2.109) получим следующую задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} &= -\mathcal{A}_{\omega_0} \zeta + \xi'_{\rho^0}(t) + \mathcal{F}(t), \\ \zeta(0) &= \zeta^0 := (P_0 \mathbf{u}^0; P_G \mathbf{u}^0; -(Q_0^*)^{-1} U^* \rho^0; 0; \dots; 0)^T. \end{aligned} \quad (2.113)$$

По лемме 2.20 оператор $-\mathcal{A}_{\omega_0}$ является генератором C_0 -полугруппы $\mathcal{U}(t)$. Из условий на начальные данные следует, что

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(0) &= P_0 \mathbf{u}^0 \in \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad \nabla \varphi(0) = P_G \mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A^{1/2}), \\ \mathcal{Q}^* w(0) &= -U^* \rho^0 = -A^{-1/2}(UA^{1/2})^* \rho^0 = -A^{-1/2} B^* \rho^0 \in \mathcal{D}(A^{1/2}),\end{aligned}$$

то есть $\zeta^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\omega_0})$ (см. (2.110)). Из условия на функцию $\mathbf{f}(t)$ следует, что $\xi'_{\rho^0} + \mathcal{F} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_{\omega_0})$. Из теоремы о разрешимости абстрактной задачи Коши (см. [55, гл. 1, § 6, п. 2, теорема 6.5], [22, гл. 2, § 1, теорема 1.3]) следует, что задача Коши (2.113) имеет единственное решение $\zeta(t)$ такое, что $\zeta(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\omega_0})$ при любом $t \in \mathbb{R}_+$ и $\mathcal{A}_{\omega_0} \zeta \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_{\omega_0})$, $\zeta \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_{\omega_0})$. Отсюда (как в теореме 2.1 или теореме 1.3) выводится утверждение о сильной разрешимости задачи (2.102). Теорема доказана. $\blacksquare$

Асимптотическое поведение решений при отсутствии вращения ($\omega_0 = 0$) и при нагрузках специального вида

Предположим, что в системе отсутствует вращение, то есть, что $\omega_0 = 0$. В этом случае система (2.102) операторных уравнений и начальных условий распадается и из нее может быть найдена вихревая составляющая $\mathbf{v}(t) \in \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0)$ поля скоростей релаксирующей жидкости:

$$\mathbf{v}(t) = P_0 \mathbf{u}^0 + \int_0^t P_0 \mathbf{f}(s) ds.$$

Таким образом, система (2.102) преобразуется в задачу Коши для следующей системы из двух дифференциально-операторных уравнений в гильбертовых пространствах $\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$ и $L_{2,\rho_0}(\Omega)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\nabla \varphi}{dt} = B^* \rho - \sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)} B^* M_l \rho(s) ds + P_G \mathbf{f}(t), \\ \frac{d\rho}{dt} = -B \nabla \varphi, \quad \nabla \varphi(0) = P_G \mathbf{u}^0, \quad \rho(0) = \rho^0. \end{array} \right. \quad (2.114)$$

Систему (2.114) можно свести, как и в общем случае, к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := \mathbf{G}(\Omega, \rho_0) \oplus \left(\oplus_{l=0}^m L_{2, \rho_0}(\Omega) \right)$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}(\xi + \xi_{\rho^0}(t)) + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0, \quad (2.115)$$

$$\xi(t) := (\nabla\varphi(t); w(t))^\tau := (\nabla\varphi(t); u_0(t); u_1(t); \dots; u_m(t))^\tau,$$

$$\xi_{\rho^0}(t) := (0; -(Q_0^*)^{-1} \sum_{l=1}^m e^{-b_l t} Q_l^* Q_l U^* \rho^0; 0; \dots; 0)^\tau, \quad (2.116)$$

$$\xi^0 := (P_G \mathbf{u}^0; -Q_0 U^* \rho^0; 0; \dots; 0)^\tau, \quad \mathcal{F}(t) := (P_G \mathbf{f}(t); 0; 0; \dots; 0)^\tau.$$

Оператор $\mathcal{A}$ в (2.115) определяется по следующим формулам:

$$\mathcal{A} = \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) = \begin{pmatrix} 0 & A^{1/2} \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} A^{1/2} & \mathcal{G} \end{pmatrix}, \quad (2.117)$$

$$\mathcal{Q} := (Q_0, Q_1, \dots, Q_m)^\tau, \quad \mathcal{G} := \text{diag}(0, b_1 I, \dots, b_m I), \quad \mathcal{I} := \text{diag}(I, I, \dots, I),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ \xi = (\nabla\varphi; w)^\tau \in \mathcal{H} \mid \nabla\varphi \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \right\}.$$

Оператор $\mathcal{A}$ имеет вид (1.1)-(1.2) и удовлетворяет теореме 1.1 (см. замечание 2.9 и определение операторов Q_l ($l = \overline{0, m}$) в (2.106)). Таким образом, оператор $-\mathcal{A}$ является генератором равномерно экспоненциально устойчивой C_0 -полугруппы ограниченных операторов (см. (1.6)). Резольвента оператора $\mathcal{A}$ вычисляется по формуле (1.23) (см. замечание 1.2). По аналогии с теоремами 1.3, 1.4 может быть установлена следующая теорема.

Т е о р е м а 2.13. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Пусть $P_G \mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(B)$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathbf{f}_k(t)$, где $\mathbf{g}, \mathbf{f}_k \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n}$ ненулевые. Тогда существуют константы $\omega > 0$, $M_1 \geq 1$, $M_2 \geq 1$ такие, что при любом $t \in \mathbb{R}_+$ для решения

задачи (2.114) будет выполнена оценка

$$\begin{aligned}
& \left\| \nabla \varphi(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} P_G \mathbf{f}_k(t) \right\|_{\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)}^2 + \\
& \quad + \left\| \rho(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} B A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} P_G \mathbf{f}_k(t) \right\|_{L_2, \rho_0(\Omega)}^2 \leq \\
& \leq M_1 e^{-2\omega t} \left[\|P_G \mathbf{u}^0\|_{\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)}^2 + \|\rho^0\|_{L_2, \rho_0(\Omega)}^2 + \sum_{k=0}^n \|\mathbf{f}_k(0)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 \right] + \\
& \quad + M_2 \left[\int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left(\|\mathbf{g}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} + \sum_{k=0}^n \|\mathbf{f}'_k(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} \right) ds \right]^2, \quad (2.118) \\
& M(\lambda) := I + \lambda^2 A^{-1} - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \lambda} U^* M_l U.
\end{aligned}$$

2. Если $\|\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} \rightarrow 0$, $\|\mathbf{f}'_k(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} \rightarrow 0$ ($k = \overline{0, n}$) при $t \rightarrow +\infty$, то

$$\begin{aligned}
& \left\| \nabla \varphi(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} P_G \mathbf{f}_k(t) \right\|_{\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)}^2 + \\
& \quad + \left\| \rho(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} B A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} P_G \mathbf{f}_k(t) \right\|_{L_2, \rho_0(\Omega)}^2 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty).
\end{aligned}$$

3. Пусть $\mathbf{f}_0(t) = \nabla p(t)$, $\mathbf{f}_k(t) \equiv 0$ ($k = \overline{1, n}$). Если $\|\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} \rightarrow 0$, $\|p'(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, то

$$\left\| \nabla \varphi(t) \right\|_{\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)}^2 + \left\| \rho(t) - \left[I - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right]^{-1} \Pi \frac{\rho_0^{1/2}(z)}{a_\infty} p(t) \right\|_{L_2, \rho_0(\Omega)}^2 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty).$$

Доказательство. Доказательство проведем в несколько шагов.

1. Из теоремы 2.12 следует, что задача Коши (2.114) имеет единственное сильное решение.

Пусть $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathbf{f}_k(t)$, где $\mathbf{g}, \mathbf{f}_k \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$, $\sigma_k \in \mathbb{R}$ ($k = \overline{0, n}$). Представим функцию $\mathcal{F}(t)$ из (2.115) следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(t) &= \mathcal{T}(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{F}_k(t), \quad \mathcal{T}(t) := (P_G \mathbf{g}(t); 0; \dots; 0)^\tau, \\
\mathcal{F}_k(t) &:= (P_G \mathbf{f}_k(t); 0; \dots; 0)^\tau \quad (k = \overline{0, n}).
\end{aligned}$$

Из формулы (1.11) для оператора $\mathcal{A}^{-1}$ и формулы (1.23) для резольвенты $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})$ теперь найдем, что

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0 &= \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}_0 = (0; (Q_0^*)^{-1}A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_0; 0; \dots; 0)^\tau, \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) &= (A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t); \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t))^\tau = \\ &= (A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t); \frac{1}{-\lambda}Q_0L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t); \\ &\quad \frac{1}{b_1 - \lambda}Q_1L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t); \dots; \frac{1}{b_m - \lambda}Q_mL^{-1}(\lambda)A^{-1/2}P_G\mathbf{f}_k(t))^\tau \\ &\quad \forall \lambda \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad k = \overline{1, n}.\end{aligned}$$

Пусть $\nabla\varphi(t)$, $\rho(t)$ сильное решение задачи Коши (2.114). Используя представление $Q_0^*Q_0 = I - \sum_{l=1}^m Q_l^*Q_l = I - \sum_{l=1}^m b_l^{-1}U^*M_lU$, формулу для $M(\lambda)$, (2.104), (2.115) и последние вычисления, при $t \in \mathbb{R}_+$ получим

$$\begin{aligned}&\left\| \nabla\varphi(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} P_G \mathbf{f}_k(t) \right\|_{\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)}^2 + \\ &\quad + \left\| \rho(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} B A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} P_G \mathbf{f}_k(t) \right\|_{L_{2, \rho_0}(\Omega)}^2 = \\ &= \left\| \nabla\varphi(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A^{-1/2} \left[I - \sigma_k^2 A^{-1} - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - i\sigma_k} U^* M_l U \right]^{-1} \times \right. \\ &\quad \times A^{-1/2} P_G \mathbf{f}_k(t) \left. \right\|_{\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)}^2 + \left\| \rho(t) + U A^{1/2} \left(A^{-1/2} \left[I - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} U^* M_l U \right]^{-1} A^{-1/2} P_G \mathbf{f}_0(t) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} \left[I - \sigma_k^2 A^{-1} - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - i\sigma_k} U^* M_l U \right]^{-1} A^{-1/2} P_G \mathbf{f}_k(t) \right) \right\|_{L_{2, \rho_0}(\Omega)}^2.\end{aligned}$$

Отсюда, из (2.117), (1.23) (см. формулу для пучка $L(\lambda)$) получим, что

$$\begin{aligned}&\left\| \nabla\varphi(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} P_G \mathbf{f}_k(t) \right\|_{\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)}^2 + \\ &\quad + \left\| \rho(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} B A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} P_G \mathbf{f}_k(t) \right\|_{L_{2, \rho_0}(\Omega)}^2 =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \nabla \varphi(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} P_G \mathbf{f}_k(t) \right\|_{\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)}^2 + \\
&+ \left\| \rho(t) + U \left((Q_0^* Q_0)^{-1} A^{-1/2} P_G \mathbf{f}_0(t) + \sum_{k=1}^n \frac{e^{-i\sigma_k t}}{-i\sigma_k} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} P_G \mathbf{f}_k(t) \right) \right\|_{L_2, \rho_0(\Omega)}^2 \leq \\
&\leq \left\| \nabla \varphi(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} P_G \mathbf{f}_k(t) \right\|_{\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)}^2 + \\
&+ \|U Q_0^{-1}\|^2 \left\| u_0(t) - (Q_0^*)^{-1} A^{-1/2} P_G \mathbf{f}_0(t) - \sum_{k=1}^n \frac{e^{-i\sigma_k t}}{-i\sigma_k} Q_0 L^{-1}(i\sigma_k) \times \right. \\
&\times A^{-1/2} P_G \mathbf{f}_k(t) \left. \right\|_{L_2, \rho_0(\Omega)}^2 + \sum_{l=1}^m \left\| u_l(t) - \sum_{k=1}^n \frac{e^{-i\sigma_k t}}{b_l - i\sigma_k} Q_l L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} P_G \mathbf{f}_k(t) \right\|_{L_2, \rho_0(\Omega)}^2 \leq \\
&\leq \max\{1, \|U Q_0^{-1}\|^2\} \cdot \left\| \xi(t) - \mathcal{R}_0(\mathcal{A}) \mathcal{F}_0 - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k(t) \right\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Эта формула аналогична формуле (1.49) из теоремы 1.3 (или формуле (1.65) из теоремы 1.4). Учитывая теорему 1.1 о равномерной экспоненциальной устойчивости полугруппы, генерируемой оператором $-\mathcal{A}$, повторим рассуждения, проведенные после формулы (1.49) в п. 3. теоремы 1.3. В результате придем к (2.118).

2. Утверждение п. 2., очевидно, следует из (2.118), с учетом доказанного в п. 4. теоремы 1.3.

3. Пусть $\mathbf{f}_0(t) = \nabla p(t)$, $\mathbf{f}_k(t) \equiv 0$ ($k = \overline{1, n}$) и $\|\mathbf{g}(t)\|_{L_2(\Omega, \rho_0)} \rightarrow 0$, $\|p'(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Тогда $P_G \mathbf{f}_0(t) = \nabla p(t) = -B^* \Pi(a_\infty^{-1} \rho_0^{1/2}(z) p(t))$ (см. (2.91)) и из лемм 2.19, 2.4 и формулы для пучка $M(\lambda)$ найдем, что

$$\begin{aligned}
&BA^{-1/2} M^{-1}(0) A^{-1/2} P_G \mathbf{f}_0(t) = \\
&= -(UA^{1/2}) A^{-1/2} \left[I - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} U^* M_l U \right]^{-1} A^{-1/2} B^* \Pi \frac{\rho_0^{1/2}(z)}{a_\infty} p(t) = \\
&= - \left[I - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right]^{-1} UA^{-1/2} B^* \Pi \frac{\rho_0^{1/2}(z)}{a_\infty} p(t) = \\
&= - \left[I - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right]^{-1} BA^{-1} B^* \Pi \frac{\rho_0^{1/2}(z)}{a_\infty} p(t) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left[I - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right]^{-1} (BA^{-1/2})(BA^{-1/2})^* \Big|_{\mathcal{D}(B^*)} \Pi \frac{\rho_0^{1/2}(z)}{a_\infty} p(t) = \\
&= - \left[I - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right]^{-1} (UU^*) \Big|_{\mathcal{D}(B^*)} \Pi \frac{\rho_0^{1/2}(z)}{a_\infty} p(t) = - \left[I - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right]^{-1} \Pi \frac{\rho_0^{1/2}(z)}{a_\infty} p(t).
\end{aligned}$$

Отсюда и из п. 2. следует утверждение п. 3. Теорема доказана. $\blacksquare$

2.4.2. Задача о спектре идеальной вращающейся релаксирующей жидкости

Основные спектральные задачи и операторные пучки

Будем разыскивать решения однородного уравнения $(\mathcal{F}(t) \equiv 0)$ из (2.108) при $\xi_{\rho^0}(t) \equiv 0$ в виде $\xi(t) = \exp(-\lambda t)\xi$, где λ — спектральный параметр, а ξ — амплитудный элемент. В результате придем к следующей основной спектральной задаче:

$$\mathcal{A}_{\omega_0}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\omega_0}) \subset \mathcal{H}_{\omega_0}, \quad (2.119)$$

которую будем ассоциировать с задачей о спектре идеальной вращающейся релаксирующей жидкости (оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ определен в (2.110)).

При $\lambda \notin \{0, b_1, \dots, b_m\} = \sigma(\mathcal{G})$ с задачей (2.119) свяжем следующую спектральную задачу:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\lambda) \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \nabla\varphi \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \nabla\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.120) \\
(\mathbf{v}; \nabla\varphi)^\tau &\in \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \mathbf{G}(\Omega, \rho_0).
\end{aligned}$$

При $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G}) \cup [-2\omega_0 i, 2\omega_0 i]$ с задачей (2.119) свяжем также следующую спектральную задачу:

$$\begin{aligned}
L_{\omega_0}(\lambda) \nabla\varphi &:= [T_{22} - \lambda A^{-1} - T_{21} \mathcal{R}_\lambda(T_{11}) T_{12} + \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q}] \nabla\varphi = \\
&= \left[T_{22} - \lambda A^{-1} - T_{21} \mathcal{R}_\lambda(T_{11}) T_{12} - \frac{1}{\lambda} \mathcal{Q}_0^* \mathcal{Q}_0 + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \lambda} \mathcal{Q}_l^* \mathcal{Q}_l \right] \nabla\varphi = 0, \\
\nabla\varphi &\in \mathbf{G}(\Omega, \rho_0). \quad (2.121)
\end{aligned}$$

В случае, когда система не вращается, то есть $\omega_0 = 0$, будем разыскивать решения уравнения (2.115) при $\mathcal{F}(t) \equiv 0$ и $\xi_{\rho^0}(t) \equiv 0$ в виде $\xi(t) = \exp(-\lambda t)\xi$, где λ — спектральный параметр, а ξ — амплитудный элемент. В результате придем к следующей основной спектральной задаче:

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}, \quad (2.122)$$

которую будем ассоциировать с задачей о спектре идеальной релаксирующей жидкости (оператор $\mathcal{A}$ определен в (2.117)).

При $\lambda \notin \{0, b_1, \dots, b_m\} = \sigma(\mathcal{G})$ с задачей (2.122) свяжем следующую спектральную задачу:

$$\begin{aligned} L(\lambda)\nabla\varphi &:= [-\lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}]\nabla\varphi = (L_0(\lambda)\nabla\varphi) = \\ &= \left[-\lambda A^{-1} - \frac{1}{\lambda} Q_0^*Q_0 + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \lambda} Q_l^*Q_l\right]\nabla\varphi = 0, \quad \nabla\varphi \in \mathbf{G}(\Omega, \rho_0). \end{aligned} \quad (2.123)$$

Операторы T_{jk} ($j, k = 1, 2$), Q_l ($l = \overline{0, m}$) определены в (2.106).

Существенный и дискретный спектр задачи

Л е м м а 2.21. $\{b_1, \dots, b_m\} \subset \rho(\mathcal{A}_{\omega_0})$, $\{0, b_1, \dots, b_m\} \subset \rho(\mathcal{A})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем в несколько шагов.

Запишем резольвентное уравнение $(\mathcal{A}_{\omega_0} - \lambda)\xi = \xi_0$ в виде системы (см. (2.107), (2.110), (2.106)):

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\omega_0 i S_{11} \mathbf{v} + 2\omega_0 i S_{12} \nabla\varphi - \lambda \mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \\ 2\omega_0 i S_{21} \mathbf{v} + 2\omega_0 i S_{22} \nabla\varphi + A^{1/2} \left[Q_0^* u_0 + \sum_{l=1}^m Q_l^* u_l \right] - \lambda \nabla\varphi = \nabla\varphi_0, \\ -Q_0 A^{1/2} \nabla\varphi - \lambda u_0 = u_{00}, \\ -Q_l A^{1/2} \nabla\varphi + b_l u_l - \lambda u_l = u_{l0} \quad (l = \overline{1, m}). \end{array} \right. \quad (2.124)$$

1. Положим в (2.124) $\lambda = b_q$, $\xi_0 = (\mathbf{v}_0; \nabla\varphi_0; u_{00}; u_{10}; \dots; u_{m0})^T = 0$. Из четвертого уравнения при $l = q$ найдем, что $\nabla\varphi = 0$. Теперь из третьего уравнения

и четвертого уравнения при $l \neq q$ получим, что $u_l = 0$, а из первого уравнения, (2.96) и леммы 2.17, что $\mathbf{v} = 0$. Теперь из второго уравнения системы (2.124) следует, что $u_q = 0$. Таким образом, $\xi = 0$ и $b_q \notin \sigma_p(\mathcal{A}_{\omega_0})$.

2. Покажем, что $b_q \in \rho(\mathcal{A}_{\omega_0})$. Для этого достаточно показать, в силу (2.112), (2.106) и факторизации (см. (1.9))

$$\begin{pmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} I & 0 \\ T_{21} \mathcal{R}_\lambda(T_{11}) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} - \lambda & 0 \\ 0 & L_{\omega_0}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \mathcal{R}_\lambda(T_{11}) T_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

что пучок $L_{\omega_0}(\lambda)$ непрерывно обратим в некоторой проколотой окрестности точки $\lambda = b_q$. Требуемое утверждение следует из непрерывной обратимости оператора $\mathcal{Q}_q^* \mathcal{Q}_q$ (см. (2.106) и замечание 2.9), представления (см. (2.121))

$$\begin{aligned} L_{\omega_0}(\lambda) &= T_{22} - \lambda A^{-1} - T_{21} \mathcal{R}_\lambda(T_{11}) T_{12} - \frac{1}{\lambda} \mathcal{Q}_0^* \mathcal{Q}_0 + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \lambda} \mathcal{Q}_l^* \mathcal{Q}_l = \\ &= \frac{\mathcal{Q}_q^* \mathcal{Q}_q}{b_q - \lambda} \left[I + (b_q - \lambda) (\mathcal{Q}_q^* \mathcal{Q}_q)^{-1} \left\{ T_{22} - \lambda A^{-1} - T_{21} \mathcal{R}_\lambda(T_{11}) T_{12} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\lambda} \mathcal{Q}_0^* \mathcal{Q}_0 + \sum_{l \neq q}^m \frac{1}{b_l - \lambda} \mathcal{Q}_l^* \mathcal{Q}_l \right\} \right] =: \frac{\mathcal{Q}_q^* \mathcal{Q}_q}{b_q - \lambda} [I + G_q(\lambda)], \end{aligned}$$

где $\|G_q(\lambda)\| \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow b_q$, и теоремы об обращении оператора, близкого к единичному.

3. Аналогичным образом доказывается утверждение для оператора $\mathcal{A}$. Лемма доказана. ■

Следствием теоремы 1.5 является следующая лемма.

Л е м м а 2.22. *Спектр оператора $\mathcal{A}$, за исключением точек множества $\{0, b_1, \dots, b_m\}$, совпадает со спектром пучка $L(\lambda)$ и расположен симметрично относительно действительной оси.*

Т е о р е м а 2.14. *Имеют место следующие формулы*

$$\begin{aligned}\sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0}) &= [-2\omega_0 i, 2\omega_0 i] \cup \sigma_{ess}(\mathcal{A}), \\ \sigma_{ess}(\mathcal{A}) &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid 1 - \sum_{l=1}^m \frac{\rho_0(z) k_l(x)}{b_l - \lambda} = 0, \quad x \in \overline{\Omega} \right\}.\end{aligned}\quad (2.125)$$

Множество $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0})$ ($\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A})$) состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}_{\omega_0}$ (оператора $\mathcal{A}$, соответственно).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем в несколько шагов.

1. Запишем оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ (см. (2.110)) следующим образом относительно разложения $\mathcal{H}_{\omega_0} := \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus [\mathbf{G}(\Omega, \rho_0) \oplus (\oplus_{l=0}^m L_{2,\rho_0}(\Omega))] = \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\omega_0} &= \begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{11} & \mathcal{S}_{12} \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{A} + \mathcal{S}_{22} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{S}_{12} &:= (2\omega_0 i S_{12}, 0), \quad \mathcal{S}_{21} = \begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{21} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}_{22} = \begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{22} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (2.126)$$

где операторы S_{jk} определены в (2.96) (см. лемму 2.17), а оператор $\mathcal{A}$ определен в (2.117).

Из теоремы [44, гл. 4, § 5, п. 6, теорема 5.35] об устойчивости существенно-го спектра при относительно компактных возмущениях, (2.126), формулы для $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})$ (см. (1.23)), $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathbf{G}(\Omega, \rho_0))$ (см. лемму 2.18) и

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\omega_0} &= \begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{11} & 0 \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{A} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{S}_{12} \\ 0 & \mathcal{S}_{22} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{S}_{12} \\ 0 & \mathcal{S}_{22} \end{pmatrix} \mathcal{R}_\lambda \left(\begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{11} & 0 \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{A} \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{S}_{12} \\ 0 & \mathcal{S}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_\lambda(2\omega_0 i S_{11}) & 0 \\ -\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) \mathcal{S}_{21} \mathcal{R}_\lambda(2\omega_0 i S_{11}) & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\mathcal{S}_{12} \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) \mathcal{S}_{21} \mathcal{R}_\lambda(2\omega_0 i S_{11}) & \mathcal{S}_{12} \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) \\ -\mathcal{S}_{22} \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) \mathcal{S}_{21} \mathcal{R}_\lambda(2\omega_0 i S_{11}) & \mathcal{S}_{22} \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_{\omega_0})\end{aligned}$$

получим, что

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0}) = \sigma_{ess} \left(\begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{11} & 0 \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{A} \end{pmatrix} \right). \quad (2.127)$$

Из [44, гл. 4, § 5, п. 6, задача 5.38],

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\lambda \left(\begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{11} & 0 \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{A} \end{pmatrix} \right) - \mathcal{R}_\lambda \left(\begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{11} & 0 \\ 0 & \mathcal{A} \end{pmatrix} \right) = \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{S}_{21}\mathcal{R}_\lambda(2\omega_0 i S_{11}) & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_{\omega_0}), \end{aligned}$$

(2.127) и леммы 2.17 теперь найдем первую формулу из (2.125)

$$\begin{aligned} \sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0}) &= \sigma_{ess} \left(\begin{pmatrix} 2\omega_0 i S_{11} & 0 \\ 0 & \mathcal{A} \end{pmatrix} \right) = \\ &= \sigma_{ess}(2\omega_0 i S_{11}) \cup \sigma_{ess}(\mathcal{A}) = [-2\omega_0 i, 2\omega_0 i] \cup \sigma_{ess}(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

2. Докажем формулу для существенного спектра операторного пучка $L(\lambda)$ (см. (2.123), (1.23)):

$$\sigma_{ess}(L(\lambda)) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid 1 - \sum_{l=1}^m \frac{\rho_0(z)k_l(x)}{b_l - \lambda} = 0, \quad x \in \overline{\Omega} \right\}. \quad (2.128)$$

Пусть $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G})$. Из леммы 2.18, теоремы [146, гл. 17, § 4, теорема 4.3] об относительно компактных возмущениях, (2.106) и преобразований

$$\begin{aligned} -\lambda L(\lambda) &= \lambda^2 A^{-1} - \lambda \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q} = \lambda^2 A^{-1} + Q_0^* Q_0 + \sum_{l=1}^m \frac{-\lambda}{b_l - \lambda} Q_l^* Q_l = \\ &= \lambda^2 A^{-1} + U^* \left[I - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right] U + \sum_{l=1}^m \frac{-\lambda}{b_l(b_l - \lambda)} U^* M_l U = \\ &= \lambda^2 A^{-1} + I - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \lambda} U^* M_l U = \lambda^2 A^{-1} + U^* \Pi \left[1 - \sum_{l=1}^m \frac{\rho_0 k_l}{b_l - \lambda} \right] \Pi U \end{aligned}$$

получим, что

$$\sigma_{ess}(L(\lambda)) = \sigma_{ess} \left(U^* \Pi \left[1 - \sum_{l=1}^m \frac{\rho_0 k_l}{b_l - \lambda} \right] \Pi U \right) = \sigma_{ess} \left(\Pi \left[1 - \sum_{l=1}^m \frac{\rho_0 k_l}{b_l - \lambda} \right] \Pi \right).$$

Отсюда, из одномерности (а значит и компактности) оператора ортогонального проектирования $I - \Pi$ и теоремы [146, гл. 17, § 4, теорема 4.3] следует (2.128).

3. Докажем вторую формулу в (2.125). Пусть $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G})$ и оператор $L(\lambda)$ (см. (1.23)) фредгольмов. Из теоремы [146, гл. 17, § 3, теорема 3.1] о произведении фредгольмовых операторов и (2.117) найдем, что оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{A} - \lambda &= \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda A^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

фредгольмов. Следовательно, для существенного спектра оператора $\mathcal{A}$ получаем включение $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \subset \sigma_{ess}(L(\lambda))$. Из леммы 2.22 следует, что $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \sigma_{ess}(L(\lambda))$. Отсюда и (2.128) следует вторая формула в (2.125).

4. Множество $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0})$ ($\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A})$) является связным, а оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ ($\mathcal{A}$) имеет регулярные точки. Отсюда и из [146, гл. 17, § 2, теорема 2.1] (или [44, гл. 4, § 5, п. 2, теорема 5.17] — теорема об устойчивости индекса и дефекта замкнутого оператора) следует, что множество $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega_0})$ ($\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A})$) состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}_{\omega_0}$ (оператора $\mathcal{A}$, соответственно). Теорема доказана. ■

З а м е ч а н и е 2.10. Существенный спектр $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ представляет собой объединение m отрезков, расположенных на интервалах (b_{l-1}, b_l) ($l = \overline{1, m}, b_0 := 0$). При $\omega_0 = 0$ и $g = 0$ отрезки, составляющие множество $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$, схлопываются и превращаются в набор m точек, расположенных на тех же интервалах. ►

Локализация и асимптотика дискретного спектра

Т е о р е м а 2.15. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Справедливо включение $\sigma(\mathcal{A}_{\omega_0}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq b_m\}$. Оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$ имеет две ветви собственных значений $\{\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A}_{\omega_0})\}_{k=1}^\infty$ со следующей асимпто-

тикой (см. лемму 2.18) при $k \rightarrow +\infty$:

$$\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A}_{\omega_0}) = \pm i\lambda_k^{1/2}(A)(1 + o(1)). \quad (2.129)$$

2. Существует $\beta > 0$ такое, что

$$\sigma(\mathcal{A}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \lambda \neq 0\} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \beta \leq \operatorname{Re} \lambda < b_m/2\}.$$

3. Точки из множества $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ не могут быть предельными для комплексно сопряженных ветвей собственных значений из $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, если норма $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega, \rho_0))}$ достаточно мала.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем в несколько шагов.

1. Включение $\sigma(\mathcal{A}_{\omega_0}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq b_m\}$ следует из [44, гл. 5, § 3, п. 1, теорема 3.2] и простого факта, что числовая область значений оператора $\mathcal{A}_{\omega_0}$ (см. определение 1.3) содержится в $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq b_m\}$.

Из (2.112) следует, что собственные значения оператора $\mathcal{A}_{\omega_0}$ являются также собственными значениями операторного пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ (см. (2.111)). Верно и обратное. Таким образом, в области $\mathbb{C} \setminus [\sigma_{ess}(\mathcal{A}_{\omega}) \cup \sigma(\mathcal{G})]$ спектральная задача (2.119) эквивалентна задаче (2.120):

$$\begin{cases} (T_{11} - \lambda)\mathbf{v} + T_{12}\nabla\varphi = 0, \\ T_{21}\mathbf{v} + (T_{22} - \lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q})\nabla\varphi = 0, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad \nabla\varphi \in \mathbf{G}(\Omega, \rho_0), \end{cases}$$

или, с учетом (2.106), спектральной задаче (см. (2.121))

$$\begin{aligned} -\lambda L_{\omega_0}(\lambda)\nabla\varphi &= [\lambda^2 A^{-1} - \lambda T_{22} + \lambda T_{21}\mathcal{R}_\lambda(T_{11})T_{12} - \lambda \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}]\nabla\varphi = \\ &= \left[\lambda^2 A^{-1} - \lambda T_{22} + \lambda T_{21}\mathcal{R}_\lambda(T_{11})T_{12} + \mathcal{Q}_0^*\mathcal{Q}_0 + \sum_{l=1}^m \frac{-\lambda}{b_l - \lambda} \mathcal{Q}_l^*\mathcal{Q}_l \right] \nabla\varphi = \\ &= \left[I + \lambda^2 A^{-1} - 2\omega_0 i \lambda A^{-1/2} S_{22} A^{-1/2} + \lambda T_{21}\mathcal{R}_\lambda(T_{11})T_{12} - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \lambda} U^* M_l U \right] \nabla\varphi = \\ &=: [I + \lambda^2 A^{-1} + G(\lambda)] \nabla\varphi = 0. \end{aligned} \quad (2.130)$$

С использованием оценок из [91, § 3, лемма 3.1, лемма 3.2] найдем, что при $\lambda \in \Lambda \setminus [\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\omega) \cup \sigma(\mathcal{G})]$ и $\lambda \rightarrow \infty$ будут выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} & \| (I - \lambda A^{-1/2})^{-1} G(\lambda) (I + \lambda A^{-1/2})^{-1} \|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega, \rho_0))} \leq \\ & \leq 2\omega_0 |\lambda| \cdot \| (I - \lambda A^{-1/2})^{-1} A^{-1/4} (A^{-1/4} S_{22} A^{-1/4}) \|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega, \rho_0))} \times \\ & \quad \times \| (I + \lambda A^{-1/2})^{-1} A^{-1/4} \|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega, \rho_0))} + \| (I - \lambda A^{-1/2})^{-1} T_{21} \|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega, \rho_0))} \times \\ & \quad \times \| \lambda \mathcal{R}_\lambda(T_{11}) T_{12} \|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega, \rho_0))} \cdot \| (I + \lambda A^{-1/2})^{-1} \|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega, \rho_0))} + \\ & \quad + \sum_{l=1}^m \frac{1}{|b_l - \lambda|} \| (I - \lambda A^{-1/2})^{-1} U^* M_l U (I + \lambda A^{-1/2})^{-1} \|_{\mathcal{L}(\mathbf{G}(\Omega, \rho_0))} = o(1). \end{aligned}$$

Отсюда и из [75] (см. также [1]) следует, что спектральная задача (2.130), а значит и оператор $\mathcal{A}_{\omega_0}$, имеет в области $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq b_m\}$ две ветви собственных значений, удовлетворяющих асимптотической формуле (2.129).

2. Утверждения п. 2. и п. 3. являются следствием теоремы 1.6 — п. 3. и п. 5. соответственно. Теорема доказана. ■

Некоторые свойства корневых элементов пучков $L_{\omega_0}(\lambda)$ и $L(\lambda) = L_0(\lambda)$

Т е о р е м а 2.16. Система собственных и присоединенных элементов операторного пучка $L_{\omega_0}(\lambda)$, отвечающих собственным значениям, лежащим в области $\Lambda \cap \{\operatorname{Im} \lambda > 2\omega_0\}$ (или $\Lambda \cap \{\operatorname{Im} \lambda < -2\omega_0\}$) имеет конечный дефект в $\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим область $\Lambda \cap \{\operatorname{Im} \lambda > 2\omega_0\}$. Заметим, что цепочки собственных и присоединенных элементов пучков $L_{\omega_0}(\lambda)$ и $L_+(\lambda) := -\lambda(I - i\lambda A^{-1/2})^{-1} L_{\omega_0}(\lambda)$ совпадают для собственных значений из рассматриваемой области (см. [60, гл. 3, § 22, лемма 22.1, следствие 22.2]). Из (2.130) найдем, что

$$\begin{aligned} L_+(\lambda) &= I + \lambda i A^{-1/2} - 2\omega_0 i \lambda (I - i\lambda A^{-1/2})^{-1} A^{-1/2} S_{22} A^{-1/2} + \\ &+ \lambda (I - i\lambda A^{-1/2})^{-1} T_{21} \mathcal{R}_\lambda(T_{11}) T_{12} - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \lambda} (I - i\lambda A^{-1/2})^{-1} U^* M_l U = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= I - \lambda(-iA^{-1/2}) + \left\{ 2\omega_0\lambda(I - i\lambda A^{-1/2})^{-1}A^{-1/2}S_{22} \right\}(-iA^{-1/2}) + \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} \left\{ \lambda^2(I - i\lambda A^{-1/2})^{-1}T_{21}\mathcal{R}_\lambda(T_{11})T_{12} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{l=1}^m \frac{\lambda}{b_l - \lambda} (I - i\lambda A^{-1/2})^{-1}U^*M_lU \right\}. \quad (2.131)
\end{aligned}$$

Проверим, что пучок $L_+(\lambda)$ удовлетворяет условиям [92, теорема 3, с. 40]. Оператор $-iA^{-1/2}$ является полным нормальным оператором конечного порядка со спектром на конечном числе лучей (на одном луче). Оператор-функции в фигурных скобках из (2.131) голоморфны в области $\Lambda \cap \{\operatorname{Im}\lambda > 2\omega_0\}$. Покажем, что они равномерно ограничены в этой области. С использованием (2.106) и оценок из [91, § 3, лемма 3.1] найдем, что

$$\begin{aligned}
&\|2\omega_0\lambda(I - i\lambda A^{-1/2})^{-1}A^{-1/2}S_{22}\| \leq 2\omega_0 \cdot |\lambda| \|(I - i\lambda A^{-1/2})^{-1}A^{-1/2}\| \cdot \|S_{22}\| = O(1), \\
&\|\lambda^2(I - i\lambda A^{-1/2})^{-1}T_{21}\mathcal{R}_\lambda(T_{11})T_{12} - \sum_{l=1}^m \frac{\lambda}{b_l - \lambda} (I - i\lambda A^{-1/2})^{-1}U^*M_lU\| \leq \\
&\leq 2\omega_0 \cdot |\lambda| \|(I - i\lambda A^{-1/2})^{-1}A^{-1/2}\| \cdot \|S_{21}\| \cdot \|\lambda\mathcal{R}_\lambda(T_{11})\| \cdot \|T_{12}\| + \\
&\quad + \sum_{l=1}^m \frac{|\lambda|}{|b_l - \lambda|} \|(I - i\lambda A^{-1/2})^{-1}U^*M_lU\| = O(1)
\end{aligned}$$

при $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in \Lambda \cap \{\operatorname{Im}\lambda > 2\omega_0\}$.

Утверждение теоремы теперь следует из [92, теорема 3, с. 40]. Аналогично рассматривается область $\Lambda \cap \{\operatorname{Im}\lambda < -2\omega_0\}$. Теорема доказана. $\blacksquare$

Из [60, гл. 3, § 22, лемма 22.1, следствие 22.2] следует, что при $\lambda \neq 0$ цепочки собственных и присоединенных элементов пучков $L_{\omega_0}(\lambda)$ и $-\lambda L_{\omega_0}(\lambda)$ совпадают. Осуществим частичную линеаризацию пучка $-\lambda L_{\omega_0}(\lambda)$. Положим в (2.130) $i\lambda A^{-1/2}\nabla\varphi =: \nabla\psi$, получим следующую спектральную задачу

$$\begin{cases} \nabla\varphi - i\lambda A^{-1/2}\nabla\psi - 2\omega_0 i\lambda A^{-1/2}S_{22}A^{-1/2}\nabla\varphi + \\ \quad + \left[\lambda T_{21}\mathcal{R}_\lambda(T_{11})T_{12} - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \lambda} U^*M_lU \right] \nabla\varphi = 0, \\ \nabla\psi - i\lambda A^{-1/2}\nabla\varphi = 0, \quad \nabla\varphi, \nabla\psi \in \mathbf{G}(\Omega, \rho_0), \end{cases}$$

которую можно записать в следующей векторно-матричной форме:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} I - 2\omega_0 i \lambda A^{-1/2} S_{22} A^{-1/2} + F(\lambda) & -i\lambda A^{-1/2} \\ -i\lambda A^{-1/2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla \varphi \\ \nabla \psi \end{pmatrix} = \\
 & = \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2\omega_0 i A^{-1/2} S_{22} A^{-1/2} & i A^{-1/2} \\ i A^{-1/2} & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \nabla \varphi \\ \nabla \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 & F(\lambda) := \lambda T_{21} \mathcal{R}_\lambda(T_{11}) T_{12} - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \lambda} U^* M_l U.
 \end{aligned} \tag{2.132}$$

Пучок задачи (2.132) имеет вид пучка из (1.81). При этом пучок $-\lambda L_{\omega_0}(\lambda)$ будет соответствовать задаче (1.82). Относительно пучка задачи (2.132) и пучка $-\lambda L_{\omega_0}(\lambda)$ справедлива лемма 1.2 о производящих функциях, а также лемма 1.3 о пересчете корневых элементов. Приведем переформулировку леммы 1.3 для рассматриваемой ситуации учитывая, что при $\lambda \neq 0$ цепочки собственных и присоединенных элементов пучков $L_{\omega_0}(\lambda)$ и $-\lambda L_{\omega_0}(\lambda)$ совпадают.

Л е м м а 2.23. Пусть набор полей $\{(\nabla \varphi_k; \nabla \psi_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ является цепочкой из собственного и присоединенных элементов задачи (2.132), отвечающей собственному значению λ_0 , тогда $\{\nabla \varphi_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов пучка $L_{\omega_0}(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_0 .

Обратно, пусть набор полей $\{\nabla \varphi_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов пучка $L_{\omega_0}(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_0 , тогда $\{(\nabla \varphi_k; \nabla \psi_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$, где

$$\nabla \psi_0 := i\lambda_0 A^{-1/2} \nabla \varphi_0, \quad \nabla \psi_k := iA^{-1/2}(\nabla \varphi_{k-1} + \lambda_0 \nabla \varphi_k), \quad k = \overline{1, n-1},$$

— цепочка из собственного и присоединенных элементов спектральной задачи (2.132).

Из леммы 2.23 следует, что полнота (полнота с дефектом) системы собственных и присоединенных элементов задачи (2.132) соответствует полноте (полноте с дефектом) специальной системы, построенной по системе собственных и присоединенных элементов пучка $L_{\omega_0}(\lambda)$.

Т е о р е м а 2.17. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Система собственных и присоединенных элементов задачи (2.132), отвечающих собственным значениям, лежащим в области $\Lambda \cap \{|\operatorname{Im} \lambda| > 2\omega_0\}$, имеет конечный дефект в $\mathbf{G}(\Omega, \rho_0) \oplus \mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$.

2. Пусть $\omega_0 = 0$ и $0 < t < b_m^{-1}$ таково, что

$$\sum_{l=1}^m \frac{t \|M_l\|}{1 - tb_l} < 1.$$

Если норма $\|A^{-1/2}\|$ оператора $A^{-1/2}$ удовлетворяет неравенству

$$\|A^{-1/2}\| < t \left[1 - \sum_{l=1}^m \frac{t \|M_l\|}{1 - tb_l} \right],$$

то система собственных и присоединенных элементов задачи (2.132), отвечающих собственным значениям, лежащим в области $\{|\lambda| > t^{-1}\}$, полна в $\mathbf{G}(\Omega, \rho_0) \oplus \mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство первого утверждения следует из [90, теорема 1] (см. также [49, гл. 1, § 7, п. 7]). Доказательство второго утверждения проводится так же, как доказательство второго утверждения в теореме 2.8 с использованием теоремы 2.7. Теорема доказана. ■

2.4.3. Случай $\omega_0 = 0$, $g = 0$ — отсутствие вращения и гравитационного поля, разложение решения эволюционной задачи

Пусть $\omega_0 = 0$ и $g = 0$, то есть система не вращается и на нее не действует гравитационное поле. В этом случае считаем, что постоянны стационарная плотность $\rho_0 = \operatorname{const}$ и структурные константы $k_l > 0$ ($l = \overline{1, m}$). Все константы задачи связаны неравенством (2.11).

В рассматриваемом случае $L_{2, \rho_0}(\Omega) = L_{2, \Omega} := \{f \in L_2(\Omega) \mid (f, 1)_{L_2(\Omega)} = 0\}$. Операторы M_l из леммы 2.4 станут операторами умножения элементов пространства $L_{2, \Omega}$ на константы $\rho_0 k_l$.

Будем считать, в соответствии с теоремой 2.12, что $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$. Тогда $\xi_{\rho^0} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ (см. (2.116)) и скобки в уравнении (2.115) можно раскрыть. Запишем уравнение из (2.115) в виде системы и применим к обеим частям второго и последующих уравнений оператор U^* . Полученную систему вместе с соответствующим начальным условием перепишем в виде задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := \mathbf{G}(\Omega, \rho_0) \oplus (\oplus_{l=0}^m \mathbf{G}(\Omega, \rho_0))$:

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} &= -\mathcal{A}\zeta + \zeta_{\rho^0}(t) + \mathcal{F}(t), \quad \zeta(0) = \zeta^0, \\ \zeta(t) &:= (\nabla\varphi(t); \mathbf{w}(t))^\tau := (\nabla\varphi(t); \mathbf{u}_0(t); \mathbf{u}_1(t); \dots; \mathbf{u}_m(t))^\tau, \\ \mathbf{u}_l(t) &:= U^*u_l(t) \quad (l = \overline{0, m}), \\ \zeta_{\rho^0}(t) &:= \left(\sum_{l=1}^m e^{-b_l t} \frac{\rho_0 k_l}{b_l} B^* \rho^0; 0; 0; \dots; 0 \right)^\tau, \quad \mathcal{F}(t) := (P_G \mathbf{f}(t); 0; 0; \dots; 0)^\tau, \\ \zeta^0 &:= (P_G \mathbf{u}^0; -[1 - \sum_{l=1}^m \frac{\rho_0 k_l}{b_l}]^{1/2} U^* \rho^0; 0; \dots; 0)^\tau. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Оператор $\mathcal{A}$ определяется по следующим формулам (см. (1.90)-(1.91)):

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) = \begin{pmatrix} 0 & A^{1/2} \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} A^{1/2} & \mathcal{G} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{Q} &:= (\beta_0^{1/2}, \beta_1^{1/2}, \dots, \beta_m^{1/2})^\tau, \quad \mathcal{G} := \text{diag}(0, b_1 I, \dots, b_m I), \quad \mathcal{I} := \text{diag}(I, I, \dots, I), \\ \beta_0 &:= 1 - \sum_{l=1}^m \frac{\rho_0 k_l}{b_l}, \quad \beta_l := \frac{\rho_0 k_l}{b_l} \quad (l = \overline{1, m}), \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}) &= \left\{ \xi = (\nabla\varphi; \mathbf{w})^\tau \in \mathcal{H} \mid \nabla\varphi \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \mathcal{Q}^* \mathbf{w} \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.134)$$

З а м е ч а н и е 2.11. В рассматриваемом частном случае (в этом разделе) основное гильбертово пространство $\mathcal{H}$ и операторный блок $\mathcal{A}$ определяются несколько иначе, чем в (2.115)-(2.117). Здесь основная задача Коши (2.133) записана так, что в конструкции операторного блока $\mathcal{A}$, кроме оператора A (см. лемму 2.18), все входящие в него операторы пропорциональны единичным. Оператор (2.134) унитарно эквивалентен оператору (2.117) при $\omega_0 = 0, g = 0$. ►

Оператор (2.134) является частным случаем оператора $\mathcal{A}$, изученного в § 1.5 (см. (1.90)-(1.91)). Таким образом, для оператора (2.134) справедлива теорема 1.8 о структуре и асимптотике спектра, теорема 1.9 о p -базисности при $p > 3$ системы собственных элементов в невырожденном случае, теорема 1.10 о p -базисности при $p > 3$ системы корневых элементов в общем случае и теорема 1.11 о биортогональной системе.

Приведем переформулировку теоремы 1.11 в рассматриваемой ситуации.

Т е о р е м а 2.18. *Определим функции $g_k(\lambda)$ и $g_\infty(\lambda)$:*

$$g_k(\lambda) := -\frac{1}{\lambda}\beta_0 + \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} - \lambda\lambda_k(A^{-1}), \quad k \in \mathbb{N},$$

$$g_\infty(\lambda) := -\frac{1}{\lambda}\beta_0 + \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} \equiv -\frac{1}{\lambda} \left[\sum_{l=0}^m \beta_l - \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l b_l}{b_l - \lambda} \right].$$

Обозначим через γ_p ($p = \overline{1, m}$), $\lambda_k^{(p)}$ ($p = \overline{1, m+2}$) нули функций $g_\infty(\lambda)$ и $g_k(\lambda)$.

Пусть $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ ($p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$). Тогда система

$$\xi_k^{(p)} := R_{k,p}(\lambda_k^{1/2}(A^{-1}); (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q})^\tau \nabla \eta_k(A^{-1}), \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$R_{k,p} := \begin{cases} [g'_\infty(\gamma_p)]^{-1/2}, & p = \overline{1, m}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ [2\lambda_k(A^{-1})]^{-1/2}, & p = m+1, m+2, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

собственных элементов оператора $\mathcal{A}$ образует p -базис пространства $\mathcal{H}$ при $p > 3$, согласно теореме 1.9, и имеет следующую биортогональную систему:

$$\zeta_k^{(p)} := -[g'_k(\overline{\lambda_k^{(p)}})R_{k,p}]^{-1}(\lambda_k^{1/2}(A^{-1}); -(\mathcal{G} - \overline{\lambda_k^{(p)}})^{-1}\mathcal{Q})^\tau \nabla \eta_k(A^{-1}),$$

$$p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть $P_G \mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(B)$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$. Будем разыскивать решение задачи (2.133) в виде разложения по базису, составленному из собственных элементов оператора $\mathcal{A}$:

$$\zeta(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{m+2} C_k^{(p)}(t) \xi_k^{(p)}, \quad C_k^{(p)}(0) = (\zeta^0, \xi_k^{(p)})_{\mathcal{H}}.$$

Отсюда и из (2.133) найдем, что

$$\zeta(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{m+2} \left[e^{-\lambda_k^{(p)} t} (\zeta^0, \zeta_k^{(p)})_{\mathcal{H}} + \int_0^t e^{-\lambda_k^{(p)} (t-s)} (\zeta_{\rho^0}(s) + \mathcal{F}(s), \zeta_k^{(p)})_{\mathcal{H}} ds \right] \xi_k^{(p)}. \quad (2.135)$$

Учитывая явный вид ζ^0 , $\zeta_{\rho^0}(t)$, $\mathcal{F}(t)$ (см. (2.133)), (2.134) и теорему 2.18, найдем, что

$$(\zeta^0, \zeta_k^{(p)})_{\mathcal{H}} = \frac{-\lambda_k^{1/2}(A^{-1})}{g'_k(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}} \left[(P_G \mathbf{u}^0, \nabla \eta_k)_{\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)} - \frac{\beta_0}{\lambda_k^{(p)}} (B^* \rho^0, \nabla \eta_k)_{\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)} \right], \quad (2.136)$$

$$(\zeta_{\rho^0}(t) + \mathcal{F}(t), \zeta_k^{(p)})_{\mathcal{H}} = \frac{-\lambda_k^{1/2}(A^{-1})}{g'_k(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}} \left[\sum_{l=1}^m e^{-b_l t} \beta_l (B^* \rho^0, \nabla \eta_k)_{\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)} + \right. \\ \left. + (P_G \mathbf{f}(t), \nabla \eta_k)_{\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)} \right]. \quad (2.137)$$

Подставим (2.136), (2.137) в (2.135). После простых вычислений получим представление для решения задачи Коши (2.133):

$$\zeta(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{m+2} \frac{-\lambda_k^{1/2}(A^{-1})}{g'_k(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}} \left[e^{-\lambda_k^{(p)} t} (P_G \mathbf{u}^0, \nabla \eta_k(A))_{\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)} + \right. \\ \left. + \left\{ g_{\infty}(\lambda_k^{(p)}) e^{-\lambda_k^{(p)} t} - \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l e^{-b_l t}}{b_l - \lambda_k^{(p)}} \right\} (B^* \rho^0, \nabla \eta_k(A))_{\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)} + \right. \\ \left. + \int_0^t e^{-\lambda_k^{(p)} (t-s)} (P_G \mathbf{f}(s), \nabla \eta_k(A))_{\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)} ds \right] \xi_k^{(p)}.$$

Отсюда, учитывая вид $\zeta(t)$, $\xi_k^{(p)}$, связь (2.104) функций $u_0(t)$ и $\rho(t)$, найдем представление для решения $\nabla \varphi(t)$, $\rho(t)$ задачи (2.114) (в случае, когда $g = 0$):

$$\begin{pmatrix} \nabla \varphi(t) \\ \rho(t) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{m+2} T_k^{(p)}(t) \begin{pmatrix} \lambda_k^{-1/2}(A) \nabla \eta_k(A) \\ (\lambda_k^{(p)})^{-1} U \nabla \eta_k(A) \end{pmatrix}, \\ T_k^{(p)}(t) := \frac{-\lambda_k^{-1/2}(A)}{g'_k(\lambda_k^{(p)})} \left[e^{-\lambda_k^{(p)} t} (\mathbf{u}^0, \nabla \eta_k(A))_{\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)} + \left\{ g_{\infty}(\lambda_k^{(p)}) e^{-\lambda_k^{(p)} t} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{l=1}^m \frac{\rho_0 k_l e^{-b_l t}}{b_l (b_l - \lambda_k^{(p)})} \right\} (B^* \rho^0, \nabla \eta_k(A))_{\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)} + \int_0^t e^{-\lambda_k^{(p)} (t-s)} (\mathbf{f}(s), \nabla \eta_k(A))_{\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)} ds \right].$$

2.5. Выводы ко второй главе

1. Доказано, что в вязкой релаксирующей жидкости, целиком заполняющей равномерно вращающуюся ограниченную область, существует два типа волновых движений. Первый тип движений отвечает ветви собственных значений оператора $\mathcal{A}$, расположенных в горизонтальной полосе и сгущающихся в бесконечности (см. теорему 2.4). Этот тип движений аналогичен внутренним диссипативным волнам, возникающим в вязкой несжимаемой жидкости, целиком заполняющей равномерно вращающуюся ограниченную область. Второй тип волновых движений, возникающих в вязкой вращающейся релаксирующей жидкости, отвечает точкам существенного спектра оператора $\mathcal{A}$ (см. теорему 2.2 и замечание 2.4) и собственным значениям, которые могут к нему сгущаться. Этот тип движений новый и связан с сжимаемостью жидкости и эффектами релаксации.
2. Если вязкая релаксирующая жидкость не вращается, то все волновые движения, за исключением конечного количества, являются аperiodически затухающими. В случае достаточно большой вязкости жидкости все волновые движения будут аperiodически затухающими (см. теорему 2.5). Если вязкая релаксирующая жидкость не вращается и находится в невесомости, то существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ претерпевает качественные изменения — он превращается в конечное количество точек (см. замечание 2.4), некоторые из которых могут быть предельными для последовательностей действительных собственных значений.
3. Доказаны асимптотические формулы, описывающие поведение вязкой вращающейся релаксирующей жидкости под нагрузкой специального вида (см. теорему 2.11).
4. Доказано, что в идеальной релаксирующей жидкости, целиком заполняющей равномерно вращающуюся ограниченную область, существует три

типа волновых движений. Первый тип волновых движений отвечает ветви собственных значений оператора $\mathcal{A}_{\omega_0}$, расположенных в вертикальной полосе и сгущающихся к бесконечности (см. теорему 2.15). Этот тип движений аналогичен акустическим волнам в идеальной сжимаемой жидкости. Второй тип волновых движений, возникающих в идеальной вращающейся релаксирующей жидкости, обусловлен вращением системы и отвечает части существенного спектра оператора $\mathcal{A}_{\omega}$, расположенной на мнимой оси (см. теорему 2.14). Этот тип движений аналогичен внутренним инерционным волнам, возникающим в идеальной несжимаемой равномерно вращающейся жидкости. Третий тип волновых движений, возникающих в идеальной вращающейся релаксирующей жидкости, отвечает части существенного спектра оператора $\mathcal{A}_{\omega}$, расположенной на действительной оси (см. теорему 2.14). Это тип движений является новым и связан с эффектами релаксации в жидкости.

5. Если идеальная релаксирующая жидкость не вращается, то вихревую составляющую поля скоростей жидкости можно исключить из рассмотрения как зависимую. После такого исключения в идеальной релаксирующей жидкости возможны, соответственно, два типа волновых движений. При этом все движения будут иметь положительные декременты затухания, отделенные от нуля некоторой константой. Если идеальная релаксирующая жидкость не вращается и находится в невесомости, то существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ претерпевает качественные изменения — он превращается в конечное количество точек, которые являются предельными для последовательностей действительных собственных значений (см. п. 2.4.3). В случае отсутствия вращения доказаны асимптотические формулы, описывающие поведение идеальной релаксирующей жидкости под нагрузкой специального вида (см. теорему 2.13).

Глава 3

Модели вязкоупругих тел Ильюшина

3.1. Введение

В третьей главе изучаются модели вязкоупругих тел Ильюшина. В § 3.2 приводятся уравнения, описывающие малые движения начально-изотропного вязкоупругого тела, которое считается закрепленным на границе занимаемой области, вводятся ограничения на физические константы, определяются модели параболического и гиперболического типа.

В § 3.3 изучается модель параболического типа, доказана теорема 3.1 об однозначной сильной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи, о представлении и асимптотике решения этой задачи. В п. 3.3.2 исследуется спектр главного оператора. В теоремах 3.2, 3.3 доказаны утверждения о существенном спектре главного оператора, а также о локализации и асимптотике его дискретного спектра. В теоремах 3.5, 3.6 установлены некоторые свойства системы корневых элементов главного оператора. В конце § 3.3 рассмотрена задача о малых движениях синхронно-изотропной среды параболического типа — специальный частный случай изучаемой задачи.

В § 3.4 изучается модель гиперболического типа, доказана теорема 3.11 об однозначной сильной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи, с использованием теоремы 1.3 доказано утверждение об асимптотике решения этой задачи. В п. 3.4.2 исследуется спектр главного оператора, приведена теорема 3.12 о структуре существенного спектра изучаемого оператора, о локализации и асимптотике дискретного спектра.

Результаты главы 3 изложены в статьях [30, 32, 34, 37].

3.2. Уравнения движения вязкоупругих тел Ильюшина при изотермических процессах деформирования

Рассмотрим изотропное тело, занимающее область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Введем прямоугольную декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с областью. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$ ($x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$) — поле смещений в изотропном теле, тогда тензор деформации ε_{ij} будет выражаться через поле перемещений по формуле Коши. Разложим тензоры деформации ε_{ij} и напряжений σ_{ij} на девиаторы и шаровые составляющие: $\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \varepsilon\delta_{ij}$, $\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma\delta_{ij}$. Здесь e_{ij} , s_{ij} — девиаторы тензора деформации и напряжений соответственно, δ_{ij} — символ Кронекера, $\theta := 3\varepsilon$ — объемная деформация, σ — среднее гидростатическое напряжение. В [41, гл. 2, § 4] выводится общий вид связей девиаторов и шаровых составляющих тензоров деформаций и напряжений:

$$s_{ij}(t) = \int_0^t \Gamma_1(t-s)e_{ij}(s) ds, \quad \sigma(t) = \int_0^t \Gamma_2(t-s)\theta(s) ds, \quad (3.1)$$

где $\Gamma_1(t)$ и $\Gamma_2(t)$ — это ядра сдвиговой и объемной релаксации. Эти ядра имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_1(t) &:= -c_1\delta'(t) + c_0\delta(t) - \Gamma(t), & \Gamma_2(t) &:= -\tilde{c}_1\delta'(t) + \tilde{c}_0\delta(t) - \tilde{\Gamma}(t), \\ \Gamma(t) &:= \sum_{l=1}^m c_{-l}e^{-tb_l}, & \tilde{\Gamma}(t) &:= \sum_{l=1}^n \tilde{c}_{-l}e^{-t\tilde{b}_l}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\delta(t)$ — δ -функция, $c_k, \tilde{c}_k$ — некоторые структурные постоянные, $b_k^{-1}, \tilde{b}_k^{-1}$ — времена релаксации. При этом

$$\begin{aligned} c_1, \tilde{c}_1 &\geq 0, & c_0, \tilde{c}_0 &> 0, & c_{-l} &> 0 \quad (l = \overline{1, m}), & \tilde{c}_{-l} &> 0 \quad (l = \overline{1, n}), \\ 0 &< b_1 < b_2 < \dots < b_m, & 0 &< \tilde{b}_1 < \tilde{b}_2 < \dots < \tilde{b}_n. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Всюду далее, кроме условия (3.3) на числовые параметры задачи, будем

считать выполненными следующие условия:

$$c_0 - \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l} > 0, \quad \tilde{c}_0 + \frac{1}{6} \left[c_0 - \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l} \right] - \sum_{l=1}^n \frac{\tilde{c}_{-l}}{\tilde{b}_l} \geq 0, \quad (3.4)$$

$$\{b_1, \dots, b_m\} \cap \{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n\} = \emptyset.$$

Последнее условие вводится лишь для упрощения последующих формулировок и вычислений, и не является принципиальным ограничением в рассматриваемой задаче. Если какое-то число из второй группы (с волной) попадет в первую группу, то все сведется к перегруппировке слагаемых и новым обозначениям.

Из (3.1) и уравнения движения сплошной среды в форме Коши получим уравнение движения начально-изотропного вязкоупругого тела, которое будем считать закрепленным на границе $\partial\Omega$ области Ω :

$$\begin{aligned} \rho(x) \frac{\partial^2 \mathbf{u}(t, x)}{\partial t^2} = & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{c_1}{2} \Delta \mathbf{u}(t, x) + \left(\tilde{c}_1 + \frac{c_1}{6} \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}(t, x) \right) + \\ & + \left(\frac{c_0}{2} \Delta \mathbf{u}(t, x) + \left(\tilde{c}_0 + \frac{c_0}{6} \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}(t, x) \right) - \\ & - \int_0^t \Gamma(t-s) \left(\frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}(s, x) + \frac{1}{6} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}(s, x) \right) ds - \\ & - \int_0^t \tilde{\Gamma}(t-s) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}(s, x) ds + \rho(x) \mathbf{f}(t, x) \quad (\text{в } \Omega), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{на } \partial\Omega), \quad \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^1, \quad (3.6)$$

где $\rho = \rho(x)$ — плотность тела ($0 < \rho_1 \leq \rho(x) \leq \rho_2 < +\infty$), $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, x)$ — малое поле внешних массовых сил, $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^0(x)$, $\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^1(x)$ — начальные смещения и скорости в вязкоупругом теле.

Назовем модель вязкоупругого тела *гиперболической*, если в (3.5) $c_1 = \tilde{c}_1 = 0$; *параболической*, если в (3.5) $c_1 > 0$.

3.3. Модель параболического типа. Эволюционная задача, спектральная задача, синхронно-изотропная среда

3.3.1. Эволюционная задача

Операторная формулировка задачи

Введем векторное гильбертово пространство $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)$ с весом $\rho(x)$ со скалярным произведением и нормой следующего вида (см. (2.12)):

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)} := \int_{\Omega} \rho(x) \mathbf{u}(x) \cdot \overline{\mathbf{v}(x)} d\Omega, \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2 = \int_{\Omega} \rho(x) |\mathbf{u}(x)|^2 d\Omega.$$

Введем скалярное гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ функций суммируемых со своими квадратами по области Ω , а также его подпространство $L_{2,\Omega} := \{p \in L_2(\Omega) \mid (p, 1)_{L_2(\Omega)} = 0\}$.

Пусть граница $\partial\Omega$ области Ω — класса C^2 .

Л е м м а 3.1.

1. Рассмотрим краевую задачу

$$-\rho^{-1}(x)(\alpha \Delta \mathbf{u} + \beta \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}) = \mathbf{w} \quad (\text{в } \Omega), \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{на } \partial\Omega), \quad \alpha > 0, \quad \beta \geq 0.$$

Для каждого поля $\mathbf{w} \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho)$ существует и единственно обобщенное решение этой задачи, выражаемое формулой $\mathbf{u} = A^{-1}(\alpha, \beta) \mathbf{w}$. Оператор $A(\alpha, \beta)$ является самосопряженным положительно определенным, $A^{-1}(\alpha, \beta) \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 3/2$. Кроме того, $\mathcal{D}(A^{1/2}(\alpha, \beta)) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) \mid \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ (на } \partial\Omega)\}$.

2. Определим оператор $B\mathbf{u} := \operatorname{div} \mathbf{u}$, $\mathcal{D}(B) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho) \mid \operatorname{div} \mathbf{u} \in L_2(\Omega), \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ (на } \partial\Omega)\} \supset \mathcal{D}(A^{1/2}(\alpha, \beta))$. Тогда сопряженный оператор имеет вид $B^*p = -\rho^{-1} \nabla p$, $\mathcal{D}(B^*) = W_2^1(\Omega) \cap L_{2,\Omega}$. Кроме того, $B^*BA^{-1}(\alpha, \beta) \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. См. леммы 2.2, 2.3. ■

Несложно проверить, что нормы в любых двух энергетических пространствах $H_{A(\alpha_1, \beta_1)} = \mathcal{D}(A^{1/2}(\alpha_1, \beta_1))$ и $H_{A(\alpha_2, \beta_2)} = \mathcal{D}(A^{1/2}(\alpha_2, \beta_2))$ эквивалентны меж-

ду собой. Для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_{A(\alpha, \beta)}$ справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{A(\alpha, \beta)} &= (A^{1/2}(\alpha, \beta)\mathbf{u}, A^{1/2}(\alpha, \beta)\mathbf{v})_{\mathbf{L}(\Omega, \rho)} = \alpha \mathcal{J}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \beta \mathcal{D}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \\ \mathcal{J}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \nabla u_i \cdot \overline{\nabla v_i} d\Omega, \quad \mathcal{D}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \overline{\operatorname{div} \mathbf{v}} d\Omega. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Введем, в соответствии с леммой 3.1, следующие операторы:

$$A_p := A\left(\frac{1}{2}c_1, \tilde{c}_1 + \frac{1}{6}c_1\right), \quad A_h := A\left(\frac{1}{2}c_0, \tilde{c}_0 + \frac{1}{6}c_0\right), \quad A := A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right) \quad (3.8)$$

и с их помощью запишем начально-краевую задачу (3.5)-(3.6) в виде задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} &= -A_p \frac{d\mathbf{u}}{dt} - A_h \mathbf{u} + \int_0^t \left[\Gamma(t-s)A + \tilde{\Gamma}(t-s)B^*B \right] \mathbf{u}(s) ds + \mathbf{f}(t), \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}^1. \end{aligned} \quad (3.9)$$

О п р е д е л е н и е 3.1. Поле $\mathbf{u} \in C^2(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho))$ назовем *сильным решением* задачи (3.9) и, соответственно, *сильным решением* начально-краевой задачи (3.5)-(3.6), если 1) $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{D}(A_h)$, $\mathbf{u}'(t) \in \mathcal{D}(A_p)$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$ и $A_h \mathbf{u}$, $A_p \mathbf{u}' \in C(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho))$, 2) в (3.9) выполнено уравнение для любого $t \in \mathbb{R}_+$ и начальные условия.

Переход к основному дифференциально-операторному уравнению, теорема о разрешимости, асимптотика решения

Введем операторы

$$\begin{aligned} Q &:= A_h^{1/2} A_p^{-1/2}, \quad Q_p := A^{1/2} A_p^{-1/2}, \quad Q_{Bp} := B A_p^{-1/2}, \\ Q^+ &:= A_p^{-1/2} A_h^{1/2}, \quad Q_p^+ := A_p^{-1/2} A^{1/2}, \quad Q_{Bp}^+ := A_p^{-1/2} B^*. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Л е м м а 3.2. $Q, Q_p \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho))$, $Q_{Bp} \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho), L_{2,\Omega})$. Операторы Q^+ , Q_p^+ , Q_{Bp}^+ расширяются по непрерывности до ограниченных операторов Q^* , Q_p^* , Q_{Bp}^* . При этом $Q_{Bp}^+ = Q_{Bp}^*|_{\mathcal{D}(B^*)}$, $Q^+ = Q^*|_{\mathcal{D}(A_h^{1/2})}$, $Q_p^+ = Q_p^*|_{\mathcal{D}(A^{1/2})}$, а операторы Q^*Q и $Q_p^*Q_p$ положительно определены.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем для оператора Q . Ограниченность оператора Q ($Q^* \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho))$) следует из равенства $\mathcal{D}(A_p) = \mathcal{D}(A_h)$. Далее, для любых $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho)$ и $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(A_{00}^{1/2})$

$$(Q\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)} = (A_h^{1/2} A_p^{-1/2} \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)} = (\mathbf{u}, Q^+ \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)} = (\mathbf{u}, Q^* \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)},$$

откуда следует, что $Q^+ = Q^*|_{\mathcal{D}(A_h^{1/2})}$, $\overline{Q^+} = Q^*$. Далее, для любого $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho)$, с учетом (3.7), имеем

$$\begin{aligned} (Q^* Q \mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)} &= (Q \mathbf{u}, Q \mathbf{u})_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)} = (A_p^{-1/2} \mathbf{u}, A_p^{-1/2} \mathbf{u})_{A_h} = \\ &= \frac{1}{2} c_0 \mathcal{J}(A_p^{-1/2} \mathbf{u}, A_p^{-1/2} \mathbf{u}) + \left(\tilde{c}_0 + \frac{1}{6} c_0 \right) \mathcal{D}(A_p^{-1/2} \mathbf{u}, A_p^{-1/2} \mathbf{u}) \geq \\ &\geq \min \left\{ \frac{c_0}{c_1}, \frac{6\tilde{c}_0 + c_0}{6\tilde{c}_1 + c_1} \right\} \left[\frac{1}{2} c_1 \mathcal{J}(A_p^{-1/2} \mathbf{u}, A_p^{-1/2} \mathbf{u}) + \left(\tilde{c}_1 + \frac{1}{6} c_1 \right) \mathcal{D}(A_p^{-1/2} \mathbf{u}, A_p^{-1/2} \mathbf{u}) \right] = \\ &= \min \left\{ \frac{c_0}{c_1}, \frac{6\tilde{c}_0 + c_0}{6\tilde{c}_1 + c_1} \right\} (A_p^{-1/2} \mathbf{u}, A_p^{-1/2} \mathbf{u})_{A_p} = \min \left\{ \frac{c_0}{c_1}, \frac{6\tilde{c}_0 + c_0}{6\tilde{c}_1 + c_1} \right\} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2, \end{aligned}$$

откуда следует положительная определенность оператора Q^*Q .

Для оператора Q_p доказательство аналогично. Для оператора Q_{Bp} доказательство проводится как в лемме 2.5. Лемма доказана. $\blacksquare$

Пусть $\mathbf{u}(t)$ сильное решение задачи Коши (3.9), тогда $\mathbf{u}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} &= -A_p^{1/2} \left\{ A_p^{1/2} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + Q^+ Q A_p^{1/2} \mathbf{u} - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \left[\Gamma(t-s) Q_p^+ Q_p + \tilde{\Gamma}(t-s) Q_{Bp}^+ Q_{Bp} \right] A_p^{1/2} \mathbf{u}(s) ds \right\} + \mathbf{f}(t), \end{aligned}$$

а значит, с учетом леммы 3.2, и следующему уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = & -A_p^{1/2} \left\{ A_p^{1/2} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + Q^+ Q A_p^{1/2} \mathbf{u} - \right. \\ & \left. - Q_p^* \int_0^t \Gamma(t-s) Q_p A_p^{1/2} \mathbf{u}(s) ds - Q_{Bp}^* \int_0^t \tilde{\Gamma}(t-s) Q_{Bp} A_p^{1/2} \mathbf{u}(s) ds \right\} + \mathbf{f}(t). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Определим ядра $\Gamma_p(t)$ и $\tilde{\Gamma}_p(t)$ так, что $\Gamma_p'(t) = -\Gamma(t)$, $\tilde{\Gamma}_p'(t) = -\tilde{\Gamma}(t)$, то есть

$$\Gamma_p(t) = \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l} e^{-tb_l}, \quad \tilde{\Gamma}_p(t) = \sum_{l=1}^n \frac{\tilde{c}_{-l}}{\tilde{b}_l} e^{-t\tilde{b}_l}. \quad (3.12)$$

Предположим, что $\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(A_p^{1/2})$. Из (3.12) и свойства $(A_p^{1/2} \mathbf{u}(t))' = A_p^{1/2} \mathbf{u}'(t)$ (см. [55, гл. 3, § 1, п. 1]), которое является следствием непрерывности поля $A_p \mathbf{u}'(t)$, следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^t \Gamma(t-s) Q_p A_p^{1/2} \mathbf{u}(s) ds &= \\ &= \Gamma_p(0) Q_p A_p^{1/2} \mathbf{u} - \Gamma_p(t) Q_p A_p^{1/2} \mathbf{u}^0 - \int_0^t \Gamma_p(t-s) Q_p A_p^{1/2} \frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} ds, \\ \int_0^t \tilde{\Gamma}(t-s) Q_{Bp} A_p^{1/2} \mathbf{u}(s) ds &= \\ &= \tilde{\Gamma}_p(0) Q_{Bp} A_p^{1/2} \mathbf{u} - \tilde{\Gamma}_p(t) Q_{Bp} A_p^{1/2} \mathbf{u}^0 - \int_0^t \tilde{\Gamma}_p(t-s) Q_{Bp} A_p^{1/2} \frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} ds. \end{aligned}$$

С использованием этих соотношений преобразуем уравнение (3.11):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = & -A_p^{1/2} \left\{ A_p^{1/2} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \left[Q^+ Q - \Gamma_p(0) Q_p^* Q_p - \tilde{\Gamma}_p(0) Q_{Bp}^* Q_{Bp} \right] A_p^{1/2} \mathbf{u} + \right. \\ & + Q_p^* \int_0^t \Gamma_p(t-s) Q_p A_p^{1/2} \frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} ds + Q_{Bp}^* \int_0^t \tilde{\Gamma}_p(t-s) Q_{Bp} A_p^{1/2} \frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} ds + \\ & \left. + \left[\Gamma_p(t) Q_p^* Q_p + \tilde{\Gamma}_p(t) Q_{Bp}^* Q_{Bp} \right] A_p^{1/2} \mathbf{u}^0 \right\} + \mathbf{f}(t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

С учетом (3.4) и леммы 3.1 определим оператор

$$\begin{aligned} A_0 &:= A \left(\frac{1}{2} [c_0 - \Gamma_p(0)], \tilde{c}_0 + \frac{1}{6} [c_0 - \Gamma_p(0)] - \tilde{\Gamma}_p(0) \right) = \\ &= A \left(\frac{1}{2} \left[c_0 - \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l} \right], \tilde{c}_0 + \frac{1}{6} \left[c_0 - \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l} \right] - \sum_{l=1}^n \frac{\tilde{c}_{-l}}{\tilde{b}_l} \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Л е м м а 3.3. Пусть $Q_{0p} := A_0^{1/2} A_p^{-1/2}$ и $Q_{0p}^+ := A_p^{-1/2} A_0^{1/2}$. Тогда $\overline{Q_{0p}^+} = Q_{0p}^*$, $Q_{0p}^+ = Q_{0p}^*|_{\mathcal{D}(A_0^{1/2}) = \mathcal{D}(A_p^{1/2})}$. Оператор $Q_{0p}^* Q_{0p} = Q^* Q - \Gamma_p(0) Q_p^* Q_p - \tilde{\Gamma}_p(0) Q_{Bp}^* Q_{Bp}$ и положительно определен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенства $\overline{Q_{0p}^+} = Q_{0p}^*$, $Q_{0p}^+ = Q_{0p}^*|_{\mathcal{D}(A_0^{1/2}) = \mathcal{D}(A_p^{1/2})}$ проверяются как в лемме 3.2.

Для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho)$, учитывая (3.7) и (3.10), вычислим

$$\begin{aligned} ((Q^* Q - \Gamma_p(0) Q_p^* Q_p - \tilde{\Gamma}_p(0) Q_{Bp}^* Q_{Bp} - Q_{0p}^* Q_{0p}) \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)} &= (A_p^{-1/2} \mathbf{u}, A_p^{-1/2} \mathbf{v})_{A_h} - \\ &- \Gamma_p(0) (A_p^{-1/2} \mathbf{u}, A_p^{-1/2} \mathbf{v})_A - \tilde{\Gamma}_p(0) \mathcal{D}(A_p^{-1/2} \mathbf{u}, A_p^{-1/2} \mathbf{v}) - (A_p^{-1/2} \mathbf{u}, A_p^{-1/2} \mathbf{v})_{A_0} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует формула для оператора $Q_{0p}^* Q_{0p}$. Положительная определенность оператора $Q_{0p}^* Q_{0p}$ доказывается так же, как в лемме 3.2. Лемма доказана. ■

Из леммы 3.3 и (3.13) следует, что если поле $\mathbf{u}(t)$ удовлетворяет уравнению (3.13), то оно также удовлетворяет и следующему уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} &= -A_p^{1/2} \left\{ A_p^{1/2} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + Q_{0p}^* Q_{0p} A_p^{1/2} \mathbf{u} + \right. \\ &+ Q_p^* \int_0^t \Gamma_p(t-s) Q_p A_p^{1/2} \frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} ds + Q_{Bp}^* \int_0^t \tilde{\Gamma}_p(t-s) Q_{Bp} A_p^{1/2} \frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} ds + \\ &\left. + [\Gamma_p(t) Q_p^* Q_p + \tilde{\Gamma}_p(t) Q_{Bp}^* Q_{Bp}] A_p^{1/2} \mathbf{u}^0 \right\} + \mathbf{f}(t). \end{aligned}$$

Это уравнение с учетом (3.12) перепишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = & -A_p^{1/2} \left\{ A_p^{1/2} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + Q_{0p}^* Q_{0p} A_p^{1/2} \mathbf{u} + \right. \\ & + \sum_{l=1}^m \sqrt{\frac{c_{-l}}{b_l}} Q_p^* \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \sqrt{\frac{c_{-l}}{b_l}} Q_p A_p^{1/2} \frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} ds + \\ & + \sum_{l=1}^n \sqrt{\frac{\tilde{c}_{-l}}{\tilde{b}_l}} Q_{Bp}^* \int_0^t e^{-\tilde{b}_l(t-s)} \sqrt{\frac{\tilde{c}_{-l}}{\tilde{b}_l}} Q_{Bp} A_p^{1/2} \frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} ds + \\ & \left. + [\Gamma_p(t) Q_p^* Q_p + \tilde{\Gamma}_p(t) Q_{Bp}^* Q_{Bp}] A_p^{1/2} \mathbf{u}^0 \right\} + \mathbf{f}(t). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Введем по полю $\mathbf{u}(t)$ следующие объекты:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} & =: \mathbf{z}(t) \quad (\mathbf{z}(0) = \mathbf{u}^1), \quad Q_{0p} A_p^{1/2} \mathbf{u}(t) =: \mathbf{v}(t), \quad (\mathbf{v}'(0) = A_0^{1/2} \mathbf{u}^0), \\ \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \sqrt{\frac{c_{-l}}{b_l}} Q_p A_p^{1/2} \frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} ds & =: \mathbf{v}_l(t), \quad l = \overline{1, m}, \\ \int_0^t e^{-\tilde{b}_l(t-s)} \sqrt{\frac{\tilde{c}_{-l}}{\tilde{b}_l}} Q_{Bp} A_p^{1/2} \frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} ds & =: p_l(t), \quad l = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Поля $\mathbf{z}(t)$, $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{v}_l(t)$ ($l = \overline{1, m}$) и функции $p_l(t)$ ($l = \overline{1, n}$) непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}_+$. Из (3.15) следует, что они удовлетворяют следующей системе уравнений и начальных условий:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{z}}{dt} = -A_p^{1/2} \left[A_p^{1/2} \mathbf{z} + Q_{0p}^* \mathbf{v} + \sum_{l=1}^m \sqrt{\frac{c_{-l}}{b_l}} Q_p^* \mathbf{v}_l + \sum_{l=1}^n \sqrt{\frac{\tilde{c}_{-l}}{\tilde{b}_l}} Q_{Bp}^* p_l + \right. \\ \quad \left. + [\Gamma_p(t) Q_p^* Q_p + \tilde{\Gamma}_p(t) Q_{Bp}^* Q_{Bp}] A_p^{1/2} \mathbf{u}^0 \right] + \mathbf{f}(t), \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \left[-Q_{0p} A_p^{1/2} \mathbf{z} \right], \\ \frac{d\mathbf{v}_l}{dt} = - \left[- \sqrt{\frac{c_{-l}}{b_l}} Q_p A_p^{1/2} \mathbf{z} + b_l \mathbf{v}_l \right], \quad l = \overline{1, m}, \\ \frac{dp_l}{dt} = - \left[- \sqrt{\frac{\tilde{c}_{-l}}{\tilde{b}_l}} Q_{Bp} A_p^{1/2} \mathbf{z} + \tilde{b}_l p_l \right], \quad l = \overline{1, n}, \\ \mathbf{z}(0) = \mathbf{u}^1, \quad \mathbf{v}(0) = A_0^{1/2} \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{v}_l(0) = 0 \quad (l = \overline{1, m}), \quad p_l(0) = 0 \quad (l = \overline{1, n}). \end{cases} \quad (3.17)$$

Систему (3.17) (с начальными условиями) запишем в виде дифференциально операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := \mathbf{L}_2(\Omega, \rho) \oplus \left(\oplus_{l=1}^{m+1} \mathbf{L}_2(\Omega, \rho) \right) \oplus \left(\oplus_{l=1}^n L_{2,\Omega} \right)$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}(\xi + \xi_0(t)) + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0, \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \xi(t) &:= (\mathbf{z}(t); w(t))^T = (\mathbf{z}(t); \mathbf{v}(t); \mathbf{v}_1(t); \dots; \mathbf{v}_m(t); p_1(t); \dots; p_n(t))^T, \\ \xi_0(t) &:= (\mathbf{0}; (Q_{0p}^*)^{-1} [\Gamma_p(t) Q_p^* Q_p + \tilde{\Gamma}_p(t) Q_{Bp}^* Q_{Bp}] A_p^{1/2} \mathbf{u}^0; \underbrace{\mathbf{0}; \dots; \mathbf{0}}_{m \text{ раз}}; \underbrace{\mathbf{0}; \dots; \mathbf{0}}_{n \text{ раз}})^T, \\ \xi^0 &:= (\mathbf{u}^1; A_0^{1/2} \mathbf{u}^0; \underbrace{\mathbf{0}; \dots; \mathbf{0}}_{m \text{ раз}}; \underbrace{\mathbf{0}; \dots; \mathbf{0}}_{n \text{ раз}})^T, \quad \mathcal{F}(t) := (\mathbf{f}(t); \underbrace{\mathbf{0}; \dots; \mathbf{0}}_{m+1 \text{ раз}}; \underbrace{\mathbf{0}; \dots; \mathbf{0}}_{n \text{ раз}})^T. \end{aligned}$$

Для оператора $\mathcal{A}$ справедливы следующие формулы:

$$\mathcal{A} = \text{diag}(A_p^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \text{diag}(A_p^{1/2}, \mathcal{I}), \quad (3.19)$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{Q} A_p^{-1/2} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \text{diag}(A_p, \mathcal{G} + \mathcal{Q} \mathcal{Q}^*) \begin{pmatrix} I & A_p^{-1/2} \mathcal{Q}^* \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ \xi = (\mathbf{z}; w)^T \in \mathcal{H} \mid \mathbf{z} + A_p^{-1/2} \mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(A_p) \right\}, \quad (3.21)$$

где $I, \mathcal{I}$ — единичные операторы в соответствующих пространствах,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &:= \left(Q_{0p}, \sqrt{\frac{c_{-1}}{b_1}} Q_p, \dots, \sqrt{\frac{c_{-m}}{b_m}} Q_p, \sqrt{\frac{\tilde{c}_{-1}}{\tilde{b}_1}} Q_{Bp}, \dots, \sqrt{\frac{\tilde{c}_{-n}}{\tilde{b}_n}} Q_{Bp} \right)^T, \\ \mathcal{G} &:= \text{diag}(0, b_1 I, \dots, b_m I, \tilde{b}_1 I, \dots, \tilde{b}_n I). \end{aligned}$$

Л е м м а 3.4. *Оператор $\mathcal{A}$ максимальный секториальный. Более того,*

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\text{Im} \lambda| \leq 2 \|\mathcal{Q}^*\| (\text{Re} \lambda)^{1/2} \},$$

где $\mathcal{W}(\mathcal{A})$ — числовая область значений оператора $\mathcal{A}$ (см. определение 1.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2.6. При этом для резольвенты оператора $\mathcal{A}$ справедлива формула (2.27) из замечания 2.2 с пучком $L(\lambda) := I - \lambda A_p^{-1} + \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q}$. ■

Т е о р е м а 3.1. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Пусть поле $\mathbf{f}$ локально гильдерово: для любого $\tau \in \mathbb{R}_+$ существуют $K = K(\tau) > 0$, $k = k(\tau) \in (0, 1]$ такие, что при любых $0 \leq s, t \leq \tau$

$$\|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)} \leq K|t - s|^k.$$

Тогда для любых $\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1 \in \mathcal{D}(A_p)$ существует и единственно сильное (в смысле определения 3.1) решение задачи (3.9), которое представимо в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \mathcal{C}(t)\mathbf{u}^0 + \mathcal{S}(t)\mathbf{u}^1 + \int_0^t \mathcal{S}(t-s)\mathbf{f}(s) ds, \\ \mathcal{C}(t)\mathbf{u}^0 &:= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} A_p^{-1/2} L^{-1}(\lambda) \left[I - \lambda A_p^{-1} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l} e^{-(b_l - \lambda)t}}{b_l(b_l - \lambda)} Q_p^* Q_p + \sum_{l=1}^n \frac{\tilde{c}_{-l} e^{-(\tilde{b}_l - \lambda)t}}{\tilde{b}_l(\tilde{b}_l - \lambda)} Q_{Bp}^* Q_{Bp} \right] A_p^{1/2} \mathbf{u}^0 d\lambda, \\ \mathcal{S}(t)\mathbf{u}^1 &:= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} A_p^{-1/2} L^{-1}(\lambda) A_p^{-1/2} \mathbf{u}^1 d\lambda, \quad L(\lambda) = I - \lambda A_p^{-1} + \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q}, \end{aligned}$$

где контур Γ является границей сектора $\Lambda_{\omega, \theta} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg(\lambda - \omega)| < \theta\}$ и ориентирован так, что $\operatorname{Im} \lambda$ убывает при его обходе. Числа $\omega > 0$ и $\theta \in (0, \pi/2)$ выбраны так, чтобы $\sigma(\mathcal{A}) \subset \Lambda_{\omega, \theta}$.

2. Если к тому же $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) + \sum_{k=0}^p e^{-i\sigma_k t} \mathbf{f}_k(t)$, где $\mathbf{g}, \mathbf{f}_k \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho))$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, p}$ ненулевые, то существуют абсолютные константы $M_1, M_2 \geq 1$ такие, что при $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} &\left\| A_p^{1/2} \left(\mathbf{u}(t) - A_0^{-1} \mathbf{f}_0(t) - \sum_{k=1}^p e^{-i\sigma_k t} \frac{1}{-i\sigma_k} A_p^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A_p^{-1/2} \mathbf{f}_k(t) \right) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2 + \\ &\quad + \left\| \mathbf{u}'(t) - \sum_{k=1}^p e^{-i\sigma_k t} A_p^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A_p^{-1/2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2 \leq \\ &\leq M_1 e^{-2\omega t} \left[\|A_p^{1/2} \mathbf{u}^0\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2 + \|\mathbf{u}^1\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2 + \sum_{k=0}^p \|\mathbf{f}_k(0)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2 \right] + \\ &\quad + M_2 \left[\int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left[\|\mathbf{g}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)} + \sum_{k=0}^p \|\mathbf{f}'_k(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)} \right] ds \right]^2, \end{aligned}$$

$$L(\lambda) := I - \lambda A_p^{-1} - \frac{1}{\lambda} Q_{0p}^* Q_{0p} + \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l} b_l^{-1}}{b_l - \lambda} Q_p^* Q_p + \sum_{l=1}^n \frac{\tilde{c}_{-l} \tilde{b}_l^{-1}}{\tilde{b}_l - \lambda} Q_{Bp}^* Q_{Bp}.$$

3. Если $\|\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)} \rightarrow 0$, $\|\mathbf{f}'_k(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)} \rightarrow 0$ ($k = \overline{0, p}$) при $t \rightarrow +\infty$, то и

$$\begin{aligned} & \left\| A_p^{1/2} \left(\mathbf{u}(t) - A_0^{-1} \mathbf{f}_0(t) - \sum_{k=1}^p e^{-i\sigma_k t} \frac{1}{-i\sigma_k} A_p^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A_p^{-1/2} \mathbf{f}_k(t) \right) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2 + \\ & + \left\| \mathbf{u}'(t) - \sum_{k=1}^p e^{-i\sigma_k t} A_p^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A_p^{-1/2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство проведем в несколько шагов.

1. Доказательство утверждения о разрешимости аналогично доказательству теоремы 2.1.

2. Если покажем, что $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, то из леммы 3.4 и [180, гл. 4, § 4, теорема 4.3] (см. также [135, гл. 5, § 1, теорема 1.10]) будет следовать, что оператор $-\mathcal{A}$ генерирует равномерно экспоненциально устойчивую (см. (1.6)) голоморфную полугруппу. При этом $\omega \in (0, \inf\{\operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\})$.

Для $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, учитывая факторизацию (3.20), достаточно установить, что $\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^* \gg 0$. Для любого $w \in (\oplus_{l=1}^{m+1} \mathbf{L}_2(\Omega, \rho)) \oplus (\oplus_{l=1}^n L_{2,\Omega})$ имеем

$$\begin{aligned} ((\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)w, w) &= (\mathcal{G}w, w) + \|\mathcal{Q}^*w\|^2 = \sum_{l=1}^m b_l \|\mathbf{v}_l\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2 + \sum_{l=1}^n \tilde{b}_l \|p_l\|_{L_{2,\Omega}}^2 + \\ &+ \left\| Q_{0p}^* \mathbf{v} + \sum_{l=1}^m \sqrt{\frac{c_{-l}}{b_l}} Q_p^* \mathbf{v}_l + \sum_{l=1}^n \sqrt{\frac{\tilde{c}_{-l}}{\tilde{b}_l}} Q_{Bp}^* p_l \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2 = \|\mathcal{S}w\|^2 \geq \|\mathcal{S}^{-1}\|^{-2} \cdot \|w\|^2. \end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{S}$ — это верхний треугольный операторный блок с непрерывно обратимой главной диагональю $\operatorname{diag}(Q_{0p}^*, b_1 I, \dots, b_m I, \tilde{b}_1 I, \dots, \tilde{b}_n I)$ (см. лемму 3.3). Следовательно, $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

3. Пусть выполнены условия на начальные данные и поле $\mathbf{f}(t)$, тогда построенная по полю $\mathbf{u}(t)$ функция $\xi(t)$ — сильное решение задачи Коши (3.18). Это решение представимо в следующем виде, учитывая, что оператор $-\mathcal{A}$ гене-

рирует голоморфную полугруппу и $\xi_0 \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(\mathcal{A}))$:

$$\xi(t) = \mathcal{U}(t)\xi^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)[\mathcal{F}(s) - \mathcal{A}\xi_0(s)] ds, \quad \mathcal{U}(t)\xi^0 := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-\lambda t} \mathcal{R}_{\lambda}(\mathcal{A})\xi^0 d\lambda,$$

где контур Γ выбирается как описано в условии теоремы. Доказательство формул из п. 1. состоит в простых вычислениях с использованием (2.27), формулы для пучка $L(\lambda)$, формул для ξ^0 , $\mathcal{F}(t)$, $\xi_0(t)$, $\xi(t)$ и связи $\mathbf{v}(t) = Q_0 A_p^{1/2} \mathbf{u}(t)$.

4. Утверждения п. 2. и п. 3. доказываются таким же образом, как соответствующие утверждения в теоремах 1.3 или 1.4. Теорема доказана. ■

3.3.2. Задача о спектре вязкоупругого тела параболического типа

Основные спектральные задачи

Будем разыскивать решения однородного ($\mathcal{F}(t) \equiv 0$) уравнения из (3.18) при ($\xi_0(t) \equiv 0$) в форме $\xi(t) = \exp(-\lambda t)\xi$, где λ — спектральный параметр, а ξ — амплитудный элемент. В результате придем к следующей основной спектральной задаче:

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}, \quad (3.22)$$

которую будем ассоциировать с *задачей о спектре вязкоупругого тела параболического типа* или, что то же, с *задачей о спектре однородного интегро-дифференциального уравнения второго порядка из (3.9)*.

При $\lambda \notin \{0, b_1, \dots, b_m, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n\} = \sigma(\mathcal{G})$, с задачей (3.22) свяжем следующую спектральную задачу:

$$\begin{aligned} L(\lambda)\mathbf{z} &:= [I - \lambda A_p^{-1} + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}]\mathbf{z} = \\ &= \left[I - \lambda A_p^{-1} - \frac{1}{\lambda} Q_{0p}^* Q_{0p} + \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l} b_l^{-1}}{b_l - \lambda} Q_p^* Q_p + \sum_{l=1}^n \frac{\tilde{c}_{-l} \tilde{b}_l^{-1}}{\tilde{b}_l - \lambda} Q_{Bp}^* Q_{Bp} \right] \mathbf{z} = 0, \\ &\mathbf{z} \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Существенный и дискретный спектр задачи

Л е м м а 3.5. $\{0, b_1, \dots, b_m\} \subset \rho(\mathcal{A})$. Точка $\lambda = \tilde{b}_q$ ($q = \overline{1, n}$) не является собственным значением спектральной задачи (3.22) (собственным значением оператора $\mathcal{A}$), если $c_1 > 0$ достаточно велико.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем в несколько шагов.

Запишем резольвентное уравнение $(\mathcal{A} - \lambda)\xi = \xi_0$ в виде системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_p^{1/2} \left[A_p^{1/2} \mathbf{u} + Q_{0p}^* \mathbf{v} + \sum_{l=1}^m \sqrt{\frac{c_{-l}}{b_l}} Q_p^* \mathbf{v}_l + \sum_{l=1}^n \sqrt{\frac{\tilde{c}_{-l}}{\tilde{b}_l}} Q_{Bp}^* p_l \right] - \lambda \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \\ -Q_{0p} A_p^{1/2} \mathbf{u} - \lambda \mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \\ -\sqrt{\frac{c_{-l}}{b_l}} Q_p A_p^{1/2} \mathbf{u} + b_l \mathbf{v}_l - \lambda \mathbf{v}_l = \mathbf{v}_{l0}, \quad l = \overline{1, m}, \\ -\sqrt{\frac{\tilde{c}_{-l}}{\tilde{b}_l}} Q_{Bp} A_p^{1/2} \mathbf{u} + \tilde{b}_l p_l - \lambda p_l = p_{l0}, \quad l = \overline{1, n}. \end{array} \right. \quad (3.24)$$

1. В теореме 3.1 доказано, что $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Положим в (3.24) $\lambda = b_q$, $\xi_0 = 0$. Из третьей строчки при $l = q$ найдем, что $\mathbf{u} = 0$. Учитывая (3.3) и второе условие в (3.4), теперь из второй, третьей и четвертой строчки в (3.24) имеем $\mathbf{v} = 0$, $\mathbf{v}_l = 0$ ($l = \overline{1, m}$, $l \neq q$), $p_l = 0$ ($l = \overline{1, n}$). Теперь из первой строчки в (3.24) получим, что $\mathbf{v}_q = 0$, и, следовательно, $\xi = 0$. Таким образом, $b_q \notin \sigma_p(\mathcal{A})$.

2. Покажем, что $b_q \in \rho(\mathcal{A})$. Заметим, что резольвента оператора $\mathcal{A}$ может быть вычислена по формуле (2.27) (см. (2.26) и замечание 2.2) с пучком $L(\lambda)$, определяемым по формуле (3.23). Таким образом, достаточно показать, в силу (2.26), что пучок $L(\lambda)$ непрерывно обратим в некоторой проколотой окрестности точки $\lambda = b_q$. Требуемое утверждение следует из непрерывной обратимости оператора $Q_p^* Q_p$ (см. (3.10) и лемму 3.2), представления (см. (3.23))

$$L(\lambda) = I - \lambda A_p^{-1} - \frac{1}{\lambda} Q_{0p}^* Q_{0p} + \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l} b_l^{-1}}{b_l - \lambda} Q_p^* Q_p + \sum_{l=1}^n \frac{\tilde{c}_{-l} \tilde{b}_l^{-1}}{\tilde{b}_l - \lambda} Q_{Bp}^* Q_{Bp} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{c_{-l}b_l^{-1}}{b_q - \lambda} Q_p^* Q_p \left[I + \frac{b_q - \lambda}{c_{-l}b_l^{-1}} (Q_p^* Q_p)^{-1} \left\{ I - \lambda A_p^{-1} - \frac{1}{\lambda} Q_{0p}^* Q_{0p} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{l \neq q}^m \frac{c_{-l}b_l^{-1}}{b_l - \lambda} Q_p^* Q_p + \sum_{l=1}^n \frac{\tilde{c}_{-l}\tilde{b}_l^{-1}}{\tilde{b}_l - \lambda} Q_{Bp}^* Q_{Bp} \right\} \right] =: \frac{c_{-l}b_l^{-1}}{b_q - \lambda} Q_p^* Q_p \left[I + G_q(\lambda) \right],
\end{aligned}$$

где $\|G_q(\lambda)\| \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow b_q$, и теоремы об обращении оператора, близкого к единичному.

3. Положим в (3.24) $\lambda = \tilde{b}_q$, $\xi_0 = 0$. Из четвертой строчки при $l = q$ получим, что $Q_{Bp} A_p^{1/2} \mathbf{u} = 0$. Умножим первое уравнение в (3.24) скалярно на $\mathbf{u}$ и преобразуем полученное выражение с помощью последнего соотношения, второй и последующих строчек в (3.24):

$$\|A_p^{1/2} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2 - \frac{1}{\tilde{b}_q} \|A_0^{1/2} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2 + \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l(b_l - \tilde{b}_q)} \|A^{1/2} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2 - \tilde{b}_q \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2 = 0.$$

Отсюда, из определения операторов A_p , A_0 , A (см. (3.8), (3.14)) и из (3.7) имеем

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{2} c_1 - \frac{1}{2\tilde{b}_q} (c_0 - \Gamma_p(0)) + \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{2b_l(b_l - \tilde{b}_q)} \right] \mathcal{J}(\mathbf{u}) - \tilde{b}_q \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2 + \\
&+ \left[\tilde{c}_1 + \frac{1}{6} c_1 - \frac{1}{\tilde{b}_q} \left(\tilde{c}_0 + \frac{1}{6} (c_0 - \Gamma_p(0)) - \tilde{\Gamma}_p(0) \right) + \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{6b_l(b_l - \tilde{b}_q)} \right] \mathcal{D}(\mathbf{u}) = 0.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Пусть $C_F > 0$ константа из неравенства Фридрихса $\mathcal{J}(\mathbf{u}) \geq C_F \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2$, верного для любого $\mathbf{u} \in H_{A(\alpha, \beta)}$ ($\alpha > 0$, $\beta \geq 0$). Допустим, что $c_1 > 0$ настолько велико, что

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{2} c_1 - \frac{1}{2\tilde{b}_q} (c_0 - \Gamma_p(0)) + \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{2b_l(b_l - \tilde{b}_q)} \right] C_F - \tilde{b}_q > 0, \\
&\tilde{c}_1 + \frac{1}{6} c_1 - \frac{1}{\tilde{b}_q} \left(\tilde{c}_0 + \frac{1}{6} (c_0 - \Gamma_p(0)) - \tilde{\Gamma}_p(0) \right) + \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{6b_l(b_l - \tilde{b}_q)} \geq 0,
\end{aligned}$$

тогда из (3.25) получим, что $\mathbf{u} = 0$. Из второй, третьей и четвертой строчки в (3.24) тогда следует, что $\mathbf{v} = 0$, $\mathbf{v}_l = 0$ ($l = \overline{1, m}$), $p_l = 0$ ($l = \overline{1, n}$, $l \neq q$). Из первого уравнения в (3.24) теперь получим, что $A_p^{1/2} Q_{Bp}^* p_q = 0$. Последнее вместе с $\text{Ker } B^* = \{0\}$ влечет $p_q = 0$. Таким образом, $\xi = 0$ и $\lambda = \tilde{b}_q$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}$. Лемма доказана. $\blacksquare$

Для описания существенного спектра (см. определение 1.4) оператора $\mathcal{A}$ определим две функции:

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &:= \lambda c_1 - \left[c_0 - \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l - \lambda} \right], \\ \psi(\lambda) &:= \lambda(\tilde{c}_1 + \frac{1}{6} c_1) - \left[\tilde{c}_0 + \frac{1}{6} c_0 - \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{6(b_l - \lambda)} - \sum_{l=1}^n \frac{\tilde{c}_{-l}}{\tilde{b}_l - \lambda} \right].\end{aligned}\tag{3.26}$$

Л е м м а 3.6. $\tilde{b}_q \in \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ ($q = \overline{1, n}$) тогда и только тогда, когда $\varphi(\tilde{b}_q) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что оператор $(\mathcal{A} - \tilde{b}_q)$ фредгольмов в точности тогда, когда $\varphi(\tilde{b}_q) \neq 0$. Пусть $\xi \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \tilde{b}_q)$, тогда из (3.24) при $\lambda = \tilde{b}_q$, $\xi_0 = 0$ найдем, что $(\mathbf{u}; p_q)^\tau \in \text{Ker} \mathcal{A}_q$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_q &:= \text{diag}(A_p^{1/2}, \mathcal{I}) \times \\ &\times \begin{pmatrix} I - \tilde{b}_q A_p^{-1} - \frac{Q_{0p}^* Q_{0p}}{\tilde{b}_q} + \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l} Q_p^* Q_p}{b_l(b_l - \tilde{b}_q)} + \sum_{l=1, l \neq q}^n \frac{\tilde{c}_{-l} Q_{Bp}^* Q_{Bp}}{\tilde{b}_l(\tilde{b}_l - \tilde{b}_q)} & \sqrt{\frac{\tilde{c}_{-q}}{\tilde{b}_q}} Q_{Bp}^* \\ -\sqrt{\frac{\tilde{c}_{-q}}{\tilde{b}_q}} Q_{Bp} & 0 \end{pmatrix} \times \\ &\times \text{diag}(A_p^{1/2}, \mathcal{I}).\end{aligned}$$

Верно и обратное утверждение. Таким образом, $\dim \text{Ker}(\mathcal{A} - \tilde{b}_q) < +\infty$ тогда и только тогда, когда $\dim \text{Ker} \mathcal{A}_q < +\infty$. Далее, можно проверить, что

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^* &= \text{diag}(A_p^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} I & -\mathcal{Q}^* \\ \mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \text{diag}(A_p^{1/2}, \mathcal{I}), \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}^*) &= \left\{ \xi = (\mathbf{u}; w)^\tau \in \mathcal{H} \mid \mathbf{u} - A_p^{-1/2} \mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(A_p) \right\}.\end{aligned}$$

Отсюда, проводя вычисления как и выше, получим, что $\dim \text{Ker}(\mathcal{A}^* - \tilde{b}_q) < +\infty$ тогда и только тогда, когда $\dim \text{Ker} \mathcal{A}_q^* < +\infty$. Таким образом, оператор $(\mathcal{A} - \tilde{b}_q)$ фредгольмов или нет одновременно с оператором $\mathcal{A}_q$.

Краевая задача, отвечающая операторному уравнению $\mathcal{A}_q(\mathbf{u}; p_q)^\tau = (\mathbf{u}_0; p_{q0})^\tau$,

имеет вид

$$\begin{cases} -\frac{1}{2\tilde{b}_q} \varphi(\tilde{b}_q) \Delta \mathbf{u}(x) - \frac{1}{\lambda} \left[\psi(\lambda) - \frac{\tilde{c}_{-q}}{\tilde{b}_q - \lambda} \right] \Big|_{\lambda=\tilde{b}_q} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}(x) - \\ \quad - \tilde{b}_q \rho(x) \mathbf{u}(x) - \sqrt{\frac{\tilde{c}_{-q}}{\tilde{b}_q}} \nabla p_q(x) = \rho(x) \mathbf{u}_0(x), \\ -\sqrt{\frac{\tilde{c}_{-q}}{\tilde{b}_q}} \operatorname{div} \mathbf{u}(x) = p_{q0}(x), \quad x \in \Omega, \quad \mathbf{u}(x) = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Эта краевая задача при $\varphi(\tilde{b}_q) \neq 0$ определяет невырожденную систему Дуглиса–Ниренберга и, согласно лемме 2.13, является эллиптической. Из работы [150] следует, что $\mathcal{A}_q$ фредгольмов. Лемма доказана. $\blacksquare$

Т е о р е м а 3.2. *Имеет место следующая формула:*

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \{\varphi(\lambda) = 0\} \cup \left\{ \frac{1}{2} \varphi(\lambda) + \psi(\lambda) = 0 \right\} \cup \{\varphi(\lambda) + \psi(\lambda) = 0\},$$

где функции $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ определены в (3.26). Множество $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $\lambda \notin \{0, b_1, \dots, b_m, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n\}$ (см. леммы 3.5, 3.6) и $\lambda \notin \sigma_{ess}(\mathcal{A})$. Как и в лемме 3.6 здесь можно установить, что оператор $(\mathcal{A} - \lambda)$ фредгольмов одновременно с оператором $A^{1/2}L(\lambda)A^{1/2}$ (см. определение пучка $L(\lambda)$ в (3.23)). Краевая задача, отвечающая операторному уравнению $A^{1/2}L(\lambda)A^{1/2}\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$, имеет вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\lambda} \varphi(\lambda) \Delta \mathbf{u}(x) - \frac{1}{\lambda} \psi(\lambda) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}(x) - \lambda \rho(x) \mathbf{u}(x) &= \rho(x) \mathbf{u}_0(x), \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{u}(x) &= \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Эта краевая задача при условиях леммы определяет невырожденную систему Дуглиса–Ниренберга и, согласно лемме 2.14, является эллиптической. Из работы [150] следует, что оператор $A^{1/2}L(\lambda)A^{1/2}$ фредгольмов. Отсюда, из определения 1.4, лемм 3.5 и 3.6 следует формула для $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$.

Далее, по лемме 3.4 оператор $-\mathcal{A}$ является максимальным диссипативным оператором. Следовательно, оператор $(\mathcal{A} - \lambda)$ непрерывно обратим при отрицательных λ и его дефект и индекс равны нулю. Множество $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A})$, очевидно, является связным. Отсюда и из теоремы [44, гл. 4, § 5, п. 2, теорема 5.17] (см. также [146, гл. 17, § 2, теорема 2.1]) об устойчивости индекса и дефекта замкнутого оператора следует, что множество $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$. Теорема доказана. $\blacksquare$

З а м е ч а н и е 3.1. Отметим, что для упрощения вычислений предполагается выполненным условие $\{b_1, \dots, b_m\} \cap \{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n\} = \emptyset$ (см. (3.4)). Из условий (3.4) также следует, что $\varphi(0) < 0$, $\psi(0) \leq 0$ (см. (3.26)). Простые геометрические рассуждения показывают, что существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит из не более чем $(3m + 2n + 3)$ -х действительных положительных точек. Если уравнения $\varphi(\lambda) = 0$ и $\psi(\lambda) = 0$ не имеют одинаковых корней, то существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит в точности из $(3m + 2n + 3)$ -х действительных положительных точек. $\blacktriangleright$

Локализация спектра и асимптотика спектра на бесконечности

Т е о р е м а 3.3. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Спектр оператора $\mathcal{A}$ действительный, за исключением, быть может, конечного числа комплексно сопряженных собственных значений.
2. Пусть λ невещественное собственное значение оператора $\mathcal{A}$, тогда

$$\gamma_1 < \operatorname{Re} \lambda < \gamma_2,$$

$$|\lambda|^2 < (\max\{b_m, \tilde{b}_n\} + 2\|Q\|^2 + 2\|Q\|(\max\{b_m, \tilde{b}_n\} + \|Q\|^2)^{1/2})(\max\{b_m, \tilde{b}_n\} + \|Q\|^2)$$

$$\gamma_1 := [2\|A_p^{-1/2}\|^2]^{-1}, \quad \gamma_2 := \max\{b_m, \tilde{b}_n\} + \|Q\|^2 + \|Q\|(\max\{b_m, \tilde{b}_n\} + \|Q\|^2)^{1/2}.$$

Спектр оператора $\mathcal{A}$ действительный, если выполнено условие

$$2\|A_p^{-1/2}\|^2 \leq (\max\{b_m, \tilde{b}_n\} + \|Q\|^2 + \|Q\|(\max\{b_m, \tilde{b}_n\} + \|Q\|^2)^{1/2})^{-1}.$$

3. Оператор $\mathcal{A}$ имеет ветвь собственных значений $\{\lambda_k^{(+\infty)}(\mathcal{A})\}_{k=1}^{\infty}$ со следующей асимптотикой при $k \rightarrow +\infty$:

$$\lambda_k^{(+\infty)}(\mathcal{A}) = \left\{ \frac{1}{6\pi^2} \left(2 \left[\frac{c_1}{2} \right]^{-3/2} + \left[\tilde{c}_1 + \frac{2c_1}{3} \right]^{-3/2} \right) \int_{\Omega} \rho^{3/2}(x) d\Omega \right\}^{-2/3} k^{2/3} (1 + o(1)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения п. 1. и п. 2. доказываются таким же образом, как п. 1. и п. 2. в теореме 2.5. В частности, оператор $\mathcal{A}^{-1}$ принадлежит классу Хелтона ($\mathcal{A}^{-1} \in (H)$) и для углового оператора K_+ инвариантного неотрицательного подпространства $L_+(\mathcal{A}^{-1})$ верно, что $K_+ \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 3$. Наличие ветви собственных значений из п. 3. и асимптотическая формула доказываются таким же образом, как в п. 2. теоремы 2.4. ■

З а м е ч а н и е 3.2. Можно получить (см. замечание 2.8) более компактное, однако более грубое достаточное условие отсутствия незначительных собственных значений: $\|A_p^{-1/2}\| \leq (3\max\{b_m, \tilde{b}_n\} + 4\|Q\|^2)^{-1/2}$. ►

Некоторые свойства корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ и пучка $L(\lambda)$, представление решения эволюционной задачи в виде ряда

По аналогии с теоремой 1.7 может быть доказана следующая теорема о связи корневых элементов (см. определение 1.5) оператора $\mathcal{A}$ и пучка $L(\lambda)$.

Т е о р е м а 3.4. Пусть набор элементов $\{\xi_k = (\mathbf{u}_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ является цепочкой из собственного и присоединенных элементов оператора $\mathcal{A}$, отвечающей собственному значению λ_0 ($\lambda_0 \notin \{0, b_1, \dots, b_m, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n\}$), тогда набор элементов $\{\mathbf{z}_k\}_{k=0}^{n-1} := \{A_p^{1/2} \mathbf{u}_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов пучка $L(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_0 .

Обратно, пусть набор элементов $\{\mathbf{z}_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов пучка $L(\lambda)$, отвечающая собственному значению

λ_0 , тогда $\{\xi_k = (A_p^{-1/2} \mathbf{z}_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$, где $w_k = \sum_{l=0}^k (\mathcal{G} - \lambda_0)^{-(k-l+1)} \mathcal{Q} \mathbf{z}_l$, — цепочка из собственного и присоединенных элементов оператора $\mathcal{A}$.

Докажем некоторые свойства системы собственных и присоединенных элементов пучка $L(\lambda)$, отвечающих собственным значениям, сгущающимся к бесконечности (см. теорему 3.3). В силу теоремы 3.4 следующее утверждение может быть сформулировано в терминах корневых элементов оператора $\mathcal{A}$.

Т е о р е м а 3.5. *Справедливы следующие утверждения.*

1. Пусть $0 < t < \min\{b_m^{-1}, \tilde{b}_n^{-1}\}$ таково, что

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \left[\lambda - \lambda^2 \|Q_{0p}\|^2 - \lambda^2 \|Q_p\|^2 \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l(1 - \lambda b_l)} - \lambda^2 \|Q_{Bp}\|^2 \sum_{l=1}^n \frac{\tilde{c}_{-l}}{\tilde{b}_l(1 - \lambda \tilde{b}_l)} \right] \right|_{\lambda=t} > 0. \quad (3.27)$$

Тогда система собственных элементов пучка $L(\lambda)$, отвечающих собственным значениям, лежащим на луче $\{\lambda > t^{-1}\}$, образует p -базис при $p > 3/2$ (см. определение 2.6) в $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)$ с точностью до конечного дефекта.

2. Пусть $0 < t < \min\{b_m^{-1}, \tilde{b}_n^{-1}\}$ удовлетворяет (3.27). Если норма оператора $A_p^{-1/2}$ удовлетворяет неравенству

$$\|A_p^{-1/2}\|^2 < t - t^2 \|Q_{0p}\|^2 - t^2 \|Q_p\|^2 \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l(1 - \lambda b_l)} - \lambda^2 \|Q_{Bp}\|^2 \sum_{l=1}^n \frac{\tilde{c}_{-l}}{\tilde{b}_l(1 - t \tilde{b}_l)},$$

то система собственных элементов пучка $L(\lambda)$, отвечающих собственным значениям, лежащим на луче $\{\lambda > t^{-1}\}$, образует p -базис при $p > 3/2$ в $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.9. ■

Следующая теорема аналогична теореме 2.10. Соответствующие обозначения см. на страницах 123 и 132.

Т е о р е м а 3.6. *Имеют место следующие утверждения.*

1. $\text{codim } \mathfrak{F}(\mathcal{A}) \leq \text{codim } \mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) < \infty$.

2. $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) = \mathcal{H} \iff \text{sp}\{\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A}) | \lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{A}) \cap (\gamma_1, \gamma_2)\}$ — невырожденное подпространство, где γ_1, γ_2 — числа, определенные в п. 2. теоремы 3.3.

3. $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H} \iff \mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A}) = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ при $\lambda \neq \bar{\lambda}$ и $s(\mathcal{A}) = \emptyset$. Если $\gamma_2 \leq \gamma_1$, то $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$.

4. Если $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$ (соответственно $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$), то в $\mathcal{H}$ существует почти $\mathcal{J}$ -ортонормированный p -базис при $p > 3$, составленный из собственных (соответственно корневых) элементов оператора $\mathcal{A}$. Если $\gamma_2 \leq \gamma_1$, то указанный базис из собственных элементов будет $\mathcal{J}$ -ортонормированным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В теореме 3.3 отмечено, что $\mathcal{A}^{-1} \in (H)$ а для углового оператора K_+ инвариантного неотрицательного подпространства верно, что $K_+ \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 3$. Из теоремы 3.2 следует, что спектр оператора $\mathcal{A}^{-1}$ имеет не более $(3m + 2n + 4)$ -х точек сгущения. Таким образом, оператор $\mathcal{A}^{-1}$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Т.Я. Азизова–Г.К. Лангера (см. [3, гл. 4, § 2, теорема 2.12]). Применим эту теорему к оператору $\mathcal{A}^{-1}$.

1. Из равенств $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) = \mathfrak{F}(\mathcal{A}^{-1})$, $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathfrak{F}_0(\mathcal{A}^{-1})$ следует утверждение п. 1.

2. $\mathfrak{F}(\mathcal{A}^{-1}) = \mathcal{H} \iff \text{sp}\{\mathfrak{L}_{\lambda^{-1}}(\mathcal{A}^{-1}) | \lambda^{-1} \in s(\mathcal{A}^{-1})\}$ — невырожденное подпространство. Из [3, гл. 4, § 3, замечание 3.8] следует, что при доказательстве равенства $\mathfrak{F}(\mathcal{A}^{-1}) = \mathcal{H}$ невырожденность $\mathfrak{L}_{\lambda^{-1}}(\mathcal{A}^{-1})$ нужно проверять только для тех $\lambda^{-1} \in s(\mathcal{A}^{-1})$, которые являются точками сгущения спектра оператора $\mathcal{A}^{-1}$. Из равенства $\mathfrak{L}_{\lambda^{-1}}(\mathcal{A}^{-1}) = \mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A})$ следует, что нужно проверять невырожденность $\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A})$ для $\lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{A}) \cap s(\mathcal{A})$.

Выясним расположение множества $s(\mathcal{A})$. Пусть $\lambda = \bar{\lambda} \in \sigma_p(\mathcal{A})$ ($\lambda \notin \sigma(\mathcal{G})$) и $\text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ вырождено. В силу теоремы 3.4 это эквивалентно тому, что в $\text{Ker}L(\lambda)$ существует такой элемент $\mathbf{z}_0$, что элемент $\xi_0 = (A_p^{-1/2}\mathbf{z}_0; (\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}\mathbf{z}_0)^\tau$ $\mathcal{J}$ -ортogonalен всем элементам вида $\xi = (A_p^{-1/2}\mathbf{z}; (\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}\mathbf{z})^\tau$, где $\mathbf{z} \in \text{Ker}L(\lambda)$, то есть $[\xi_0, \xi] = 0$. Используя введенные ранее обозначения последнее уравнение можно привести к виду $(L'(\lambda)\mathbf{z}_0, \mathbf{z}) = 0$. В частности, имеем два соотношения: $(L(\lambda)\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_0) = 0$, $(L'(\lambda)\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_0) = 0$. Отсюда, из (3.23), леммы 3.3 и (3.12) полу-

чим, что λ есть кратный корень уравнения

$$1 - \lambda \frac{\|A_p^{-1/2} \mathbf{z}_0\|^2}{\|\mathbf{z}_0\|^2} - \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\|Q \mathbf{z}_0\|^2}{\|\mathbf{z}_0\|^2} - \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l - \lambda} \frac{\|Q_p \mathbf{z}_0\|^2}{\|\mathbf{z}_0\|^2} - \sum_{l=1}^n \frac{\tilde{c}_{-l}}{\tilde{b}_l - \lambda} \frac{\|Q_{Bp} \mathbf{z}_0\|^2}{\|\mathbf{z}_0\|^2} \right] = 0.$$

Это уравнение после подходящих обозначений примет вид (2.61) при $\omega_0 = 0$. Рассуждая дальше как в теореме 3.3 при доказательстве п. 2., найдем, что $\lambda \in (\gamma_1, \gamma_2)$ (числа γ_1, γ_2 определены в теореме 3.3).

Из леммы 3.5 следует, что $0, b_1, \dots, b_m \notin \sigma_p(\mathcal{A})$, а значит $0, b_1, \dots, b_m \notin s(\mathcal{A})$.

Пусть $\tilde{b}_q \notin (\gamma_1, \gamma_2)$ при некотором $q = \overline{1, n}$, тогда $\tilde{b}_q \leq \gamma_1$, поскольку $\tilde{b}_q \leq \max\{b_m, \tilde{b}_n\} < \gamma_2$. Допустим, что $\tilde{b}_q \leq \gamma_1$ и $\text{Ker}(\mathcal{A} - \tilde{b}_q)$ вырождено, то есть существует $\xi_0 \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \tilde{b}_q)$ такое, что $[\xi_0, \xi] = 0$ для любого $\xi \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \tilde{b}_q)$. В частности, $[\xi_0, \xi_0] = 0$.

Пусть $\xi_0 \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \tilde{b}_q)$, тогда из (3.24) имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} A_p^{1/2} \left[A_p^{1/2} \mathbf{u}_0 + Q_{0p}^* \mathbf{v}_0 + \right. \\ \quad \left. + \sum_{l=1}^m \sqrt{\frac{c_{-l}}{b_l}} Q_p^* \mathbf{v}_{l0} + \sum_{l=1}^n \sqrt{\frac{\tilde{c}_{-l}}{\tilde{b}_l}} Q_{Bp}^* p_{l0} \right] - \tilde{b}_q \mathbf{u}_0 = 0, \\ -Q_{0p} A_p^{1/2} \mathbf{u}_0 - \tilde{b}_q \mathbf{v}_0 = 0, \\ -\sqrt{\frac{c_{-l}}{b_l}} Q_p A_p^{1/2} \mathbf{u}_0 + (b_l - \tilde{b}_q) \mathbf{v}_{l0} = 0, \quad l = \overline{1, m}, \\ -\sqrt{\frac{\tilde{c}_{-l}}{\tilde{b}_l}} Q_{Bp} A_p^{1/2} \mathbf{u}_0 + (\tilde{b}_l - \tilde{b}_q) p_{l0} = 0, \quad l = \overline{1, n}, \quad l \neq q, \\ Q_{Bp} A_p^{1/2} \mathbf{u}_0 = 0. \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Умножим здесь первое уравнение скалярно на $\mathbf{u}_0$ и преобразуем его с помощью оставшихся уравнений. В результате получим следующее соотношение:

$$1 - \tilde{b}_q \frac{\|A_p^{-1/2} \mathbf{z}_0\|^2}{\|\mathbf{z}_0\|^2} - \frac{1}{\tilde{b}_q} \frac{\|Q_{0p} \mathbf{z}_0\|^2}{\|\mathbf{z}_0\|^2} + \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l(b_l - \tilde{b}_q)} \frac{\|Q_p \mathbf{z}_0\|^2}{\|\mathbf{z}_0\|^2} = 0, \quad z_0 := A_p^{1/2} \mathbf{u}_0. \quad (3.29)$$

Далее, из соотношения

$$[\xi_0, \xi_0] = \|\mathbf{u}_0\|^2 - \|\mathbf{v}_0\|^2 - \sum_{l=1}^m \|\mathbf{v}_{l0}\|^2 - \sum_{l=1}^n \|p_{l0}\|_{L_{2,\Omega}}^2 = 0$$

и (3.28) имеем

$$-\frac{\|A_p^{-1/2}\mathbf{z}_0\|^2}{\|\mathbf{z}_0\|^2} + \frac{1}{\tilde{b}_q^2} \frac{\|Q_{0p}\mathbf{z}_0\|^2}{\|\mathbf{z}_0\|^2} + \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l(b_l - \tilde{b}_q)^2} \frac{\|Q_p\mathbf{z}_0\|^2}{\|\mathbf{z}_0\|^2} = -\|p_{q0}\|_{L_{2,\Omega}}^2. \quad (3.30)$$

Определим функцию

$$f(\lambda) := 1 - \lambda \frac{\|A_p^{-1/2}\mathbf{z}_0\|^2}{\|\mathbf{z}_0\|^2} - \frac{1}{\lambda} \frac{\|Q_{0p}\mathbf{z}_0\|^2}{\|\mathbf{z}_0\|^2} + \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l(b_l - \lambda)} \frac{\|Q_p\mathbf{z}_0\|^2}{\|\mathbf{z}_0\|^2},$$

тогда из (3.29) и (3.30) получим, что $f(\tilde{b}_q) = 0$, $f'(\tilde{b}_q) \leq 0$. Простые геометрические рассуждения показывают, что $f'(\tilde{b}_q) \geq 0$. Следовательно, $p_{q0} = 0$ и $f'(\tilde{b}_q) = 0$ и, таким образом, точка $\tilde{b}_q$ есть кратный корень уравнения $f(\lambda) = 0$. Рассуждая дальше как в теореме 3.3 при доказательстве п. 2., найдем, что $\tilde{b}_q > \gamma_1$, что противоречит предположению $\tilde{b}_q \leq \gamma_1$.

Таким образом, $s(\mathcal{A}) \subset (\gamma_1, \gamma_2)$ и утверждение 2. доказано.

3. Первые части утверждений 3. и 4. — это переформулировки соответствующих утверждений используемой теоремы Т.Я. Азизова–Г.К. Лангера. Если $\gamma_2 \leq \gamma_1$, то $s(\mathcal{A}) = \emptyset$ и оператор $\mathcal{A}$ не имеет невещественных собственных значений. Следовательно, $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$ и соответствующий p -базис при $p > 3$ в $\mathcal{H}$, составленный из собственных элементов оператора $\mathcal{A}$, будет $\mathcal{J}$ -ортонормированным. Теорема доказана. ■

Будем считать, что $\gamma_2 \leq \gamma_1$, то есть выполнено условие отсутствия невещественных собственных значений у оператора $\mathcal{A}$ (см. теорему 3.3, п. 2. или замечание 3.2), тогда по теореме 3.6 существует $\mathcal{J}$ -ортонормированный p -базис при $p > 3$ в $\mathcal{H}$, составленный из собственных элементов оператора $\mathcal{A}$. По теореме 3.4 этот базис можно представить в следующем виде, разделив его на систему положительных и негативных элементов:

$$\begin{aligned} \{\xi_k^\pm := (A_p^{-1/2}\mathbf{z}_k^\pm; (\mathcal{G} - \lambda_k^\pm)^{-1}\mathcal{Q}\mathbf{z}_k^\pm)^\tau\}_{k=1}^\infty, \\ \xi_k^\pm \in L_\pm(\mathcal{A}^{-1}), \quad [\xi_k^+, \xi_j^+] = \delta_{kj}, \quad [\xi_k^-, \xi_j^-] = -\delta_{kj}, \quad [\xi_k^+, \xi_j^-] = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Собственные значения λ_k^+ составляют ветвь из теоремы 3.3, а собственные значения λ_k^- — оставшийся спектр.

Представим решение $\xi(t)$ задачи (3.18) в форме

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^+(t) \xi_k^+ + \sum_{j=1}^{\infty} c_j^-(t) \xi_j^-, \quad c_k^+(0) = [\xi^0, \xi_k^+], \quad c_j^-(0) = -[\xi^0, \xi_j^-]. \quad (3.32)$$

Из (3.18), (3.31), (3.32), вида ξ^0 и $\mathcal{F}(t)$ найдем, что

$$\begin{aligned} \xi(t) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-\lambda_k^+ t} [\xi^0, \xi_k^+] + \int_0^t e^{-\lambda_k^+(t-s)} [\mathcal{F}(s), \xi_k^+] ds \right) \xi_k^+ - \\ & - \sum_{j=1}^{\infty} \left(e^{-\lambda_j^- t} [\xi^0, \xi_j^-] + \int_0^t e^{-\lambda_j^-(t-s)} [\mathcal{F}(s), \xi_j^-] ds \right) \xi_j^-, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$[\xi^0, \xi_k^{\pm}] = (\mathbf{u}^1, A_p^{-1/2} \mathbf{z}_k^{\pm})_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)} + \frac{1}{\lambda_k^{\pm}} (A_0 \mathbf{u}^0, A_p^{-1/2} \mathbf{z}_k^{\pm})_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$[\mathcal{F}(t), \xi_k^{\pm}] = (\mathbf{f}(t) - \Gamma_p(t) A \mathbf{u}_0 - \tilde{\Gamma}_p(t) B^* B \mathbf{u}_0, A_p^{-1/2} \mathbf{z}_k^{\pm})_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Из (3.33), учитывая, что $\xi(t) = (\mathbf{u}'(t); \mathbf{v}'(t); \dots)^\tau$, $\mathbf{u}(t) = A_0^{-1/2} \mathbf{v}'(t)$, получим в явном виде разложение решения $\mathbf{u}(t)$ задачи (3.9) по нормированной специальным образом системе собственных элементов $\{\mathbf{z}_k^{\pm}\}_{k=1}^{\infty}$ пучка $L(\lambda)$ (спектральной задачи (3.23)), связанных с $\mathcal{J}$ -ортонормированным базисом (3.31):

$$\mathbf{u}(t) = (\mathcal{C}_+(t) - \mathcal{C}_-(t)) \mathbf{u}^0 + (\mathcal{S}_+(t) - \mathcal{S}_-(t)) \mathbf{u}^1 + \int_0^t (\mathcal{S}_+(t-s) - \mathcal{S}_-(t-s)) \mathbf{f}(s) ds,$$

$$\begin{aligned} C_{\pm}(t) \mathbf{u}^0 := & \sum_{k=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{(\lambda_k^{\pm})^2} e^{-\lambda_k^{\pm} t} (A_0 \mathbf{u}^0, A_p^{-1/2} \mathbf{z}_k^{\pm})_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)} + \right. \\ & + \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{\lambda_k^{\pm} b_l (b_l - \lambda_k^{\pm})} (e^{-\lambda_k^{\pm} t} - e^{-b_l t}) (A \mathbf{u}^0, A_p^{-1/2} \mathbf{z}_k^{\pm})_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)} + \\ & \left. + \sum_{l=1}^n \frac{\tilde{c}_{-l}}{\lambda_k^{\pm} \tilde{b}_l (\tilde{b}_l - \lambda_k^{\pm})} (e^{-\lambda_k^{\pm} t} - e^{-\tilde{b}_l t}) (B^* B \mathbf{u}^0, A_p^{-1/2} \mathbf{z}_k^{\pm})_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)} \right] A_p^{-1/2} \mathbf{z}_k^{\pm}, \\ S_{\pm}(t) \mathbf{u}^1 := & - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k^{\pm}} e^{-\lambda_k^{\pm} t} (\mathbf{u}^1, A_p^{-1/2} \mathbf{z}_k^{\pm})_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)} A_p^{-1/2} \mathbf{z}_k^{\pm}. \end{aligned}$$

О малых движениях синхронно-изотропной среды параболического типа

Рассмотрим специальный частный случай задачи (3.2)-(3.6). Будем считать, что в задаче (3.2)-(3.6), описывающей движения начально-изотропного вязкоупругого тела, выполнены следующие условия на коэффициенты:

$$\begin{aligned} m = n, \quad b_l = \tilde{b}_l \quad (l = \overline{1, m = n}), \quad c_{-l} = 2\mu\alpha_{-l}, \quad \tilde{c}_{-l} = \eta\alpha_{-l}, \\ \alpha_{-l} > 0 \quad (l = \overline{-1, m}), \quad \mu > 0, \quad \eta \geq 0, \end{aligned}$$

тогда соответствующая система уравнений и граничных условий будет описывать малые движения синхронно-изотропной среды параболического типа. Задача Коши (3.9) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = -\alpha_1 A \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \alpha_0 A \mathbf{u} + \sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \alpha_{-l} A \mathbf{u}(s) ds + \mathbf{f}(t), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}^1, \end{aligned} \quad (3.34)$$

где $A := A(\mu, \eta + \mu/3)$ (см. лемму 3.1). В этом пункте обозначения операторов могут не совпадать с соответствующими операторами от начала параграфа, что, впрочем, ясно из контекста.

Рассуждая как при выводе уравнения (3.15), можно задачу Коши (3.34) при условии $\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(A)$ свести к задаче Коши

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = -A^{1/2} \left\{ \alpha_1 A^{1/2} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \beta_0 A^{1/2} \mathbf{u} + \sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \beta_l A^{1/2} \frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} ds \right\} + \mathbf{f}_0(t), \\ \mathbf{f}_0(t) := \mathbf{f}(t) - \sum_{l=1}^m \frac{\alpha_{-l}}{b_l} e^{-b_l t} A \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}^1, \\ \beta_0 := \alpha_0 - \sum_{l=1}^m \frac{\alpha_{-l}}{b_l} > 0, \quad \beta_l := \frac{\alpha_{-l}}{b_l} \quad (l = \overline{1, m}). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Введем по полю $\mathbf{u}(t)$ объекты

$$\begin{aligned}\beta_0^{1/2} A^{1/2} \mathbf{u}(t) &=: \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \quad (\mathbf{v}(0) = 0), \\ \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \beta_l^{1/2} A^{1/2} \frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} ds &=: \mathbf{v}_l(t), \quad l = \overline{1, m},\end{aligned}$$

и перепишем уравнение из (3.35) в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = -A^{1/2} \left[\alpha_1 A^{1/2} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \beta_0^{1/2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \sum_{l=1}^m \beta_l^{1/2} \mathbf{v}_l \right] + \mathbf{f}_0(t), \\ \frac{d^2 \mathbf{v}}{dt^2} = \beta_0^{1/2} A^{1/2} \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad \frac{d\mathbf{v}_l}{dt} = \beta_l^{1/2} A^{1/2} \frac{d\mathbf{u}}{dt} - b_l \mathbf{v}_l, \quad l = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Эту систему (с начальными условиями) будем трактовать как задачу Коши для дифференциально операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := \oplus_{l=1}^{m+2} \mathbf{L}_2(\Omega, \rho)$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0, \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned}\xi(t) &:= (\mathbf{u}'(t); w(t))^\tau = (\mathbf{u}'(t); \mathbf{v}'(t); \mathbf{v}_1(t); \dots; \mathbf{v}_m(t))^\tau, \\ \xi^0 &:= (\mathbf{u}^1; \beta_0^{1/2} A^{1/2} \mathbf{u}^0; \mathbf{0}; \dots; \mathbf{0})^\tau, \quad \mathcal{F}(t) := (\mathbf{f}_0(t); \mathbf{0}; \dots; \mathbf{0})^\tau,\end{aligned}$$

а для оператора $\mathcal{A}$ справедливы следующие формулы:

$$\mathcal{A} = \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} \alpha_1 I & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}), \quad (3.37)$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ \xi = (\mathbf{u}; w)^\tau \in \mathcal{H} \mid \alpha_1 \mathbf{u} + A^{-1/2} \mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(A) \right\},$$

где $I, \mathcal{I}$ — единичные операторы в соответствующих пространствах,

$$\mathcal{Q} := (\beta_0^{1/2} I, \beta_1^{1/2} I, \dots, \beta_m^{1/2} I)^\tau, \quad \mathcal{G} := \text{diag}(0, b_1 I, \dots, b_m I).$$

З а м е ч а н и е 3.3. Если положить $\alpha_1 = 0$ в (2.47), то получим оператор из (1.90), изученный в § 1.5. Оператор (1.90) связан с системами, описываемыми уравнениями гиперболического типа. В § 1.5 построена система корневых

элементов оператора (1.90) и доказаны теоремы о p -базисности системы собственных (теорема 1.9) или корневых (теорема 1.10) элементов.

Оператор (2.47) связан с уравнением параболического типа. По теореме 3.6 система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ образует в $\mathcal{H}$ почти $\mathcal{J}$ -ортонормированный p -базис при $p > 3$. Тем не менее, построим явно систему корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ и докажем утверждения о p -базисности. Многие вычисления здесь весьма близки к проделанным в § 1.5 и будут опущены. ►

Пусть $\lambda_k = \lambda_k(A^{-1})$, $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k(A^{-1})$ ($k \in \mathbb{N}$) — k -е собственное значение и соответствующий ему нормированный к единице собственный элемент оператора A^{-1} , тогда $\mathbf{z}_k := \mathbf{u}_k$ — собственный элемент операторного пучка $L(\lambda)$ и спектр оператора $\mathcal{A}$ может быть полностью найден из следующей последовательности характеристических уравнений:

$$\alpha_1 + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q} \equiv \alpha_1 - \frac{1}{\lambda}\beta_0 + \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} = \lambda\lambda_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.38)$$

Определим характеристические функции

$$\begin{aligned} g_k(\lambda) &:= \alpha_1 + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q} - \lambda\lambda_k \equiv \alpha_1 - \frac{1}{\lambda}\beta_0 + \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} - \lambda\lambda_k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ g_\infty(\lambda) &:= \alpha_1 + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q} \equiv \alpha_1 - \frac{1}{\lambda}\beta_0 + \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l}{b_l - \lambda}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

и обозначим через γ_p ($p = \overline{1, m+1}$) корни уравнения $g_\infty(\lambda) = 0$, занумерованные в по возрастанию. Простые геометрические рассуждения показывают, что $0 < \gamma_1 < b_1 < \dots < \gamma_m < b_m < \gamma_{m+1}$ и $g'_\infty(\gamma_p) > 0$ ($p = \overline{1, m+1}$).

Обозначим через $\lambda_k^{(p)}$ ($p = \overline{1, m+2}$) корни уравнения $g_k(\lambda) = 0$ при каждом $k \in \mathbb{N}$. Можно проверить, что $\gamma_p < \lambda_k^{(p)} \in (b_{p-1}, b_p)$ ($p = \overline{1, m}$, $b_0 := 0$). Если $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ ($p = \overline{1, m}$), то $g'_k(\lambda_k^{(p)}) > 0$. Если $\lambda_k^{(m+1)} \neq \lambda_k^{(m+2)} \in \mathbb{R}$, то $g'_k(\lambda_k^{(m+1)}) > 0$, $g'_k(\lambda_k^{(m+2)}) < 0$. В силу конечной кратности собственных значений оператора A^{-1} легко видеть также, что может быть только конечное количество номеров $k \in \mathbb{N}$ при которых характеристическое уравнение $g_k(\lambda) = 0$ имеет кратные корни.

Применение асимптотических методов к уравнениям (3.38) приводит к следующей теореме (см. также теоремы 3.2 и 3.3).

Т е о р е м а 3.7. *Спектр оператора $\mathcal{A}$ (или пучка $L(\lambda)$) расположен в правой открытой полуплоскости и в $\mathbb{C} \setminus \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ состоит из изолированных конечнократных собственных значений, расположенных, за исключением конечного числа комплексно сопряженных собственных значений, на действительной положительной полуоси. Все собственные значения можно разбить на $(m+2)$ -е серии со следующим асимптотическим поведением при $k \rightarrow +\infty$:*

$$\lambda_k^{(p)} = \gamma_p + \frac{\gamma_p}{g'_\infty(\gamma_p)} \lambda_k(A^{-1}) + o(\lambda_k(A^{-1})), \quad p = 1, 2, \dots, m+1,$$

$$\lambda_k^{(+\infty)} := \frac{\alpha_1}{\lambda_k(A^{-1})} - \frac{\alpha_0}{\alpha_1} - \left[\sum_{l=1}^m \frac{\alpha_{-l}}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_0^2}{\alpha_1^3} \right] \lambda_k(A^{-1}) + o(\lambda_k(A^{-1})),$$

где

$$\lambda_k(A^{-1}) = \left\{ \frac{1}{6\pi^2} \left(2\mu^{-3/2} + \left[\eta + \frac{4}{3}\mu \right]^{-3/2} \right) \int_{\Omega} \rho^{3/2}(x) d\Omega \right\}^{2/3} k^{-2/3} (1 + o(1)).$$

В соответствии с теоремой 3.4 собственные элементы оператора $\mathcal{A}$, после группировки по сериям (см. теорему 3.7), могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_k^{(p)} &= (A^{-1/2} \mathbf{u}_k; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1} \mathcal{Q} \mathbf{u}_k)^\tau = (\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1} \mathcal{Q})^\tau \mathbf{u}_k \equiv \\ &\equiv \left(\lambda_k^{1/2}; \frac{-\beta_0^{1/2}}{\lambda_k^{(p)}}; \frac{\beta_1^{1/2}}{b_1 - \lambda_k^{(p)}}; \dots; \frac{\beta_m^{1/2}}{b_m - \lambda_k^{(p)}} \right)^\tau \mathbf{u}_k, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

В связи с этой формулой приведем ряд вспомогательных лемм, доказательство которых аналогично доказательству лемм 1.4–1.9.

Л е м м а 3.7. *Пусть $J := \text{diag}(1, -I)$ — матрица в $\mathbb{C}^{m+2} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{m+1}$,*

$$\varphi_k^{(p)} := R_{k,p} (\lambda_k^{1/2}(A^{-1}); (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1} \mathcal{Q})^\tau, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$R_{k,p} := \begin{cases} [g'_\infty(\gamma_p)]^{-1/2}, & p = \overline{1, m+1}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ [\lambda_k(A^{-1})]^{-1/2}, & p = m+2, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

При любых $p, q = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$ имеют место следующие формулы:

$$(J\varphi_k^{(p)}, \varphi_k^{(q)})_{\mathbb{C}^{m+2}} = 0, \quad \lambda_k^{(p)} \neq \overline{\lambda_k^{(q)}}, \quad (J\varphi_k^{(p)}, \overline{\varphi_k^{(p)}})_{\mathbb{C}^{m+2}} = -g'_k(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}^2.$$

Л е м м а 3.8. Пусть $M_k := M_k(\varphi_k^{(1)}, \varphi_k^{(2)}, \dots, \varphi_k^{(m+2)})$ ($k \in \mathbb{N}$) — матрица, столбцами которой являются векторы $\varphi_k^{(p)}$ ($p = \overline{1, m+2}$). Имеют место следующие утверждения.

1. Существует $C_1 > 0$ такое, что $\|M_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leq C_1$ при любых $k \in \mathbb{N}$.
2. Если $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ ($p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$), то $\det M_k \neq 0$.
3. В условиях пункта 2. существует $C_2 > 0$ такое, что $\|M_k^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leq C_2$ при любых $k \in \mathbb{N}$.

Л е м м а 3.9. Система векторов

$$\varphi_\infty^{(p)} := [g'_\infty(\gamma_p)]^{-1/2} (0; (\mathcal{G} - \gamma_p)^{-1} \mathcal{Q})^\tau, \quad p = \overline{1, m+1}, \quad \varphi_\infty^{(m+2)} := (1; 0_{m+1})^\tau$$

является ортонормированным базисом в $\mathbb{C}^{m+2} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{m+1}$.

Л е м м а 3.10. Имеют место следующие утверждения.

1. Пусть $M_\infty := M_\infty(\varphi_\infty^{(1)}, \varphi_\infty^{(2)}, \dots, \varphi_\infty^{(m+2)})$ — матрица, столбцами которой являются векторы $\varphi_\infty^{(p)}$ ($p = \overline{1, m+2}$). Тогда $M_\infty^* = M_\infty^\tau = M_\infty^{-1}$.
2. Существует $C > 0$ такое, что $\|M_k - M_\infty\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leq C [\lambda_k(A^{-1})]^{1/2}$ при $k \in \mathbb{N}$.

Л е м м а 3.11. Система элементов $\{\xi_{k,\infty}^{(p)} := \varphi_\infty^{(p)} \mathbf{u}_k\}_{p=\overline{1, m+2}, k \in \mathbb{N}}$ является ортонормированным базисом пространства $\mathcal{H}$.

Из приведенных лемм выводятся теоремы p -базисности специальным образом нормированной системы собственных элементов оператора $\mathcal{A}$ в невырожденном случае и о p -базисности системы корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ в вырожденном случае. Доказательство теорем 3.8 и 3.9 аналогично доказательству теорем 1.9 и 1.10 соответственно.

Т е о р е м а 3.8. Пусть $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ ($p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$). Тогда система собственных элементов $\{\xi_k^{(p)} := \varphi_k^{(p)} \mathbf{u}_k\}_{p=\overline{1, m+2}, k \in \mathbb{N}}$ оператора $\mathcal{A}$ образует p -базис пространства $\mathcal{H}$ при $p > 3$.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда при некотором $k \in \mathbb{N}$ уравнение $g_k(\lambda) = 0$ имеет кратный корень. Этот корень может находиться в зоне $\lambda > b_m$ и быть двукратным. Точнее, в этом случае при некотором $k \in \mathbb{N}$ будет $\lambda_k^{(m+1)} = \lambda_k^{(m+2)} \in \mathbb{R}$. Пусть $\mathbf{z}$ — это первый присоединенный элемент к собственному элементу $\mathbf{u}_k$ пучка $L(\lambda)$ в точке $\lambda_k^{(m+2)}$. Тогда $L'(\lambda_k^{(m+2)})\mathbf{u}_k = g'_k(\lambda_k^{(m+2)})\mathbf{u}_k = 0$ и

$$L'(\lambda_k^{(m+2)})\mathbf{u}_k + L(\lambda_k^{(m+2)})\mathbf{z} = g'_k(\lambda_k^{(m+2)})\mathbf{u}_k + L(\lambda_k^{(m+2)})\mathbf{z} = L(\lambda_k^{(m+2)})\mathbf{z} = 0.$$

Таким образом, в качестве первого присоединенного к $\mathbf{u}_k$ элемента можно взять его же.

Пусть $\xi_{k0}^{(m+2)} = (\lambda_k^{1/2} \mathbf{u}_k; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-1} \mathcal{Q} \mathbf{u}_k)^\tau$ — собственный элемент оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению $\lambda_k^{(m+2)}$. Вычислим в соответствии с теоремой 3.4 присоединенный элемент η_1 оператора $\mathcal{A}$. Поскольку присоединенный элемент определяется с точностью до собственного элемента, то можно считать, что $\xi_{k1}^{(m+2)} = \eta_1 - \xi_{k0}^{(m+2)} = (0; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-2} \mathcal{Q} \mathbf{u}_k)^\tau$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ имеет следующую цепочку из собственного и присоединенного к нему элемента:

$$\begin{aligned} \xi_{k0}^{(m+2)} &= (\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-1} \mathcal{Q})^\tau \mathbf{u}_k =: \varphi_{k0}^{(m+2)} \mathbf{u}_k, \\ \xi_{k1}^{(m+2)} &= (0; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-2} \mathcal{Q})^\tau \mathbf{u}_k =: \varphi_{k1}^{(m+2)} \mathbf{u}_k. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Разберем теперь ситуацию, когда при некотором $k \in \mathbb{N}$ уравнение $g_k(\lambda) = 0$ имеет трехкратный корень. Этот корень может быть лишь в зоне $0 < \lambda < b_m$. В этом случае при указанном k и некотором $p \in \{1, m\}$ будет $\lambda_k^{(p)} = \lambda_k^{(m+1)} = \lambda_k^{(m+2)} \in \mathbb{R}$. Пусть $\mathbf{z}$ — это второй присоединенный элемент к собственному элементу $\mathbf{u}_k$ пучка $L(\lambda)$ в точке $\lambda_k^{(p)}$. Тогда $L''(\lambda_k^{(p)})\mathbf{u}_k = g''_k(\lambda_k^{(p)})\mathbf{u}_k = g''_\infty(\lambda_k^{(p)})\mathbf{u}_k = 0$,

$$L'(\lambda_k^{(p)})\mathbf{u}_k = g'_k(\lambda_k^{(p)})\mathbf{u}_k = 0 \text{ и}$$

$$\begin{aligned} 2^{-1}L''(\lambda_k^{(p)})\mathbf{u}_k + L'(\lambda_k^{(p)})\mathbf{u}_k + L(\lambda_k^{(p)})\mathbf{z} = \\ = 2^{-1}g''_k(\lambda_k^{(p)})\mathbf{u}_k + g'_k(\lambda_k^{(p)})\mathbf{u}_k + L(\lambda_k^{(p)})\mathbf{z} = L(\lambda_k^{(p)})\mathbf{z} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в качестве второго присоединенного к $\mathbf{u}_k$ элемента можно взять элемент $\mathbf{u}_k$.

Вычислим, в соответствии с теоремой 3.4, первый η_1 и второй η_2 присоединенные элементы оператора $\mathcal{A}$. Легко проверить, что цепочкой из собственного и присоединенных к нему элементов будет также $\xi_{k0}^{(p)}$, $\xi_{k1}^{(p)} := \eta_1 - \xi_{k0}^{(p)}$, $\xi_{k2}^{(p)} := \eta_2 - \eta_1$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \xi_{k0}^{(p)} &= (\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q})^\tau \mathbf{u}_k =: \varphi_{k0}^{(p)} \mathbf{u}_k, \\ \xi_{k1}^{(p)} &= (0; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-2}\mathcal{Q})^\tau \mathbf{u}_k =: \varphi_{k1}^{(p)} \mathbf{u}_k, \\ \xi_{k2}^{(p)} &= (0; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-3}\mathcal{Q})^\tau \mathbf{u}_k =: \varphi_{k2}^{(p)} \mathbf{u}_k. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Далее будем считать, что система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ нормируется следующим образом. Если собственный элемент не имеет присоединенного, то он выбирается по формуле из теоремы 3.8. Если собственный элемент имеет один или два присоединенных элемента, то соответствующая цепочка выбирается по формуле (3.40) или (3.41) соответственно.

Отметим, что собственных элементов оператора $\mathcal{A}$, имеющих один или два присоединенных элемента может быть лишь конечное количество.

Т е о р е м а 3.9. Система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$, нормированных специальным образом, образует p -базис пространства $\mathcal{H}$ при $p > 3$.

З а м е ч а н и е 3.4. Отметим, что если интегро-дифференциальное уравнение (3.34) рассматривать как абстрактное с положительно определенным оператором A таким, что $A^{-1} \in \mathfrak{S}_q$ при некотором $q > 0$, то свойство систем из теорем 3.8 и 3.9 быть p -базисами будет при $p \geq 2q$. ►

Следствием леммы 3.7 и теоремы 3.8 является следующее утверждение.

Т е о р е м а 3.10. Пусть $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ ($p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$). Тогда система

$$\xi_k^{(p)} := R_{k,p}(\lambda_k^{1/2}(A^{-1}); (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q})^\tau \mathbf{u}_k(A), \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$R_{k,p} := \begin{cases} [g'_\infty(\gamma_p)]^{-1/2}, & p = \overline{1, m+1}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ [\lambda_k(A^{-1})]^{-1/2}, & p = m+2, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

собственных элементов оператора $\mathcal{A}$ образует p -базис пространства $\mathcal{H}$ при $p > 3$, согласно теореме 3.8, и имеет следующую биортогональную систему:

$$\zeta_k^{(p)} := -[g'_k(\overline{\lambda_k^{(p)}})R_{k,p}]^{-1}(\lambda_k^{1/2}(A^{-1}); -(\mathcal{G} - \overline{\lambda_k^{(p)}})^{-1}\mathcal{Q})^\tau \mathbf{u}_k(A), \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1 \in \mathcal{D}(A)$, а поле $\mathbf{f}$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1. Тогда по теореме 3.1 задача Коши (3.34) имеет единственное сильное решение $\mathbf{u}(t)$, а построенная по полю $\mathbf{u}(t)$ функция $\xi(t)$ — сильное решение задачи Коши (3.36). Это решение представимо в виде (см. теорему 3.10)

$$\xi(t) = \mathcal{U}(t)\xi^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\mathcal{F}(s)ds, \quad \mathcal{U}(t)\xi^0 := \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{m+2} e^{-\lambda_k^{(p)}t} (\xi^0, \zeta_k^{(p)})_{\mathcal{H}} \xi_k^{(p)}. \quad (3.42)$$

Далее, проведя ряд громоздких, но несложных вычислений с использованием в (3.42) формул из теоремы 3.10, формул для ξ^0 , $\mathcal{F}(t)$, $\xi(t)$ и связи $\mathbf{u}(t) = \beta^{-1/2}A^{-1/2}\mathbf{v}'(t)$, получим формулу для решения задачи Коши (3.34):

$$\mathbf{u}(t) = \mathcal{C}(t)\mathbf{u}^0 + \mathcal{S}(t)\mathbf{u}^1 + \int_0^t \mathcal{S}(t-s)\mathbf{f}(s)ds,$$

$$\mathcal{C}(t)\mathbf{u}^0 := \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{m+2} \frac{\lambda_k e^{-\lambda_k^{(p)}t}}{\lambda_k^{(p)} g'_k(\lambda_k^{(p)})} \left[\alpha_1 - \lambda_k^{(p)} \lambda_k + \sum_{l=1}^m \frac{\alpha_{-l} e^{-(b_l - \lambda_k^{(p)})t}}{b_l(b_l - \lambda_k^{(p)})} \right] (A\mathbf{u}^0, \mathbf{u}_k)_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)} \mathbf{u}_k,$$

$$\mathcal{S}(t)\mathbf{u}^1 := \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{m+2} \frac{\lambda_k e^{-\lambda_k^{(p)}t}}{\lambda_k^{(p)} g'_k(\lambda_k^{(p)})} (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}_k)_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)} \mathbf{u}_k.$$

З а м е ч а н и е 3.5. Отметим, что формулы для оператор-функций $\mathcal{C}(t)$ и $\mathcal{S}(t)$ могут быть найдены в рассматриваемом случае с помощью теории вычетов

и представлений, аналогичных приведенным в теореме 3.1:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(t)\mathbf{u}^0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} A^{-1/2} L^{-1}(\lambda) A^{-1/2} \left[\alpha_1 I - \lambda A^{-1} + \sum_{l=1}^m \frac{\alpha_{-l} e^{-(b_l - \lambda)t}}{b_l(b_l - \lambda)} I \right] A \mathbf{u}^0 d\lambda, \\ \mathcal{S}(t)\mathbf{u}^1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} A^{-1/2} L^{-1}(\lambda) A^{-1/2} \mathbf{u}^1 d\lambda,\end{aligned}$$

где операторный пучок $L(\lambda)$ определен в (3.23). ►

3.4. Модель гиперболического типа. Эволюционная

**задача, асимптотика решения, спектральная задача,
синхронно-изотропная среда**

3.4.1. Эволюционная задача

Операторная формулировка задачи

Задача о малых движениях начально-изотропного вязкоупругого тела гиперболического типа, закрепленного на границе $\partial\Omega$ области Ω , описывается следующей системой уравнений, граничных и начальных условий (см. (3.5), (3.6)):

$$\begin{aligned}\rho(x) \frac{\partial^2 \mathbf{u}(t, x)}{\partial t^2} &= \left(\frac{c_0}{2} \Delta \mathbf{u}(t, x) + \left(\tilde{c}_0 + \frac{c_0}{6} \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}(t, x) \right) - \\ &\quad - \int_0^t \Gamma(t-s) \left(\frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}(s, x) + \frac{1}{6} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}(s, x) \right) ds - \\ &\quad - \int_0^t \tilde{\Gamma}(t-s) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}(s, x) ds + \rho(x) \mathbf{f}(t, x) \quad (\text{в } \Omega), \quad (3.43)\end{aligned}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{на } \partial\Omega), \quad \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^1, \quad (3.44)$$

где все параметры описаны в (3.2)–(3.4) при $c_1 = \tilde{c}_1 = 0$.

В соответствии с леммой 3.1 введем операторы (3.8) и с их помощью запишем начально-краевую задачу (3.43)–(3.44) в виде задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве

$\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)$:

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = -A_h \mathbf{u} + \int_0^t \left[\Gamma(t-s)A + \tilde{\Gamma}(t-s)B^*B \right] \mathbf{u}(s) ds + \mathbf{f}(t),$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}^1. \quad (3.45)$$

О п р е д е л е н и е 3.2. Поле $\mathbf{u} \in C^2(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho))$ назовем *сильным решением* задачи Коши (3.45) и, соответственно, *сильным решением* начально-краевой задачи (3.43)-(3.44), если 1) $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{D}(A_h)$, $\mathbf{u}'(t) \in \mathcal{D}(A_h^{1/2})$ при любом $t \in \mathbb{R}_+$ и $A_h \mathbf{u}$, $A_h^{1/2} \mathbf{u}' \in C(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho))$, 2) в (3.45) выполнено уравнение для любого $t \in \mathbb{R}_+$ и начальные условия.

З а м е ч а н и е 3.6. Задача (3.45) является частным случаем задачи (1.34).

Тем не менее, приведем кратко вывод основного операторного уравнения. ►

Переход к основному дифференциально-операторному уравнению, теорема о разрешимости, асимптотика решения

Введем операторы

$$Q_h := A^{1/2} A_h^{-1/2}, \quad Q_h^+ := A_h^{-1/2} A^{1/2}, \quad Q_{Bh} := B A_h^{-1/2}, \quad Q_{Bh}^+ := A_h^{-1/2} B^*. \quad (3.46)$$

По аналогии с леммой 3.2 доказывается следующая лемма.

Л е м м а 3.12. $Q_h \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho))$, $Q_{Bh} \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho), L_{2,\Omega})$. Операторы Q_h^+ и Q_{Bh}^+ расширяются по непрерывности до ограниченных операторов Q_h^* и Q_{Bh}^* . При этом $Q_h^+ = Q_h^*|_{\mathcal{D}(A^{1/2})}$, $Q_{Bh}^+ = Q_{Bh}^*|_{\mathcal{D}(B^*)}$, оператор $Q_h^* Q_h$ положительно определен.

Далее, из предположения, что $\mathbf{u}(t)$ сильное решение задачи Коши (3.45) и $\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(A_h^{1/2}) = \mathcal{D}(A^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B)$, как и при выводе уравнения (3.13), получим,

что $\mathbf{u}(t)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = & -A_h^{1/2} \left\{ \left[I - \Gamma_p(0) Q_h^* Q_h - \tilde{\Gamma}_p(0) Q_{Bh}^* Q_{Bh} \right] A_h^{1/2} \mathbf{u} + \right. \\ & + Q_h^* \int_0^t \Gamma_p(t-s) Q_h A_h^{1/2} \frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} ds + Q_{Bh}^* \int_0^t \tilde{\Gamma}_p(t-s) Q_{Bh} A_h^{1/2} \frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} ds + \\ & \left. + \left[\Gamma_p(t) Q_h^* Q_h + \tilde{\Gamma}_p(t) Q_{Bh}^* Q_{Bh} \right] A_h^{1/2} \mathbf{u}^0 \right\} + \mathbf{f}(t), \quad (3.47) \end{aligned}$$

С учетом (3.4) и леммы 3.1 определим оператор A_0 по формуле (3.14). По аналогии с леммой 3.3 доказывается следующая лемма.

Л е м м а 3.13. Пусть $Q_{0h} := A_0^{1/2} A_h^{-1/2}$ и $Q_{0h}^+ := A_h^{-1/2} A_0^{1/2}$. Тогда $\overline{Q_{0h}^+} = Q_{0h}^*$, $Q_{0h}^+ = Q_{0h}^*|_{\mathcal{D}(A_0^{1/2}) = \mathcal{D}(A_h^{1/2})}$. Оператор $Q_{0h}^* Q_{0h} = I - \Gamma_p(0) Q_h^* Q_h - \tilde{\Gamma}_p(0) Q_{Bh}^* Q_{Bh}$ и положительно определен.

Введем по полю $\mathbf{u}(t)$ следующие объекты (см. (3.16)):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} =: \mathbf{z}(t) \quad (\mathbf{z}(0) = \mathbf{u}^1), \quad Q_{0h} A_h^{1/2} \mathbf{u}(t) =: \mathbf{v}(t) \quad (\mathbf{v}(0) = A_0^{1/2} \mathbf{u}^0), \\ \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \sqrt{\frac{c-l}{b_l}} Q_h A_h^{1/2} \frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} ds =: \mathbf{v}_l(t), \quad l = \overline{1, m}, \\ \int_0^t e^{-\tilde{b}_l(t-s)} \sqrt{\frac{\tilde{c}-l}{\tilde{b}_l}} Q_{Bh} A_h^{1/2} \frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} ds =: p_l(t), \quad l = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Преобразованное уравнение (3.47) и продифференцированные замены (3.48) образуют систему, аналогичную системе (3.17). Эту систему (с начальными условиями) запишем в виде дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := \mathbf{L}_2(\Omega, \rho) \oplus \left(\oplus_{l=1}^{m+1} \mathbf{L}_2(\Omega, \rho) \right) \oplus \left(\oplus_{l=1}^n L_{2,\Omega} \right)$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}(\xi + \xi_0(t)) + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0, \quad (3.49)$$

$$\xi(t) := (\mathbf{z}(t); w(t))^\tau = (\mathbf{z}(t); \mathbf{v}(t); \mathbf{v}_1(t); \dots; \mathbf{v}_m(t); p_1(t); \dots; p_n(t))^\tau,$$

$$\xi_0(t) := (\mathbf{0}; (Q_{0h}^*)^{-1} [\Gamma_p(t) Q_h^* Q_h + \tilde{\Gamma}_p(t) Q_{Bh}^* Q_{Bh}] A_h^{1/2} \mathbf{u}^0; \underbrace{\mathbf{0}; \dots; \mathbf{0}}_{m \text{ раз}}; \underbrace{\mathbf{0}; \dots; \mathbf{0}}_{n \text{ раз}})^\tau,$$

$$\xi^0 := (\mathbf{u}^1; A_0^{1/2} \mathbf{u}^0; \underbrace{\mathbf{0}; \dots; \mathbf{0}}_{m \text{ раз}}; \underbrace{\mathbf{0}; \dots; \mathbf{0}}_{n \text{ раз}})^\tau, \quad \mathcal{F}(t) := (\mathbf{f}(t); \underbrace{\mathbf{0}; \dots; \mathbf{0}}_{m+1 \text{ раз}}; \underbrace{\mathbf{0}; \dots; \mathbf{0}}_{n \text{ раз}})^\tau.$$

Для оператора $\mathcal{A}$ справедливы следующие формулы (см. (1.1)-(1.2)):

$$\mathcal{A} = \text{diag}(A_h^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \text{diag}(A_h^{1/2}, \mathcal{I}) = \begin{pmatrix} 0 & A_h^{1/2} \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} A_h^{1/2} & \mathcal{G} \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ \xi = (\mathbf{z}; w)^\tau \in \mathcal{H} \mid \mathbf{z} \in \mathcal{D}(A_h^{1/2}) \quad \mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(A_h^{1/2}) \right\}, \quad (3.51)$$

где $I, \mathcal{I}$ — единичные операторы в соответствующих пространствах,

$$\mathcal{Q} := \left(Q_{0h}, \sqrt{\frac{c_{-1}}{b_1}} Q_h, \dots, \sqrt{\frac{c_{-m}}{b_m}} Q_h, \sqrt{\frac{\tilde{c}_{-1}}{\tilde{b}_1}} Q_{Bh}, \dots, \sqrt{\frac{\tilde{c}_{-n}}{\tilde{b}_n}} Q_{Bh} \right)^\tau, \\ \mathcal{G} := \text{diag}(0, b_1 I, \dots, b_m I, \tilde{b}_1 I, \dots, \tilde{b}_n I).$$

Следствием теорем 1.1, 1.3 является следующее утверждение.

Т е о р е м а 3.11. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Пусть $\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(A_h)$, $\mathbf{u}^1 \in \mathcal{D}(A_h^{1/2})$, $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho))$. Тогда задача Коши (3.45) имеет единственное сильное (в смысле определения 3.2) решение.
2. Если к тому же $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) + \sum_{k=0}^p e^{-i\sigma_k t} \mathbf{f}_k(t)$, где $\mathbf{g}, \mathbf{f}_k \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho))$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, p}$ ненулевые, то для любого $\omega \in (0, \omega_0)$ (см. (1.5)) существуют константы $M_1, M_2 \geq 1$ такие, что при всех $t \in \mathbb{R}_+$

$$\left\| A_h^{1/2} \left(\mathbf{u}(t) - \sum_{k=0}^p e^{-i\sigma_k t} A_h^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A_h^{-1/2} \mathbf{f}_k(t) \right) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2 + \\ + \left\| \mathbf{u}'(t) + \sum_{k=1}^p e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A_h^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A_h^{-1/2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2 \leq \\ \leq M_1 e^{-2\omega t} \left[\|A_h^{1/2} \mathbf{u}^0\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2 + \|\mathbf{u}^1\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2 + \sum_{k=0}^p \|\mathbf{f}_k(0)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2 \right] + \\ + M_2 \left[\int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left[\|\mathbf{g}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)} + \sum_{k=0}^p \|\mathbf{f}'_k(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)} \right] ds \right]^2, \\ M(\lambda) := I + \lambda^2 A_h^{-1} - \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l - \lambda} Q_h^* Q_h - \sum_{l=1}^n \frac{\tilde{c}_{-l}}{\tilde{b}_l - \lambda} Q_{Bh}^* Q_{Bh}.$$

3. Если $\|\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)} \rightarrow 0$, $\|\mathbf{f}'_k(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)} \rightarrow 0$ ($k = \overline{0, p}$) при $t \rightarrow +\infty$, то и

$$\left\| A_h^{1/2} \left(\mathbf{u}(t) - \sum_{k=0}^p e^{-i\sigma_k t} A_h^{1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A_h^{1/2} \mathbf{f}_k(t) \right) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2 + \left\| \mathbf{u}'(t) + \sum_{k=1}^p e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A_h^{1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A_h^{1/2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2 \rightarrow 0.$$

Доказательство. Проверим, что для задачи (3.45) выполнены все условия теоремы 1.3. Тогда все утверждения будут следствием этой теоремы.

Расположим интегральные слагаемые в (3.45) по возрастанию чисел b_l , $\tilde{b}_r$ ($l = \overline{1, m}$, $r = \overline{1, n}$) (см. (3.3), (3.4)), тогда задача (3.45) примет вид задачи Коши (1.34) с $A = A_h$ и введенными соответствующим образом операторами C_l ($l = \overline{1, m+n}$).

Из $\mathcal{D}(A_h) = \mathcal{D}(A)$, $\mathcal{D}(A_h) \subset \mathcal{D}(B^*B)$ (см. лемму 3.1) следует, что $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(C_l^* C_l)$ ($l = \overline{1, m+n}$). Из $\mathcal{D}(A_h^{1/2}) = \mathcal{D}(A^{1/2})$ следует второе неравенство в (1.35). Проверим первое неравенство в (1.35), воспользовавшись (3.4), (3.7) и неравенством $\mathcal{D}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq 3\mathcal{J}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$. Обозначим $\delta := c_0(6\tilde{c}_0 + 2c_0)^{-1}$, тогда при любом $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(A_h^{1/2})$ имеем

$$\begin{aligned} \|A_h^{1/2} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2 - \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l} \|A^{1/2} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2 - \sum_{l=1}^n \frac{\tilde{c}_{-l}}{\tilde{b}_l} \|B\mathbf{u}\|_{L_2, \Omega}^2 &= \frac{1}{2} \left[c_0 - \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l} \right] \mathcal{J}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \\ &+ \left[\tilde{c}_0 + \frac{1}{6} \left[c_0 - \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l} \right] - \sum_{l=1}^n \frac{\tilde{c}_{-l}}{\tilde{b}_l} \right] \mathcal{D}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \frac{1}{2} \left[c_0 - \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l} \right] \mathcal{J}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \\ &\geq \frac{\delta}{c_0} \left[c_0 - \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l} \right] \cdot \frac{c_0}{2} \mathcal{J}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \frac{1-\delta}{6\tilde{c}_0 + c_0} \left[c_0 - \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l} \right] \cdot \left(\tilde{c}_0 + \frac{1}{6} c_0 \right) \mathcal{D}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \\ &= \frac{1}{6\tilde{c}_0 + 2c_0} \left[c_0 - \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l} \right] \|A_h^{1/2} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при любых $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(A_h^{1/2})$

$$\sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l} \|A^{1/2} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2 + \sum_{l=1}^n \frac{\tilde{c}_{-l}}{\tilde{b}_l} \|B\mathbf{u}\|_{L_2, \Omega}^2 \leq a_1 \|A_h^{1/2} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho)}^2,$$

$$a_1 := \frac{1}{6\tilde{c}_0 + 2c_0} \left[6\tilde{c}_0 + c_0 + \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l} \right] \in (0, 1)$$

и первое неравенство в (1.35) выполнено. Теорема доказана. ■

3.4.2. Задача о спектре вязкоупругого тела гиперболического типа

Будем разыскивать решения однородного ($\mathcal{F}(t) \equiv 0$) уравнения из (3.49) при ($\xi_0(t) \equiv 0$) в форме $\xi(t) = \exp(-\lambda t)\xi$, где λ — спектральный параметр, а ξ — амплитудный элемент. В результате придем к следующей основной спектральной задаче:

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}, \quad (3.52)$$

которую будем ассоциировать с задачей о спектре вязкоупругого тела гиперболического типа или, что то же, с задачей о спектре однородного интегро-дифференциального уравнения второго порядка из (3.45).

При $\lambda \notin \{0, b_1, \dots, b_m, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n\} = \sigma(\mathcal{G})$, с задачей (3.52) свяжем следующую спектральную задачу:

$$\begin{aligned} L(\lambda)\mathbf{z} &:= \left[-\lambda A_h^{-1} + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q} \right] \mathbf{z} = \\ &= \left[-\lambda A_h^{-1} - \frac{1}{\lambda} Q_{0h}^* Q_{0h} + \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l} b_l^{-1}}{b_l - \lambda} Q_h^* Q_h + \sum_{l=1}^n \frac{\tilde{c}_{-l} \tilde{b}_l^{-1}}{\tilde{b}_l - \lambda} Q_{Bh}^* Q_{Bh} \right] \mathbf{z} = 0, \\ &\mathbf{z} \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Т е о р е м а 3.12. *Справедливы следующие утверждения.*

1. $\{0, b_1, \dots, b_m\} \subset \rho(\mathcal{A})$. Точка $\lambda = \tilde{b}_q$ ($q = \overline{1, n}$) не является собственными значением оператора $\mathcal{A}$, если $c_0 > 0$ достаточно велико.
2. $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \{\varphi(\lambda) = 0\} \cup \{\varphi(\lambda)/2 + \psi(\lambda) = 0\} \cup \{\varphi(\lambda) + \psi(\lambda) = 0\}$, где функции $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$ определены в (3.26) при $c_1 = \tilde{c}_1 = 0$. Множество $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных конечнократных собственных значений оператора $\mathcal{A}$, расположенных симметрично относительно действительной оси.

3. Существует $\beta > 0$ такое, что

$$\sigma(\mathcal{A}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \lambda \neq 0\} \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \beta \leq \operatorname{Re} \lambda < \max\{b_m, \tilde{b}_n\}/2 \right\}.$$

4. Оператор $\mathcal{A}$ имеет две ветви комплексно сопряженных собственных зна-

чений $\{\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A})\}_{k=1}^\infty$ со следующей асимптотикой при $k \rightarrow +\infty$:

$$\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A}) = \pm i \lambda_k^{1/2}(A_h)(1 + o(1)) \quad (k \rightarrow +\infty),$$

$$\lambda_k(A_h) = \left\{ \frac{1}{6\pi^2} \left(2 \left[\frac{c_0}{2} \right]^{-3/2} + \left[\tilde{c}_0 + \frac{2c_0}{3} \right]^{-3/2} \right) \int_{\Omega} \rho^{3/2}(x) d\Omega \right\}^{-2/3} k^{2/3} (1 + o(1)).$$

5. Точки множества $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ не могут быть предельными для комплексно сопряженных ветвей собственных значений из $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, если $c_0 > 0$ достаточно велико.

Доказательство. Доказательство п. 1. проводится как в лемме 3.5, а п. 2. — как в теореме 3.2. Пункт 3. является следствием п. 3. теоремы 1.6 (см. аналогичные вычисления в п. 2. теоремы 2.15). Пункт 4. является следствием п. 4. теоремы 1.6 (см. аналогичные вычисления в п. 1. теоремы 2.15), асимптотическая формула получается так же, как в теореме 2.4. Пункт 5. является следствием п. 5. теоремы 1.6. ■

Замечание 3.7. Для пучка $L(\lambda)$ из (3.53) можно установить утверждения о его корневых элементах, аналогичные сформулированным в теоремах 2.16 и 2.17. ►

Замечание 3.8. Если в задаче (3.43)-(3.44) положить

$$m = n, \quad b_l = \tilde{b}_l \quad (l = \overline{1, m = n}), \quad c_{-l} = 2\mu\alpha_{-l}, \quad \tilde{c}_{-l} = \eta\alpha_{-l},$$

$$\alpha_{-l} > 0 \quad (l = \overline{0, m}), \quad \mu > 0, \quad \eta \geq 0,$$

то соответствующая система уравнений и граничных условий будет описывать малые движения синхронно-изотропной среды гиперболического типа. Задача Коши (3.45) примет вид (3.34) с $\alpha_1 = 0$:

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = -\alpha_0 A \mathbf{u} + \sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \alpha_{-l} A \mathbf{u}(s) ds + \mathbf{f}(t),$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}^1. \quad (3.54)$$

Таким же образом, каким осуществлялся переход от (3.34) к (3.35) и далее к (3.36), можно от (3.54) прийти к задаче Коши (3.36) с оператором (1.90)-(1.91) (см. замечание 3.3). Таким образом, в рассматриваемой ситуации к главному оператору $\mathcal{A}$ применимо все, что доказано в § 1.5. В частности, решение (3.34) с $\alpha_1 = 0$ может быть представлено в виде ряда с помощью системы собственных элементов оператора $\mathcal{A}$. ►

З а м е ч а н и е 3.9. Задача вида (3.54) описывает различные системы. Например (см. [41, гл. 6, § 23]), продольные колебания однородного вязкоупругого стержня, поперечные колебания неоднородной по толщине вязкоупругой балки или пластины, поперечные колебания ортотропной пластинки из гомогенного полимера, армированного упругими нитями или пленками и т.д. ►

3.5. Выводы к третьей главе

1. Доказано, что в вязкоупругом теле, описываемом моделью параболического типа, существует два типа волновых движений. Первый тип движений отвечает ветви собственных значений оператора $\mathcal{A}$, расположенных, за исключением конечного количества, на положительной полуоси и сгущающихся к бесконечности (см. теорему 3.3). Второй тип движений связан с точками существенного спектра оператора $\mathcal{A}$ и собственными значениями, сгущающимися к ним (см. теорему 3.2 и замечание 3.1). Приведены достаточные условия того, что все движения в вязкоупругом теле будут апериодически затухающими с декрементами, отделенными от нуля положительной константой.
2. Доказаны асимптотические формулы, описывающие поведение вязкоупругого тела, описываемого моделью параболического типа, под нагрузкой специального вида (см. теорему 3.1).
3. Доказано, что в вязкоупругом теле, описываемом моделью гиперболиче-

ского типа, существует два типа волновых движений. Первый тип движений отвечает ветви собственных значений оператора $\mathcal{A}$, расположенных в вертикальной полосе и сгущающихся к бесконечности (см. теорему 3.12, п. 3, п. 4). Этот тип движений аналогичен упругим волнам в теле, описываемом классической моделью. Второй тип движений связан с точками существенного спектра оператора $\mathcal{A}$ и собственными значениями, сгущающимися к ним (см. теорему 3.12, п. 2). Приведены достаточные условия того, что все движения в вязкоупругом теле будут иметь декременты затухания, отделенные от нуля положительной константой.

4. Доказаны асимптотические формулы, описывающие поведение вязкоупругого тела, описываемого моделью гиперболического типа, под нагрузкой специального вида (см. теорему 3.11).
5. Исследованы частные случаи рассматриваемых моделей — синхронно-изотропные среды. Для обеих моделей доказаны теоремы о p -базисности системы корневых элементов главного оператора $\mathcal{A}$ (см. теоремы 3.8, 3.9 и замечание 3.8).

Модели вязкоупругих сжимаемых жидкостей Олдройта и Максвелла

4.1. Введение

В четвертой главе изучаются модели вязкоупругих сжимаемых жидкостей Олдройта и Максвелла. В § 4.2 выводятся уравнения, описывающие малые, относительно равномерного вращения, движения вязкоупругой сжимаемой жидкости, заполняющей ограниченную область трехмерного пространства.

В § 4.3 изучается модель баротропной жидкости Олдройта, доказана теорема 4.1 об однозначной сильной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи. В п. 4.3.2 исследуется спектр главного оператора, возникающего в рассматриваемой задаче, а также некоторые свойства решений эволюционной задачи. В теореме 4.2 приведено описание существенного спектра задачи, в лемме 4.3 и теореме 4.3 описана локализация и асимптотика дискретного спектра изучаемого оператора. В теореме 4.4 приведено представление решения эволюционной задачи и его асимптотика в случае внешних сил специального вида. В теореме 4.5 доказаны некоторые свойства системы корневых элементов главного оператора.

В § 4.4 изучается модель баротропной жидкости Максвелла, доказана теорема 4.6 об однозначной разрешимости в определенном смысле соответствующей начально-краевой задачи, по теореме 1.4 найдена асимптотика решения задачи в случае внешних сил специального вида. В п. 4.4.2 исследуется спектр главного оператора, возникающего в рассматриваемой задаче. В теореме 4.7 описан существенный спектр задачи, локализация и асимптотика дискретного спектра.

Результаты главы 4 изложены в статьях [31, 33, 38].

4.2. Модели сжимаемых вязкоупругих жидкостей

Как известно, движение вязкой сжимаемой жидкости в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ описывается следующей системой уравнений в форме Коши (см., например, [100, гл. 1, § 2, п. 4]):

$$\begin{cases} \hat{\rho} \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla \hat{P} + \text{Div} \sigma + \hat{\rho} \mathbf{F} & (\text{в } \Omega), \\ \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \text{div}(\hat{\rho} \mathbf{v}) = 0 & (\text{в } \Omega), \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (\text{на } \partial\Omega). \end{cases} \quad (4.1)$$

В данной системе $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x)$ ($x := (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$) — поле скоростей жидкости, $\hat{\rho} = \hat{\rho}(t, x)$ — плотность жидкости, $\hat{P} = \hat{P}(t, x)$ — давление в жидкости, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, x)$ — поле внешних сил. Через $\text{Div} \sigma$ обозначен вектор, координатами которого являются дивергенции строк матрицы $\sigma = \{\sigma_{ij}(t, x)\}_{i,j=1}^3$, где σ — тензор вязких напряжений в жидкости. При этом определяющее соотношение для вязкой сжимаемой жидкости имеет вид:

$$\sigma_{ij} = \mu \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right] + \eta \delta_{ij} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} =: \mu \sigma_{ij}^{(1)} + \eta \sigma_{ij}^{(2)} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Будем считать далее, что жидкость удовлетворяет обобщенной математической модели, описываемой следующим определяющим соотношением:

$$P_m \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma = Q_n \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma^{(1)} + R_n \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma^{(2)}, \quad (4.2)$$

где $P_m(\lambda)$, $Q_n(\lambda)$, $R_n(\lambda)$ — многочлены степеней m и n соответственно. При $n = m - 1$ определяющее соотношение (4.2) будет соответствовать модели Максвелла, при $n = m$ — модели Олдройта, а при $n = m + 1$ — модели Кельвина–Фойгта. Предположим, что корни полинома $P_m(\lambda)$ вещественны, различны и отрицательны, обозначим их через $-b_l$, $l = \overline{1, m}$, а дроби $Q_n(\lambda)P_m^{-1}(\lambda)$, $R_n(\lambda)P_m^{-1}(\lambda)$ имеют следующие разложения:

$$\frac{Q_n(\lambda)}{P_m(\lambda)} = \gamma_1 \mu_{-1} \lambda + \gamma_2 \mu_0 + \sum_{l=1}^m \frac{\mu_l}{b_l + \lambda}, \quad \frac{R_n(\lambda)}{P_m(\lambda)} = \gamma_1 \eta_{-1} \lambda + \gamma_2 \eta_0 + \sum_{l=1}^m \frac{\eta_l}{b_l + \lambda}, \quad (4.3)$$

где $\mu_l, \eta_l > 0$, $l = \overline{-1, m}$, а γ_1, γ_2 принимают значения 0 или 1. Для модели Максвелла следует положить $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, для модели Олдройта — $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$,

а для модели Кельвина–Фойгта — $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$. Из определяющего соотношения (4.2) с помощью преобразования Лапласа и представлений (4.3) можно найти (см. [39, с. 43–46]) тензор вязких напряжений σ :

$$\begin{aligned}\sigma(t, x) &= J_1(t)\sigma^{(1)}(t, x) + J_2(t)\sigma^{(2)}(t, x), \\ J_1(t)\sigma^{(1)}(t, x) &:= \gamma_1\mu_{-1}\frac{\partial}{\partial t}\sigma^{(1)}(t, x) + \gamma_2\mu_0\sigma^{(1)}(t, x) + \sum_{l=1}^m \int_0^t \mu_l e^{-b_l(t-s)}\sigma^{(1)}(s, x) ds, \\ J_2(t)\sigma^{(2)}(t, x) &:= \gamma_1\eta_{-1}\frac{\partial}{\partial t}\sigma^{(2)}(t, x) + \gamma_2\eta_0\sigma^{(2)}(t, x) + \sum_{l=1}^m \int_0^t \eta_l e^{-b_l(t-s)}\sigma^{(2)}(s, x) ds.\end{aligned}\tag{4.4}$$

В (4.4) мы пренебрегли экспоненциально затухающим во времени слагаемым, порождаемым состоянием жидкости в начальный момент времени. Это слагаемое можно считать отнесенным к полю внешних сил.

Из системы (4.1) и соотношения (4.4) получим систему уравнений, описывающую движения обобщенной сжимаемой вязкоупругой жидкости, заполняющей ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \hat{\rho}\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}\right] = -\nabla \hat{P} + J_1(t)(\Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3}\nabla \operatorname{div} \mathbf{v}) + \\ \quad + J_2(t)\nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \hat{\rho} \mathbf{F} \quad (\text{в } \Omega), \\ \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div}(\hat{\rho} \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (\text{на } \partial\Omega). \end{cases}\tag{4.5}$$

Отметим, что если здесь $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$ и жидкость несжимаема, то уравнения (4.5) будут описывать обычную жидкость Одройта (см., например, [5]).

Пусть сжимаемая вязкоупругая жидкость занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, равномерно вращающуюся вокруг оси, сонаправленной с действием силы тяжести. Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор, нормальный к границе $\partial\Omega$ и направленный вне области Ω . Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с областью, таким образом, что ось Ox_3 совпадает с осью вращения и направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится в области Ω . В этом случае равномерная скорость вращения области запишется

в виде $\omega_0 \mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_3$ — орт оси вращения Ox_3 , а $\omega_0 > 0$, для определенности. Будем считать, что внешнее стационарное поле сил $\mathbf{F}_0$ является гравитационным и действует вдоль оси вращения, то есть $\mathbf{F}_0 = -g\mathbf{e}_3$, $g > 0$.

Далее будем считать, что сжимаемая жидкость удовлетворяет уравнению состояния баротропной жидкости: $\hat{P} = a_\infty^2 \hat{\rho}$, где $a_\infty = \text{const}$ — скорость звука в сжимаемой жидкости.

Рассмотрим состояние относительного равновесия жидкости. Из первого уравнения в (4.5) движения сжимаемой вязкоупругой жидкости, записанного в подвижной системе координат, найдем формулу для градиента стационарного давления (см. (2.1)):

$$\nabla P_0 = \rho_0 (-\omega_0^2 \mathbf{e}_3 \times (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}) - g\mathbf{e}_3) = \rho_0 \nabla \left(\frac{\omega_0^2}{2} (x_1^2 + x_2^2) - gx_3 \right), \quad (4.6)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор текущей точки области Ω , а ρ_0 — стационарная плотность жидкости. Из (4.6) и соотношения $P_0 = a_\infty^2 \rho_0$ заключаем, что стационарная плотность ρ_0 является функцией параметра $z := 2^{-1} \omega_0^2 (x_1^2 + x_2^2) - gx_3$. Стационарная плотность может быть найдена из (4.6) как функция параметра z следующим образом: $\rho_0(z) = \rho_0(0) \exp(za_\infty^{-2})$, где $\rho_0(0)$ — плотность жидкости в начале координат. При этом стационарная плотность ρ_0 будет постоянной только если в системе отсутствует вращение и гравитационное поле, то есть при $\omega_0 = 0$ и $g = 0$.

Представим теперь полное давление и плотность жидкости в виде: $\hat{P}(t, x) = P_0(z) + p(t, x)$, $\hat{\rho}(t, x) = \rho_0(z) + \tilde{\rho}(t, x)$, где $p(t, x)$ и $\tilde{\rho}(t, x)$ — это динамическое давление и плотность соответственно, возникающие при малых движениях жидкости относительно стационарного состояния.

Осуществим линеаризацию уравнений движения из системы (4.5), записанных в подвижной системе координат, относительно состояния относительного равновесия. Получим систему уравнений, описывающих малые движения вязкоупругой баротропной жидкости, заполняющей равномерно вращающееся

твердое тело:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}(t, x)}{\partial t} - 2\omega_0(\mathbf{u}(t, x) \times \mathbf{e}_3) &= -\nabla \left(\frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)} \tilde{\rho}(t, x) \right) + \\ &+ \frac{\gamma_1}{\rho_0(z)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_{-1} \Delta \mathbf{u}(t, x) + \left(\eta_{-1} + \frac{\mu_{-1}}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}(t, x) \right) + \\ &+ \frac{\gamma_2}{\rho_0(z)} \left(\mu_0 \Delta \mathbf{u}(t, x) + \left(\eta_0 + \frac{\mu_0}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}(t, x) \right) + \\ &+ \sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \frac{1}{\rho_0(z)} \left(\mu_l \Delta \mathbf{u}(s, x) + \left(\eta_l + \frac{\mu_l}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}(s, x) \right) ds + \mathbf{f}(t, x) \quad (\text{в } \Omega), \\ \frac{\partial \tilde{\rho}(t, x)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0(z) \mathbf{u}(t, x)) &= 0 \quad (\text{в } \Omega), \end{aligned} \right. \quad (4.7)$$

где $\mathbf{u}(t, x)$ — поле скоростей жидкости в подвижной системе координат, $\mathbf{f}(t, x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное поле.

Осуществим в системе (4.7), с целью ее симметризации, замену

$$a_\infty \rho_0^{-1/2}(z) \tilde{\rho}(t, x) = \rho(t, x). \quad (4.8)$$

В результате получим основную систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}(t, x)}{\partial t} - 2\omega_0(\mathbf{u}(t, x) \times \mathbf{e}_3) &= -\nabla \left(a_\infty \rho_0^{-1/2}(z) \rho(t, x) \right) + \\ &+ \frac{\gamma_1}{\rho_0(z)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_{-1} \Delta \mathbf{u}(t, x) + \left(\eta_{-1} + \frac{\mu_{-1}}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}(t, x) \right) + \\ &+ \frac{\gamma_2}{\rho_0(z)} \left(\mu_0 \Delta \mathbf{u}(t, x) + \left(\eta_0 + \frac{\mu_0}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}(t, x) \right) + \\ &+ \sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \frac{1}{\rho_0(z)} \left(\mu_l \Delta \mathbf{u}(s, x) + \left(\eta_l + \frac{\mu_l}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}(s, x) \right) ds + \mathbf{f}(t, x) \quad (\text{в } \Omega), \\ \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + a_\infty \rho_0^{-1/2}(z) \operatorname{div}(\rho_0(z) \mathbf{u}(t, x)) &= 0 \quad (\text{в } \Omega). \end{aligned} \right. \quad (4.9)$$

Систему (4.9) дополним граничным условием прилипания:

$$\mathbf{u}(t, x) = \mathbf{0} \quad (\text{на } \partial\Omega) \quad (4.10)$$

и начальными условиями:

$$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^0(x), \quad \rho(0, x) = \rho^0(x). \quad (4.11)$$

З а м е ч а н и е 4.1. Начально-краевая задача (4.9)-(4.11) описывает малые движения *вязкоупругой баротропной жидкости*, заполняющей равномерно вращающуюся ограниченную область. При отсутствии вращения нужно в (4.9) положить $\omega_0 = 0$. При отсутствии гравитационного поля нужно в (4.9) положить $g = 0$. Соответствующим образом изменится и параметр z .

Модель Олдройта соответствует выбору в (4.9) $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1$, модель Максвелла — выбору $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$, а модель Кельвина-Фойгта — выбору $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$. ►

4.3. Баротропная жидкость Олдройта. Эволюционная задача, спектральная задача, представление и асимптотика решения

4.3.1. Эволюционная задача, основное операторное уравнение, теорема о разрешимости

Введем векторное гильбертово пространство $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ (см. (2.12)). Введем скалярное гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ функций суммируемых со своими квадратами по области Ω , а также его подпространство $L_{2,\rho_0}(\Omega) := \{f \in L_2(\Omega) \mid (f, \rho_0^{1/2})_{L_2(\Omega)} = 0\}$.

Введем Кориолисов оператор S (см. лемму 2.1). Будем считать далее, что граница $\partial\Omega$ области Ω — класса C^2 . Введем оператор B (см. лемму 2.3). По лемме 2.2 определим следующие операторы:

$$\begin{aligned} A_O &:= A\left(\mu_0, \eta_0 + \frac{\mu_0}{3}, 0\right), \quad A_l := A\left(\mu_l, \eta_l + \frac{\mu_l}{3}, 0\right), \quad l = \overline{1, m}, \\ Q_{lO} &:= A_l^{1/2} A_O^{-1/2}, \quad Q_{lO}^+ := A_O^{-1/2} A_l^{1/2}, \quad Q_{BO} := B A_O^{-1/2}, \quad Q_{BO}^+ := A_O^{-1/2} B^*. \end{aligned} \quad (4.12)$$

По аналогии с леммой 3.2 доказывается следующая лемма.

Л е м м а 4.1. $Q_{lO} \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$, $Q_{BO} \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0), L_{2,\rho_0}(\Omega))$. Операторы Q_{lO}^+ , Q_{BO}^+ расширяются по непрерывности до ограниченных операторов Q_{lO}^* , Q_{BO}^* соответственно. При этом $Q_{BO}^+ = Q_{BO}^*|_{\mathcal{D}(B^*)}$, $Q_{lO}^+ = Q_{lO}^*|_{\mathcal{D}(A_l^{1/2})}$ ($l = \overline{1, m}$), операторы $Q_{lO}^* Q_{lO}$ положительно определены.

С использованием введенных операторов задачу (4.9)-(4.11) при $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$ запишем в виде задачи Коши для системы интегродифференциальных уравнений первого порядка в гильбертовых пространствах $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ и $L_{2,\rho_0}(\Omega)$:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + (2\omega_0 i S + A_O)\mathbf{u} - B^* \rho + \sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)} A_l \mathbf{u}(s) ds = \mathbf{f}(t), \\ \frac{d\rho}{dt} + B\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \rho(0) = \rho^0. \end{cases} \quad (4.13)$$

О п р е д е л е н и е 4.1. Функции $\mathbf{u} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$, $\rho \in C^1(\mathbb{R}_+, L_{2,\rho_0}(\Omega))$ назовем *сильным решением* задачи (4.13) и, соответственно, *сильным решением* задачи (4.9)-(4.11) при $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$, если 1) $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{D}(A_O)$, $\rho(t) \in \mathcal{D}(B^*)$ при любом $t \in \mathbb{R}_+$ и $\mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A_O))$, $\rho \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{D}(B^*))$, 2) в (4.13) выполнены уравнения при любом $t \in \mathbb{R}_+$ и начальные условия.

Пусть $\mathbf{u}(t)$, $\rho(t)$ — сильное решение задачи (4.13). Тогда из леммы 4.1 следует, что $\mathbf{u}(t)$, $\rho(t)$ удовлетворяют также следующей системе

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\omega_0 i S \mathbf{u} + A_O^{1/2} \left\{ A_O^{1/2} \mathbf{u} - Q_{BO}^* \rho + \sum_{l=1}^m Q_{lO}^* \int_0^t e^{-b_l(t-s)} Q_{lO} A_O^{1/2} \mathbf{u}(s) ds \right\} = \mathbf{f}(t), \\ \frac{d\rho}{dt} + Q_{BO} A_O^{1/2} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \rho(0) = \rho^0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Осуществим в системе (4.14) следующие замены:

$$\mathbf{v}_l(t) := \int_0^t e^{-b_l(t-s)} Q_{lO} A_O^{1/2} \mathbf{u}(s) ds \quad (l = \overline{1, m}). \quad (4.15)$$

Поля $\mathbf{v}_l(t)$ ($l = \overline{1, m}$) непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}_+$. Продифференцированные соотношения (4.15) и преобразованные уравнения системы (4.14) составляют следующую систему уравнений и начальных данных:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\omega_0 i S \mathbf{u} + A_O^{1/2} \left[A_O^{1/2} \mathbf{u} - Q_{BO}^* \rho + \sum_{l=1}^m Q_{lO}^* \mathbf{v}_l \right] = \mathbf{f}(t), \\ \frac{d\rho}{dt} + Q_{BO} A_O^{1/2} \mathbf{u} = 0, \quad \frac{d\mathbf{v}_l}{dt} - Q_{lO} A_O^{1/2} \mathbf{u} + b_l \mathbf{v}_l = 0 \quad (l = \overline{1, m}), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \rho(0) = \rho^0, \quad \mathbf{v}_l(0) = 0 \quad (l = \overline{1, m}). \end{cases} \quad (4.16)$$

Эту систему с начальными данными будем трактовать как задачу Коши для дифференциально операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0) \oplus L_{2, \rho_0}(\Omega) \oplus \left(\oplus_{l=1}^m \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0) \right)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -\mathcal{A}\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0, \\ \xi(t) &:= (\mathbf{u}(t); w(t))^\tau = (\mathbf{u}(t); \rho(t); \mathbf{v}_1(t); \dots; \mathbf{v}_m(t))^\tau, \\ \xi^0 &:= (\mathbf{u}^0; \rho^0; \mathbf{0}; \dots; \mathbf{0})^\tau, \quad \mathcal{F}(t) := (\mathbf{f}(t); 0; \mathbf{0}; \dots; \mathbf{0})^\tau. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Для оператора $\mathcal{A}$ справедливы следующие представления — факторизация с симметричными множителями и факторизация в форме Шура-Фробениуса:

$$\mathcal{A} = \text{diag}(A_O^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \text{diag}(A_O^{1/2}, \mathcal{I}) + \text{diag}(2\omega_0 i S, 0), \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{Q} A_O^{-1/2} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \text{diag}(A_O, \mathcal{G} + \mathcal{Q} \mathcal{Q}^*) \begin{pmatrix} I & A_O^{-1/2} \mathcal{Q}^* \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} + \text{diag}(2\omega_0 i S, 0) = \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{Q} T A_O^{-1/2} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \text{diag}(A_O^{1/2} T A_O^{1/2}, \mathcal{G} + \mathcal{Q} T \mathcal{Q}^*) \begin{pmatrix} I & A_O^{-1/2} T \mathcal{Q}^* \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ \xi = (\mathbf{u}; w)^\tau \in \mathcal{H} \mid \mathbf{u} + A_O^{-1/2} \mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(A_O) \right\}, \quad (4.20)$$

где $I, \mathcal{I}$ — единичные операторы, $T := (I + 2\omega_0 i A_O^{-1/2} S A_O^{-1/2})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$,

$$\mathcal{Q} := (-Q_{BO}, Q_{1O}, \dots, Q_{mO})^\tau, \quad \mathcal{G} := \text{diag}(0, b_1 I, \dots, b_m I).$$

Л е м м а 4.2. *Оператор $\mathcal{A}$ максимальный секториальный. Более того,*

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} \lambda| \leq \|Q^*\|^2 (2\omega_0)^{-1} \operatorname{Re} \lambda + 2\omega_0, \ 0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq 4\omega_0^2 \|Q^*\|^{-2} \} \cup \\ \cup \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} \lambda| \leq 2\|Q^*\| (\operatorname{Re} \lambda)^{1/2}, \ \operatorname{Re} \lambda \geq 4\omega_0^2 \|Q^*\|^{-2} \}. \end{aligned}$$

где $\mathcal{W}(\mathcal{A})$ — числовая область значений оператора $\mathcal{A}$ (см. определение 1.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2.6. При этом для резольвенты оператора $\mathcal{A}$ справедлива формула (2.27) с пучком $L(\lambda) := I - \lambda A_O^{-1} + 2\omega_0 i A_O^{-1/2} S A_O^{-1/2} + Q^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) Q$. ■

По аналогии с теоремой 2.1 доказывается следующая теорема.

Т е о р е м а 4.1. *Пусть поле $\mathbf{f}$ локально гельдерово: для любого $\tau \in \mathbb{R}_+$ существуют $K = K(\tau) > 0$, $k = k(\tau) \in (0, 1]$ такие, что при всех $0 \leq s, t \leq \tau$*

$$\|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} \leq K |t - s|^k.$$

Тогда для любых $\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(A_O)$ и $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$ существует и единственно сильное (в смысле определения 4.1) решение задачи (4.13).

4.3.2. Задача о спектре вязкоупругой сжимаемой жидкости

Олдройта, представление и асимптотика решения эволюционной задачи

Основные спектральные задачи

Будем разыскивать решения однородного ($\mathcal{F}(t) \equiv 0$) уравнения из (4.17) в форме $\xi(t) = \exp(-\lambda t)\xi$, где λ — спектральный параметр, а ξ — амплитудный элемент. В результате придем к следующей основной спектральной задаче:

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}, \quad (4.21)$$

которую будем ассоциировать с задачей о спектре вязкоупругой сжимаемой жидкости Олдройта.

При $\lambda \notin \{0, b_1, \dots, b_m\} = \sigma(\mathcal{G})$, с задачей (4.21) свяжем следующую спектральную задачу:

$$\begin{aligned} L(\lambda)\mathbf{z} &:= [I - \lambda A_O^{-1} + 2\omega_0 i A_O^{-1/2} S A_O^{-1/2} + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1} \mathcal{Q}] \mathbf{z} = \\ &= \left[I - \lambda A_O^{-1} + 2\omega_0 i A_O^{-1/2} S A_O^{-1/2} - \frac{1}{\lambda} Q_{BO}^* Q_{BO} + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \lambda} Q_{lO}^* Q_{lO} \right] \mathbf{z} = 0, \\ \mathbf{z} &\in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Существенный и дискретный спектр задачи, локализация и асимптотика спектра, асимптотика решения эволюционной задачи

Л е м м а 4.3. $\{0, b_1, \dots, b_m\} \subset \rho(\mathcal{A})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство того, что $\{b_1, \dots, b_m\} \subset \rho(\mathcal{A})$ и $\lambda \notin \sigma_p(\mathcal{A})$ проводится таким же образом, как в лемме 2.21 или лемме 3.5. Доказательство $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ опирается на свойство $(Q_{BO} Q_{BO}^*)^{-1} \in \mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega))$, которое следует из п. 1, 2 доказательства леммы 2.16. В лемме 4.4 оператор $\mathcal{A}^{-1}$ будет предъявлен в явном виде. ■

Для описания существенного спектра (см. определение 1.4) оператора $\mathcal{A}$ определим две функции:

$$\varphi(\lambda) := \mu_0 + \sum_{l=1}^m \frac{\mu_l}{b_l - \lambda}, \quad \psi(\lambda, x) := \eta_0 + \frac{\mu_0}{3} + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \lambda} \left(\eta_l + \frac{\mu_l}{3} \right) - \frac{1}{\lambda} a_\infty^2 \rho_0(z). \quad (4.23)$$

По аналогии с теоремой 3.2 доказывается следующая теорема.

Т е о р е м а 4.2. *Имеет место следующая формула:*

$$\begin{aligned} \sigma_{ess}(\mathcal{A}) &= \{ \varphi(\lambda) = 0 \} \cup \{ \varphi(\lambda) + \psi(\lambda, x) = 0, x \in \Omega \} \cup \\ &\cup \{ 2\varphi(\lambda) + \psi(\lambda, x) = 0, x \in \partial\Omega \}, \end{aligned}$$

где функции $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda, x)$ определены в (4.23). Множество $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$.

З а м е ч а н и е 4.2. Существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ представляет собой объединение m различных точек находящихся на луче $(b_1, +\infty)$ и разделенных точками b_l ($l = \overline{1, m}$), и не более, чем $(2m + 2)$ -х отрезков на действительной положительной полуоси.

Если отсутствует вращение и сила тяжести, то есть если $\omega_0 = 0$, $g = 0$, то $\rho_0 = \text{const}$ и существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит из не более, чем $(3m + 2)$ -х точек на положительной полуоси. ►

Т е о р е м а 4.3. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ спектр оператора $\mathcal{A}$, за исключением, быть может, конечного числа собственных значений, лежит в полосе $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Re}\lambda > 0, |\text{Im}\lambda| \leq 2\omega_0 + \varepsilon\}$.

2. Спектр оператора $\mathcal{A}$ имеет ветвь собственных значений $\{\lambda_k^{(+\infty)}(\mathcal{A})\}_{k=1}^{\infty}$ со следующей асимптотикой при $k \rightarrow +\infty$:

$$\lambda_k^{(+\infty)}(\mathcal{A}) = \left\{ \frac{1}{6\pi^2} \left(2\mu_0^{-3/2} + \left[\eta_0 + \frac{4\mu_0}{3} \right]^{-3/2} \right) \int_{\Omega} \rho_0^{3/2}(z) d\Omega \right\}^{-2/3} k^{2/3} (1 + o(1)).$$

3. Если $\omega_0 = 0$, то спектр оператора $\mathcal{A}$ действительный, за исключением, быть может, конечного числа комплексно сопряженных собственных значений.

4. Если $\omega_0 = 0$ и λ невещественное собственное значение оператора $\mathcal{A}$, то

$$\gamma_1 < \text{Re}\lambda < \gamma_2, \quad |\lambda|^2 < (b_m + 2c + 2(c^2 + b_m c)^{1/2})(b_m + c),$$

$$\gamma_1 := [2\|A_O^{-1/2}\|^2]^{-1}, \quad \gamma_2 := b_m + c + (c^2 + b_m c)^{1/2},$$

$$c := \|Q_{BO}\|_{\mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega))}^2 + \sum_{l=1}^m \|Q_{lO}\|_{\mathcal{L}(L_2(\Omega, \rho_0))}^2.$$

Спектр оператора $\mathcal{A}$ действительный, если выполнено условие

$$2\|A_O^{-1/2}\|^2 \leq (b_m + c + (c^2 + b_m c)^{1/2})^{-1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения п. 1. и п. 2. доказываются таким же образом, как п. 1. и п. 2. в теореме 2.4. Утверждения п. 3. и п. 4.

доказываются таким же образом, как п. 1. и п. 2. в теореме 2.5. В частности, оператор $\mathcal{A}^{-1}$ принадлежит классу Хелтона ($\mathcal{A}^{-1} \in (H)$) и для углового оператора K_+ инвариантного неотрицательного подпространства $L_+(\mathcal{A}^{-1})$ верно, что $K_+ \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 3$. ■

З а м е ч а н и е 4.3. Из леммы 4.3, теоремы 4.2, п. 1. теоремы 4.3 и [180, гл. 4, § 4, теорема 4.3] (см. также [135, гл. 5, § 1, теорема 1.10]) следует, что оператор $-\mathcal{A}$ генерирует равномерно экспоненциально устойчивую (см. (1.6)) голоморфную полугруппу. При этом $\omega \in (0, \inf\{\operatorname{Re}\lambda \mid \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\})$. ►

По аналогии с леммой 2.16 доказывается следующая лемма.

Л е м м а 4.4. *Запишем оператор $\mathcal{A}$ относительно следующего разложения $\mathcal{H} = \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0) \oplus L_{2,\rho_0}(\Omega) \oplus \hat{H}$, где $\hat{H} := \oplus_{l=1}^m \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$, в виде (см. (4.18)):*

$$\mathcal{A} = \operatorname{diag}(A_O^{1/2}, I, \hat{I}) \begin{pmatrix} I + 2\omega_0 i A_O^{-1/2} S A_O^{-1/2} & -Q_{BO}^* & \hat{Q}^* \\ Q_{BO} & 0 & 0 \\ -\hat{Q} & 0 & \hat{G} \end{pmatrix} \operatorname{diag}(A_O^{1/2}, I, \hat{I}),$$

$$\hat{Q} := (Q_{1O}, \dots, Q_{mO})^\tau, \quad \hat{G} := \operatorname{diag}(b_1 I, \dots, b_m I), \quad \hat{I} := \operatorname{diag}(I, \dots, I),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ \xi = (\mathbf{u}; \rho; \hat{\mathbf{v}})^\tau \in \mathcal{H} \mid \mathbf{u} - A_O^{-1/2} (Q_{BO}^* \rho - \hat{Q}^* \hat{\mathbf{v}}) \in \mathcal{D}(A_O) \right\}.$$

Тогда

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} A_O^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \hat{G}^{-1} \hat{Q} & 0 & \hat{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{G}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_O^{-1/2} & 0 & -\hat{Q}^* \hat{G}^{-1} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \hat{I} \end{pmatrix},$$

$$C_{11} := C - C Q_{BO}^* (Q_{BO} C Q_{BO}^*)^{-1} Q_{BO} C, \quad C_{12} := C Q_{BO}^* (Q_{BO} C Q_{BO}^*)^{-1},$$

$$C_{21} := -(Q_{BO} C Q_{BO}^*)^{-1} Q_{BO} C, \quad C_{22} := (Q_{BO} C Q_{BO}^*)^{-1},$$

$$C := \left[I + 2\omega_0 i A_O^{-1/2} S A_O^{-1/2} + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} Q_{lO}^* Q_{lO} \right]^{-1}.$$

Если $\omega_0 = 0$, то

$$C_{11} = C^{1/2} P_0 C^{1/2}, \quad P_0 = P_0^2 = P_0^*, \quad P_0 \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0) = \operatorname{Ker}(Q_{BO} C^{1/2}).$$

По аналогии с теоремой 2.11 доказывается следующая теорема.

Т е о р е м а 4.4. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Пусть $\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(A_O)$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, а поле $\mathbf{f}$ удовлетворяет условию теоремы 4.1. Тогда сильное решение задачи (4.13) представимо в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \rho(t) \end{pmatrix} = \mathcal{U}(t) \begin{pmatrix} \mathbf{u}^0 \\ \rho^0 \end{pmatrix} + \int_0^t \mathcal{U}(t-s) \begin{pmatrix} \mathbf{f}(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds,$$

$$\mathcal{U}(t) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2} \begin{pmatrix} \lambda^2 A_O^{-1/2} L^{-1}(\lambda) A_O^{-1/2} & -\lambda A_O^{-1/2} L^{-1}(\lambda) Q_{BO}^* \\ \lambda Q_{BO} L^{-1}(\lambda) A_O^{-1/2} & -\lambda I - Q_{BO} L^{-1}(\lambda) Q_{BO}^* \end{pmatrix} d\lambda,$$

где контур Γ является границей сектора $\Lambda_{\omega, \theta} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg(\lambda - \omega)| < \theta\}$ и ориентирован так, что $\operatorname{Im} \lambda$ убывает при его обходе. Числа $\omega > 0$ и $\theta \in (0, \pi/2)$ выбраны так, чтобы $\sigma(\mathcal{A}) \subset \Lambda_{\omega, \theta}$ (см. замечание 4.3), $L(\lambda)$ определен в (4.22).

2. Если к тому же $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathbf{f}_k(t)$, где $\mathbf{g}, \mathbf{f}_k \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n}$ ненулевые, то существуют абсолютные константы $M_1, M_2 \geq 1$ такие, что при $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} & \left\| \mathbf{u}(t) - A_O^{-1/2} C_{11} A_O^{-1/2} \mathbf{f}_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A_O^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A_O^{-1/2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 + \\ & + \left\| \rho(t) - C_{21} A_O^{-1/2} \mathbf{f}_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \frac{1}{i\sigma_k} Q_{BO} L^{-1}(i\sigma_k) A_O^{-1/2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{L_2, \rho_0(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq M_1 e^{-2\omega t} \left[\|\mathbf{u}^0\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 + \|\rho^0\|_{L_2, \rho_0(\Omega)}^2 + \sum_{k=0}^n \|\mathbf{f}_k(0)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 \right] + \\ & + M_2 \left[\int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left[\|\mathbf{g}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} + \sum_{k=0}^n \|\mathbf{f}'_k(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} \right] ds \right]^2, \quad (4.24) \end{aligned}$$

$$C_{11} := C - C Q_{BO}^* (Q_{BO} C Q_{BO}^*)^{-1} Q_{BO} C, \quad C_{21} := -(Q_{BO} C Q_{BO}^*)^{-1} Q_{BO} C,$$

$$C := \left[I + 2\omega_0 i A_O^{-1/2} S A_O^{-1/2} + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} Q_{lO}^* Q_{lO} \right]^{-1},$$

$$L(\lambda) := I - \lambda A_O^{-1} + 2\omega_0 i A_O^{-1/2} S A_O^{-1/2} - \frac{1}{\lambda} Q_{BO}^* Q_{BO} + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \lambda} Q_{lO}^* Q_{lO}.$$

Если $\omega_0 = 0$, то формулы для операторов C_{11} , C_{21} в (4.24) могут быть уточнены в соответствии с леммой 4.4.

3. Если $\|\mathbf{g}(t)\|_{L_2(\Omega, \rho_0)} \rightarrow 0$, $\|\mathbf{f}'_k(t)\|_{L_2(\Omega, \rho_0)} \rightarrow 0$ ($k = \overline{0, n}$) при $t \rightarrow +\infty$, то и

$$\begin{aligned} & \left\| \mathbf{u}(t) - A_O^{-1/2} C_{11} A_O^{-1/2} \mathbf{f}_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A_O^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A_O^{-1/2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{L_2(\Omega, \rho_0)}^2 + \\ & + \left\| \rho(t) - C_{21} A_O^{-1/2} \mathbf{f}_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \frac{1}{i\sigma_k} Q_{BO} L^{-1}(i\sigma_k) A_O^{-1/2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{L_{2, \rho_0}(\Omega)}^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

4. Пусть $\mathbf{f}_0(t) = \nabla p(t)$, $\mathbf{f}_k(t) \equiv 0$ ($k = \overline{1, n}$). Если $\|\mathbf{g}(t)\|_{L_2(\Omega, \rho_0)} \rightarrow 0$, $\|p'(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, то и

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{L_2(\Omega, \rho_0)}^2 + \left\| \rho(t) - \Pi \frac{\rho_0^{1/2}(z)}{a_\infty} p(t) \right\|_{L_{2, \rho_0}(\Omega)}^2 \rightarrow 0.$$

Некоторые свойства корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ в случае $\omega_0 = 0$, $g = 0$, представление решения эволюционной задачи в виде ряда

Если $\omega_0 = 0$, $g = 0$, то существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит из конечного числа точек (см. теорему 4.2 и замечание 4.2). Кроме того, оператор $\mathcal{A}^{-1}$ принадлежит классу Хелтона и для углового оператора K_+ инвариантного неотрицательного подпространства $L_+(\mathcal{A}^{-1})$ верно, что $K_+ \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 3$ (см. теорему 4.3). Следующая теорема опирается на теорему Т.Я. Азизова–Г.К. Лангера (см. [3, гл. 4, § 2, теорема 2.12]) и аналогична теореме 2.10. Соответствующие обозначения см. на страницах 123 и 132.

Т е о р е м а 4.5. *Имеют место следующие утверждения.*

1. $\text{codim } \mathfrak{F}(\mathcal{A}) \leq \text{codim } \mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) < \infty$.
2. $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) = \mathcal{H} \iff \text{sp}\{\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A}) | \lambda \in \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}) \cap (\gamma_1, \gamma_2)\}$ — невырожденное подпространство, где γ_1, γ_2 — числа, определенные в п. 4. теоремы 4.3.
3. $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H} \iff \mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A}) = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ при $\lambda \neq \bar{\lambda}$ и $s(\mathcal{A}) = \emptyset$. Если $\gamma_2 \leq \gamma_1$, то $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$.
4. Если $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$ (соответственно $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$), то в $\mathcal{H}$ существует почти

$\mathcal{J}$ -ортонормированный p -базис при $p > 3$, составленный из собственных (соответственно корневых) элементов оператора $\mathcal{A}$. Если $\gamma_2 \leq \gamma_1$, то указанный базис из собственных элементов будет $\mathcal{J}$ -ортонормированным.

Пусть $\omega_0 = 0$, $g = 0$. Будем считать, что $\gamma_2 \leq \gamma_1$, тогда по теореме 4.5 существует $\mathcal{J}$ -ортонормированный p -базис при $p > 3$ в $\mathcal{H}$, составленный из собственных элементов оператора $\mathcal{A}$. Этот базис можно представить в следующем виде, разделив его на систему позитивных и негативных элементов:

$$\begin{aligned} \left\{ \xi_k^\pm := (A_O^{-1/2} \mathbf{z}_k^\pm; (\mathcal{G} - \lambda_k^\pm)^{-1} \mathcal{Q} \mathbf{z}_k^\pm)^\tau \right\}_{k=1}^\infty, \\ \xi_k^\pm \in L_\pm(\mathcal{A}^{-1}), \quad [\xi_k^+, \xi_j^+] = \delta_{kj}, \quad [\xi_k^-, \xi_j^-] = -\delta_{kj}, \quad [\xi_k^+, \xi_j^-] = 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

где собственные значения λ_k^+ составляют ветвь из п. 2. теоремы 4.3.

Представим решение $\xi(t)$ задачи (4.17) в форме

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^\infty c_k^+(t) \xi_k^+ + \sum_{j=1}^\infty c_j^-(t) \xi_j^-, \quad c_k^+(0) = [\xi^0, \xi_k^+], \quad c_j^-(0) = -[\xi^0, \xi_j^-]. \quad (4.26)$$

Из (4.17), (4.25), (4.26), вида ξ^0 и $\mathcal{F}(t)$ найдем, что

$$\begin{aligned} \xi(t) = \sum_{k=1}^\infty \left(e^{-\lambda_k^+ t} [\xi^0, \xi_k^+] + \int_0^t e^{-\lambda_k^+ (t-s)} [\mathcal{F}(s), \xi_k^+] ds \right) \xi_k^+ - \\ - \sum_{j=1}^\infty \left(e^{-\lambda_j^- t} [\xi^0, \xi_j^-] + \int_0^t e^{-\lambda_j^- (t-s)} [\mathcal{F}(s), \xi_j^-] ds \right) \xi_j^-, \quad (4.27) \\ [\xi^0, \xi_k^\pm] = (\mathbf{u}^0, A_O^{-1/2} \mathbf{z}_k^\pm)_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} - \frac{1}{\lambda_k^\pm} (\rho^0, Q_{BO} \mathbf{z}_k^\pm)_{L_{2, \rho_0}(\Omega)}, \\ [\mathcal{F}(t), \xi_k^\pm] = (\mathbf{f}(t), A_O^{-1/2} \mathbf{z}_k^\pm)_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Из (4.27), (4.12) получим в явном виде разложение решения $\mathbf{u}(t)$, $\rho(t)$ задачи (4.13) по нормированной специальным образом системе собственных эле-

МЕНТОВ $\{\mathbf{z}_k^\pm\}_{k=1}^{+\infty}$ пучка $L(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \rho(t) \end{pmatrix} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(T_k^+(t) \begin{pmatrix} A_O^{-1/2} \mathbf{z}_k^+ \\ (\lambda_k^+)^{-1} B A_O^{-1/2} \mathbf{z}_k^+ \end{pmatrix} - T_k^-(t) \begin{pmatrix} A_O^{-1/2} \mathbf{z}_k^- \\ (\lambda_k^-)^{-1} B A_O^{-1/2} \mathbf{z}_k^- \end{pmatrix} \right), \\ T_k^\pm(t) &:= e^{-\lambda_k^\pm t} \left((\mathbf{u}^0, A_O^{-1/2} \mathbf{z}_k^\pm)_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} - \frac{1}{\lambda_k^\pm} (\rho^0, B A_O^{-1/2} \mathbf{z}_k^\pm)_{L_2, \rho_0(\Omega)} \right) + \\ &\quad + \int_0^t e^{-\lambda_k^\pm(t-s)} (\mathbf{f}(s), A_O^{-1/2} \mathbf{z}_k^\pm)_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} ds. \end{aligned}$$

4.4. Баротропная жидкость Максвелла. Эволюционная задача, спектральная задача, асимптотика решения

4.4.1. Эволюционная задача, основное операторное уравнение, теорема о разрешимости, асимптотика решения

Введем Кориолисов оператор S (см. лемму 2.1). Будем считать далее, что граница $\partial\Omega$ области Ω — класса C^2 . Введем оператор B (см. лемму 2.3). По лемме 2.2 определим следующие операторы:

$$\begin{aligned} A_M &:= A \left(\sum_{l=1}^m \mu_l, \sum_{l=1}^m \left(\eta_l + \frac{\mu_l}{3} \right), 1 \right), \quad A_l := A \left(\mu_l, \eta_l + \frac{\mu_l}{3}, 0 \right), \quad l = \overline{1, m}, \quad (4.28) \\ Q_{lM} &:= A_l^{1/2} A_M^{-1/2}, \quad Q_{lM}^+ := A_M^{-1/2} A_l^{1/2}, \quad Q_{BM} := B A_M^{-1/2}, \quad Q_{BM}^+ := A_M^{-1/2} B^*. \end{aligned}$$

Л е м м а 4.5. $Q_{lM} \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$, $Q_{BM} \in \mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0), L_{2, \rho_0}(\Omega))$. Операторы Q_{lM}^+ , Q_{BM}^+ расширяются по непрерывности до ограниченных операторов Q_{lM}^* , Q_{BM}^* соответственно, при этом $Q_{BM}^+ = Q_{BM}^*|_{\mathcal{D}(B^*)}$, $Q_{lM}^+ = Q_{lM}^*|_{\mathcal{D}(A_l^{1/2})}$ ($l = \overline{1, m}$). Кроме того, $Q_{BM}^* Q_{BM} + \sum_{l=1}^m Q_{lM}^* Q_{lM} = I$, а операторы $Q_{lM}^* Q_{lM}$ положительно определены.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограниченность операторов Q_{lM} , Q_{BM} , а также равенства $Q_{BM}^+ = Q_{BM}^*|_{\mathcal{D}(B^*)}$, $Q_{lM}^+ = Q_{lM}^*|_{\mathcal{D}(A_l^{1/2})}$ ($l = \overline{1, m}$) проверяются как в лемме 3.2.

Далее, из неравенства Фридрихса $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2 \leq c\mathcal{J}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$, верного для любых $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{A_M}$ (см. [93, ч. III, гл. 18, теорема 18.1]), и леммы 2.2 найдем, что (напомним, что $z = 2^{-1}\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) - gx_3$)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &\leq a_\infty^2 \left(\min_{x \in \bar{\Omega}} \rho_0(z) \right)^{-1} \int_{\Omega} |\nabla \rho_0(z) \cdot \mathbf{u}(x) + \rho_0(z) \operatorname{div} \mathbf{u}(x)|^2 d\Omega \leq \\ &\leq 2a_\infty^2 \left(\min_{x \in \bar{\Omega}} \rho_0(z) \right)^{-1} \left[c \max_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla \rho_0(z)|^2 \mathcal{J}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \max_{x \in \bar{\Omega}} \rho_0^2(z) \mathcal{D}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \right] =: \\ &=: d_1 \mathcal{J}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + d_2 \mathcal{D}(\mathbf{u}, \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 2.2 для любого $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ имеем (см. лемму 3.2)

$$\begin{aligned} (Q_{lM}^* Q_{lM} \mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} &= (Q_{lM} \mathbf{u}, Q_{lM} \mathbf{u})_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} = (A_M^{-1/2} \mathbf{u}, A_M^{-1/2} \mathbf{u})_{A_l} = \\ &= \mu_l \mathcal{J}(A_M^{-1/2} \mathbf{u}, A_M^{-1/2} \mathbf{u}) + \left(\eta_l + \frac{\mu_l}{3} \right) \mathcal{D}(A_M^{-1/2} \mathbf{u}, A_M^{-1/2} \mathbf{u}) \geq \\ &\geq \frac{\mu_l}{2} \mathcal{J}(A_M^{-1/2} \mathbf{u}, A_M^{-1/2} \mathbf{u}) + \left(\frac{\eta_l}{2} + \frac{\mu_l}{6} \right) \mathcal{D}(A_M^{-1/2} \mathbf{u}, A_M^{-1/2} \mathbf{u}) + \\ &\quad + \min \left\{ \frac{\mu_l}{2d_1}, \frac{\eta_l}{2d_2} + \frac{\mu_l}{6d_2} \right\} \mathcal{F}(A_M^{-1/2} \mathbf{u}, A_M^{-1/2} \mathbf{u}) \geq \\ &\geq \gamma(Q_{lM}^* Q_{lM}) (A_M^{-1/2} \mathbf{u}, A_M^{-1/2} \mathbf{u})_{A_M} = \gamma(Q_{lM}^* Q_{lM}) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2, \end{aligned}$$

где $\gamma(Q_{lM}^* Q_{lM}) > 0$, то есть оператор $Q_{lM}^* Q_{lM}$ положительно определен.

Далее, для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ имеем (см. лемму 3.3)

$$\begin{aligned} \left(\left[Q_{BM}^* Q_{BM} + \sum_{l=1}^m Q_{lM}^* Q_{lM} - I \right] \mathbf{u}, \mathbf{v} \right)_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} &= \\ &= (BA_M^{-1/2} \mathbf{u}, BA_M^{-1/2} \mathbf{v})_{L_2, \rho_0(\Omega)} + \sum_{l=1}^m (A_M^{-1/2} \mathbf{u}, A_M^{-1/2} \mathbf{v})_{A_l} - (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} = \\ &= \mathcal{F}(A_M^{-1/2} \mathbf{u}, A_M^{-1/2} \mathbf{v}) + \sum_{l=1}^m \left[\mu_l \mathcal{J}(A_M^{-1/2} \mathbf{u}, A_M^{-1/2} \mathbf{v}) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\eta_l + \frac{\mu_l}{3} \right) \mathcal{D}(A_M^{-1/2} \mathbf{u}, A_M^{-1/2} \mathbf{v}) \right] - (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} = \\ &= (A_M^{-1/2} \mathbf{u}, A_M^{-1/2} \mathbf{v})_{A_M} - (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} = 0, \end{aligned}$$

а значит $Q_{BM}^* Q_{BM} + \sum_{l=1}^m Q_{lM}^* Q_{lM} = I$. Лемма доказана. $\blacksquare$

С использованием введенных операторов задачу (4.9)-(4.11) при $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$ запишем в виде задачи Коши для системы интегродифференциальных

уравнений первого порядка в гильбертовых пространствах $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ и $L_{2, \rho_0}(\Omega)$:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\omega_0 i S \mathbf{u} - B^* \rho + \sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)} A_l \mathbf{u}(s) ds = \mathbf{f}(t), \\ \frac{d\rho}{dt} + B \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \rho(0) = \rho^0. \end{cases} \quad (4.29)$$

С использованием (4.28) и леммы 4.5 перепишем систему (4.29) в следующей обобщенной форме:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\omega_0 i S \mathbf{u} + A_M^{1/2} \left\{ -Q_{BM}^* \rho + \sum_{l=1}^m Q_{lM}^* \int_0^t e^{-b_l(t-s)} Q_{lM} A_M^{1/2} \mathbf{u}(s) ds \right\} = \mathbf{f}(t), \\ \frac{d\rho}{dt} + Q_{BM} A_M^{1/2} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \rho(0) = \rho^0. \end{cases} \quad (4.30)$$

О п р е д е л е н и е 4.2. Поле $\mathbf{u} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$ и функцию $\rho \in C^1(\mathbb{R}_+; L_{2, \rho_0}(\Omega))$ назовем *решением* задачи (4.30) и, соответственно, *решением* начально-краевой задачи (4.9)-(4.11) при $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$, если 1) $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{D}(A_M^{1/2})$ при любом $t \in \mathbb{R}_+$, выражение в фигурных скобках принимает значения из $\mathcal{D}(A_M^{1/2})$ и $A_M^{1/2} \{ \dots \} \in C(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$, 2) в (4.30) выполнены уравнения для любого $t \in \mathbb{R}_+$ и начальные данные.

Осуществим в системе (4.30) следующие замены:

$$\mathbf{v}_l(t) := \int_0^t e^{-b_l(t-s)} Q_{lM} A_M^{1/2} \mathbf{u}(s) ds \quad (l = \overline{1, m}). \quad (4.31)$$

Поля $\mathbf{v}_l(t)$ ($l = \overline{1, m}$) непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}_+$. Продифференцированные соотношения (4.31) и преобразованные уравнения системы (4.30)

составляют следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\omega_0 i S \mathbf{u} + A_M^{1/2} \left[-Q_{BM}^* \rho + \sum_{l=1}^m Q_{lM}^* \mathbf{v}_l \right] = \mathbf{f}(t), \\ \frac{d\rho}{dt} + Q_{BM} A_M^{1/2} \mathbf{u} = 0, \quad \frac{d\mathbf{v}_l}{dt} - Q_{lM} A_M^{1/2} \mathbf{u} + b_l \mathbf{v}_l = 0 \quad (l = \overline{1, m}), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \rho(0) = \rho^0, \quad \mathbf{v}_l(0) = 0 \quad (l = \overline{1, m}). \end{cases} \quad (4.32)$$

Систему (4.32) с начальными данными будем трактовать как задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0) \oplus L_{2, \rho_0}(\Omega) \oplus \left(\oplus_{l=1}^m \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0) \right)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -\mathcal{A}\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0. \\ \xi(t) &:= (\mathbf{u}(t); w(t))^\tau = (\mathbf{u}(t); \rho(t); \mathbf{v}_1(t); \dots; \mathbf{v}_m(t))^\tau, \\ \xi^0 &:= (\mathbf{u}^0; \rho^0; \mathbf{0}; \dots; \mathbf{0})^\tau, \quad \mathcal{F}(t) := (\mathbf{f}(t); 0; \mathbf{0}; \dots; \mathbf{0})^\tau, \end{aligned} \quad (4.33)$$

Для операторного блока $\mathcal{A}$ справедливо следующее представление:

$$\mathcal{A} = \text{diag}(A_M^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \text{diag}(A_M^{1/2}, \mathcal{I}) + \text{diag}(2\omega_0 i S, 0), \quad (4.34)$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ \xi = (\mathbf{u}; w)^\tau \in \mathcal{H} \mid \mathbf{u} \in \mathcal{D}(A_M^{1/2}), \quad \mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(A_M^{1/2}) \right\}, \quad (4.35)$$

где $I, \mathcal{I}$ — единичные операторы,

$$\mathcal{Q} := (-Q_{BM}, Q_{1M}, \dots, Q_{mM})^\tau, \quad \mathcal{G} := \text{diag}(0, b_1 I, \dots, b_m I).$$

Л е м м а 4.6. Оператор $-\mathcal{A}$ генератор сжимающей C_0 -полугруппы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство этой леммы проводится по той же схеме, что и доказательство, например, леммы 2.20. При этом для резольвенты оператора $\mathcal{A}$ справедлива формула (2.27) из замечания 2.2 с операторным пучком $L(\lambda) := -\lambda A_M^{-1} + 2\omega_0 i A_M^{-1/2} S A_M^{-1/2} + \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q}$. ■

Т е о р е м а 4.6. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Пусть $\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(A_M^{1/2})$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$. Тогда решение задачи (4.30) (в смысле определения 4.2) существует и единственно.
2. Если $\omega_0 = 0$, $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathbf{f}_k(t)$, где $\mathbf{g}, \mathbf{f}_k \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{0, n}$ ненулевые, то существуют абсолютные константы $\omega > 0$, $M_0 \geq 1$ такие, что при $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} & \left\| \mathbf{u}(t) - A_M^{-1/2} C^{1/2} P_0 C^{1/2} A_M^{-1/2} \mathbf{f}_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A_M^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A_M^{-1/2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 + \\ & + \left\| \rho(t) + (Q_{MB} C Q_{MB}^*)^{-1} Q_{MB} C A_M^{-1/2} \mathbf{f}_0(t) - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \frac{1}{i\sigma_k} Q_{MB} L^{-1}(i\sigma_k) A_M^{-1/2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{L_2, \rho_0(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq M_0 e^{-2\omega t} \left[\|\mathbf{u}^0\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 + \|\rho^0\|_{L_2, \rho_0(\Omega)}^2 + \sum_{k=0}^n \|\mathbf{f}_k(0)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 \right] + \\ & \quad + M_0 \left[\int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left[\|\mathbf{g}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} + \sum_{k=0}^n \|\mathbf{f}'_k(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} \right] ds \right]^2, \\ C &:= \left[\sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} Q_{lM}^* Q_{lM} \right]^{-1}, \quad L(\lambda) := -\lambda A_M^{-1} - \frac{1}{\lambda} Q_{BM}^* Q_{BM} + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \lambda} Q_{lM}^* Q_{lM}, \end{aligned}$$

где P_0 — ортопроектор пространства $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ на $\text{Ker}(Q_{BM} C^{1/2})$.

3. Если $\|\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} \rightarrow 0$, $\|\mathbf{f}'_k(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} \rightarrow 0$ ($k = \overline{0, n}$) при $t \rightarrow +\infty$, то и

$$\begin{aligned} & \left\| \mathbf{u}(t) - A_M^{-1/2} C^{1/2} P_0 C^{1/2} A_M^{-1/2} \mathbf{f}_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A_M^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A_M^{-1/2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 + \\ & + \left\| \rho(t) + (Q_{MB} C Q_{MB}^*)^{-1} Q_{MB} C A_M^{-1/2} \mathbf{f}_0(t) - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \frac{1}{i\sigma_k} Q_{MB} L^{-1}(i\sigma_k) A_M^{-1/2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{L_2, \rho_0(\Omega)}^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

4. Пусть $\mathbf{f}_0(t) = \nabla p(t)$, $\mathbf{f}_k(t) \equiv 0$ ($k = \overline{1, n}$). Если $\|\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)} \rightarrow 0$, $\|p'(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, то и

$$\left\| \mathbf{u}(t) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 + \left\| \rho(t) - \Pi \frac{\rho_0^{1/2}(z)}{a_\infty} p(t) \right\|_{L_2, \rho_0(\Omega)}^2 \rightarrow 0.$$

Доказательство. Доказательство проведем в несколько шагов.

1. Пусть $\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(A_0^{1/2})$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, $\xi^0 := (\mathbf{u}^0; w^0)^\tau$, $w^0 := (\rho^0; 0; \dots; 0)^\tau$. Тогда $\xi^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. лемму 4.5 и (4.35)):

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \in \mathcal{D}(A_M^{1/2}), \quad \mathcal{Q}^* w &= -Q_{BM}^* \rho + \sum_{l=1}^m Q_{lM}^* \mathbf{v}_l = -Q_{BM}^*|_{\mathcal{D}(B^*)} \rho + \sum_{l=1}^m Q_{lM}^*|_{\mathcal{D}(A_l^{1/2})} \mathbf{v}_l = \\ &= -A_M^{-1/2} B^* \rho + \sum_{l=1}^m A_M^{-1/2} A_l^{1/2} \mathbf{v}_l = A_M^{-1/2} \left[-B^* \rho + \sum_{l=1}^m A_l^{1/2} \mathbf{v}_l \right] \in \mathcal{D}(A_M^{1/2}), \end{aligned}$$

Из условий теоремы и (4.33) следует, что $\mathcal{F} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$.

Из теоремы о разрешимости абстрактной задачи Коши (см. [55, гл. 1, § 6, п. 2, теорема 6.5], [22, гл. 2, § 1, теорема 1.3]) следует, что задача Коши (4.33) имеет единственное решение $\xi(t)$ такое, что $\xi(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при любом $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{A}\xi \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\xi \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$.

Пусть функция $\xi(t)$ — единственное решение задачи Коши (4.33). То есть $\xi(t) = (\mathbf{u}(t); w(t))^\tau$, где $w(t) = (\rho(t); \mathbf{v}_1(t); \dots; \mathbf{v}_m(t))^\tau$, причем $\mathcal{A}\xi \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\xi \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$. Тогда $\mathbf{u}(t)$, $\rho(t)$ — решение системы (4.30) в смысле определения 4.2.

2. Система (4.30) при $\omega_0 = 0$ имеет вид системы (1.57). Из леммы 4.5 следует, что $\sum_{l=1}^m Q_{lM}^* Q_{lM} \gg 0$. Кроме того, $Q_{BM} Q_{BM}^* \gg 0$, что следует из п. 1, 2 доказательства леммы 2.16. Теперь пункты 2. и 3. являются следствием теоремы 1.4. Пункт 4. доказывается таким же образом, как в теореме 2.11. Теорема доказана. ■

4.4.2. Задача о спектре вязкоупругой сжимаемой жидкости

Максвелла

Основные спектральные задачи

Будем разыскивать решения однородного ($\mathcal{F}(t) \equiv 0$) уравнения из (4.33) в форме $\xi(t) = \exp(-\lambda t)\xi$, где λ — спектральный параметр, а ξ — амплитудный

элемент. В результате придем к следующей основной спектральной задаче:

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}, \quad (4.36)$$

которую будем ассоциировать с задачей о спектре вязкоупругой сжимаемой жидкости Максвелла.

При $\lambda \notin \{0, b_1, \dots, b_m\} = \sigma(\mathcal{G})$, с задачей (4.36) свяжем следующую спектральную задачу:

$$\begin{aligned} L(\lambda)\mathbf{z} &:= \left[-\lambda A_M^{-1} + 2\omega_0 i A_M^{-1/2} S A_M^{-1/2} + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1} \mathcal{Q} \right] \mathbf{z} = \\ &= \left[-\lambda A_M^{-1} + 2\omega_0 i A_M^{-1/2} S A_M^{-1/2} - \frac{1}{\lambda} Q_{BM}^* Q_{BM} + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \lambda} Q_{lM}^* Q_{lM} \right] \mathbf{z} = 0, \\ \mathbf{z} &\in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Существенный и дискретный спектр задачи, локализация и асимптотика спектра

Т е о р е м а 4.7. *Имеют место следующие утверждения.*

1. $\{0, b_1, \dots, b_m\} \subset \rho(\mathcal{A})$.
2. *Имеет место следующая формула:*

$$\begin{aligned} \sigma_{ess}(\mathcal{A}) &= \{ \varphi(\lambda) = 0 \} \cup \{ \varphi(\lambda) + \psi(\lambda, x) = 0, \ x \in \Omega \} \cup \\ &\cup \{ 2\varphi(\lambda) + \psi(\lambda, x) = 0, \ x \in \partial\Omega \}, \end{aligned}$$

где функции $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda, x)$ определены в (4.23) при $\mu_0 = 0$, $\eta_0 = 0$. Множество $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$.

3. $\sigma(\mathcal{A}) \subset \Lambda := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} \lambda < b_m \}$. Спектр оператора $\mathcal{A}$ имеет две ветви собственных значений $\{ \lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A}) \}_{k=1}^\infty$ со следующей асимптотикой при $k \rightarrow +\infty$:

$$\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A}) = \pm i \lambda_k^{1/2}(A_M)(1 + o(1)),$$

$$\lambda_k(A_M) = \left\{ \frac{1}{6\pi^2} \int_{\Omega} \rho_0^{3/2}(z) \left(2 \left[\sum_{l=1}^m \frac{\mu_l}{b_l} \right]^{-3/2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[a_{\infty}^2 \rho_0(z) + \sum_{l=1}^m \frac{3\eta_l + 4\mu_l}{3b_l} \right]^{-3/2} \right) d\Omega \right\}^{-2/3} k^{2/3} (1 + o(1)).$$

4. Если $\omega_0 = 0$, то спектр оператора $\mathcal{A}$ расположен симметрично относительно действительной оси и существует $\beta > 0$ такое, что

$$\sigma(\mathcal{A}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \lambda \neq 0\} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \beta \leq \operatorname{Re} \lambda < b_m/2\}.$$

5. При $\omega_0 = 0$ точки множества $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ не могут быть предельными для комплексно сопряженных ветвей собственных значений из $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, если норма $\|A_M^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))}$ достаточно мала.

Доказательство. Доказательство проведем в несколько шагов.

1. Включение $\{0, b_1, \dots, b_m\} \subset \rho(\mathcal{A})$ доказывается таким же образом, как в лемме 4.3. Утверждения п. 2. проверяются так же, как в теореме 4.2.

2. Пусть $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, $\lambda \notin \sigma_{ess}(\mathcal{A}) \subset (0, b_m)$, $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G}) = \{0, b_1, \dots, b_m\}$. Тогда λ , являющееся собственным значением оператора $\mathcal{A}$, является также собственным значением пучка $L(\lambda)$. То есть, существует $0 \neq \mathbf{z} \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ такой, что $L(\lambda)\mathbf{z} = 0$. Умножая последнее равенство скалярно на $\mathbf{z}$ получим уравнение, которому удовлетворяет λ :

$$-\lambda p + 2\omega_0 i s - \frac{1}{\lambda} q_0 + \sum_{l=1}^m \frac{q_l}{b_l - \lambda} = 0, \\ p := \frac{\|A_M^{-1/2} \mathbf{z}\|^2}{\|\mathbf{z}\|^2}, \quad s := \frac{(SA_M^{-1/2} \mathbf{z}, A_M^{-1/2} \mathbf{z})}{\|\mathbf{z}\|^2}, \quad q_0 := \frac{\|Q_{BM} \mathbf{z}\|^2}{\|\mathbf{z}\|^2}, \quad q_l := \frac{\|Q_{lM} \mathbf{z}\|^2}{\|\mathbf{z}\|^2}.$$

Выделим действительную часть из последнего уравнения:

$$-p \operatorname{Re} \lambda - q_0 \frac{\operatorname{Re} \lambda}{|\lambda|^2} + \sum_{l=1}^m \frac{q_l (b_l - \operatorname{Re} \lambda)}{|b_l - \lambda|^2} = 0.$$

Учитывая, что $p > 0$, $q_l > 0$ ($l = \overline{1, m}$) (см. лемму 4.5), из последнего соотношения получим

$$\begin{aligned} 0 < \operatorname{Re} \lambda \sum_{l=1}^m \frac{q_l}{|b_l - \lambda|^2} &< \operatorname{Re} \lambda \left[p + \frac{q_0}{|\lambda|^2} + \sum_{l=1}^m \frac{q_l}{|b_l - \lambda|^2} \right] = \\ &= \sum_{l=1}^m \frac{b_l q_l}{|b_l - \lambda|^2} < b_m \sum_{l=1}^m \frac{q_l}{|b_l - \lambda|^2}, \end{aligned}$$

то есть, $\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} \lambda < b_m\} =: \Lambda$.

Далее, преобразуем пучок $-\lambda L(\lambda)$ (см. (4.37)) при $\lambda \neq 0$ с помощью леммы 4.5 (свойство $Q_{BM}^* Q_{BM} + \sum_{l=1}^m Q_{lM}^* Q_{lM} = I$) к следующему виду:

$$\begin{aligned} -\lambda L(\lambda) \mathbf{z} &= \left[\lambda^2 A_M^{-1} - 2\omega_0 i \lambda A_M^{-1/2} S A_M^{-1/2} + Q_{BM}^* Q_{BM} - \sum_{l=1}^m \frac{\lambda}{b_l - \lambda} Q_{lM}^* Q_{lM} \right] \mathbf{z} = \\ &= \left[I + \lambda^2 A_M^{-1} - 2\omega_0 i \lambda A_M^{-1/2} S A_M^{-1/2} - \sum_{l=1}^m \frac{b_l}{b_l - \lambda} Q_{lM}^* Q_{lM} \right] \mathbf{z} = 0, \\ \mathbf{z} &\in \mathbf{H} = \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Из оценок [91, § 3, лемма 3.1, лемма 3.2] и $A_M^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0))$ найдем, что при $\lambda \in \Lambda \setminus [\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \cup \sigma(\mathcal{G})]$ и $\lambda \rightarrow \infty$ будут выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \|(I - \lambda A_M^{-1/2})^{-1} \left\{ 2\omega_0 i \lambda A_M^{-1/2} S A_M^{-1/2} + \sum_{l=1}^m \frac{b_l}{b_l - \lambda} Q_{lM}^* Q_{lM} \right\} (I + \lambda A_M^{-1/2})^{-1}\| &\leq \\ &\leq 2\omega_0 |\lambda| \cdot \|(I - i\lambda A_M^{-1/2})^{-1} A_M^{-1/4} (A_M^{-1/4} S)\| \cdot \|(I + i\lambda A_M^{-1/2})^{-1} A_M^{-1/4}\| + \\ &+ \|(I - \lambda A_M^{-1/2})^{-1} \sum_{l=1}^m \frac{b_l}{b_l - \lambda} Q_{lM}^* Q_{lM} (I + \lambda A_M^{-1/2})^{-1}\| = o(1). \end{aligned}$$

Отсюда, из степенной асимптотики собственных значений $\lambda_k(A_M)$ оператора A_M и теоремы об асимптотике спектра пучка вида (4.38) (см. [1, 75]) следует, что пучок $L(\lambda)$ (оператор $\mathcal{A}$) имеет в Λ две ветви собственных значений с асимптотическим поведением $\lambda_k^{(\pm i\infty)}(\mathcal{A}) = \pm i \lambda_k^{1/2}(A_M)(1 + o(1))$ при $k \rightarrow +\infty$. Формула для $\lambda_k(A_M)$ доказывается так же, как в теореме 2.4.

3. Утверждения п. 4. и п. 5. — это следствия п. 3. и п. 5. соответственно теоремы 1.6. Теорема доказана. ■

4.5. Выводы к четвертой главе

1. Доказано, что в вязкоупругой сжимаемой жидкости Олдройта, целиком заполняющей равномерно вращающуюся ограниченную область, существует два типа волновых движений. Первый тип движений отвечает ветви собственных значений оператора $\mathcal{A}$, расположенных в горизонтальной полосе и сгущающихся в бесконечности (см. теорему 4.3, п. 1, п. 2). Этот тип движений аналогичен внутренним диссипативным волнам, возникающим в вязкой несжимаемой жидкости, целиком заполняющей равномерно вращающуюся ограниченную область. Второй тип волновых движений, возникающих в вязкоупругой сжимаемой жидкости Олдройта, отвечает точкам существенного спектра оператора $\mathcal{A}$ (см. теорему 4.2 и замечание 4.2) и собственным значениям, которые могут к нему сгущаться. Этот тип движений новый и связан с сжимаемостью жидкости и эффектами памяти.
2. Если вязкоупругая сжимаемая жидкость Олдройта не вращается, то все волновые движения, за исключением конечного количества, являются апериодически затухающими. В случае достаточно большой вязкости жидкости все волновые движения будут апериодически затухающими (см. теорему 4.3, п. 3, п. 4). Если вязкоупругая сжимаемая жидкость Олдройта не вращается и находится в невесомости, то существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ претерпевает качественные изменения — он превращается в конечное количество точек (см. замечание 4.2), некоторые из которых могут быть предельными для последовательностей действительных собственных значений.
3. Доказаны асимптотические формулы, описывающие поведение вязкоупругой сжимаемой жидкости Олдройта под нагрузкой специального вида (см. теорему 4.4).
4. Доказано, что в вязкоупругой сжимаемой жидкости Максвелла, целиком

заполняющей равномерно вращающуюся ограниченную область, существует два типа волновых движений. Первый тип движений отвечает ветви собственных значений оператора $\mathcal{A}$, расположенных в вертикальной полосе и сгущающихся в бесконечности (см. теорему 4.7, п. 3). Этот тип движений аналогичен акустическим волнам, возникающим в идеальной сжимаемой жидкости. Второй тип волновых движений, возникающих в вязкоупругой сжимаемой жидкости Максвелла, отвечает точкам существенного спектра оператора $\mathcal{A}$ (см. теорему 4.7, п. 2) и собственным значениям, которые могут к нему сгущаться. Этот тип движений новый и связан с сжимаемостью жидкости и эффектами памяти.

5. Если вязкоупругая сжимаемая жидкость Максвелла не вращается, то все волновые движения будут иметь положительные декременты затухания, отделенные от нуля положительной константой (см. теорему 4.7, п. 4).
6. Доказаны асимптотические формулы, описывающие поведение вязкоупругой сжимаемой жидкости Максвелла под нагрузкой специального вида (см. теорему 4.6).

О разрешимости линейных интегро-дифференциальных эволюционных уравнений первого и второго порядков

5.1. Введение

В пятой главе изучаются интегро-дифференциальные уравнения первого и второго порядков с переменными операторными коэффициентами, обобщающие некоторые уравнения из глав 1-4. В § 5.2 рассмотрена задача Коши для интегро-дифференциального эволюционного уравнения первого порядка в банаховом пространстве, при этом ядро интегрального возмущения подчинено главному оператору, доказана теорема 5.4 об однозначной разрешимости. Идея доказательства теоремы состоит в сведении интегро-дифференциального уравнения к уравнению Вольтерра с ядром, сильно непрерывным в подходящем пространстве. Теорема 5.4 близка к утверждению, следующему из [152].

В § 5.3 рассмотрена задача Коши для интегро-дифференциального уравнения второго порядка в банаховом или гильбертовом пространстве с переменными операторными коэффициентами. Рассмотрены различные случаи подчинения операторных коэффициентов. При этом ядро интегрального возмущения всегда подчинено главному оператору укороченного уравнения. Доказаны теоремы 5.5, 5.6, 5.7, 5.8 об однозначной разрешимости. Основная идея состоит в сведении изучаемой задачи к задаче Коши для интегро-дифференциального эволюционного уравнения первого порядка с матричными операторными коэффициентами с последующим применением теоремы 5.4.

Результаты главы 5 изложены в статье [204].

5.2. Уравнение первого порядка в банаховом пространстве

5.2.1. Определения и вспомогательные утверждения

Будем писать $A \in \mathcal{J}(M, \omega)$ ($M \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$), если оператор A — генератор сильно непрерывной полугруппы (C_0 -полугруппы) ограниченных операторов $U(t)$, действующей в банаховом пространстве E (или в гильбертовом пространстве H), и удовлетворяющей оценке $\|U(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq Me^{\omega t}$ при любом $t \geq 0$.

Пусть $A(t)$ генератор C_0 -полугруппы в E при каждом $t \in [0, T]$. Следующее определение и утверждения заимствованы из [192] (см. также [159]).

О п р е д е л е н и е 5.1. [192, гл. 4, § 4.3, определение 4.3.1] Семейство операторов $A(t)$ называется *стабильным* на отрезке $[0, T]$, если существуют константы $M \geq 1$ и $\omega \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\left\| \prod_{k=n \searrow 1} (A(t_k) - \lambda)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E)} \equiv \left\| (A(t_n) - \lambda)^{-1} \cdots (A(t_1) - \lambda)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}$$

для любых $\lambda > \omega$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq T$.

З а м е ч а н и е 5.1. Очевидно, что если $A(t) \in \mathcal{J}(1, \omega)$ при любом $t \in [0, T]$, то семейство операторов $A(t)$ стабильно на отрезке $[0, T]$ с константами $M = 1$ и ω . ►

Т е о р е м а 5.1. [192, гл. 4, § 4.3, теорема 4.3.3] Пусть $A(t)$ стабильное на $[0, T]$ семейство генераторов с константами стабильности M и ω . Если $B(t) \in \mathcal{L}(E)$ при $t \in [0, T]$ и $\|B(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq K < +\infty$, то $A(t) + B(t)$ стабильное на $[0, T]$ семейство генераторов с константами стабильности M и $\omega + MK$.

Т е о р е м а 5.2. [192, гл. 4, § 4.4, с. 102] Пусть $A(t)$ стабильное на $[0, T]$ семейство генераторов, $\mathcal{D}(A(t)) = \mathcal{D}$, $A(t)$ сильно непрерывно дифференцируема на $\mathcal{D}$. Тогда существует и единственная ограниченная оператор-функция $U(t, s) \in \mathcal{L}(E)$, удовлетворяющая условиям:

1. $U(t, s)$ сильно непрерывна по t, s , $U(s, s) = I$, $\|U(t, s)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq Me^{\omega(t-s)}$ ($t \geq s$);

2. $U(t, s) = U(t, r)U(r, s)$ ($s \leq r \leq t$);

3. $U(t, s)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$, функция $U(t, s)u$ сильно непрерывно дифференцируема по t, s при $u \in \mathcal{D}$ и

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, s)u = A(t)U(t, s)u, \quad \frac{\partial}{\partial s} U(t, s)u = -U(t, s)A(s)u.$$

При этом правые (а значит и левые) части в этих равенствах сильно непрерывны при $0 \leq s \leq t \leq T$.

З а м е ч а н и е 5.2. Если при всех $t \in [0, T]$ существует $A^{-1}(t) \in \mathcal{L}(E)$, то оператор $V(t, s) := A(t)U(t, s)A^{-1}(s)$ ограничен и сильно непрерывен при $0 \leq s \leq t \leq T$. Действительно, это легко видеть из свойства 3 теоремы 5.2, [55, гл. 2, § 1, лемма 1.5] и представления $V(t, s) = [A(t)U(t, s)A^{-1}(0)][A(0)A^{-1}(s)]$. ►

В банаховом пространстве E рассмотрим задачу Коши

$$\frac{du}{dt} = A(t)u + f(t), \quad u(0) = u^0 \quad (5.1)$$

с замкнутыми операторами $A(t)$, определенными на плотном в E множестве $\mathcal{D}$.

О п р е д е л е н и е 5.2. Функцию $u \in C^1([0, T]; E)$ назовем *сильным решением* задачи Коши (5.1), если 1) $u(t) \in \mathcal{D}$ для любого $t \in [0, T]$ и $Au \in C([0, T]; E)$, 2) в (5.1) выполнено уравнение при любом $t \in [0, T]$ и начальное условие.

Т е о р е м а 5.3. [192, гл. 4, § 4.5, теорема 4.5.3] Пусть выполнены условия теоремы 5.2. Тогда для любых $u^0 \in \mathcal{D}$, $f \in C^1([0, T]; E)$ сильное решение задачи Коши (5.1) существует, единственно и выражается по формуле

$$u(t) = U(t, 0)u^0 + \int_0^t U(t, s)f(s) ds.$$

З а м е ч а н и е 5.3. Для сокращения записи последующих утверждений будем писать $A \in SC_{\mathcal{D}}^n([0, T]; E)$ ($\mathcal{D} \subset E$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), если $Au \in C^n([0, T]; E)$ при любом $u \in \mathcal{D}$. Отметим, что если $A \in SC_E([0, T]; E)$, то из теоремы Банаха-Штейнгауза будет следовать, что $A(t) \in \mathcal{L}(E)$ и $\|A(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq K < +\infty$. ►

5.2.2. Интегродифференциальное уравнение первого порядка в банаховом пространстве

В банаховом пространстве $\mathcal{E}$ рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dz}{dt} = \mathcal{A}(t)z + \int_0^t \mathcal{G}(t, s)z(s) ds + f(t), \quad z(0) = z^0 \quad (5.2)$$

с замкнутыми операторами $\mathcal{A}(t)$, определенными на плотном в $\mathcal{E}$ множестве $\mathcal{D}$ при любом $t \in [0, T]$. При этом $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(\mathcal{G}(t, s))$ при $t, s \in T_\Delta := \{0 \leq s \leq t \leq T\}$. Под *сильным решением* задачи Коши (5.2) будем понимать решение в смысле определения 5.2.

Т е о р е м а 5.4. Пусть оператор $\mathcal{C}$ замкнут, $\mathcal{D}(\mathcal{C}) \supset \mathcal{D}$, $\mathcal{C}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ и выполнены следующие условия:

1. $\mathcal{D}(\mathcal{A}(t)) = \mathcal{D}$, $\mathcal{A} \in SC_{\mathcal{D}}^1([0, T]; \mathcal{E})$ и стабильно на $[0, T]$;
2. $\mathcal{G}\mathcal{C}^{-1}$, $(\mathcal{G}\mathcal{C}^{-1})'_t \in SC_{\mathcal{E}}(T_\Delta; \mathcal{E})$.

Тогда для любых $z^0 \in \mathcal{D}$, $f \in C^1([0, T]; \mathcal{E})$ сильное (в смысле определения 5.2) решение задачи Коши (5.2) существует и единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности можно считать, что существует $\mathcal{A}^{-1}(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ при любых $t \in [0, T]$. Если это не так, то осуществим в (5.2) замену искомой функции $z(t) = e^{at}v(t)$, где $a > \omega$. Получим задачу Коши

$$\frac{dv}{dt} = (\mathcal{A}(t) - a)v + \int_0^t e^{-a(t-s)} \mathcal{G}(t, s)v(s) ds + e^{-at}f(t), \quad v(0) = z^0,$$

где $(\mathcal{A}(t) - a)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ при любых $t \in [0, T]$.

Предположим, что задача Коши (5.2) имеет сильное решение $z(t)$, тогда

$$\begin{aligned} z(t) &= U(t, 0)z^0 + \int_0^t U(t, s) \left[\int_0^s \mathcal{G}(s, \tau)z(\tau) d\tau + f(s) \right] ds = \\ &= z_0(t) + \int_0^t \left[\int_\tau^t U(t, s) \mathcal{G}_0(s, \tau) \mathcal{C}z(\tau) ds \right] d\tau, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$z_0(t) := U(t, 0)z^0 + \int_0^t U(t, s)f(s) ds, \quad \mathcal{G}_0(s, \tau) := \mathcal{G}(s, \tau)\mathcal{C}^{-1}. \quad (5.4)$$

Преобразуем внутренний интеграл в правой части (5.3). По предположению относительно $z(t)$ имеем $z(\tau) \in \mathcal{D} \subset \mathcal{D}(\mathcal{C})$. Отсюда следует, что существует частная производная (см. теорему 5.2, свойство 3 для $U(t, s)$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left[-U(t, s)\mathcal{A}^{-1}(s)\mathcal{G}_0(s, \tau)\mathcal{C}z(\tau) \right] &= U(t, s)\mathcal{G}_0(s, \tau)\mathcal{C}z(\tau) + \\ &+ U(t, s)\mathcal{A}^{-1}(s) \left[\mathcal{A}'(s)\mathcal{A}^{-1}(s)\mathcal{G}_0(s, \tau)\mathcal{C}z(\tau) - \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{G}_0(s, \tau)\mathcal{C}z(\tau) \right], \end{aligned} \quad (5.5)$$

сильно непрерывная по s на $[\tau, t]$. Здесь использовано свойство сильной непрерывности оператора $\mathcal{A}'(s)\mathcal{A}^{-1}(s)$, следующее из [55, гл. 2, § 1, лемма 1.5] для операторов $\mathcal{A}(t)$ сильно непрерывно дифференцируемых на $\mathcal{D}$ и непрерывно обратимых.

Обозначим $\mathcal{V}(t, s) := \mathcal{A}(t)U(t, s)\mathcal{A}^{-1}(s)$ и, проинтегрировав соотношение (5.5) по s в пределах от τ до t , найдем, что

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^t U(t, s)\mathcal{G}(s, \tau)z(\tau) ds &\equiv \int_{\tau}^t U(t, s)\mathcal{G}_0(s, \tau)\mathcal{C}z(\tau) ds = \\ &= \mathcal{A}^{-1}(t) \left\{ -\mathcal{G}_0(t, \tau)\mathcal{C}z(\tau) + \mathcal{V}(t, \tau)\mathcal{G}_0(\tau, \tau)\mathcal{C}z(\tau) - \right. \\ &\left. - \int_{\tau}^t \mathcal{V}(t, s) \left[\mathcal{A}'(s)\mathcal{A}^{-1}(s)\mathcal{G}_0(s, \tau)\mathcal{C}z(\tau) - \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{G}_0(s, \tau)\mathcal{C}z(\tau) \right] ds \right\}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Преобразуем (5.3) с помощью соотношения (5.6) к следующему виду

$$z(t) = z_0(t) + \int_0^t \mathcal{A}^{-1}(t)\mathcal{R}(t, \tau)\mathcal{C}z(\tau) d\tau, \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t, \tau) &:= -\mathcal{G}_0(t, \tau) + \mathcal{V}(t, \tau)\mathcal{G}_0(\tau, \tau) - \\ &- \int_{\tau}^t \mathcal{V}(t, s) \left[\mathcal{A}'(s)\mathcal{A}^{-1}(s)\mathcal{G}_0(s, \tau) - \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{G}_0(s, \tau) \right] \cdot ds. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Здесь $z_0(t)$ (см. (5.4)) — сильное решение задачи Коши (5.2) без интегрального слагаемого, поэтому $z_0 \in C^1([0, T]; \mathcal{E})$, $\mathcal{A}z_0 \in C([0, T]; \mathcal{E})$ (см. теорему 5.3). Оператор $\mathcal{R}(t, s)$ сильно непрерывен в треугольнике T_Δ , в силу условий теоремы и замечания 5.2.

Из проведенных рассуждений следует, что сильное решение задачи Коши (5.2), если оно существует, является решением интегрального уравнения Вольтерра (5.7). Покажем, что уравнение (5.7) имеет единственное решение, которое и является сильным решением задачи Коши (5.2).

Превратим $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{C})$ в банахово пространство $\mathcal{E}(\mathcal{C})$, оснастив $\mathcal{D}$ нормой $\|z\|_{\mathcal{E}(\mathcal{C})} := \|\mathcal{C}z\|$. Из (5.8) и [55, гл. 2, § 1, лемма 1.5] следует, что ядро интегрального уравнения $\mathcal{A}^{-1}(t)\mathcal{R}(t, s)\mathcal{C} = \mathcal{C}^{-1}[\mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}(0)] [\mathcal{A}(0)\mathcal{A}^{-1}(t)]\mathcal{R}(t, s)\mathcal{C}$ сильно непрерывно в $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ при $t, s \in T_\Delta$. Таким образом, уравнение (5.7), рассматриваемое в $\mathcal{E}(\mathcal{C})$, это уравнение Вольтерра второго рода с сильно непрерывным ядром.

Из включения $\mathcal{A}z_0 \in C([0, T]; \mathcal{E})$ следует, что $z_0 \in C([0, T]; \mathcal{E}(\mathcal{C}))$ и, таким образом, уравнение (5.7) имеет единственное решение $z \in C([0, T]; \mathcal{E}(\mathcal{C}))$. Докажем, что найденная функция $z(t)$ есть единственное сильное решение задачи Коши (5.2).

Из (5.7), $z \in C([0, T]; \mathcal{E}(\mathcal{C}) = \mathcal{D})$ и $\mathcal{A}(t)z_0(t) = z'_0(t) - f(t)$ имеем

$$\mathcal{A}(t)z(t) = z'_0(t) - f(t) + \int_0^t \mathcal{R}(t, \tau)\mathcal{C}z(\tau) d\tau \in C([0, T]; \mathcal{E}).$$

Далее, с учетом $\mathcal{R}(t, t) \equiv 0$ из (5.7) и $z_0 \in C^1([0, T]; \mathcal{E})$ получим, что

$$z'(t) = z'_0(t) + \int_0^t (\mathcal{R}(t, \tau) + \mathcal{G}_0(t, \tau))\mathcal{C}z(\tau) d\tau, \quad z' \in C([0, T]; \mathcal{E}).$$

Из (5.4) и последних двух соотношений следует, что функция $z(t)$ — единственное сильное (в смысле определения 5.2) решение задачи Коши (5.2). Теорема доказана. ■

З а м е ч а н и е 5.4. Если в условии теоремы 5.4 $\mathcal{A}(t) \equiv \mathcal{A}$ — генератор гомоморфной полугруппы, то условие на функцию $f(t)$ можно ослабить. В этом случае достаточно, чтобы функция $f(t)$ удовлетворяла условию Гельдера: $f \in C^\alpha([0, T]; E)$ ($0 < \alpha \leq 1$). Это означает, что существует число $K > 0$ такое, что

$$\|f(t) - f(s)\|_E \leq K|t - s|^\alpha, \quad 0 \leq s, t \leq T.$$

При этом вместо теоремы 5.3 нужно использовать [22, гл. 2, § 1, теорема 1.4]. ►

5.3. Уравнение второго порядка: различные случаи подчинения операторных коэффициентов

5.3.1. Интегродифференциальное уравнение второго порядка в банаховом пространстве со старшим оператором при функции

В банаховом пространстве E рассмотрим задачу Коши

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = A(t) \frac{du}{dt} + B(t)u + \int_0^t G(t, s)u(s) ds + f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \quad (5.9)$$

где $B(t) := B_0^2(t) + Q_0(t)$, а $B_0(t)$ — замкнутые операторы, определенные на плотном в E множестве $\mathcal{D}$ при любом $t \in [0, T]$, $A(t) \in \mathcal{L}(E)$. Операторы $Q_0(t)$ и $G(t, s)$ подчинены в некотором смысле операторам $B_0(t)$ и $B_0^2(t)$ соответственно.

О п р е д е л е н и е 5.3. Функцию $u \in C^2([0, T]; E)$ назовем *сильным решением* задачи Коши (5.9), если 1) $u(t) \in \mathcal{D}(B_0^2(t))$, $u'(t) \in \mathcal{D}$ для любого $t \in [0, T]$ и $B_0^2 u, B_0 u' \in C([0, T]; E)$, 2) в (5.9) выполнено уравнение при любом $t \in [0, T]$ и начальные условия.

Т е о р е м а 5.5. Пусть выполнены следующие условия:

1. $\mathcal{D}(B_0(t)) = \mathcal{D}$, $\pm B_0 \in SC_D^1([0, T]; E)$ (см. замечание 5.3) и стабильны на $[0, T]$ с константами стабильности $M_\pm, \omega_\pm$;

2. $Q_0 B_1^{-1}$, A , $B_1' B_1^{-1} \in SC_E([0, T]; E) \cap SC_D^1([0, T]; E)$, где введено обозначение $B_1(t) := B_0(t) - \lambda_0$, $\lambda_0 > \omega_+$;
3. $G(t, s) B_1^{-1}(s) B_1^{-1}(0)$, $(G(t, s) B_1^{-1}(s) B_1^{-1}(0))'_t \in SC_E(T_\Delta; E)$.

Тогда для любых $u^0 \in \mathcal{D}(B_0^2(0))$, $u^1 \in \mathcal{D}$, $f \in C^1([0, T]; E)$ сильное решение (в смысле определения 5.3) задачи Коши (5.9) существует и единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем в несколько шагов.

1. Пусть $\lambda_0 > \omega_+$. Перепишем оператор $B(t)$ в следующем виде

$$\begin{aligned} B(t) &= B_0^2(t) + Q_0(t) = (B_1(t) + 2\lambda_0 I + \lambda_0^2 B_1^{-1}(t) + Q_0(t) B_1^{-1}(t)) B_1(t) = \\ &=: (B_1(t) + Q_1(t)) B_1(t), \quad B_1(t) := B_0(t) - \lambda_0, \end{aligned} \quad (5.10)$$

где $B_1^{-1}(t) \in \mathcal{L}(E)$ при $t \in [0, T]$, $Q_1 \in SC_E([0, T]; E) \cap SC_D^1([0, T]; E)$.

Предположим, что задача Коши (5.9) имеет сильное (в смысле определения 5.3) решение $u(t)$. Определим функции $v(t) := u'(t)$, $w(t) := B_1(t)u(t)$. Из определения 5.3 и условий теоремы следует, что $v, w \in C^1([0, T]; E)$. Из (5.9), (5.10) найдем, что введенные функции удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = A(t)v + B_1(t)w + Q_1(t)w + \int_0^t G(t, s) B_1^{-1}(s) w(s) ds + f(t), \\ \frac{dw}{dt} = B_1(t)v + B_1'(t) B_1^{-1}(t) w, \quad v(0) = u^1, \quad w(0) = B_1(0)u^0. \end{cases} \quad (5.11)$$

Систему (5.11) перепишем в виде задачи Коши

$$\frac{dz}{dt} = \mathcal{B}(t)z + \mathcal{Q}(t)z + \int_0^t \mathcal{G}(t, s)z(s) ds + \mathcal{F}(t), \quad z(0) = z^0 \quad (5.12)$$

в банаховом пространстве $\mathcal{E} := E \times E = \{z = (v; w)^\tau \mid v, w \in E\}$ (символ τ обозначает операцию транспонирования).

В (5.12) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(t) &:= \begin{pmatrix} 0 & B_1(t) \\ B_1(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{B}(t)) = \mathcal{D} \times \mathcal{D}, \quad \overline{\mathcal{D}(\mathcal{B}(t))} = \mathcal{E}, \\ \mathcal{Q}(t) &:= \begin{pmatrix} A(t) & Q_1(t) \\ 0 & B_1'(t)B_1^{-1}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{E}), \\ \mathcal{G}(t, s) &:= \begin{pmatrix} 0 & G(t, s)B_1^{-1}(s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{G}(t, s)) = E \times \mathcal{D} \supset \mathcal{D}(\mathcal{B}(t)), \\ \mathcal{F}(t) &:= (f(t); 0)^\tau, \quad z^0 := (u^1; B_1(0)u^0)^\tau.\end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения направлены на применение теоремы 5.4 к задаче Коши (5.12).

2. Докажем, что $\mathcal{B}(t)$ стабильное на $[0, T]$ семейство операторов. Заметим прежде, что для оператора $\mathcal{B}(t)$ справедлива следующая факторизация:

$$\mathcal{B}(t) = \mathcal{T} \cdot \begin{pmatrix} B_1(t) & 0 \\ 0 & -B_1(t) \end{pmatrix} \cdot \mathcal{T}^{-1}, \quad \mathcal{T} := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} = \mathcal{T}^{-1}. \quad (5.13)$$

Из факторизации (5.13) найдем, что плотно определенный оператор $\mathcal{B}(t)$ замкнут и для $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq T$ верна оценка (см. определение 5.1)

$$\begin{aligned}& \left\| \prod_{k=n \searrow 1} (\mathcal{B}(t_k) - \lambda)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} = \\&= \left\| \mathcal{T} \cdot \text{diag} \left(\prod_{k=n \searrow 1} (B_1(t_k) - \lambda)^{-1}, \prod_{k=n \searrow 1} (-B_1(t_k) - \lambda)^{-1} \right) \cdot \mathcal{T}^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} \leq \\&\leq \|\mathcal{T}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^2 \max \left\{ \left\| \prod_{k=n \searrow 1} (B_0(t_k) - (\lambda + \lambda_0))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E)}, \right. \\&\quad \left. \left\| \prod_{k=n \searrow 1} (-B_0(t_k) - (\lambda - \lambda_0))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E)} \right\} \leq \\&\leq \|\mathcal{T}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^2 \max \left\{ \frac{M_+}{(\lambda + \lambda_0 - \omega_+)^n}, \frac{M_-}{(\lambda - \lambda_0 - \omega_-)^n} \right\} \leq \frac{\|\mathcal{T}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^2 \max \{M_+, M_-\}}{(\lambda - \omega_0)^n}\end{aligned}$$

для любого $\lambda > \omega_0 := \max\{\omega_+ - \lambda_0, \omega_- + \lambda_0\}$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Из условий теоремы следует, что $\mathcal{Q}(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$, $\|\mathcal{Q}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} \leq K < +\infty$ при $t \in [0, T]$. По теореме 5.1 семейство операторов $\mathcal{B}(t) + \mathcal{Q}(t)$ стабильно на отрезке $[0, T]$. Кроме того, $\mathcal{B} + \mathcal{Q} \in SC_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}^1([0, T]; \mathcal{E})$.

Определим оператор $\mathcal{C} := \text{diag}(B_1(0), B_1(0))$, $\mathcal{D}(\mathcal{C}) = \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, $\mathcal{C}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$. Из условий теоремы тогда получим, что $\mathcal{G}(t, s)\mathcal{C}^{-1}$, $(\mathcal{G}(t, s)\mathcal{C}^{-1})'_t \in SC_{\mathcal{E}}(T_{\Delta}; \mathcal{E})$.

Из условий теоремы на начальные данные и функцию $f(t)$ следует, что $z^0 = (u^1; B_1(0)u^0)^T \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{B}(t) + \mathcal{Q}(t))$, $\mathcal{F} = (f; 0)^T \in C^1([0, T]; \mathcal{E})$.

По теореме 5.4 задача Коши (5.12) имеет единственное сильное (в смысле определения 5.2) решение, то есть функцию $z \in C^1([0, T]; \mathcal{E})$ такую, что $z(t) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ для любого $t \in [0, T]$ и $(\mathcal{B} + \mathcal{Q})z \in C([0, T]; \mathcal{E})$, в (5.12) выполнено уравнение при любом $t \in [0, T]$ и начальное условие.

4. Пусть $z(t) = (v(t); w(t))^T$ — единственное сильное решение задачи Коши (5.12). Рассмотрим функцию $u(t) := B_1^{-1}(t)w(t)$.

Из $w(t) \in \mathcal{D}$ для $t \in [0, T]$ и $B_1 w \in C([0, T]; E)$ следует, что $u \in \mathcal{D}(B_1^2(t))$ для любого $t \in [0, T]$ и $B_1^2 u \in C([0, T]; E)$.

Из второго уравнения в системе (5.11) следует, что

$$\begin{aligned} u'(t) &= -B_1^{-1}(t)B_1'(t)B_1^{-1}(t)w(t) + B_1^{-1}(t)w'(t) = \\ &= B_1^{-1}(t)(-B_1'(t)B_1^{-1}(t)w(t) + w'(t)) = v(t), \quad v \in C^1([0, T]; E). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $u \in C^2([0, T]; E)$, а также, что $u'(t) \in \mathcal{D}$ для любого $t \in [0, T]$ и $B_1 u' \in C([0, T]; E)$.

Из первого уравнения в (5.11) и из (5.10) следует, что

$$\begin{aligned} u''(t) &= v'(t) = A(t)u'(t) + (B_1(t) + Q_1(t))B_1(t)u(t) + \int_0^t G(t, s)u(s) ds + f(t) = \\ &= A(t)\frac{du}{dt} + (B_0^2(t) + Q_0(t))u + \int_0^t G(t, s)u(s) ds + f(t), \end{aligned}$$

то есть функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению из (5.9). Легко видеть, что функция $u(t)$ удовлетворяет также начальным условиям из (5.9). Согласно опреде-

лению 5.3, функция $u(t)$ — решение задачи Коши (5.9). Теорема доказана. ■

5.3.2. Интегродифференциальное уравнение второго порядка в гильбертовом пространстве со старшим оператором при функции

В гильбертовом пространстве H рассмотрим задачу Коши

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = A(t) \frac{du}{dt} + B(t)u + \int_0^t G(t, s)u(s) ds + f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \quad (5.14)$$

где $B(t) := B_0^2(t) + Q_0(t)$, а $B_0(t)$ — замкнутые операторы, определенные на плотном в H множестве $\mathcal{D}$ при любом $t \in [0, T]$. Операторы $A(t)$, $Q_0(t)$ и $G(t, s)$ подчинены в некотором смысле операторам $B_0(t)$ и $B_0^2(t)$ соответственно.

Под *сильным решением* задачи Коши (5.14) понимается функция $u(t)$, удовлетворяющая определению 5.3.

Т е о р е м а 5.6. Пусть выполнены следующие условия:

1. $\mathcal{D}(B_0(t)) = \mathcal{D}$, $\pm B_0(t) \in \mathcal{J}(1, \omega_{\pm})$ при любом $t \in [0, T]$, $B_0 \in SC_{\mathcal{D}}^1([0, T]; H)$;
2. $Q_0 B_1^{-1}$, $B_1' B_1^{-1} \in SC_H([0, T]; H) \cap SC_{\mathcal{D}}^1([0, T]; H)$, где $B_1(t) := B_0(t) - \lambda_0$ и $\lambda_0 > \omega_+$;
3. $A(t) \in \mathcal{J}(1, \omega_A)$ при любом $t \in [0, T]$, $A \in SC_{\mathcal{D}}^1([0, T]; H)$;
4. $G(t, s) B_1^{-1}(s) B_1^{-1}(0)$, $(G(t, s) B_1^{-1}(s) B_1^{-1}(0))'_t \in SC_H(T_{\Delta}; H)$.

Относительно операторов $A(t)$ и $B_0(t)$ дополнительно будем предполагать одно из следующих условий:

- 5a. $\exists b \geq 0 : \|A(t)u\|_H \leq \|B_0(t)u\|_H + b\|u\|_H$ для любых $u \in \mathcal{D}$, $t \in [0, T]$;
- 5b. $A(t) B_1^{-1}(t) \in \mathfrak{S}_{\infty}(H)$;
- 5c. $B_0(t) = -B_0^*(t)$, $B_0^{-1}(t) \in \mathcal{L}(H)$ при любом $t \in [0, T]$, $A(t) B_0^{-1}(t) \in \mathcal{L}(H)$.

Тогда для любых $u^0 \in \mathcal{D}(B_0^2(0))$, $u^1 \in \mathcal{D}$, $f \in C^1([0, T]; H)$ сильное решение задачи Коши (5.14) существует и единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем в несколько шагов.

1. Предположим, что задача Коши (5.14) имеет сильное (в смысле определения 5.3) решение $u(t)$. Определим функции $v(t) := u'(t)$, $w(t) := B_1(t)u(t)$. Из определения 5.3 и условий теоремы следует, что $v, w \in C^1([0, T]; H)$. Из (5.14), (5.10) найдем, как и в теореме 5.5, что введенные функции удовлетворяют системе уравнений (5.11) (в случае 5с в (5.10) следует положить $\lambda_0 = 0$).

Рассмотрим случаи 5a и 5b. Перепишем систему (5.11) в виде задачи Коши

$$\frac{dz}{dt} = \mathcal{B}(t)z + \mathcal{A}(t)z + \mathcal{Q}(t)z + \int_0^t \mathcal{G}(t, s)z(s) ds + \mathcal{F}(t), \quad z(0) = z^0 \quad (5.15)$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := H \oplus H = \{z = (v; w)^\tau \mid v, w \in H\}$.

В (5.15) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(t) &:= \begin{pmatrix} 0 & B_1(t) \\ B_1(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{B}(t)) = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}, \quad \overline{\mathcal{D}(\mathcal{B}(t))} = \mathcal{H}, \\ \mathcal{A}(t) &:= \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}(t)) = \mathcal{D}(A(t)) \oplus H \supset \mathcal{D}(\mathcal{B}(t)), \quad \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}(t))} = \mathcal{H}, \\ \mathcal{Q}(t) &:= \begin{pmatrix} 0 & Q_1(t) \\ 0 & B_1'(t)B_1^{-1}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \\ \mathcal{G}(t, s) &:= \begin{pmatrix} 0 & G(t, s)B_1^{-1}(s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{G}(t, s)) = H \oplus \mathcal{D} \supset \mathcal{D}(\mathcal{B}(t)), \\ \mathcal{F}(t) &:= (f(t); 0)^\tau, \quad z^0 := (u^1; B_1(0)u^0)^\tau. \end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения направлены на применение теоремы 5.4 к задаче Коши (5.15).

2. Докажем, что при любом $t \in [0, T]$ имеют место включения

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(t) &\in \mathcal{J}(1, \omega_0), \quad \omega_0 := \max\{\omega_+ - \lambda_0, \omega_- + \lambda_0\}, \\ \mathcal{A}(t) &\in \mathcal{J}(1, \max\{0, \omega_A\}). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Из факторизации (5.13), учитывая, что $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}^*$, $\|\mathcal{T}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = 1$, най-

дем, что плотно определенный оператор $\mathcal{B}(t)$ замкнут и

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{B}(t) - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} &= \\ &= \|\mathcal{T} \cdot \text{diag}\left((B_1(t) - \lambda)^{-1}, (-B_1(t) - \lambda)^{-1}\right) \cdot \mathcal{T}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \\ &\leq \max\left\{(\lambda + \lambda_0 - \omega_+)^{-1}, (\lambda - \lambda_0 - \omega_-)^{-1}\right\} \leq (\lambda - \omega_0)^{-1} \end{aligned}$$

для любого $\lambda > \omega_0$ и $t \in [0, T]$. Следовательно, $\mathcal{B}(t) \in \mathcal{J}(1, \omega_0)$ при любом $t \in [0, T]$.

Далее, плотно заданный оператор $\mathcal{A}(t)$ замкнут и для любого $\lambda > \max\{0, \omega_A\}$

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{A}(t) - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} &= \|\text{diag}\left((A(t) - \lambda)^{-1}, \lambda^{-1}I\right)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \\ &\leq \max\left\{(\lambda - \omega_A)^{-1}, \lambda^{-1}\right\} \leq (\lambda - \max\{0, \omega_A\})^{-1} \end{aligned}$$

при любом $t \in [0, T]$. Следовательно, $\mathcal{A}(t) \in \mathcal{J}(1, \max\{0, \omega_A\})$ при любом $t \in [0, T]$.

3. Из (5.16) следует, что $\mathcal{B}(t) - \omega_0, \mathcal{A}(t) - \max\{0, \omega_A\} \in \mathcal{J}(1, 0)$. Пусть выполнено условие 5a, тогда для любого $z = (v; w)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{B}(t)) = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{A}(t) - \max\{0, \omega_A\})z\|_{\mathcal{H}} &\leq \|A(t)v\|_H + \max\{0, \omega_A\}\|z\|_{\mathcal{H}} \leq \\ &\leq \|B_0(t)v\|_H + b\|v\|_H + \max\{0, \omega_A\}\|z\|_{\mathcal{H}} \leq \\ &\leq \|B_1(t)v\|_H + (b + |\lambda_0|)\|v\|_H + \max\{0, \omega_A\}\|z\|_{\mathcal{H}} \leq \\ &\leq \|\mathcal{B}(t)z\|_{\mathcal{H}} + (b + |\lambda_0| + \max\{0, \omega_A\})\|z\|_{\mathcal{H}} \leq \\ &\leq \|(\mathcal{B}(t) - \omega_0)z\|_{\mathcal{H}} + (b + |\lambda_0| + |\omega_0| + \max\{0, \omega_A\})\|z\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что замыкание $\overline{(\mathcal{B}(t) - \omega_0) + (\mathcal{A}(t) - \max\{0, \omega_A\})}$ является генератором сжимающей C_0 -полугруппы (см. [22, гл. 1, § 6, теорема 6.2]).

Докажем, что оператор $(\mathcal{B}(t) - \omega_0) + (\mathcal{A}(t) - \max\{0, \omega_A\})$ замкнут на $\mathcal{D} \oplus \mathcal{D}$.

Для этого, очевидно, достаточно доказать, что оператор $\mathcal{B}(t) + \mathcal{A}(t)$ замкнут на $\mathcal{D} \oplus \mathcal{D}$. Из 5a найдем, что $A(t)B_1^{-1}(t) \in \mathcal{L}(H)$ при любом $t \in [0, T]$ и

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(t) + \mathcal{A}(t) &= \begin{pmatrix} A(t)B_1^{-1}(t) & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1(t) & 0 \\ 0 & -B_1(t) \end{pmatrix}, \quad (5.17) \\ \begin{pmatrix} A(t)B_1^{-1}(t) & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & A(t)B_1^{-1}(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что оператор $\mathcal{B}(t) + \mathcal{A}(t)$ замкнут на $\mathcal{D} \oplus \mathcal{D}$ при любом $t \in [0, T]$. Следовательно, $\mathcal{B}(t) + \mathcal{A}(t) \in \mathcal{J}(1, \omega_0 + \max\{0, \omega_A\})$. По замечанию 5.1 семейство операторов $\mathcal{B}(t) + \mathcal{A}(t)$ стабильно на отрезке $[0, T]$.

Из условий теоремы следует, что $\mathcal{Q}(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\|\mathcal{Q}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq K < +\infty$ при любом $t \in [0, T]$. По теореме 5.1 семейство операторов $\mathcal{B}(t) + \mathcal{A}(t) + \mathcal{Q}(t)$ стабильно на отрезке $[0, T]$. Кроме того, $\mathcal{B} + \mathcal{A} + \mathcal{Q} \in SC_{\mathcal{D} \oplus \mathcal{D}}^1([0, T]; \mathcal{H})$.

Определим оператор $\mathcal{C} := \text{diag}(B_1(0), B_1(0))$, $\mathcal{D}(\mathcal{C}) = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}$, $\mathcal{C}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Из условий теоремы тогда получим, что $\mathcal{G}(t, s)\mathcal{C}^{-1}$, $(\mathcal{G}(t, s)\mathcal{C}^{-1})'_t \in SC_{\mathcal{H}}(T_\Delta; \mathcal{H})$.

Из условий теоремы на начальные данные и функцию $f(t)$ следует, что $z^0 = (u^1; B_1(0)u^0)^\tau \in \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}$, $\mathcal{F} = (f; 0)^\tau \in C^1([0, T]; \mathcal{H})$.

По теореме 5.4 задача Коши (5.15) имеет единственное сильное решение, то есть функцию $z \in C^1([0, T]; \mathcal{H})$ такую, что $z(t) \in \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}$ для любого $t \in [0, T]$ и $(\mathcal{B} + \mathcal{A} + \mathcal{Q})z \in C([0, T]; \mathcal{H})$, в (5.15) выполнено уравнение при любом $t \in [0, T]$ и начальное данное.

Рассуждения, аналогичные проведенным в пункте 4. теоремы 5.5, завершают доказательство настоящей теоремы в случае 5a.

4. Пусть выполнено условие 5b. Из [135, гл. 3, § 2, лемма 2.16] следует, что оператор $A(t)$ имеет нулевую грань относительно оператора $B_1(t)$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $b_\varepsilon \geq 0$ такое, что для любых $u \in \mathcal{D}$ и $t \in [0, T]$

$$\|A(t)u\|_{\mathcal{H}} \leq \varepsilon \|B_1(t)u\|_{\mathcal{H}} + b_\varepsilon \|u\|_{\mathcal{H}}.$$

Отсюда для любых $z = (v; w)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{B}(t)) = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}$ следует оценка

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{A}(t) - \max\{0, \omega_A\})z\|_{\mathcal{H}} &\leq \|A(t)v\|_{\mathcal{H}} + \max\{0, \omega_A\}\|z\|_{\mathcal{H}} \leq \\ &\leq \varepsilon \|B_1(t)v\|_{\mathcal{H}} + b_\varepsilon \|v\|_{\mathcal{H}} + \max\{0, \omega_A\}\|z\|_{\mathcal{H}} \leq \\ &\leq \varepsilon \|\mathcal{B}(t)z\|_{\mathcal{H}} + (b_\varepsilon + \max\{0, \omega_A\})\|z\|_{\mathcal{H}} \leq \\ &\leq \varepsilon \|(\mathcal{B}(t) - \omega_0)z\|_{\mathcal{H}} + (b_\varepsilon + \varepsilon|\omega_0| + \max\{0, \omega_A\})\|z\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Отсюда при $\varepsilon < 1$ следует, что оператор $(\mathcal{B}(t) - \omega_0) + (\mathcal{A}(t) - \max\{0, \omega_A\})$ является генератором сжимающей C_0 -полугруппы (см. [135, гл. 3, § 2, теоре-

ма 2.7]). Следовательно, $\mathcal{B}(t) + \mathcal{A}(t) \in \mathcal{J}(1, \omega_0 + \max\{0, \omega_A\})$. По замечанию 5.1 семейство операторов $\mathcal{B}(t) + \mathcal{A}(t)$ стабильно на отрезке $[0, T]$.

Повторение соответствующих рассуждений из пункта **3.** завершает доказательство в рассматриваемом случае 5b.

5. Пусть выполнено условие 5c. Перепишем систему (5.11) в виде задачи Коши

$$\frac{dz}{dt} = \mathcal{C}(t)z + \mathcal{Q}(t)z + \int_0^t \mathcal{G}(t, s)z(s) ds + \mathcal{F}(t), \quad z(0) = z^0$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(t) &:= \begin{pmatrix} A(t) & B_0(t) \\ B_0(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{C}(t)) = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}, \quad \overline{\mathcal{D}(\mathcal{C}(t))} = \mathcal{H}, \\ \mathcal{Q}(t) &:= \begin{pmatrix} 0 & Q_0(t)B_0^{-1}(t) \\ 0 & B'_0(t)B_0^{-1}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \\ \mathcal{G}(t, s) &:= \begin{pmatrix} 0 & G(t, s)B_1^{-1}(s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{G}(t, s)) = H \oplus \mathcal{D} \supset \mathcal{D}(\mathcal{C}(t)), \\ \mathcal{F}(t) &:= (f(t); 0)^\tau, \quad z^0 := (u^1; B_0(0)u^0)^\tau. \end{aligned}$$

Докажем, что $\mathcal{C}(t) \in \mathcal{J}(1, \max\{0, \omega_A\})$ при любом $t \in [0, T]$. Дальнейшее доказательство тогда будет состоять в повторении соответствующих рассуждений из пункта **3.** настоящей теоремы.

6. В силу представления, аналогичного (5.17), плотно определенный оператор $\mathcal{C}(t)$ замкнут. Далее, для любого $z = (v; w)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{C}(t)) = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}$ имеем

$$\operatorname{Re}(\mathcal{C}(t)z, z)_{\mathcal{H}} = \operatorname{Re}(A(t)v, v)_H \leq \omega_A \|v\|_H^2 \leq \max\{0, \omega_A\} \|z\|_{\mathcal{H}}^2,$$

то есть, оператор $\mathcal{C}(t) - \max\{0, \omega_A\}$ диссипативен при любом $t \in [0, T]$. Для максимальнойности оператора $\mathcal{C}(t) - \max\{0, \omega_A\}$ достаточно установить, что оператор $\mathcal{C}(t)$ имеет резольвенту при $\lambda > \max\{0, \omega_A\}$.

При $\lambda \neq 0$ с использованием факторизации Шура–Фробениуса получим

следующее представление для оператора $\mathcal{C}(t) - \lambda$:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(t) - \lambda = & \begin{pmatrix} B_0(t) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\frac{1}{\lambda} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} + B_0^{-1}(t)(A(t) - \lambda)B_0^{-1}(t) & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\frac{1}{\lambda} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0(t) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть $\lambda \geq \max\{0, \omega_A\}$. Для любых $w_1, w_2 \in H$ и $t \in [0, T]$ имеем

$$\begin{aligned} & \|(I + \lambda B_0^{-1}(t)(A(t) - \lambda)B_0^{-1}(t))w_1\|_H \|w_1\|_H \geq \\ & \geq \operatorname{Re}((I + \lambda B_0^{-1}(t)(A(t) - \lambda)B_0^{-1}(t))w_1, w_1)_H = \\ & = \|w_1\|_H^2 - \lambda \operatorname{Re}((A(t)B_0^{-1}(t)w_1, B_0^{-1}(t)w_1)_H + \lambda^2 \|B_0^{-1}(t)w_1\|_H^2 \geq \\ & \geq \|w_1\|_H^2 + \lambda(\lambda - \omega_A) \|B_0^{-1}(t)w_1\|_H^2 \geq \|w_1\|_H^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \|(I + \lambda B_0^{-1}(t)(A(t) - \lambda)B_0^{-1}(t))^* w_2\|_H \|w_2\|_H \geq \\ & \geq \operatorname{Re}((I + \lambda B_0^{-1}(t)(A(t) - \lambda)B_0^{-1}(t))^* w_2, w_2)_H = \\ & = \|w_2\|_H^2 + \lambda \operatorname{Re}(((A(t) - \lambda)B_0^{-1}(t))^* (B_0^{-1}(t))^* w_2, w_2)_H = \\ & = \|w_2\|_H^2 - \lambda \operatorname{Re}(B_0^{-1}(t)w_2, (A(t) - \lambda)B_0^{-1}(t)w_2)_H = \\ & = \|w_2\|_H^2 - \lambda \operatorname{Re}((A(t)B_0^{-1}(t)w_2, B_0^{-1}(t)w_2)_H + \lambda^2 \|B_0^{-1}(t)w_2\|_H^2 \geq \\ & \geq \|w_2\|_H^2 + \lambda(\lambda - \omega_A) \|B_0^{-1}(t)w_2\|_H^2 \geq \|w_2\|_H^2, \end{aligned}$$

где использовано свойство $(B_0^{-1}(t))^* = (B_0^*(t))^{-1}$ (см. [44, гл. 3, § 5, теорема 5.30]).

Из последних оценок следует, что при любом $t \in [0, T]$ существует, ограничен и определен на всем пространстве H оператор

$$R(t) := (I + \lambda B_0^{-1}(t)(A(t) - \lambda)B_0^{-1}(t))^{-1} \in \mathcal{L}(H).$$

Отсюда и из факторизации оператора $\mathcal{C}(t) - \lambda$ теперь найдем, что при

любом $\lambda > \max\{0, \omega_A\}$ и $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}(t) - \lambda)^{-1} &= \begin{pmatrix} B_0^{-1}(t) & 0 \\ \frac{1}{\lambda} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda R(t) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0^{-1}(t) & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda B_0^{-1}(t) R(t) B_0^{-1}(t) & B_0^{-1}(t) R(t) \\ R(t) B_0^{-1}(t) & -R(t) B_0^{-1}(t) (A(t) - \lambda) B_0^{-1}(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \end{aligned}$$

Следовательно, при $\lambda \geq \max\{0, \omega_A\}$ оператор-функция $\mathcal{C}(t)$ имеет резольвенту, а значит $\mathcal{C}(t) \in \mathcal{J}(1, \max\{0, \omega_A\})$ при любом $t \in [0, T]$. Теорема доказана.

■

5.3.3. Интегродифференциальное уравнение второго порядка в банаховом пространстве со старшим оператором при производной

В банаховом пространстве E рассмотрим задачу Коши

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = A(t) \frac{du}{dt} + B(t)u + \int_0^t G(t, s)u(s) ds + f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \quad (5.18)$$

где $A(t)$ — замкнутые операторы, определенные на плотном в E множестве $\mathcal{D}$ при любом $t \in [0, T]$. Операторы $B(t)$ и $G(t, s)$ подчинены в некотором смысле оператору $A(t)$.

О п р е д е л е н и е 5.4. Функцию $u \in C^2([0, T]; E)$ назовем *сильным решением* задачи Коши (5.18), если 1) $u(t) \in \mathcal{D}(B(t))$, $u'(t) \in \mathcal{D}$ для любого $t \in [0, T]$ и Bu , $Au' \in C([0, T]; E)$, 2) в (5.18) выполнено уравнение при любом $t \in [0, T]$ и начальные условия.

Т е о р е м а 5.7. Пусть выполнены следующие условия:

1. $\mathcal{D}(A(t)) = \mathcal{D}$, $A \in SC_{\mathcal{D}}^1([0, T]; E)$ (см. замечание 5.3) и стабильно на отрезке $[0, T]$ с константами стабильности M_A , ω_A ;
2. $BA_0^{-1}(0) \in SC_E^1([0, T]; E)$, где $A_0(t) := A(t) - \lambda_0$, $\lambda_0 > \omega_A$;
3. $GA_0^{-1}(0)$, $(GA_0^{-1}(0))'_t \in SC_E(T_\Delta; E)$.

Тогда для любых $u^0, u^1 \in \mathcal{D}$, $f \in C^1([0, T]; E)$ сильное (в смысле определения 5.4) решение задачи Коши (5.18) существует и единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем в несколько шагов.

1. Предположим, что задача Коши (5.18) имеет сильное (в смысле определения 5.4) решение $u(t)$. Определим функции $v(t) := u'(t)$, $w(t) := A_0(0)u(t)$. Из определения 5.4 и условий теоремы следует, что $v, w \in C^1([0, T]; E)$. Из (5.18) найдем, что введенные функции удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = A_0(t)v + \lambda_0 v + B(t)A_0^{-1}(0)w + \int_0^t G(t, s)A_0^{-1}(0)w(s) ds + f(t), \\ \frac{dw}{dt} = A_0(0)v, \quad v(0) = u^1, \quad w(0) = A_0(0)u^0. \end{cases} \quad (5.19)$$

Систему (5.19) перепишем в виде задачи Коши

$$\frac{dz}{dt} = \mathcal{A}(t)z + \mathcal{Q}(t)z + \int_0^t \mathcal{G}(t, s)z(s) ds + \mathcal{F}(t), \quad z(0) = z^0 \quad (5.20)$$

в банаховом пространстве $\mathcal{E} := E \times E = \{z = (v; w)^\tau \mid v, w \in E\}$. Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t) &:= \begin{pmatrix} A_0(t) & 0 \\ A_0(0) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}(t)) = \mathcal{D} \times E, \quad \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}(t))} = \mathcal{E}, \\ \mathcal{Q}(t) &:= \begin{pmatrix} \lambda_0 & B(t)A_0^{-1}(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{E}), \\ \mathcal{G}(t, s) &:= \begin{pmatrix} 0 & G(t, s)A_0^{-1}(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}(t, s) \in \mathcal{L}(\mathcal{E}), \\ \mathcal{F}(t) &:= (f(t); 0)^\tau, \quad z^0 := (u^1; A_0(0)u^0)^\tau. \end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения направлены на применение теоремы 5.4 к задаче Коши (5.20).

2. Докажем, что $\mathcal{A}(t)$ стабильное на $[0, T]$ семейство операторов. Заметим прежде, что для оператора $\mathcal{A}(t)$ справедлива следующая факторизация:

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{N}(t) \cdot \begin{pmatrix} A_0(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathcal{N}^{-1}(t), \quad \mathcal{N}(t) := \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_0(0)A_0^{-1}(t) & I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}). \quad (5.21)$$

Для $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq T$ введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P_{m_1, m_2} &:= \prod_{k=m_1 \searrow m_2} (A_0(t_k) - \lambda)^{-1} \quad (n \geq m_1 > m_2 \geq 1), \\ S_{m_1, m_2} &:= \sum_{l=m_2+1}^{m_1} \frac{(-1)^{m_1-l}}{\lambda^{m_1-l+1}} C_l \prod_{k=l-1 \searrow m_2} (A_0(t_k) - \lambda)^{-1} \quad (n \geq m_1 > m_2 \geq 1), \\ C_m &:= A_0(0)A_0^{-1}(t_m) - A_0(0)A_0^{-1}(t_{m-1}) \quad (m = \overline{2, n}). \end{aligned}$$

Из факторизации (5.21) теперь найдем, что для $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq T$

$$\begin{aligned} \prod_{k=n \searrow 1} (\mathcal{A}(t_k) - \lambda)^{-1} &= (\mathcal{A}(t_n) - \lambda)^{-1} (\mathcal{A}(t_{n-1}) - \lambda)^{-1} \prod_{k=n-2 \searrow 1} (\mathcal{A}(t_k) - \lambda)^{-1} = \\ &= \mathcal{N}(t_n) \cdot \begin{pmatrix} P_{n, n-1} & 0 \\ S_{n, n-1} & \lambda^{-2} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{N}^{-1}(t_{n-1}) \cdot \prod_{k=n-2 \searrow 1} (\mathcal{A}(t_k) - \lambda)^{-1} = \\ &= \mathcal{N}(t_n) \cdot \begin{pmatrix} P_{n, n-2} & 0 \\ S_{n, n-2} & -\lambda^{-3} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{N}^{-1}(t_{n-2}) \cdot \prod_{k=n-3 \searrow 1} (\mathcal{A}(t_k) - \lambda)^{-1} = \dots \\ &\dots = \mathcal{N}(t_n) \cdot \begin{pmatrix} P_{n, 1} & 0 \\ S_{n, 1} & (-1)^n \lambda^{-n} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{N}^{-1}(t_1). \end{aligned}$$

Таким образом, верна следующая формула:

$$\begin{aligned} \prod_{k=n \searrow 1} (\mathcal{A}(t_k) - \lambda)^{-1} &= \mathcal{N}(t_n) \cdot \begin{pmatrix} R_\lambda & 0 \\ S_\lambda & (-1)^n \lambda^{-n} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{N}^{-1}(t_1), \quad (5.22) \\ R_\lambda &:= \prod_{k=n \searrow 1} (A_0(t_k) - \lambda)^{-1} \equiv (A_0(t_n) - \lambda)^{-1} \cdot \dots \cdot (A_0(t_1) - \lambda)^{-1}, \\ S_\lambda &:= \sum_{l=2}^n \frac{(-1)^{n-l}}{\lambda^{n-l+1}} A_0(0) [A_0^{-1}(t_l) - A_0^{-1}(t_{l-1})] \prod_{k=l-1 \searrow 1} (A_0(t_k) - \lambda)^{-1} \end{aligned}$$

По условию теоремы оператор $A_0(t)$ сильно непрерывно дифференцируем на $\mathcal{D}$. Кроме того, $A_0^{-1}(t) \in \mathcal{L}(E)$ при любых $t \in [0, T]$. Следовательно (см. [55, гл. 2, § 1, лемма 1.5]), $A_0(s)A_0^{-1}(t)$ непрерывен в смысле нормы операторов по совокупности переменных t, s в квадрате $[0, T] \times [0, T]$ и удовлетворяет по каждой из них условию Липшица. Таким образом, существуют константы $L, L_0 > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} \|A_0(0)A_0^{-1}(t) - A_0(0)A_0^{-1}(s)\|_{\mathcal{L}(E)} &\leq L|t - s| \quad \forall t, s \in [0, T], \\ \|A_0(0)A_0^{-1}(t)\|_{\mathcal{L}(E)} &\leq L_0 \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Заметим, что семейство операторов $A_0(t)$ стабильно на отрезке $[0, T]$ с константами стабильности M_A и $\omega_A - \lambda_0$. Отсюда и из (5.21)-(5.23) тогда имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}(t)\|_{\mathcal{L}(E)}, \quad \|\mathcal{N}^{-1}(t)\|_{\mathcal{L}(E)} &\leq \max\{\sqrt{1 + 2L_0^2}, \sqrt{2}\} \quad \forall t \in [0, T], \\ \|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(E)} &= \left\| \prod_{k=n \searrow 1} (A_0(t_k) - \lambda)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{M_A}{(\lambda - (\omega_A - \lambda_0))^n} \quad \forall \lambda \geq 0 \quad (\lambda_0 > \omega_A), \\ \|S_\lambda\|_{\mathcal{L}(E)} &= \left\| \sum_{l=2}^n \frac{(-1)^{n-l}}{\lambda^{n-l+1}} A_0(0)[A_0^{-1}(t_l) - A_0^{-1}(t_{l-1})] \prod_{k=l-1 \searrow 1} (A_0(t_k) - \lambda)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \\ &\leq \sum_{l=2}^n \frac{L(t_l - t_{l-1})M_A}{\lambda^{n-l+1}(\lambda - (\omega_A - \lambda_0))^{l-1}} \leq \frac{LM_A}{\lambda^n} \sum_{l=2}^n (t_l - t_{l-1}) \leq \frac{LM_AT}{\lambda^n} \quad \forall \lambda > 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из представления (5.22) для любых $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq T$, $\lambda > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ следует оценка (см. определение 5.1)

$$\begin{aligned} \left\| \prod_{k=n \searrow 1} (\mathcal{A}(t_k) - \lambda)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(E)} &\leq \\ &\leq \max\{1 + 2L_0^2, 2\} \cdot \max\left\{ \sqrt{\|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(E)}^2 + 2\|S_\lambda\|_{\mathcal{L}(E)}^2}, \sqrt{2}\lambda^{-n} \right\} \leq \\ &\leq \max\{1 + 2L_0^2, 2\} \cdot \max\left\{ \sqrt{\frac{M_A^2}{(\lambda - (\omega_A - \lambda_0))^{2n}} + \frac{2L^2M_A^2T^2}{\lambda^{2n}}}, \frac{\sqrt{2}}{\lambda^n} \right\} \leq \\ &\leq \frac{\max\{1 + 2L_0^2, 2\} \cdot \max\{M_A\sqrt{1 + 2L^2T^2}, \sqrt{2}\}}{\lambda^n}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{A}(t)$ стабильное на отрезке $[0, T]$ семейство операторов.

3. Из условий теоремы следует, что $\mathcal{Q}(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$, $\|\mathcal{Q}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} \leq K < +\infty$ при $t \in [0, T]$. По теореме 5.1 семейство операторов $\mathcal{A}(t) + \mathcal{Q}(t)$ стабильно на отрезке $[0, T]$. Кроме того, $\mathcal{A} + \mathcal{Q} \in SC_{\mathcal{D} \times E}^1([0, T]; \mathcal{E})$.

Определим оператор $\mathcal{C} := \mathcal{I}$, $\mathcal{D}(\mathcal{C}) = \mathcal{E} \supset \mathcal{D} \times E$. Из условий теоремы тогда получим, что $\mathcal{G}\mathcal{C}^{-1}$, $(\mathcal{G}\mathcal{C}^{-1})'_t \in SC_{\mathcal{E}}(T_{\Delta}; \mathcal{E})$.

Из условий теоремы на начальные данные и функцию $f(t)$ следует, что $z^0 = (u^1; A_0(0)u^0)^T \in \mathcal{D} \times E = \mathcal{D}(\mathcal{A}(t) + \mathcal{Q}(t))$, $\mathcal{F} = (f; 0)^T \in C^1([0, T]; \mathcal{E})$.

По теореме 5.4 задача Коши (5.20) имеет единственное сильное решение, то есть функцию $z \in C^1([0, T]; \mathcal{E})$ такую, что $z(t) \in \mathcal{D} \times E$ для любого $t \in [0, T]$ и $(\mathcal{A} + \mathcal{Q})z \in C([0, T]; \mathcal{E})$, в (5.20) выполнено уравнение при любом $t \in [0, T]$ и начальное условие.

4. Пусть $z(t) = (v(t); w(t))^T$ — единственное сильное решение задачи Коши (5.20). Рассмотрим функцию $u(t) := A_0^{-1}(0)w(t)$.

Из $w \in C([0, T]; E)$ следует, что $u(t) \in \mathcal{D} = \mathcal{D}(A_0(t)) \subset \mathcal{D}(B(t))$ для любого $t \in [0, T]$ и $Bu = BA_0^{-1}(0)w \in C([0, T]; E)$.

Из второго уравнения в системе (5.19) следует, что

$$u'(t) = A_0^{-1}(t)w'(t) = v(t), \quad v \in C^1([0, T]; E).$$

Отсюда следует, что $u \in C^2([0, T]; E)$, а также, что $u'(t) \in \mathcal{D}$ для любого $t \in [0, T]$ и $Au' = (A_0 + \lambda_0)u' \in C([0, T]; E)$.

Из первого уравнения в (5.19) следует, что

$$u''(t) = v'(t) = A(t)u'(t) + B(t)u(t) + \int_0^t G(t, s)u(s) ds + f(t),$$

то есть функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению из (5.18). Легко видеть, что функция $u(t)$ удовлетворяет также начальным условиям из (5.18). Согласно определению 5.4, функция $u(t)$ — решение задачи Коши (5.18). Теорема доказана. ■

5.3.4. Интегродифференциальное уравнение второго порядка в банаховом пространстве — параболический случай

В банаховом пространстве E рассмотрим задачу Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} = A \frac{du}{dt} + B_0^2 u + \int_0^t G(t, s) u(s) ds + f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1 \quad (5.24)$$

с замкнутым оператором A , определенным на плотном в E множестве $\mathcal{D}(A)$. При этом $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B_0)$, $A^{-1}, B_0^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. Оператор $G(t, s)$ подчинен в некотором смысле оператору B_0 .

О п р е д е л е н и е 5.5. Функцию $u \in C^2([0, T]; E)$ назовем *сильным решением* задачи Коши (5.24), если 1) $u(t) \in \mathcal{D}(B_0^2)$, $u'(t) \in \mathcal{D}(A)$ для любого $t \in [0, T]$ и $B_0^2 u, Au' \in C([0, T]; E)$, 2) в (5.24) выполнено уравнение при любом $t \in [0, T]$ и начальные условия.

Будем считать далее, что оператор $A^{-1}B_0$ замыкаем и его замыкание есть ограниченный оператор: $C := \overline{A^{-1}B_0} \in \mathcal{L}(E)$. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} = A \left(\frac{du}{dt} + CB_0 u \right) + \int_0^t G(t, s) u(s) ds + f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \quad (5.25)$$

О п р е д е л е н и е 5.6. Функцию $u \in C^2([0, T]; E)$ назовем *сильным решением* задачи Коши (5.25), если 1) $u(t), u'(t) \in \mathcal{D}(B_0)$, $u'(t) + CB_0 u(t) \in \mathcal{D}(A)$ для любого $t \in [0, T]$ и $B_0 u, B_0 u', A(u' + CB_0 u) \in C([0, T]; E)$, 2) в (5.25) выполнено уравнение при любом $t \in [0, T]$ и начальные условия.

З а м е ч а н и е 5.5. Очевидно, что если $u(t)$ сильное (в смысле определения 5.5) решение задачи Коши (5.24), то оно также будет сильным (в смысле определения 5.6) решением задачи Коши (5.25). Обратное не верно.

Однако, если для решения задачи Коши (5.25) окажется, что $u(t) \in \mathcal{D}(B_0^2)$ для любого $t \in [0, T]$ и $B_0^2 u \in C([0, T]; E)$, то тогда $u'(t) \in \mathcal{D}(A)$ для любого

$t \in [0, T]$ и $Au' \in C([0, T]; E)$, и, таким образом, функция $u(t)$ будет решением задачи Коши (5.24). ►

Т е о р е м а 5.8. Пусть выполнены следующие условия:

1. A, B_0 — замкнутые операторы, $A^{-1}, B_0^{-1} \in \mathcal{L}(E)$;
2. $B_0 A^{-1}, C = \overline{A^{-1} B_0} \in \mathfrak{S}_\infty(E)$;
3. $A, -B_0 C$ — генераторы голоморфных полугрупп;
4. $G(t, s) B_0^{-1}, (G(t, s) B_0^{-1})'_t \in SC_E(T_\Delta; E)$.

Тогда для любых $u^0, u^1 \in \mathcal{D}(B_0)$, $u^1 + C B_0 u^0 \in \mathcal{D}(A)$ (или, в частности, $u^0 \in \mathcal{D}(B_0^2)$, $u^1 \in \mathcal{D}(A)$), $f \in C^\alpha([0, T]; E)$ ($0 < \alpha \leq 1$) (см. замечание 5.4) сильное решение задачи Коши (5.25) существует и единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем в несколько шагов.

1. Предположим, что задача Коши (5.25) имеет сильное (в смысле определения 5.6) решение $u(t)$. Определим функции $v(t) := u'(t)$, $w(t) := B_0 u(t)$. Из определения 5.6 и условий теоремы следует, что $v, w \in C^1([0, T]; E)$. Из (5.25) найдем, что введенные функции удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = A(v + Cw) + \int_0^t G(t, s) B_0^{-1} w(s) ds + f(t), \\ \frac{dw}{dt} = B_0 v, \quad v(0) = u^1, \quad w(0) = B_0 u^0. \end{cases} \quad (5.26)$$

Систему (5.26) перепишем в виде задачи Коши

$$\frac{dz}{dt} = \mathcal{A}z + \int_0^t \mathcal{G}(t, s) z(s) ds + \mathcal{F}(t), \quad z(0) = z^0 \quad (5.27)$$

в банаховом пространстве $\mathcal{E} := E \times E = \{z = (v; w)^\tau \mid v, w \in E\}$.

В (5.27) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}z &:= \begin{pmatrix} A(v + Cw) \\ B_0v \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}) := \{z = (v; w)^\tau \mid v \in \mathcal{D}(B_0), \ v + Cw \in \mathcal{D}(A)\}, \\ \mathcal{G}(t, s) &:= \begin{pmatrix} 0 & G(t, s)B_0^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}(t, s) \in \mathcal{L}(\mathcal{E}), \\ \mathcal{F}(t) &:= (f(t); 0)^\tau, \quad z^0 := (u^1; B_0u^0)^\tau.\end{aligned}$$

2. Покажем, что оператор $\mathcal{A}$ плотно определен и замкнут. Введем оператор

$$\mathcal{A}_0 := \text{diag}(A, -B_0C), \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(-B_0C). \quad (5.28)$$

По условию теоремы операторы $A, -B_0C$ — генераторы голоморфных полугрупп в E . Отсюда следует, что оператор $\mathcal{A}_0$ — генератор голоморфной полугруппы в $\mathcal{E}$, а значит, в частности, он плотно определен и замкнут.

Введем оператор

$$\mathcal{B} := (\mathcal{I} + \mathcal{S}_1)\mathcal{A}_0(\mathcal{I} + \mathcal{S}_2), \quad \mathcal{S}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_0A^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}_2 := \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

Из плотной определенности оператора $\mathcal{A}_0$ и $(\mathcal{I} + \mathcal{S}_2)^{-1} = (\mathcal{I} - \mathcal{S}_2) \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ следует, что оператор $\mathcal{B}$ плотно задан. Из $(\mathcal{I} + \mathcal{S}_1), (\mathcal{I} + \mathcal{S}_1)^{-1} = (\mathcal{I} - \mathcal{S}_1) \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ и замкнутости оператора $\mathcal{A}_0$ следует замкнутость оператора $\mathcal{B}$ на множестве

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\mathcal{B}) &= \{z = (v; w)^\tau \mid (\mathcal{I} + \mathcal{S}_2)z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)\} = \\ &= \{z = (v; w)^\tau \mid v + Cw \in \mathcal{D}(A), \ w \in \mathcal{D}(-B_0C)\} = \\ &= \{z = (v; w)^\tau \mid v + Cw \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B_0), \ Cw \in \mathcal{D}(B_0)\} = \\ &= \{z = (v; w)^\tau \mid v \in \mathcal{D}(B_0), \ v + Cw \in \mathcal{D}(A)\} = \mathcal{D}(\mathcal{A}).\end{aligned}$$

Несложно проверить также, что $\mathcal{B}z = \mathcal{A}z$ для любого $z \in \mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Таким образом, оператор $\mathcal{A}$ плотно определен, замкнут и представим в форме Шура-Фробениуса: $\mathcal{A} := (\mathcal{I} + \mathcal{S}_1)\mathcal{A}_0(\mathcal{I} + \mathcal{S}_2)$.

3. С использованием (5.28), (5.29) осуществим в задаче Коши (5.27) замену искомой функции $x(t) := (\mathcal{I} + \mathcal{S}_2)z(t)$. В результате получим задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (\mathcal{I} + \mathcal{S}_2)(\mathcal{I} + \mathcal{S}_1)\mathcal{A}_0x + \int_0^t (\mathcal{I} + \mathcal{S}_2)\mathcal{G}(t, s)(\mathcal{I} - \mathcal{S}_2)x(s) ds + (\mathcal{I} + \mathcal{S}_2)\mathcal{F}(t), \\ x(0) &= (\mathcal{I} + \mathcal{S}_2)z^0. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Из условий теоремы следует, что $(\mathcal{I} + \mathcal{S}_2)(\mathcal{I} + \mathcal{S}_1)\mathcal{A}_0 = (\mathcal{I} + \mathcal{S})\mathcal{A}_0$, где $\mathcal{S} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{E})$. Из [135, гл. 3, § 2, следствие 2.17] (см. также [133]) следует, что оператор $(\mathcal{I} + \mathcal{S}_2)(\mathcal{I} + \mathcal{S}_1)\mathcal{A}_0$ — генератор голоморфной полугруппы операторов в банаховом пространстве $\mathcal{E}$.

Определим оператор $\mathcal{C} := \mathcal{I}$, $\mathcal{D}(\mathcal{C}) = \mathcal{E} \supset \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Из условий теоремы тогда получим, что $\mathcal{G}_C(t, s) := (\mathcal{I} + \mathcal{S}_2)\mathcal{G}(t, s)(\mathcal{I} - \mathcal{S}_2)\mathcal{C}^{-1}$, $(\mathcal{G}_C(t, s))'_t \in SC_\mathcal{E}(T_\Delta; \mathcal{E})$.

Из условий теоремы на начальные данные следует, что $z^0 = (u^1; B_0u^0)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, а значит $x(0) = (\mathcal{I} + \mathcal{S}_2)z^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$.

Из условия теоремы $f \in C^\alpha([0, T]; E)$ ($0 < \alpha \leq 1$) и оценки

$$\|(\mathcal{I} + \mathcal{S}_2)\mathcal{F}(t) - (\mathcal{I} + \mathcal{S}_2)\mathcal{F}(s)\|_\mathcal{E} \leq \|\mathcal{I} + \mathcal{S}_2\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}\|f(t) - f(s)\|_E, \quad 0 \leq s, t \leq T,$$

следует, что $(\mathcal{I} + \mathcal{S}_2)\mathcal{F} \in C^\alpha([0, T]; \mathcal{E})$ ($0 < \alpha \leq 1$).

По теореме 5.4 (см. замечание 5.4) задача Коши (5.30) имеет единственное сильное решение, то есть функцию $x \in C^1([0, T]; \mathcal{E})$ такую, что $x(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ для любого $t \in [0, T]$ и $\mathcal{A}_0x \in C([0, T]; \mathcal{E})$, в (5.30) выполнено уравнение при любом $t \in [0, T]$ и начальное условие.

Отсюда следует, что задача Коши (5.27) имеет единственное сильное решение, то есть функцию $z \in C^1([0, T]; \mathcal{E})$ такую, что $z(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ для любого $t \in [0, T]$ и $\mathcal{A}z \in C([0, T]; \mathcal{E})$, в (5.27) выполнено уравнение при любом $t \in [0, T]$ и начальное данное.

4. Пусть $z(t) = (v(t); w(t))^T$ — единственное сильное решение задачи Коши (5.27). Тогда

$$\begin{aligned} v &\in C^1([0, T]; E), \quad B_0 v \in C([0, T]; E), \\ w &\in C^1([0, T]; E), \quad A(v + Cw) \in C([0, T]; E). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Рассмотрим функцию $u(t) := B_0^{-1}w(t)$. Тогда $u(t) \in \mathcal{D}(B_0)$ при любом $t \in \mathbb{R}_+$ и $B_0 u = w \in C([0, T]; E)$. Из (5.26) следует, что $u'(t) = B_0^{-1}w'(t) = v(t)$. Из (5.31) получим, что $u \in C^2([0, T]; E)$, $u'(t) \in \mathcal{D}(B_0)$, $u'(t) + CB_0 u(t) \in \mathcal{D}(A)$ для любого $t \in [0, T]$ и $B_0 u', A(u' + CB_0 u) \in C([0, T]; E)$. Из первого уравнения в (5.26) получим, что

$$u''(t) = v'(t) = A(u'(t) + CB_0 u(t)) + \int_0^t G(t, s)u(s) ds + f(t),$$

то есть функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению из (5.25). Легко видеть, что функция $u(t)$ удовлетворяет также начальным условиям из (5.25). Согласно определению 5.6, функция $u(t)$ — решение задачи Коши (5.25). Теорема доказана. ■

Заключение

1. Доказаны теоремы о равномерной экспоненциальной устойчивости полугрупп (с оценкой типа полугруппы и без нее), генерируемых операторными блоками специального вида (см. теоремы 1.1, 1.2). Исследованы спектральные свойства генераторов полугрупп. Доказано утверждение о локализации существенного спектра, утверждение о существовании и асимптотике дискретного спектра (см. теорему 1.6), утверждение о пересчете корневых элементов генератора и ассоциированного с ним операторного пучка (см. теорему 1.7). Исследован важный частный случай изучаемого генератора (см. § 1.5).
2. Доказаны формулы асимптотического поведения решений некоторых систем гиперболического типа при внешних нагрузках специального вида. Точнее, найдена асимптотика решений неполного интегро-дифференциального уравнения второго порядка с ядром разностного типа, являющимся суммой конечного количества экспоненциальных функций с некоммутирующими операторными коэффициентами (см. теорему 1.3). Найдена асимптотика решений системы интегро-дифференциальных уравнений, являющейся абстрактным аналогом системы, описывающей движения сжимаемой жидкости Максвелла (см. теорему 1.4).
3. Изучена задача о малых движениях вязкой либо идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей равномерно вращающееся твердое тело, доказаны теоремы об однозначной сильной разрешимости соответствующих начально-краевых задач. Доказаны теоремы о структуре спектра интегро-дифференциальных уравнений, описывающих указанные модели, о свойствах корневых элементов задачи. Получены асимптотические представления для решений при условии внешних сил специального вида (см. главу 2).

4. Изучены задачи о малых движениях начально-изотропного вязкоупругого тела, закрепленного на границе занимаемой области (модели параболического и гиперболического типа), доказаны теоремы об однозначной сильной разрешимости соответствующих начально-краевых задач. Доказаны теоремы о структуре спектра интегро-дифференциальных уравнений, описывающих указанные модели. Исследованы некоторые свойства корневых элементов задачи. Получены асимптотические представления для решений при условии внешних сил специального вида (см. главу 3).
5. Изучены задачи о малых движениях сжимаемой жидкости Олдройта и Максвелла, заполняющей равномерно вращающееся твердое тело, доказаны теоремы об однозначной разрешимости соответствующих начально-краевых задач. Доказаны теоремы о структуре спектра интегро-дифференциальных уравнений, описывающих указанные модели. Исследованы некоторые свойства корневых элементов задачи. Получены асимптотические представления для решений при условии внешних сил специального вида (см. главу 4).
6. Доказаны теоремы об однозначной разрешимости для некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с неограниченными переменными операторными коэффициентами (см. теоремы 5.5-5.8). Во всех рассмотренных уравнениях имеется доминирующий оператор, который считается заданным на постоянной области определения. Операторное ядро интегрального возмущения каждый раз считается подчиненным главному оператору.

Список сокращений и условных обозначений

$E, \mathcal{E}, \dots$	— банаховы пространства
$H, \mathcal{H}, \dots$	— гильбертовы пространства
$\mathcal{L}(E_1, E_2)$	— множество всех линейных ограниченных операторов, определенных на всем пространстве E_1 и действующих в пространство E_2 ($\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$)
$\mathfrak{S}_\infty(E_1, E_2)$	— множество всех компактных операторов из $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ ($\mathfrak{S}_\infty(E) := \mathfrak{S}_\infty(E, E)$)
$\mathfrak{S}_p(H_1, H_2)$	— множество всех операторов из $\mathfrak{S}_\infty(H_1, H_2)$, для которых s -числа (сингулярные числа) суммируются со степенью $p > 0$ ($\mathfrak{S}_p(H) := \mathfrak{S}_p(H, H)$)
$\mathcal{D}(A)$	— область определения оператора A
$\mathcal{R}(A)$	— область значений оператора A
$\mathcal{W}(A)$	— числовая область значений (поле значений) оператора A
$\mathcal{R}_\lambda(A)$	— резольвента оператора A в точке λ
$\rho(A)$	— резольвентное множество оператора A
$\sigma(A)$	— спектр оператора A
$\sigma_{ess}(A)$	— существенный спектр оператора A — множество точек $\lambda \in \mathbb{C}$ для которых оператор $A - \lambda$ нефредгольмов
$\mathcal{J}(M, \omega)$	— множество всех генераторов C_0 -полугрупп с фундаментальными константами M и ω ($M \geq 1, \omega \in \mathbb{R}$)
$C^n([0, T]; E)$	— множество функций, которые n ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) раз (сильно) непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0, T]$
$C^\alpha([0, T]; E)$	— множество функций, удовлетворяющих условию Гельдера на отрезке $[0, T]$ с показателем α ($0 < \alpha \leq 1$)
$SC_{\mathcal{D}}^n([0, T]; E)$	— множество таких оператор-функций $A(t)$, что $A(t)u \in C^n([0, T]; E)$ при любом $u \in \mathcal{D}$ ($\mathcal{D} \subset E, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)
$\text{sp}\{u_k\}_{k=1}^n$	— линейная оболочка, натянутая на элементы $u_1, \dots, u_n$

Список литературы

1. Авакян, В. А. Асимптотическое распределение спектра линейного пучка, возмущенного аналитической оператор-функцией [Текст] / В. А. Авакян // *Функц. анализ и его прил.* — 1978. — Т. 12, № 2. — С. 66–67. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/faa1985>.
2. Агранович, М. С. Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области [Текст] / М. С. Агранович, А. С. Дынин // *Докл. АН СССР*. — 1962. — Т. 146, № 3. — С. 511–514. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/dan27005>.
3. Азизов, Т. Я. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой [Текст] / Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов. — Москва : Наука, 1986. — 352 с.
4. Азизов, Т. Я. Эволюционная и спектральная задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости [Текст] / Т. Я. Азизов, Н. Д. Копачевский, Л. Д. Орлова // *Труды Санкт-Петербургского матем. общества*. — 1998. — Т. 6. — С. 5–33. — Режим доступа: <http://www.mathsoc.spb.ru/trudy/06r.html>.
5. Азизов, Т. Я. Операторный подход к исследованию гидродинамической модели Олдройта [Текст] / Т. Я. Азизов, Н. Д. Копачевский, Л. Д. Орлова // *Матем. заметки*. — 1999. — Т. 65, № 6. — С. 924–928. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/mz1128>.
6. Аскеров, Н. К. Об одном классе несамосопряженных краевых задач [Текст] / Н. К. Аскеров, С. Г. Крейн, Г. И. Лаптев // *ДАН СССР*. — 1964. — Т. 155, № 3. — С. 499–502. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/dan29325>.
7. Аскеров, Н. К. Задача о колебаниях вязкой жидкости и связанные с ней операторные уравнения [Текст] / Н. К. Аскеров, С. Г. Крейн, Г. И. Лаптев // *Функц. анализ и его прил.* — 1968. — Т. 2, № 2. — С. 21–31. — Режим

доступа: <http://mi.mathnet.ru/faa2764>.

8. Асланян, А. Г. Формула для числа частот колебаний оболочки, наполненной жидкостью [Текст] / А. Г. Асланян // *Функц. анализ и его прил.* — 1979. — Т. 13, № 4. — С. 59–61. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/faa1940>.
9. Асланян, А. Г. Частоты свободных колебаний тонкой оболочки, взаимодействующей с жидкостью [Текст] / А. Г. Асланян, Д. Г. Васильев, В. Б. Лидский // *Функц. анализ и его прил.* — 1981. — Т. 15, № 3. — С. 1–9. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/faa1727>.
10. Баскаков, А. Г. Теорема берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений [Текст] / А. Г. Баскаков, Н. С. Калужина // *Матем. заметки*. — 2012. — Т. 92, № 5. — С. 643–661. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/mz8963>.
11. Баскаков, А. Г. Медленно меняющиеся на бесконечности полугруппы операторов [Текст] / А. Г. Баскаков, Н. С. Калужина, Д. М. Поляков // *Изв. вузов. Матем.* — 2014. — № 7. — С. 3–14. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/ivm8907>.
12. Баскаков, А. Г. Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами [Текст] / А. Г. Баскаков, И. И. Струкова, И. А. Тришина // *Сиб. матем. журн.* — 2018. — Т. 59, № 2. — С. 231–242. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/smj2972>.
13. Березанский, Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов [Текст] / Ю. М. Березанский. — Киев : Наукова думка, 1965. — 799 с.
14. Бирман, М. Ш. Асимптотика спектра дифференциальных уравнений [Текст] / М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк // *Итоги науки и техн. ВИНИТИ Сер. Мат. анал.* — 1977. — Т. 14. — С. 5–58. — Режим доступа:

<http://mi.mathnet.ru/intm38>.

15. *Бленд, Д. Р.* Теория линейной вязкоупругости [Текст] / Д. Р. Бленд. — Москва : Мир, 1965. — 390 с.
16. *Вайгант, В. А.* Глобальные решения уравнений потенциальных течений сжимаемой вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса [Текст] / В. А. Вайгант, А. В. Кажихов // *Дифференц. уравнения*. — 1994. — Т. 30, № 6. — С. 1010–1022. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/de8398>.
17. *Васильев, Д. Г.* Квазирезонансы в задаче о вынужденных колебаниях тонкой упругой оболочки, взаимодействующей с жидкостью [Текст] / Д. Г. Васильев, В. Б. Лидский // *Функц. анализ и его прил.* — 1986. — Т. 20, № 4. — С. 17–28. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/faa1311>.
18. *Власов, В. В.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений [Текст] / В. В. Власов, Н. А. Раутиан. — Москва : МАКС пресс, 2016. — 488 с. — ISBN: 978-5-317-05443-4.
19. *Власов, В. В.* Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике (Уравнения в частных производных) [Текст] / В. В. Власов, Н. А. Раутиан, А. С. Шамаев // *Современная математика. Фундаментальные направления*. — 2011. — Т. 39. — С. 36–65. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/cmfd172>.
20. *Власов, В. В.* Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики [Текст] / В. В. Власов, Н. А. Раутиан, А. С. Шамаев // *Современная математика. Фундаментальные направления*. — 2012. — Т. 45. — С. 43–61. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/cmfd212>.
21. *Волевич, Л. Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем [Текст] / Л. Р. Волевич // *Математический сборник*. — 1965. — Т. 68(110), № 3. — С. 373–416. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/msb4322>.

22. *Голдстейн, Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения [Текст] / Дж. Голдстейн. — Киев : Выща школа, 1989. — 348 с.
23. *Гохберг, И. Ц.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве [Текст] / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. — Москва : Наука, 1965. — 448 с.
24. *Гохберг, И. Ц.* Некоторые соотношения между собственными числами и матричными элементами линейных операторов [Текст] / И. Ц. Гохберг, А. С. Маркус // *Матем. сб.* — 1964. — Т. 64(106), № 4. — С. 481–496. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/msb4457>.
25. *Гриеспен, Х.* Теория вращающихся жидкостей [Текст] / Х. Гриеспен. — Ленинград : Гидрометеиздат, 1975. — 304 с.
26. *Гринив, Р. О.* Экспоненциальная устойчивость полугрупп, связанных с некоторыми операторными моделями в механике [Текст] / Р. О. Гринив, А. А. Шкаликов // *Матем. заметки.* — 2003. — Т. 73, № 5. — С. 657–664. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/mz217>.
27. *Гринив, Р. О.* Экспоненциальное убывание энергии решений уравнений, отвечающих некоторым операторным моделям механики [Текст] / Р. О. Гринив, А. А. Шкаликов // *Функц. анализ и его прил.* — 2004. — Т. 38, № 3. — С. 3–14. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/faa113>.
28. *Гринштейн, В. А.* Базисность части системы собственных векторов голоморфной оператор-функции [Текст] / В. А. Гринштейн // *Матем. заметки.* — 1991. — Т. 50, № 1. — С. 142–144. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/mz3014>.
29. *Ёров, С. Т.* О колебании жидкости с заглубленной под свободной поверхностью «крупноячеистой» сетью с поплавками [Текст] / С. Т. Ёров, Г. А. Чечкин // *Тр. сем. им. И. Г. Петровского.* — 2016. — Т. 31. — С. 38–62. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/tsp89>.
30. *Закора, Д. А.* Операторный подход к модели Ильюшина вязкоупругого тела параболического типа [Текст] / Д. А. Закора // *Современная мате-*

- матика. *Фундаментальные направления*. — 2015. — Т. 57. — С. 31–64. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/cmfd271>.
31. *Закора, Д. А.* Модель сжимаемой жидкости Олдройта [Текст] / Д. А. Загора // *Современная математика. Фундаментальные направления*. — 2016. — Т. 61. — С. 41–66. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/cmfd271>.
 32. *Закора, Д. А.* О стабилизации решений неполных интегродифференциальных уравнений второго порядка [Текст] / Д. А. Загора // *Изв. вузов. Матем.* — 2016. — Т. 9. — С. 78–83. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/ivm9155>.
 33. *Закора, Д. А.* Модель сжимаемой жидкости Максвелла [Текст] / Д. А. Загора // *Современная математика. Фундаментальные направления*. — 2017. — Т. 63, № 2. — С. 247–265. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/cmfd319>.
 34. *Закора, Д. А.* Экспоненциальная устойчивость одной полугруппы и приложения [Текст] / Д. А. Загора // *Матем. заметки*. — 2017. — Т. 103, № 5. — С. 702–719. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/mz11703>.
 35. *Закора, Д. А.* Асимптотика решений системы связанных интегро-дифференциальных неполных операторных уравнений второго порядка [Текст] / Д. А. Загора // *Сиб. электрон. матем. изв.* — 2018. — Т. 15. — С. 971–986. — Режим доступа: <http://semr.math.nsc.ru/v15/p971-986.pdf>.
 36. *Закора, Д. А.* Операторный подход к задаче о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости [Текст] / Д. А. Загора // *Современная математика. Фундаментальные направления*. — 2018. — Т. 64, № 3. — С. 459–489. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/cmfd357>.
 37. *Закора, Д. А.* Спектральный анализ одной задачи теории вязкоупругости [Текст] / Д. А. Загора // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2018. — Т. 58, № 11. — С. 1829–1843. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/>

[zvmmf10855](#).

38. *Закора, Д. А.* Асимптотика решений в задаче о малых движениях сжимаемой жидкости Максвелла [Текст] / Д. А. Закора // *Дифференциальные уравнения*. — 2019. — Т. 55, № 9. — С. 1195–1208.
39. *Звягин, В. Г.* Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина-Фойгта [Текст] / В. Г. Звягин, М. В. Турбин // *Современная математика. Фундаментальные направления*. — 2009. — С. 3–144. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/cmfd131>.
40. *Звягин, В. Г.* Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред [Текст] / В. Г. Звягин, М. В. Турбин. — Москва : КРАСАНД, 2012. — 416 с.
41. *Ильюшин, А. А.* Основы математической теории термовязко-упругости [Текст] / А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря. — Москва : Наука, 1970. — 280 с.
42. *Кажихов, А. В.* О стабилизации решений начально-краевой задачи для уравнений баротропной вязкой жидкости [Текст] / А. В. Кажихов // *Дифференц. уравнения*. — 1979. — Т. 15, № 4. — С. 662–667. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/de3677>.
43. *Кажихов, А. В.* Уравнение потенциальных течений сжимаемой вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса: существование, единственность и стабилизация решений [Текст] / А. В. Кажихов // *Сиб. матем. журн.* — 1993. — Т. 34, № 3. — С. 70–80. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/smj1653>.
44. *Като, Т.* Теория возмущений линейных операторов [Текст] / Т. Като. — Москва : Мир, 1972. — 740 с.
45. *Келдыш, М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений [Текст] / М. В. Келдыш // *ДАН СССР*. — 1951. — Т. 77, № 1. — С. 11–14.
46. *Келдыш, М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов [Текст] / М. В. Келдыш // *УМН*. —

1971. — Т. 26, № 4(160). — С. 15–41. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/umn5227>.
47. *Кожевников, А. Н.* Функциональные методы математической физики. Учебное пособие [Текст] / А. Н. Кожевников. — Москва : МАИ, 1991. — 46 с.
 48. *Колтунов, М. А.* Ползучесть и релаксация [Текст] / М. А. Колтунов. — Москва : Высшая школа, 1976. — 277 с.
 49. *Копачевский, Н. Д.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи [Текст] / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — Москва : Наука, 1989. — 416 с. — ISBN: 5-02-014203-4.
 50. *Космодемьянский, Д. А.* Спектральные свойства некоторых задач механики сильно неоднородных сред (Труды Четвертой Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 14–21 августа, 2005). Часть 3) [Текст] / Д. А. Космодемьянский, А. С. Шамаев // *Современная математика. Фундаментальные направления*. — 2006. — Т. 17. — С. 88–109. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/cmfd59>.
 51. *Космодемьянский, Д. А.* Спектральные свойства некоторых задач механики сильно неоднородных сред [Текст] / Д. А. Космодемьянский, А. С. Шамаев // *Современная математика. Фундаментальные направления*. — 2008. — Т. 17. — С. 88–109. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/cmfd59>.
 52. *Котсиолис, А. А.* Асимптотическая устойчивость и периодичность по времени "малых" решений уравнений движения жидкостей Олдройта и жидкостей Кельвина–Фойгта [Текст] / А. А. Котсиолис, А. П. Осколков, Р. Шадиев // *Зап. научн. сем. ЛОМИ*. — 1990. — Т. 180. — С. 63–75. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/zns14712>.
 53. *Крейн, С. Г.* О функциональных свойствах операторов векторного анализа

- и гидродинамики [Текст] / С. Г. Крейн // *ДАН СССР*. — 1953. — Т. 93, № 6. — С. 969–972.
54. Крейн, С. Г. О колебаниях вязкой жидкости в сосуде [Текст] / С. Г. Крейн // *ДАН СССР*. — 1964. — Т. 159, № 2. — С. 262–265. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/dan30338>.
55. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве [Текст] / С. Г. Крейн. — Москва : Наука, 1967. — 464 с.
56. Крейн, С. Г. К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде [Текст] / С. Г. Крейн, Г. И. Лаптев // *Функци. анализ и его прил.* — 1968. — Т. 2, № 1. — С. 40–50. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/faa2754>.
57. Кристенсен, Р. Введение в теорию вязкоупругости [Текст] / Р. Кристенсен. — Москва : Мир, 1974. — 340 с.
58. Ладыженская, О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости [Текст] / О. А. Ладыженская. — Москва : Наука, 1970. — 288 с.
59. Малмейстер, А. К. Сопротивление полимерных и композитных материалов [Текст] / А. К. Малмейстер, В. П. Тамуж, Г. А. Тетере. — Рига : Зинатне, 1980. — 572 с.
60. Маркус, А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков [Текст] / А. С. Маркус. — Кишнев : Штиинца, 1986. — 260 с.
61. Маркус, А. С. Теорема о сравнении спектров и спектральная асимптотика для пучка М. В. Келдыша [Текст] / А. С. Маркус, В. И. Мацаев // *Математический сборник*. — 1984. — Т. 123(165), № 3. — С. 391–406. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/msb2027>.
62. Маркушевич, А. И. Теория аналитических функций. Т. 1 [Текст] / А. И. Маркушевич. — Москва : Наука, 1967. — 486 с.
63. Масленникова, В. Н. Оценки в L_p и асимптотика при $t \rightarrow \infty$ решения задачи Коши для системы Соболева [Текст] / В. Н. Масленникова // *Тр.*

- МИАН СССР. — 1968. — Т. 103. — С. 117–141. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/tm2954>.
64. Масленникова, В. Н. Решение задачи Коши и его асимптотика при $t \rightarrow \infty$ для линеаризованных уравнений вращающейся вязкой жидкости [Текст] / В. Н. Масленникова // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 189, № 6. — С. 1189–1192. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/dan35099>.
65. Масленникова, В. Н. Явное представление и асимптотика при $t \rightarrow \infty$ решения задачи Коши для линеаризованной системы вращающейся сжимаемой жидкости [Текст] / В. Н. Масленникова // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 187, № 5. — С. 989–992. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/dan34821>.
66. Масленникова, В. Н. Асимптотика при $t \rightarrow \infty$ решения задачи Коши для одной гиперболической системы, описывающей движение вращающейся жидкости [Текст] / В. Н. Масленникова // Дифференц. уравнения. — 1972. — Т. 8, № 1. — С. 85–96. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/de1464>.
67. Масленникова, В. Н. О скорости убывания при большом времени решения системы Соболева с учетом вязкости [Текст] / В. Н. Масленникова // Матем. сб. — 1973. — Т. 92(134), № 4(12). — С. 589–610. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/msb3495>.
68. Масленникова, В. Н. Теоремы о локализации таубероваго типа и скорость затухания решения системы гидродинамики вязкой сжимаемой жидкости [Текст] / В. Н. Масленникова, А. В. Глушко // Тр. МИАН СССР. — 1988. — Т. 181. — С. 156–186. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/tm1940>.
69. Масленникова, В. Н. О равномерной стабилизации при $t \rightarrow \infty$ решения задачи Коши для системы акустических колебаний в сжимаемой среде [Текст] / В. Н. Масленникова, И. М. Петунин // Дифференц. уравнения. — 1992. — Т. 28, № 3. — С. 489–500. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/de7751>.

70. Масленникова, В. Н. Асимптотика при $t \rightarrow \infty$ решения начально-краевой задачи в теории внутренних волн [Текст] / В. Н. Масленникова, И. М. Петунин // *Дифференц. уравнения*. — 1995. — Т. 31, № 5. — С. 823–828. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/de8760>.
71. Милославский, А. И. Спектральные свойства операторного пучка, возникающего в вязкоупругости [Текст] / А. И. Милославский // *Деп. в Укр. НИИНТИ*. — 13.07.1987. — № 1229-УК87. — С. 53.
72. Милославский, А. И. Спектр малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом сосуде [Текст] / А. И. Милославский // *Деп. в Укр. НИИНТИ*. — 1989. — № 1221-УК89. — С. 78.
73. Михлин, С. Г. Спектр пучка операторов теории упругости [Текст] / С. Г. Михлин // *Успехи матем. наук*. — 1973. — Т. 28, № 3. — С. 43–82. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/umn4889>.
74. Моисеев, Н. Н. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость [Текст] / Н. Н. Моисеев, В. В. Румянцев. — Москва : Наука, 1965. — 439 с.
75. Оразов, М. Б. Некоторые вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов и связанные с ними задачи из механики [Текст] : дис. ... д-ра наук : 01.01.02 / М. Б. Оразов ; Ашхабат. — [Б. м. : б. и.], 1982. — 290 с.
76. Орлов, В. П. Об устойчивости нулевого решения математической модели вязкоупругой жидкости [Текст] / В. П. Орлов // *Изв. вузов. Матем.* — 1995. — Т. 3. — С. 82–84. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/ivm1720>.
77. Осколков, А. П. О некоторых модельных нестационарных системах в теории неньютоновских жидкостей [Текст] / А. П. Осколков // *Тр. МИАН СССР*. — 1975. — Т. 127. — С. 32–57. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/tm3147>.
78. Осколков, А. П. О некоторых нестационарных линейных и квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей [Текст] / А. П. Осколков // *Зап. научн. сем. ЛОМИ*. — 1976. — Т. 59. —

- С. 133–177. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/zns12088>.
79. *Осколков, А. П.* О некоторых модельных нестационарных системах в теории неньютоновских жидкостей. II [Текст] / А. П. Осколков // *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* — 1979. — Т. 84. — С. 185–210. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/zns12942>.
 80. *Осколков, А. П.* О некоторых модельных нестационарных системах в теории неньютоновских жидкостей. III [Текст] / А. П. Осколков // *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* — 1980. — Т. 96. — С. 205–232. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/zns13249>.
 81. *Осколков, А. П.* К теории жидкостей Максвелла [Текст] / А. П. Осколков // *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* — 1981. — Т. 101. — С. 119–127. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/zns13366>.
 82. *Осколков, А. П.* О некоторых модельных нестационарных системах в теории неньютоновских жидкостей. IV [Текст] / А. П. Осколков // *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* — 1981. — Т. 110. — С. 141–162. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/zns13455>.
 83. *Осколков, А. П.* К теории жидкостей Максвелла. II [Текст] / А. П. Осколков // *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* — 1983. — Т. 131. — С. 106–113. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/zns14362>.
 84. *Осколков, А. П.* К теории нестационарных течений жидкостей Максвелла и водных растворов полимеров [Текст] / А. П. Осколков // *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* — 1983. — Т. 127. — С. 158–168. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/zns14218>.
 85. *Осколков, А. П.* О нестационарных течениях вязко-упругих жидкостей [Текст] / А. П. Осколков // *Тр. МИАН СССР.* — 1983. — Т. 159. — С. 103–131. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/tm2362>.
 86. *Осколков, А. П.* К теории жидкостей Максвелла. III [Текст] / А. П. Осколков // *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* — 1985. — Т. 145. — С. 164–172. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/zns15321>.

87. *Осколков, А. П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения нелинейных вязко-упругих жидкостей [Текст] / А. П. Осколков // *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* — 1985. — Т. 147. — С. 110–119. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/zns15341>.
88. *Осколков, А. П.* Об асимптотическом поведении при $t \rightarrow \infty$ решений начально-краевых задач для уравнений движения линейных вязкоупругих жидкостей [Текст] / А. П. Осколков // *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* — 1989. — Т. 171. — С. 174–181. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/zns14476>.
89. *Пал, А. К.* Спектральные свойства операторов в задаче о колебаниях сжимаемой жидкости во вращающихся сосуда [Текст] / А. К. Пал, В. Н. Масленникова // *ДАН СССР.* — 1985. — Т. 281, № 3. — С. 529–534.
90. *Радзиевский, Г. В.* Кратная полнота собственных и присоединенных векторов некоторых классов оператор-функций, аналитических в круге [Текст] / Г. В. Радзиевский // *Функци. анализ и его прил.* — 1973. — Т. 7, № 1. — С. 84–85. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/faa2405>.
91. *Радзиевский, Г. В.* О базисности производных цепочек [Текст] / Г. В. Радзиевский // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* — 1975. — Т. 39, № 5. — С. 1182–1218. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/izv2085>.
92. *Радзиевский, Г. В.* О полноте производных цепочек [Текст] / Г. В. Радзиевский // *Матем. сб.* — 1976. — Т. 100(142), № 1(5). — С. 37–58. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/msb2854>.
93. *Ректорис, К.* Вариационные методы в математической физике и технике [Текст] / К. Ректорис. — Москва : Мир, 1985. — 590 с.
94. *Романов, И. В.* О задаче точного управления системой, описываемой уравнением струны с запаздыванием [Текст] / И. В. Романов, А. С. Шамаев // *Автомат. и телемех.* — 2013. — Т. 11. — С. 49–61. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/at6160>.
95. *Романов, И. В.* О задачах распределенного и граничного управления некоторыми системами с интегральным последствием [Текст] / И. В. Рома-

- нов, А. С. Шамаев // *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*. — 2016. — Т. 31. — С. 134–157. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/tsp93>.
96. *Соболев, С. Л.* Об одной новой задаче для системы уравнений в частных производных [Текст] / С. Л. Соболев // *ДАН СССР*. — 1951. — Т. 81, № 6. — С. 1007–1009.
97. *Солонников, В. А.* Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса и Л. Ниренберга. II (Краевые задачи математической физики. 4) [Текст] / В. А. Солонников // *Тр. МИАН СССР*. — 1966. — С. 233–297. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/tm2822>.
98. *Солонников, В. А.* О разрешимости начально-краевой задачи для уравнения движения вязкой сжимаемой жидкости [Текст] / В. А. Солонников // *Зап. научн. сем. ЛОМИ*. — 1976. — Т. 56. — С. 128–142. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/zns12856>.
99. *Темам, Р.* Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ [Текст] / Р. Темам. — Москва : Мир, 1981. — 408 с.
100. *Фрейденталь, А.* Математические теории неупругой сплошной среды [Текст] / А. Фрейденталь, Х. Гейриегер. — Москва : Физматгиз, 1962. — 432 с.
101. *Черноусько, Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость [Текст] / Ф. Л. Черноусько. — Москва : Изд-во ВЦ АН СССР, 1968. — 230 с.
102. *Шамаев, А. С.* О спектре одномерных колебаний слоистого композита с компонентами из упругого и вязкоупругого материалов [Текст] / А. С. Шамаев, В. В. Шумилова // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2012. — Т. 15, № 4. — С. 124–134. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/sjim759>.
103. *Шамаев, А. С.* О спектре одномерных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина-Фойгта [Текст] / А. С. Шамаев, В. В. Шумилова // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2013. — Т. 53, № 2. — С. 282–290. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru>.

[ru/zvmmf9785](http://mi.mathnet.ru/zvmmf9785).

104. Шамаев, А. С. Асимптотическое поведение спектра одномерных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина–Фойгта [Текст] / А. С. Шамаев, В. В. Шумилова // *Современные проблемы механики, Сборник статей, Тр. МИАН*. — 2016. — Т. 295. — С. 218–228. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/tm3762>.
105. Якубов, С. Я. Почти периодические решения гиперболических уравнений второго порядка [Текст] / С. Я. Якубов, А. Б. Алиев // *Дифференц. уравнения*. — 1974. — Т. 10, № 6. — С. 1142–1144. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/de2211>.
106. Якубов, С. Я. О затухании колебаний решений гиперболического уравнения [Текст] / С. Я. Якубов, А. Б. Алиев // *Дифференц. уравнения*. — 1975. — Т. 11, № 5. — С. 883–888. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/de2455>.
107. Agmon, S. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II* [Text] / S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg // *Comm. on Pure and Appl. Math.* — 1964. — Vol. 17, no. 1. — P. 35–92.
108. Alabau-Boussouria, F. A general method for proving sharp energy decay rates for memory-dissipative evolution equations [Text] / F. Alabau-Boussouria, P. Cannarsa // *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*. — 2009. — Vol. 347, no. 15–16. — P. 867–872.
109. Alabau-Boussouria, F. Decay estimates for second order evolution equations with memory [Text] / F. Alabau-Boussouria, P. Cannarsa, D. Sforza // *Journal of Functional Analysis*. — 2008. — Vol. 254, no. 5. — P. 1342–1372.
110. Alabau-Boussouria, F. Exponential stability of the wave equation with memory and time delay [Text] / F. Alabau-Boussouria, S. Nicaise, C. Pignotti // *New Prospects in Direct, Inverse and Control Problems for Evolution Equations* / Ed. by A. Favini, G. Fragnelli, R. M. Mininni. — Springer INdAM

- Series, Vol. 10. — Cham : Springer International Publishing, 2014. — P. 1–22.
111. *Alabau-Boussouria, F.* Exponential and polynomial stability of a wave equation for boundary memory damping with singular kernels [Text] / F. Alabau-Boussouria, J. Prüss, R. Zacher // *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I.* — 2009. — Vol. 347, no. 5-6. — P. 277–282.
 112. *Amendola, G.* [Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications](#) [Text] / G. Amendola, M. Fabrizio, J. M. Golden. — New York-Dordrecht-Heidelberg-London : Springer, 2012. — 574 p. — ISBN: [978-1-4614-1691-3](#).
 113. *Appleby, J. A. D.* On exponential asymptotic stability in linear viscoelasticity [Text] / J. A. D. Appleby, M. Fabrizio, D. W. Reynolds // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. — 2006. — Vol. 16, no. 10. — P. 1677–1694.
 114. *Avalos, G.* The exponential stability of a coupled hyperbolic-parabolic system arising in structural acoustics [Text] / G. Avalos // *Abstr. Appl. Anal.* — 1996. — Vol. 1, no. 2. — P. 203–217. — Access mode: <https://projecteuclid.org/euclid.aaa/1049726028>.
 115. *Birman, M. S.* Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space (Mathematics and its applications (Soviet series)) [Text] / M. S. Birman, M. Z. Solomjak. — Dordrecht-Boston-Lancaster-Tokyo : D. Reidel Publishing Company, 1986. — 301 p. — ISBN: [90-277-2179-3](#).
 116. *Cannarsa, P.* Integro-differential equations of hyperbolic type with positive definite kernels [Text] / P. Cannarsa, D. Sforza // *J. Differ. Equations*. — 2011. — Vol. 250, no. 12. — P. 4289–4335.
 117. *Chen, G.* Integral equations as evolution equations [Text] / G. Chen, R. Grimmer // *J. Differ. Equations*. — 1982. — Vol. 45, no. 1. — P. 53–74.
 118. *Chen, G.* A mathematical model for linear elastic systems with structural

- damping [Text] / G. Chen, D. L. Russell // *Quart. Appl. Math.* — 1982. — Vol. 39, no. 4. — P. 433–454.
119. *Chen, S. P.* Proof of extensions of two conjectures on structural damping for elastic systems [Text] / S. P. Chen, R. Triggiani // *Pacific Journal of Mathematics*. — 1989. — Vol. 136, no. 1. — P. 15–55.
120. *Chen, S. P.* Gevrey class semigroups arising from elastic systems with gentle dissipation: The case $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ [Text] / S. P. Chen, R. Triggiani // *Proceedings of the American Mathematical Society*. — 1990. — Vol. 110, no. 2. — P. 401–415.
121. *Conti, M.* A model of viscoelasticity with time-dependent memory kernels. Part II: asymptotic behavior of solutions [Text] / M. Conti, V. Danese, V. Pata // *American Journal of Mathematics*. — 2018. — Vol. 140, no. 6. — P. 1–35.
122. *Dafermos, C. M.* An abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity [Text] / C. M. Dafermos // *J. Differ. Equations*. — 1970. — Vol. 7, no. 3. — P. 544–569.
123. *Dafermos, C. M.* Asymptotic stability in viscoelasticity [Text] / C. M. Dafermos // *Arch. Rational Mech. Anal.* — 1970. — Vol. 37. — P. 297–308.
124. *Day, W.* The decay of the energy in a viscoelastic body [Text] / W. Day // *Mathematika*. — 1980. — Vol. 27, no. 2. — P. 268–286.
125. *Day, W. A.* *The thermodynamics of simple materials with fading memory* [Text] / W. A. Day. — Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag (Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 22.), 1972. — 134 p. — ISBN: 13:978-3-642-65320-9.
126. *Dell’Oro, F.* Asymptotic stability of thermoelastic systems of Bresse type [Text] / F. Dell’Oro // *J. Differ. Equations*. — 2015. — Vol. 258, no. 11. — P. 3902–3927.
127. *Dell’Oro, F.* On the spectrum of the equation of linear viscoelasticity [Text] / F. Dell’Oro // *Mathematische Nachrichten*. — 2018. — P. 1–9.

128. Desch, W. Coupled elastic and viscoelastic rods [Text] / W. Desch, R. Grimmer // *Rocky Mountain J. Math.* — 1993. — Vol. 24, no. 1. — P. 37–60. — Access mode: <https://projecteuclid.org/euclid.rmjm/1181072451>.
129. Desch, W. Some considerations for linear integrodifferential equations [Text] / W. Desch, R. Grimmer, W. Schappacher // *J. Math. Anal. Appl.* — 1984. — Vol. 104, no. 1. — P. 219–234.
130. Desch, W. [Feedback stabilization of a viscoelastic rod](#) [Text] / W. Desch, K. B. Hannsgen, R. L. Wheeler // *Advances in Computing and Control* / Ed. by W. A. Porter, S. C. Kak, J. L. Aravena. — Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 130. — Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 1989. — P. 331–337.
131. Desch, W. Exponential stabilization of Volterra integrodifferential equations in Hilbert space [Text] / W. Desch, R. K. Miller // *J. Differ. Equations.* — 1987. — Vol. 70, no. 3. — P. 366–389.
132. Desch, W. Exponential stabilization of Volterra integrodifferential equations with singular kernels [Text] / W. Desch, R. K. Miller // *J. Integral Equations Applications.* — 1988. — Vol. 1, no. 3. — P. 397–434.
133. Desch, W. Some perturbation results for analytic semigroups [Text] / W. Desch, W. Schappacher // *Math. Ann.* — 1988. — Vol. 281, no. 1. — P. 157–162.
134. Energy decay for Timoshenko systems of memory type [Text] / F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, J. E. Muñoz Rivera, R. Racke // *Journal of Differential Equations.* — 2003. — Vol. 194, no. 1. — P. 82–115. — Access mode: <http://147.94.64.31/~assia/timoshenkoience.pdf>.
135. Engel, K.-J. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations (Graduate Texts in Math., Vol. 194) [Text] / K.-J. Engel, R. Nagel. — New York : Springer-Verlag, 2000. — 586 p. — ISBN: [0-378-98463-1](#).
136. Eremenko, A. Spectra of the Gurtin-Pipkin type equations [Text] / A. Eremenko, S. Ivanov // *SIAM J. Math. Analysis.* — 2011. — Vol. 43,

- no. 5. — P. 2296–2306. — Access mode: https://www.researchgate.net/publication/220132172_Spectra_of_the_Gurtin-Pipkin_Type_Equations.
137. Exponential stability in thermoviscoelastic mixtures of solids [Text] / M. S. Alves, J. E. Muñoz Rivera, M. Sepúlveda, O. V. Villagrán // *International Journal of Solids and Structures*. — 2009. — Vol. 46, no. 24. — P. 4151–4162.
138. *Fabrizio, M.* A new approach to equations with memory [Text] / M. Fabrizio, C. Giorgi, V. Pata // *Arch. Rational Mech. Anal.* — 2010. — Vol. 198, no. 1. — P. 189–232. — Access mode: https://www.researchgate.net/publication/226410324_A_New_Approach_to_Equations_with_Memory.
139. *Fabrizio, M.* Asymptotic behaviour of a thermoelastic plate of weakly hyperbolic type [Text] / M. Fabrizio, B. Lazzari, J. E. Muñoz Rivera // *Differential and Integral Equations*. — 2000. — Vol. 13, no. 10-12. — P. 1347–1370. — Access mode: <https://projecteuclid.org/euclid.die/1356061129>.
140. *Fabrizio, M.* Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity [Text] / M. Fabrizio, A. Morro. — Philadelphia : SIAM Studies in Applied Mathematics, 1992. — 203 p.
141. *Fatori, L. H.* The Timoshenko system with history and Cattaneo law [Text] / L. H. Fatori, R. N. Monteiro, H. D. F. Sare // *Applied Mathematics and Computation*. — 2014. — Vol. 228, no. 1. — P. 128–140.
142. *Fatori, L. H.* Energy decay for hyperbolic thermoelastic systems of memory type [Text] / L. H. Fatori, J. E. Muñoz Rivera // *Quarterly of Applied Mathematics*. — 2001. — Vol. 59, no. 3. — P. 441–458. — Access mode: <https://www.jstor.org/stable/43638410>.
143. *Favini, A.* Degenerate integrodifferential equations of parabolic type with Robin boundary conditions: l^2 -theory [Text] / A. Favini, A. Lorenzi, H. Tanabe // *J. Math. Soc. Japan*. — 2009. — Vol. 61, no. 1. — P. 133–176. — Access mode: <https://projecteuclid.org/euclid.jmsj/1234189031>.

144. *Gearhart, L.* Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces [Text] / L. Gearhart // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1978. — Vol. 236. — P. 385–394.
145. *Geymonat, G.* On the vanishing viscosity limit for acoustic phenomena in a bounded region [Text] / G. Geymonat, E. Sanchez-Palencia // *Arch. Rational Mech. Anal.* — 1981. — Vol. 75, no. 3. — P. 257–268.
146. *Gohberg, I.* Classes of Linear Operators, Vol. 1. [Text] / I. Gohberg, S. Goldberg, M. A. Kaashoek. — Basel-Boston-Berlin : Birkhäuser Verlag, 1990. — 468 p. — ISBN: 3-7643-2531-3.
147. *Grimmer, R.* Limiting equations of integrodifferential equations in Banach space [Text] / R. Grimmer, J. H. Liu // *J. Math. Analysis and Appl.* — 1994. — Vol. 188, no. 1. — P. 78–91.
148. *Grimmer, R.* Singular perturbations in viscoelasticity [Text] / R. Grimmer, J. H. Liu // *The Rocky Mountain Journal of Mathematics.* — 1994. — Vol. 24, no. 1. — P. 61–75. — Access mode: <https://www.jstor.org/stable/44238857>.
149. *Grimmer, R. C.* Resolvent operators for integral equations in a Banach space [Text] / R. C. Grimmer // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1982. — Vol. 273, no. 1. — P. 333–349.
150. *Grubb, G.* The essential spectrum of elliptic systems of mixed order [Text] / G. Grubb, G. Geymonat // *Math. Ann.* — 1977. — Vol. 227, no. 3. — P. 247–276.
151. *Gurtin, M. E.* A general theory of heat conduction with finite wave speeds [Text] / M. E. Gurtin, A. C. Pipkin // *Arch. Rational Mech. Anal.* — 1968. — Vol. 31, no. 2. — P. 113–126.
152. *Heard, M. L.* An abstract semilinear hyperbolic Volterra integrodifferential equation [Text] / M. L. Heard // *J. Math. Anal. Appl.* — 1981. — Vol. 80, no. 1. — P. 175–202.
153. *Helton, J. W.* Unitary operators on a space with an indefinite inner product

- [Text] / J. W. Helton // *J. Funct. Anal.* — 1970. — Vol. 6, no. 3. — P. 412–440.
154. Hopf, E. Statistical hydromechanics and functional calculus [Text] / E. Hopf // *Journal of Rational Mechanics and Analysis*. — 1952. — Vol. 1, no. 1. — P. 87–123. — Access mode: <https://www.jstor.org/stable/24900259>.
 155. Huang, F. On the mathematical model for linear elastic systems with analytic damping [Text] / F. Huang // *SIAM J. Control Optim.* — 1988. — Vol. 26, no. 3. — P. 714–724.
 156. Huang, F. Some problems for linear elastic systems with damping [Text] / F. Huang // *Acta Math. Sci.* — 1990. — Vol. 10, no. 3. — P. 319–326.
 157. Jeong, J. Spectral properties of the operator associated with a retarded functional differential equation in Hilbert space [Text] / J. Jeong // *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* — 1989. — Vol. 65, no. 4. — P. 98–101. — Access mode: <https://projecteuclid.org/euclid.pja/1195512944>.
 158. Kato, T. Integration of the equation of evolution in a Banach space [Text] / T. Kato // *J. Math. Soc. Japan*. — 1953. — Vol. 5. — P. 208–234.
 159. Kato, T. Linear evolution equations of "hyperbolic" type [Text] / T. Kato // *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*. — 1970. — Vol. 17. — P. 241–258.
 160. Kato, T. Linear evolution equations of "hyperbolic" type, II [Text] / T. Kato // *J. Math. Soc. Japan*. — 1973. — Vol. 25. — P. 648–666.
 161. Kopachevsky, N. D. Operator Approach in Linear Problems of Hydrodynamics. Volume 1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid [Text] / N. D. Kopachevsky, S. G. Krein. — Basel-Boston-Berlin : Birkhäuser Verlag (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 128.), 2001. — 406 p. — ISBN: 3-7643-5406-2.
 162. Kopachevsky, N. D. Operator Approach in Linear Problems of Hydrodynamics. Volume 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids [Text] / N. D. Kopachevsky, S. G. Krein. — Basel-Boston-Berlin : Birkhäuser Verlag

- (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 146.), 2003. — 444 p. — ISBN: [978-3-0348-9425-8](#).
163. *Kopachevsky, N. D.* Linear Volterra integro-differential second-order equations unresolved with respect to the highest derivative [Text] / N. D. Kopachevsky, E. V. Syomkina // *Eurasian Math. J.* — 2013. — Vol. 4, no. 4. — P. 64–87. — Access mode: <http://mi.mathnet.ru/emj145>.
 164. *Kozhevnikov, A.* Some applications of pseudo-differential operators to elasticity [Text] / A. Kozhevnikov, T. Skubachevskaya // *Hokkaido Math. J.* — 1997. — Vol. 26, no. 2. — P. 297–322. — Access mode: <https://projecteuclid.org/euclid.hokmj/1351257967>.
 165. *Lagnese, J.* Decay of solutions of wave equations in a bounded region with boundary dissipation [Text] / J. Lagnese // *J. Differ. Equations*. — 1983. — Vol. 50, no. 2. — P. 163–182.
 166. *Lazzari, B.* On the exponential decay in thermoelasticity without energy dissipation and of type III in presence of an absorbing boundary [Text] / B. Lazzari, R. Nibbi // *J. Math. Analysis and Appl.* — 2008. — Vol. 338, no. 1. — P. 317–329.
 167. *Liu, W.* The exponential stabilization of the higher-dimensional linear system of thermoviscoelasticity [Text] / W. Liu // *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. — 1998. — Vol. 77, no. 4. — P. 355–386.
 168. *Liu, Z.* Semigroups Associated with Dissipative Systems. [Text] / Z. Liu, S. Zeng. — Boca Raton-London-New York-Washington : CHAPMAN & HALL/CRC Research Notes in Mathematics Series, **398**, 1999. — 206 p. — ISBN: [0-8493-0615-9](#).
 169. *Liu, Z.* On the exponential stability of linear viscoelasticity and thermoviscoelasticity [Text] / Z. Liu, S. Zheng // *Quarterly of Applied Mathematics*. — 1994. — Vol. 54, no. 1. — P. 21–31.
 170. *Lovicar, V.* On bounded solutions of one-dimensional compressible Navier-Stokes equations [Text] / V. Lovicar, I. Straškraba, A. Valli // *Rendiconti*

- del Seminario Matematico della Università di Padova.* — 1990. — Vol. 83. — P. 81–95. — Access mode: http://www.numdam.org/item/RSMUP_1990__83__81_0.
171. *Lunardi, A.* Regular solutions for time dependent abstract integrodifferential equations with singular kernel [Text] / A. Lunardi // *J. Math. Analysis and Appl.* — 1988. — Vol. 130, no. 1. — P. 1–21.
 172. *Ma, Z.* Exponential stability for a Timoshenko-type system with history [Text] / Z. Ma, L. Zhang, X. Yang // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* — 2011. — Vol. 380, no. 1. — P. 299–312.
 173. *Manitius, A.* Completeness and F-completeness of eigenfunctions associated with retarded functional differential equations [Text] / A. Manitius // *J. Differ. Equations.* — 1980. — Vol. 35, no. 1. — P. 1–29.
 174. *Messaoudi, S. A.* General stability result in a memory-type porous thermoelasticity system of type III [Text] / S. A. Messaoudi, T. A. Apalara // *Arab Journal of Mathematical Sciences.* — 2014. — Vol. 20, no. 2. — P. 213–232. — Access mode: https://www.researchgate.net/publication/257924477_General_stability_result_in_a_memory-type_porous_thermoelasticity_system_of_type_III.
 175. *Navarro, C. B.* Asymptotic stability in linear thermoviscoelasticity [Text] / C. B. Navarro // *J. Math. Analysis and Appl.* — 1978. — Vol. 65. — P. 399–431.
 176. On the essential spectrum of the linearized Navier-Stokes operator [Text] / M. Faierman, R. J. Fries, R. Mennicken, M. Möller // *Integral Equations and Operator Theory.* — 2000. — Vol. 38, no. 1. — P. 9–27.
 177. *Pandolfi, L.* Sharp control time for viscoelastic bodies [Text] / L. Pandolfi // *J. Integral Equations Applications.* — 2015. — Vol. 27, no. 1. — P. 103–136.
 178. *Pandolfi, L.* Linear systems with persistent memory: An overview of the bibliography on controllability [Text] // [arXiv.org]. — [S. l. : s. n.], 2018. — arXiv:1804.01865 [math.OC].

179. *Pata, V.* Exponential stability in linear viscoelasticity [Text] / V. Pata // *Quart. Appl. Math.* — 2006. — Vol. 64. — P. 499–513.
180. *Pazy, A.* Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations (Applied Mathematical Sciences, Vol. 44) [Text] / A. Pazy. — New York : Springer-Verlag, 1983. — 280 p. — ISBN: 0-387-90845-5.
181. *Prato, G. D.* On a method for studying abstract evolution equations in the hyperbolic case [Text] / G. Da Prato, M. Lannelli // *Communications in Partial Differential Equations*. — 1976. — Vol. 1, no. 6. — P. 585–608.
182. *Prato, G. D.* Linear abstract integro-differential equations of hyperbolic type in Hilbert spaces [Text] / G. Da Prato, M. Lannelli // *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*. — 1980. — Vol. 62. — P. 191–206. — Access mode: http://www.numdam.org/item/RSMUP_1980__62__191_0.
183. *Prüss, J.* *Evolutionary Integral Equations and Applications* [Text] / J. Prüss. — Switzerland : Birkhäuser Verlag (Monographs in Mathematics series, Vol. 87.), 1993. — 366 p. — ISBN: 978-3-0348-0498-1.
184. *Quintanilla, R.* Exponential stability for one-dimensional problem of swelling porous elastic soils with fluid saturation [Text] / R. Quintanilla // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2002. — Vol. 145, no. 2. — P. 525–533.
185. *Racke, R.* Global existence and decay property of the Timoshenko system in thermoelasticity with second sound [Text] / R. Racke, B. Said-Houari // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. — 2012. — Vol. 75, no. 13. — P. 4957–4973. — Access mode: <http://www.math.uni-konstanz.de/~racke/dvidat/m50.pdf>.
186. *Ralston, J. V.* On stationary modes in inviscid rotating fluids [Text] / J. V. Ralston // *J. Math. Analysis and Appl.* — 1973. — Vol. 44. — P. 366–383.

187. *Rivera, J. E. M.* Asymptotic behaviour in linear viscoelasticity [Text] / J. E. Muñoz Rivera // *Quart. Appl. Math.* — 1994. — Vol. 52, no. 4. — P. 629–648.
188. *Rivera, J. E. M.* On the decay of the energy for systems with memory and indefinite dissipation [Text] / J. E. Muñoz Rivera, M. G. Naso // *Asymptotic Analysis*. — 2006. — Vol. 49, no. 3. — P. 189–204. — Access mode: https://www.researchgate.net/publication/228911048_On_the_decay_of_the_energy_for_systems_with_memory_and_indefinite_dissipation.
189. *Rivera, J. E. M.* Asymptotic stability of semigroups associated with linear weak dissipative systems with memory [Text] / J. E. Muñoz Rivera, M. G. Naso // *J. Math. Anal. Appl.* — 2007. — Vol. 326, no. 1. — P. 691–707.
190. *Sare, H. D. F.* On the stability of damped Timoshenko systems: Cattaneo versus Fourier law [Text] / H. D. F. Sare, R. Racke // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. — 2009. — Vol. 194, no. 1. — P. 221–251. — Access mode: <http://www.math.uni-konstanz.de/~racke/dvidat/m31.pdf>.
191. *Solonnikov, V. A.* On the solvability of initial-boundary value problems for a viscous compressible fluid in an infinite time interval [Текст] / V. A. Solonnikov // *Алгебра и анализ*. — 2015. — Т. 27, № 3. — С. 238–271. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/aa1443>.
192. *Tanabe, H.* Equations of Evolution [Text] / H. Tanabe. — London : Pitnam, 1979. — 260 p. — ISBN: 0273011375 9780273011378.
193. *Tanabe, H.* Remarks on linear Volterra integral equations of parabolic type [Text] / H. Tanabe // *Osaka J. Math.* — 1985. — Vol. 3. — P. 519–531. — Access mode: <https://projecteuclid.org/euclid.ojm/1200778533>.
194. *Tiehu, Q.* Asymptotic behavior of a class of abstract semilinear integrodifferential equations and applications [Text] / Q. Tiehu // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. — 1999. — Vol. 233, no. 1. — P. 130–147.
195. *Travis, C. C.* An abstract second order semilinear Volterra integrodifferential

- equation [Text] / C. C. Travis, G. F. Webb // *SIAM J. Math. Anal.* — 1979. — Vol. 10, no. 2. — P. 412–424.
196. Triggiani, R. Wave equation on a bounded domain with boundary dissipation: An operator approach [Text] / R. Triggiani // *J. Math. Analysis and Appl.* — 1989. — Vol. 137, no. 2. — P. 438–461.
 197. Veselić, K. Bounds for contractive semigroups and second order systems [Text] / K. Veselić // Operator Theory in Krein Spaces and Nonlinear Eigenvalue Problems / Ed. by K-H. Förster, P. Jonas, H. Langer. — Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 162. — Basel-Boston-Berlin : Birkhäuser Verlag, 2006. — P. 293–308. — Access mode: <https://www.fernuni-hagen.de/MATHPHYS/veselic/downloads/dissip.pdf>.
 198. Vlasov, V. V. On the asymptotic behavior of solutions of integro-differential equations in a Hilbert space [Text] / V. V. Vlasov, N. A. Rautian // *Differ. Equ.* — 2013. — Vol. 49, no. 6. — P. 718–730.
 199. Vlasov, V. V. Study of Volterra integro-differential equations arising in viscoelasticity theory [Text] / V. V. Vlasov, N. A. Rautian // *Doklady Mathematics*. — 2016. — Vol. 94, no. 3. — P. 639–642.
 200. Vlasov, V. V. Well-posed solvability of Volterra integro-differential equations in Hilbert space [Text] / V. V. Vlasov, N. A. Rautian // *Differential Equations*. — 2016. — Vol. 52, no. 9. — P. 1123–1132.
 201. Zakora, D. A symmetric model of viscous relaxing fluid. An evolution problem [Текст] / D. Zakora // *Журн. матем. физ., анал., геом.* — 2012. — Т. 8, № 2. — С. 190–206. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/jmag534>.
 202. Zakora, D. On the spectrum of rotating viscous relaxing fluid [Текст] / D. Zakora // *Журн. матем. физ., анал., геом.* — 2016. — Т. 12, № 4. — С. 338–358. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/jmag657>.
 203. Zakora, D. On properties of root elements in the problem on small motions of viscous relaxing fluid [Текст] / D. Zakora // *Журн. матем. физ., анал., геом.* — 2017. — Т. 13, № 4. — С. 402–413. — Режим доступа:

mathnet.ru/jmag681.

204. Zakora, D. A. Abstract linear Volterra second-order integro-differential equations [Text] / D. A. Zakora // *Eurasian Math. J.* — 2016. — Vol. 7, no. 2. — P. 75–91. — Access mode: <http://mi.mathnet.ru/emj225>.