ТАМБОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Г.Р. ДЕРЖАВИНА

На правах рукописи

Мерчела Вассим

ТЕОРЕМЫ О ВОЗМУЩЕНИЯХ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОБОБЩЕННЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ В ИССЛЕДОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление.

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель –
доктор физико-математических наук,
профессор Жуковский Е.С.

Тамбов 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$;

$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$;

$\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$;

$X = (X, \rho)$ — метрическое пространство;

$\rho : X^2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — метрика в X;

$B_X(u, r) = \big\{x \in X \,:\, \rho(u, x) \le r\big\}$ — замкнутый шар с центром в точке $u \in X$ радиуса $r > 0$ в метрическом пространстве X;

$Y = (Y, d)$ — пространство с расстоянием $d : Y^2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$;

$d : Y^2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — расстояние в Y, т. е. $d(y_1, y_2) = 0 \;\Leftrightarrow\; y_1 = y_2$;

μ — мера Лебега на прямой $\mathbb{R}$;

$\mathbb{S} = \mathbb{S}([0, \tau], \mathbb{R})$ — множество измеримых (по Лебегу) функций $[0, \tau] \to \mathbb{R}$;

$\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ — суперпозиционно измеримая функция такая, что:

$(\mathcal{A})$ при любом $z \in \mathbb{R}$ функция $\theta(\cdot, z)$ непрерывна в точке z, $\theta(z, z) = 0$ и $\forall \delta > 0\;\; \exists \gamma = \gamma(z, \delta) > 0\;\; \forall \upsilon \in \mathbb{R}\quad |\upsilon - z| \ge \delta \;\Rightarrow\; \theta(\upsilon, z) \ge \gamma$;

$\theta_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\;\; \theta_0(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$;

$\mathbb{S}^\theta = (\mathbb{S}, d^\theta)$ — пространство измеримых функций $[0, \tau] \to \mathbb{R}$ с расстоянием $d^\theta(\upsilon, z) = \operatorname{vrai\,sup}_{t \in [0,\tau]} \theta(\upsilon(t), z(t))$;

$\mathbb{L} = \mathbb{L}([0, \tau], \mathbb{R})$ — множество суммируемых функций $[0, \tau] \to \mathbb{R}$;

$\mathbb{L}^\theta = (\mathbb{L}([0, \tau], \mathbb{R}), d^\theta)$ — подпространство пространства $\mathbb{S}^\theta$;

$\mathbb{L}_\infty = \mathbb{L}_\infty([0, \tau], \mathbb{R})$ — множество существенно ограниченных функций $[0, \tau] \to \mathbb{R}$;

$\mathbb{AC} = \mathbb{AC}([0, \tau], \mathbb{R})$ — множество абсолютно непрерывных функций $x : [0, \tau] \to \mathbb{R}$, т. е. $\dot{x} \in \mathbb{L}$;

$\overline{\mathbb{S}} = \overline{\mathbb{S}}([0, \tau], \overline{\mathbb{R}})$ — множество измеримых (по Лебегу) функций $[0, \tau] \to \overline{\mathbb{R}}$.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Изучение дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной, актуально и для теории дифференциальных уравнений, и для смежных разделов математики, и для многочисленных приложений (см. [2, 11, 33, 34, 36, 39]). Такие уравнения используют в моделировании процессов, адекватное описание которых должно учитывать зависимость их характеристик от скорости изменения состояния объектов. Подобные процессы характерны для неголономных механических систем [56], электрических колебательных контуров [20, с. 145, 148.], электромагнитных волн в холодной анизотропной плазме [69], установления термодинамического равновесия (релаксации) [16] и др.

Теория динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями, не разрешенными относительно производной, восходит к А. Пуанкаре (см. [71]). Современная качественная теория таких уравнений и теория особенностей разработаны в работах В.И. Арнольда (см. [21, 22]), А.А. Давыдова (см. [10, 37, 38, 40]), Л. Дара (см. [9]), А. О. Ремизова (см. [73, 74]) и др. авторов.

Исследование дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной, встречает дополнительные трудности, если порождающая уравнение функция не является гладкой или непрерывной, а например, удовлетворяет условиям Каратеодори. Методы качественной теории и многие классические методы анализа оказываются неэффективными. В частности, в исследованиях вопросов существования, зависимости от параметров, устойчивости решений задачи Коши и краевых задач для уравнений, разрешенных относительно производной, широко исследуются теоремы о неподвижных точках операторов (некоторые современные результаты таких исследований см., например, [1, 13, 14, 15, 29, 30, 60, 68]). Однако, для неявных уравнений применение результатов о неподвижных точках затруднено, а во многих случаях и невозможно. В теории дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной, роль, аналогичную роли теорем о неподвижных точках, могут играть утверждения об уравнениях с накрывающими (регулярными) отображениями в метрических и обобщенно метрических пространствах (в том числе, уравнениях, определяющих точки совпадения отображений). Диссертация посвящена следующим актуальным теоретическим задачам: получению результатов об уравнениях с накрывающими отображениями в пространствах с обобщенными метриками; разработке на их основе методов исследования дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной; применению разрабатываемых методов к исследованию задачи Коши и краевых задач.

Степень разработанности темы исследования. Теории накрывающих (регулярных) отображений нормированных и метрических пространств, ее приложениям к экстремальным задачам посвящены работы Е.Р. Авакова, А.В. Арутюнова, Б.Д. Гельмана, А.В. Дмитрука, А.Д. Иоффе, Е.С. Жуковского, С.Е. Жуковского, А.А. Милютина, Б.С. Мордуховича, Н.П. Осмоловского, В.М. Тихомирова, А. Удерзо и других авторов. В первой половине XX века Л.А. Люстерником в [61] и несколько позже Л.М. Грейвсом в [12] получены утверждения о накрывающих отображениях банаховых пространств. В 80-е годы для отображений, действующих из метрического пространства в линейное метрическое пространство, А.А. Милютиным доказана теорема об устойчивости свойства накрывания к липшицевым возмущениям (см. [42]). Новые возможности приложений накрывающих отображений в анализе открыла теорема А.В. Арутюнова (см. [23]) о точке совпадения двух отображений — накрывающего и липшицева, действующих из одного метрического пространства в другое. Распространению и приложениям этого результата посвящены многие работы (см. [7, 17, 57, 58, 78, 79] и библиографию этих работ). Локальный вариант этой теоремы получен в [3]; условия устойчивости точек совпадения к малым изменениям отображений исследованы в [4, 24]. В работе [18] получены утверждения о нелинейных липшицевых возмущениях накрывающих отображений метрических пространств. Уточнения теоремы о возмущениях, ее распространения на более широкий класс отображений, условия устойчивости решений операторных уравнений с накрывающими отображениями в метрических пространствах к малым изменениям этих отображений получены в [6, 28].

Исследованию неявных дифференциальных уравнений методами, основанными на результатах о накрывающих отображениях метрических пространств, посвящены работы Е.Р. Авакова, А.В. Арутюнова, Е.С. Жуковского, С.Е. Жуковского, Е.А. Плужниковой, В.С. Трещева, V.A. de Oliveira, F.L. Pereira. Первые результаты в этом направлении — условия разрешимости задачи Коши получены в [18]. Утверждения об устойчивости решений к малым изменениям входящих в уравнение функций доказаны в [6, 28]. В работе [55] получены условия существования, непрерывной зависимости от параметров, оценки решений задачи Коши. В [51, 52] рассмотрены вопросы разрешимости краевых задач. Исследование неявных дифференциальных включений и задач управления для неявных дифференциальных уравнений начато в [8, 53, 54]. В этих работах краевые задачи и задачи управления сводятся к уравнениям и включениям с отображениями в произведениях метрических пространств. Эти произведения пространств наделяются векторной метрикой, принимающей значения в $\mathbb{R}^n_+$, и используются результаты о накрывающих отображениях векторно метрических пространств.

В связи с исследованиями кратных неподвижных точек и кратных точек совпадения, систем различных функциональных уравнений, краевых задач и задач управления для дифференциальных уравнений, некоторых других теоретических и прикладных задач возникла потребность в распространении результатов о накрывающих отображениях не только на векторно метрические пространства, но и на пространства с другими «ослабленными метриками» и, в частности, с расстоянием, удовлетворяющим лишь аксиоме тождества. В [44, 47] определен аналог свойства накрывания для отображений, действующих в пространствах с векторнозначными метриками, и для таких отображений получены утверждения о липшицевых возмущениях. В [27] доказана теорема о точках совпадения отображений в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах. Распространению утверждений о неподвижных точках и точках совпадений на отображения f-квазиметрических пространств посвящены работы [45, 76, 77]. Отметим, что кроме работ автора диссертации в литературе не рассматривалась задача о возмущениях накрывающих отображений, действующих из метрического пространства в пространство с расстоянием, удовлетворяющим лишь аксиоме тождества.

В диссертации предлагаются новые результаты об уравнениях с накрывающими отображениями, действующими из метрического пространства в пространство с расстоянием, удовлетворяющим аксиоме тождества, распространяющие теорему Арутюнова [23] и результаты Е.Р. Авакова, А.В. Арутюнова, Б.Д. Гельмана, Е.С. Жуковского, С.Е. Жуковского [3, 6, 24, 28]. На основании этих результатов разрабатываются методы исследования дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной, а также интегральных уравнений. Получены условия существования и оценки решений задачи Коши и краевых задач для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной.

Цели и задачи. Основной целью работы является разработка аппарата исследования дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной, основанного на результатах о накрывающих отображениях; изучение на этой основе свойств решений задачи Коши и краевых задач. Основными задачами работы являются:

– получение теорем о решениях уравнений с отображениями, действующими из метрического пространства в пространство с расстоянием, в том числе, о точках совпадения таких отображений;

– исследование свойств накрывания конкретных отображений пространств измеримых функций, возникающих при исследовании дифференциальных и интегральных уравнений;

– исследование интегральных уравнений в пространствах измеримых функций, получение условий существования решений, их оценок, их устойчивости к малым изменениям уравнений;

– исследование задачи Коши и краевых задач для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной искомой функции, получение условий существования решений, их оценок, их устойчивости к малым изменениям уравнений, начальных и краевых условий.

Научная новизна. Выносимые на защиту положения являются новыми и получены автором самостоятельно.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты значимы для общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложений, теории интегральных уравнений, а также для смежных разделов анализа.

Методология и методы исследования. При исследовании уравнений с отображениями, действующими из метрического пространства в пространство с расстоянием, в том числе, уравнения, определяющего точки совпадения отображений, учитываются топологические свойства пространств с расстоянием и используются итерационные методы доказательства существования решений уравнений. Для исследования задачи о непрерывной зависимости от параметров решений операторных уравнений используются результаты о полунепрерывных многозначных отображениях (см. [26, § 2.3], [35, § 1.2]). При исследовании свойств накрывания конкретных отображений в диссертации предлагается определение расстояния в пространстве измеримых функций, используются стандартные методы теории функций и методы многозначного анализа; в частности, для установления связи свойств накрывания оператора Немыцкого и порождающей его функции используется лемма Филиппова об измеримом выборе (см., например, [35, лемма 1.5.15]). Для исследования задачи Коши и краевых задач используется редукция (называемая W-подстановкой Азбелева [19, с. 53]) к интегральному уравнению в пространстве измеримых функций. К полученному интегральному уравнению применяются доказанные в диссертации утверждения о накрывающих отображениях, действующих из метрического пространства в пространство с расстоянием.

Положения, выносимые на защиту.

1. Утверждения о существовании, оценках, устойчивости точек совпадения отображений, действующих из метрического пространства в пространство с расстоянием; утверждения о существовании, непрерывной зависимости от параметра решений уравнения $G(x) = y$ с отображением G, действующим из метрического пространства в пространство с расстоянием и представимом в виде $G(x) = F(x, x)$, где отображение F является накрывающим по первому аргументу и липшицевым по второму аргументу.

2. Утверждения о накрывающих свойствах оператора Немыцкого, действующего в пространствах измеримых функций; утверждения о существовании, оценках, решений функциональных уравнений в пространствах измеримых функций, их устойчивости к изменениям функций, порождающих уравнение.

3. Утверждения о существовании, оценках и корректности решений интегральных уравнений в пространствах измеримых функций.

4. Утверждения о существовании, оценках и корректности решений задачи Коши для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной.

5. Утверждения о существовании, оценках и корректности решений краевой задачи для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной.

Степень достоверности и апробация. Все результаты диссертации снабжены подробными доказательствами и опубликованы в ведущих научных изданиях. Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

– Тамбовский городской семинар по теории функционально-дифференциальных уравнений и включений, Тамбов, Россия (2019, 2020, 2021).

– Международная научная конференция «Колмогоровские чтения – VIII. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ-2018)», посвященная 115-летию со дня рождения А.Н. Колмогорова и 100-летию Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина, Тамбов, Россия (2018).

– International conference on mathematics «An Istanbul Meeting for World Mathematicians», Istanbul, Turkey (2018).

– Summer school «Identification and Control: some challenges», Monastir, Tunisia (2019).

– Международная Воронежская весенняя математическая школа «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXX», Воронеж, Россия (2019).

– Международная конференция «Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019)», посвященная 95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского, Екатеринбург, Россия (2019).

– International scientific OTHA online workshop on operator theory and harmonic analysis and their applications, Online, Russia (2020).

– Всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование (СТММ 2020)», посвященная памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова, Ижевск, Россия (2020).

– International e-Conference on Nonlinear Analysis and its Application

(ICNAA 2020), Online, India.

– Международная научная конференция «Колмогоровские чтения – IX. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ-2020)», посвященная 70-летию профессора А.И. Булгакова, Тамбов, Россия (2020).

– III Международный семинар «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби (CGS'2020)», Екатеринбург, Россия (2020).

– Научный семинар «Нелинейный анализ и его приложения» кафедры «Функциональный анализ и его приложения» ВлГУ, Владимир, Россия (2021).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 12 работах [31, 32, 43, 48–50, 62–67]. Работы [31, 43, 48, 49, 62, 63, 64] опубликованы в журналах из перечня ВАК, из них три работы [31, 48, 49] — в изданиях, входящих в системы цитирования Web of Science Core Collection и Scopus, и три работы [43, 63, 64] — в издании, индексируемом в Web of Science Russian Science Citation Index.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, содержащих 5 параграфов, заключения, списка обозначений и списка литературы. Общий объем работы составляет 127 страницы. Список литературы содержит 80 наименований.

Приведем основные положения и результаты диссертации (сохраняя нумерацию утверждений и формул из основного текста). Во введении описаны актуальность темы исследования и степень ее разработанности, поставлены цели и задачи, аргументирована научная новизна, достоверность, теоретическая и практическая значимость результатов, перечислены использованные методы, выносимые на защиту положения, публикации и доклады по теме диссертации, кратко изложена структура работы.

В главе 1 рассмотрены накрывающие отображения, действующие из метрического пространства в пространство с расстоянием, удовлетворяющем аксиоме тождества, и получены утверждения об уравнениях с таким отображениями.

В параграфе 1 предлагаются утверждения, распространяющие теорему Арутюнова [23] и некоторые другие известные утверждения о существовании и свойствах точек совпадения (см. [3, 24, 25]) на отображения, действующие из метрического пространства в множество с расстоянием. В этом параграфе 4 пункта. В пункте 1.1.1 приведены необходимые сведения о пространстве с расстоянием и об отображениях, действующих из метрического пространства в пространство с расстоянием. Пусть задано метрическое пространство $X = (X, \rho)$ с метрикой $\rho : X^2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Обозначим $B_X(x_0, r) = \{x \in X \,|\, \rho(x, x_0) \le r\}$ — замкнутый шар в X с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r \in [0, \infty]$. Далее, пусть задано множество $Y \neq \emptyset$, на котором определено *расстояние* — отображение $d : Y^2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ такое, что $\forall y_1, y_2 \in Y \quad d(y_1, y_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = y_2$ *Сходимость* при $i \to \infty$ последовательности $\{y_i\} \subset Y$ к элементу $y \in Y$ определим соотношением $y_i \to y \quad \Leftrightarrow \quad d(y, y_i) \to 0$. Отметим, что предел y последовательности может быть не единственным, и из $d(y, y_i) \to 0$ не следует $d(y_i, y) \to 0$.

В пункте 1.1.2 на отображения рассматриваемых пространств перенесены следующие определения, известные для отображений метрических пространств (см. [23]): отображение $f : X \to Y$ названо

α*-накрывающим,* $\alpha > 0$, если

$$\forall x_0 \in X \quad \forall y \in Y \quad \exists x \in X : \ f(x) = y \quad \text{и} \quad \rho(x, x_0) \le \frac{1}{\alpha} d\big(f(x), f(x_0)\big);$$

и β*-липшицевым,* $\beta \ge 0$, если

$$\forall x, u \in X \ \ d\big(f(x), f(u)\big) \le \beta \rho(x, u).$$

В пункте 1.1.2 также доказано утверждение, распространяющее теорему Арутюнова [23] о точках совпадения на отображения, действующие из метрического пространства в множество с расстоянием.

В пункте 1.1.3 предлагается распространение этих результатов, использующее следующее обобщение понятий накрывания и липшицевости. Пусть $U \subset X$. Для отображения $f : X \to Y$ определим множества:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}_\alpha[f; U] &:= \big\{(x, y) \in X \times Y \mid \\ &\qquad \exists u \in U \ f(u) = y, \ \rho(u, x) \le \alpha^{-1} d(y, f(x)), \ \rho(u, x) < \infty\big\}; \\ \mathrm{Lip}_\beta[f; U] &:= \big\{(x, y) \in X \times Y \mid \forall u \in U \ f(u) = y \Rightarrow d(y, f(x)) \le \beta \rho(u, x)\big\}; \end{aligned}$$

первое из которых назовем *множеством* α*-накрывания отображения* f *относительно множества* U, а второе — *множеством* β*-липшицевости этого отображения относительно* U. Очевидно, соотношение $\mathrm{Cov}_\alpha[f; X] = X \times Y$ означает, что отображение f является α-накрывающим, а соотношение $\mathrm{Lip}_\beta[f; X] = X \times Y$ справедливо тогда и только тогда, когда f липшицево с коэффициентом β.

Теорема 1.1.2. *Пусть метрическое пространство* X *полное и заданы* $\alpha > \beta \ge 0$, $x_0 \in X$ *такие, что* $d\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big) < \infty$. *Положим*

$$R := (\alpha - \beta)^{-1} d\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big), \quad U := B_X(x_0, R).$$

Предположим, что для любого $x \in U$ *выполнены включения*

$$(x, \psi(x)) \in \mathrm{Lip}_\beta[\varphi; U], \quad (x, \varphi(x)) \in \mathrm{Cov}_\alpha[\psi; X];$$

на шаре U *отображение* ψ *является замкнутым, а* φ *— непрерывным. Тогда в шаре* U *существует точка совпадения отображений* ψ, φ.

Также в пункте 1.1.3 получены условия устойчивости точек совпадения отображений к изменениям этих отображений.

В заключительном пункте 1.1.4 параграфа 1 определены условия полунепрерывной зависимости от параметра множества точек совпадения. Пусть T — топологическое пространство и пусть заданы отображения $\psi, \varphi\colon X \times T \to Y$. Рассмотрим уравнение

$$\psi(x,t) = \varphi(x,t),$$

с параметром $t \in T$ относительно неизвестного $x \in X$. Обозначим через $\mathrm{Coin}(t)$ множество решений этого уравнения, т. е. множество точек совпадения отображений $\psi(\cdot,t), \varphi(\cdot,t)\colon X \to Y$.

Для каждого $x \in X$ определим функционал

$$\eta_x\colon T \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \eta_x(t) = d\big(\varphi(x,t), \psi(x,t)\big).$$

Зафиксируем $t_0 \in T$ и рассмотрим условия

(C$_-$) для любого $x \in X$, если $\eta_x(t_0) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $W(t_0)$ точки t_0 такая, что $\eta_x(t) < \varepsilon$ при всех $t \in W(t_0)$;

($\widehat{\mathrm{C}}_-$) для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $W(t_0)$ точки t_0 такая, что для любого $x \in X$, если $\eta_x(t_0) = 0$, то $\eta_x(t) < \varepsilon$ при всех $t \in W(t_0)$;

$(\widehat{\mathrm{C}}_+)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $W(t_0)$ точки t_0 такая, что для любых $x \in X$, $t \in W(t_0)$, если $\eta_x(t) = 0$, то $\eta_x(t_0) < \varepsilon$.

Теорема 1.1.4. *Пусть метрическое пространство X является полным, $t_0 \in T$, $0 \le \beta < \alpha$. Пусть существует такая окрестность $V(t_0)$ точки t_0, что при любом $t \in V(t_0)$ найдется $u \in X$, для которого $d\big(\varphi(u,t), \psi(u,t)\big) < \infty$, при всех $x \in X$, $t \in V(t_0)$ выполнены включения*

$$(x, \psi(x,t)) \in \mathrm{Lip}_\beta\big[\varphi(\cdot,t), X\big], \quad (x, \varphi(x,t)) \in \mathrm{Cov}_\alpha\big[\psi(\cdot,t), X\big],$$

отображение $\psi(\cdot,t)\colon X \to Y$ является замкнутым, а отображение $\varphi(\cdot,t)\colon X \to Y$ — непрерывным. Тогда при любом $t \in V(t_0)$ множество $\mathrm{Coin}(t)$ *не пусто и замкнуто в X. Кроме того, многозначное отображение* $\mathrm{Coin}\colon V(t_0) \rightrightarrows X$, *при выполнении условия* (C_-), *является полунепрерывным снизу в точке t_0, при выполнении условия* $(\widehat{\mathrm{C}}_-)$ *— h-полунепрерывным снизу в t_0, а при выполнении* $(\widehat{\mathrm{C}}_+)$ *— h-полунепрерывным сверху в t_0.*

В параграфе 1.2 рассматривается уравнение $G(x) = \widehat{y}$ относительно неизвестного x — элемента метрического пространства X. Предполагается, что действующее из X в Y (Y — это множество, снабженное расстоянием) отображение G представимо в виде отображения двух элементов, по одному из которых является накрывающим, а по другому — липшицевым. Для рассматриваемого уравнения в пункте 1.2.1 получены утверждения о существовании и оценках решений, об устойчивости решений к изменениям отображения G и правой части $y \in Y$. Сформулируем эти теоремы. Пусть заданы отображение $F : X \times X \to Y$, $\widehat{y} \in Y$. Рассмотрим уравнение

$$G(x) := F(x,x) = \widehat{y}. \qquad (1.2.1)$$

Пусть задано множество $U \subset X$. Определим множество

$$\mathrm{Cl}[G;U] := \big\{(x,y) \in X \times Y \,|\, \forall \{x_n\} \subset U \ x_n \to x, \ G(x_n) \to y \ \Rightarrow \ G(x) = y\big\},$$

которое назовем *множеством замкнутости отображения* $G : X \to Y$ *относительно* U. Очевидно, соотношение $\mathrm{Cl}[G;X] = X \times Y$ равносильно замкнутости отображения G.

Теорема 1.2.1. *Пусть метрическое пространство X является полным, $x_0 \in X$, $\alpha > \beta \geq 0$ и $R := (\alpha - \beta)^{-1} d(\widehat{y}, F(x_0, x_0)) < \infty$. Предположим что для любого $x \in U := B_X(x_0, R)$ выполнены включения*

$$(x, \widehat{y}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\cdot, x); X], \quad (x, \widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x, \cdot); U], \quad (x, \widehat{y}) \in \mathrm{Cl}[G; U].$$

Тогда в шаре U существует решение уравнения (1.2.1).

Предлагаемые в пункте 1.2.1 утверждения являются развитием и обобщением теорем о липшицевых возмущениях накрывающих отображений метрических пространств, полученных в [6, 18, 24, 28, 52, 70]. Эти исследования восходят к теореме Милютина о возмущениях [42], в которой пространство Y — линейное метрическое, а отображение G представимо разностью накрывающего и липшицева отображений.

В пункте 1.2.2 получены условия полунепрерывной сверху и снизу зависимости множества решений от параметров. Эти результаты являются новыми и в случае метрического пространства Y.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной искомой функции. Эта глава содержит три параграфа. В параграфе 2.1 рассматривается функциональное уравнение с отклоняющимся аргументом относительно неизвестной измеримой функции. Исследование основано на полученных в первой главе результатах об операторных уравнениях с накрывающими отображениями, действующими из метрического пространства в множество, снабженное расстоянием. Для применения соответствующих теорем в пространстве измеримых функций вводится расстояние и для действующих в полученном пространстве операторов суперпозиции определяются множества замкнутости, накрывания и липшицевости. Этим вопросам посвящен пункт 2.1.1. Приведем определение расстояния в пространстве $\mathbb{S}=\mathbb{S}([0,\tau],\mathbb{R})$ измеримых (по Лебегу) функций $[0,\tau]\to\mathbb{R}$ $(\tau>0)$, предложенное в этом пункте.

Пусть функция $\theta:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ суперпозиционно измерима и удовлетворяет условию

$(\mathcal{A})$ *при любом фиксированном втором аргументе* $z\in\mathbb{R}$ *функция первого аргумента* $\theta(\cdot,z):\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ *непрерывна в точке* z, *справедливо равенство* $\theta(z,z)=0$ *и имеет место соотношение*

$$\forall\delta>0\ \exists\gamma=\gamma(z,\delta)>0\ \forall\upsilon\in\mathbb{R}\ \ |\upsilon-z|\geq\delta\ \Rightarrow\ \theta(\upsilon,z)\geq\gamma. \qquad (2.1.1)$$

Отображение

$$d^{\theta}:\mathbb{S}\times\mathbb{S}\to\overline{\mathbb{R}}_+,\quad \forall\upsilon,z\in\mathbb{S}\ \ d^{\theta}(\upsilon,z)=\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]}\theta(\upsilon(t),z(t)),$$

является расстоянием в $\mathbb{S}$. Обозначим $\mathbb{S}^{\theta}:=(\mathbb{S},d^{\theta})$. В частном случае, для функции $\theta_0:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, определенной формулой $\theta_0(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$, соответствующее отображение $d^{\theta_0}:\mathbb{S}\times\mathbb{S}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ является метрикой в $\mathbb{S}$. Будем обозначать соответствующее пространство измеримых функций через $\mathbb{S}^{\theta_0}=(\mathbb{S},\rho)$, где $\rho=d^{\theta_0}$.

В пункте 2.1.2 доказана следующая теорема существования измеримого решения функционального уравнения с отклоняющимся аргументом.

Пусть задана функция $f:[0,\tau]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ являющаяся измеримой по первому аргументу и непрерывной по совокупности второго и третьего аргументов, измеримая функция $\widehat{y}:[0,\tau]\to\mathbb{R}$ и функция $h:[0,\tau]\to[0,\tau]$ такая, что для любого $E\subset[0,\tau]$ из $\mu(E)=0$ (μ — мера Лебега) следует $\mu(h^{-1}(E))=0.$ Рассмотрим уравнение

$$f\big(t,x(h(t)),x(t)\big)=\widehat{y}(t),\quad t\in[0,\tau], \tag{2.1.27}$$

относительной неизвестной измеримой функции $x:[0,\tau]\to\mathbb{R}.$ Для каждого $v\in\mathbb{S}$ определим функции $g_1^{[v]},g_2^{[v]}:[0,\tau]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ соотношениями

$$g_1^{[v]}(t,x)=f(t,v(h(t)),x),\quad g_2^{[v]}(t,x)=f(t,x,v(t)),\quad t\in[0,\tau],\quad x\in\mathbb{R}.$$

Функции $g_1^{[v]},g_2^{[v]},$ очевидно, удовлетворяют условиям Каратеодори.

Теорема 2.1.1. *Пусть заданы $\alpha>\beta\geq 0$ и $x_0\in\mathbb{S}$ такие, что*

$$R:=\frac{1}{\alpha-\beta}\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]}\ \theta\big(\widehat{y}(t),\ f(t,x_0(h(t)),x_0(t))\big)<\infty.$$

Пусть для каждого $v\in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0,R)$ при п.в. $t\in[0,\tau]$ выполнено:

$$\forall x\in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0,R)\ \ \exists u\in\mathbb{R}\ \ g_1^{[v]}(t,u)=\widehat{y}(t),\quad |u-x(t)|\leq\alpha^{-1}\theta\big(\widehat{y}(t),g_1^{[v]}(t,x(t))\big);$$
$$\forall x\in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0,R)\ \ \forall u\in B_{\mathbb{R}}(x_0(h(t)),R)\ \ g_2^{[v]}(t,u)=\widehat{y}(t)\ \Rightarrow$$
$$\theta\big(\widehat{y}(t),g_2^{[v]}(t,x(h(t)))\big)\leq\beta\big|u-x(h(t))\big|.$$

Тогда существует решение $\widehat{x}\in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0,R)$ уравнения (2.1.27).

В заключительном пункте 2.1.3 параграфа 2.1 получены условия устойчивости решений к изменениям функций, порождающих рассматриваемое функциональное уравнение.

В параграфе 2.2 рассматривается задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной искомой функции. Исследование основано на полученных в первой главе результатах об операторных уравнениях с накрывающими отображениями, действующими из метрического пространства в множество, снабженное расстоянием. Дифференциальное уравнение сводится к интегральному уравнению с отображением, действующим из пространства суммируемых функций $\mathbb{L}$ в пространство измеримых функций $\mathbb{S}$. В $\mathbb{L}$ вводится метрика $\rho = d^{\theta_0}$, а в $\mathbb{S}$ — расстояние d^{θ}, затем используются утверждения о множествах накрывания и липшицевости оператора Немыцкого, полученные в пункте 2.1.1. Параграф разделен на два пункта. В пункте 2.2.1 получена теорема существования решения задачи Коши. В пункте 2.2.2 исследуется устойчивость решений задачи Коши к изменениям функции, порождающей дифференциальное уравнение, и начального условия. Сформулируем эти результаты.

Пусть функция $\widehat{y} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ измерима, функция $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима по первому аргументу и непрерывна по совокупности второго и третьего аргументов. Рассмотрим задачу Коши

$$f\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) = \widehat{y}(t), \quad t \geq 0; \tag{2.2.1}$$

$$x(0) = A. \tag{2.2.2}$$

Решением уравнения (2.2.1), определенным на $[0, \tau]$, $\tau > 0$, называем функцию $x \in \mathbb{AC}([0, \tau], \mathbb{R})$, удовлетворяющую этому уравнению при п.в. $t \in [0, \tau]$. Для произвольных функций $v \in \mathbb{AC}([0, \tau], \mathbb{R})$ и $w \in \mathbb{L}([0, \tau], \mathbb{R})$ определим функции $g_1^{[v]}, g_2^{[w]} : [0, \tau] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ соотношениями

$$g_1^{[v]}(t, x) = f(t, v(t), x), \quad g_2^{[w]}(t, x) = f(t, x, w(t)), \quad t \in [0, \tau], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Теорема 2.2.1. *Пусть заданы числа* $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, $\tau > 0$ *такие, что* $\beta\tau < \alpha$, *и функция* $x_0 \in \mathbb{AC}([0, \tau], \mathbb{R})$, *удовлетворяющая условию* (2.2.2).

Пусть $R := (\alpha - \beta\tau)^{-1} \operatorname{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \theta\big(\widehat{y}(t), f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))\big) < \infty$. *Положим*

$$V, \dot{V} : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}, \quad V(t) = B_{\mathbb{R}}(x_0(t), Rt), \quad \dot{V}(t) = B_{\mathbb{R}}(\dot{x}_0(t), R), \quad t \in [0,\tau].$$

Пусть для любых $v \in \mathrm{Sel}(V) \cap \mathbb{AC}$, $w \in \mathrm{Sel}(\dot{V})$ *при п.в.* $t \in [0,\tau]$ *выполнено*

$$\forall x \in \mathrm{Sel}(\dot{V}) \ \ \exists u \in \mathbb{R} \ \ g_1^{[v]}(t,u) = \widehat{y}(t), \quad |u - x(t)| \le \alpha^{-1} \theta\big(\widehat{y}(t), g_1^{[v]}(t, x(t))\big);$$
$$\forall x \in \mathrm{Sel}(V) \cap \mathbb{AC} \ \forall u \in V(t) \ \ g_2^{[w]}(t,u) = \widehat{y}(t) \Rightarrow \theta\big(\widehat{y}(t), g_2^{[w]}(t, x(t))\big) \le \beta\big|u - x(t)\big|.$$

Тогда существует определенное на $[0,\tau]$ *решение* x *задачи Коши* (2.2.1), (2.2.2) *такое, что* $\dot{x} \in B_{\mathbb{L}^{\theta_0}}(\dot{x}_0, R)$.

Сформулируем условия устойчивости решений задачи Коши (2.2.1), (2.2.2) к малым изменениям функций $f, \widehat{y}$ и числа A. Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ заданы: функция $f_n \colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, являющаяся измеримой по первому аргументу и непрерывной по совокупности второго и третьего аргументов, измеримая функция $\widehat{y}_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ и число A_n. Рассмотрим уравнение

$$f_n\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) = \widehat{y}_n(t), \quad t \ge 0, \tag{2.2.9}$$

с начальным условием

$$x(0) = A_n. \tag{2.2.10}$$

Для произвольных функций $v \in \mathbb{AC}([0,\tau], \mathbb{R})$ и $w \in \mathbb{L}([0,\tau], \mathbb{R})$ определим функции $g_{1n}^{[v]}, g_{2n}^{[w]} : [0,\tau] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ соотношениями

$$g_{1n}^{[v]}(t,x) = f_n(t, v(t), x), \quad g_{2n}^{[w]}(t,x) = f_n(t, x, w(t)), \quad t \in [0,\tau], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Теорема 2.2.2. *Пусть* $\widehat{x} \in \mathbb{AC}([0,\tau], \mathbb{R})$ *— решение задачи* (2.2.1), (2.2.2)*; при каждом* $n \in \mathbb{N}$ *заданы* $\alpha_n > 0$, $\beta_n \ge 0$ *такие, что* $\beta_n \tau < \alpha_n$. *Положим* $r_n := (\alpha_n - \beta_n\tau)^{-1} d\Big(\widehat{y}_n(t),\ f_n\big(t,\ \widehat{x}(t) + A_n - A,\ \dot{\widehat{x}}(t)\big)\Big)$ *и определим многозначные отображения* $V_n, \dot{V}_n : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$ *соотношениями*

$$V_n(t) = B_{\mathbb{R}}\big(\widehat{x}(t) + A_n - A,\, r_n t\big), \quad \dot{V}_n(t) = B_{\mathbb{R}}\big(\dot{\widehat{x}}(t), r_n\big), \quad t \in [0,\tau].$$

Пусть для любых $v \in \mathrm{Sel}(V_n) \cap \mathbb{AC}$, $w \in \mathrm{Sel}(\dot{V}_n)$ *при п.в.* $t \in [0,\tau]$ *выполнено*

$$\forall x \in \mathrm{Sel}(\dot{V}_n) \ \ \exists u \in \mathbb{R} \ \ g_{1n}^{[v]}(t,u) = \widehat{y}_n(t), \quad |u - x(t)| \le \alpha_n^{-1} \theta\big(\widehat{y}_n(t), g_{1n}^{[v]}(t, x(t))\big);$$

$$\forall x \in \mathrm{Sel}(V_n) \cap \mathbb{AC} \ \ \forall u \in V_n(t)$$

$$g_{2n}^{[w]}(t,u) = \widehat{y}(t) \ \Rightarrow \ \theta\big(\widehat{y}_n(t), g_{2n}^{[w]}(t, x(t))\big) \le \beta \big|u - x(t)\big|.$$

Если при $n \to \infty$ *выполнено* $r_n \to 0$, *то при любом* $n \in \mathbb{N}$ *задача* (2.2.9), (2.2.10) *разрешима и существует такое ее решение* $\widehat{x}_n \in \mathbb{AC}([0,\tau],\mathbb{R})$, *что имеет место сходимость* $\dot{\widehat{x}}_n \to \dot{\widehat{x}}$ *в пространстве* $\mathbb{L}^{\theta_0}([0,\tau],\mathbb{R})$.

Заключительный параграф 2.3 посвящен исследованию интегральных уравнений, не разрешенных относительно искомой функции, а также краевых задач для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной искомой функции. Используются полученные в первой главе результаты об абстрактных уравнениях с отображениями, действующими из метрического пространства в пространство, на котором задано расстояние, а также утверждения пункта 2.1.1 об операторе Немыцкого в пространствах измеримых функций. Параграф содержит четыре пункта. В пункте 2.3.1 исследуются множества накрывания и липшицевости отображений, порождаемых интегральными уравнениями. В пункте 2.3.2 получены условия существования решений интегральных уравнений в пространстве измеримых (не обязательно суммируемых) функций и найдены оценки таких решений, а в пункте 2.3.3 получены утверждения об устойчивости решений к изменениям функций, порождающих интегральное уравнение. Сформулируем основной результат этих исследований.

Обозначим $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$. Пусть функция $\theta : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ суперпозиционно измерима и удовлетворяет условию $(\mathcal{A})$. Обозначим

$\overline{\mathbb{R}}^{\theta} := (\overline{\mathbb{R}}, \theta)$ и $\overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} := (\overline{\mathbb{R}}, \theta_0)$, где $\theta_0(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$. Определим пространство $\overline{\mathbb{S}}^{\theta} = (\overline{\mathbb{S}}, d^{\theta})$ измеримых (по Лебегу) функций $[0,\tau] \to \overline{\mathbb{R}}$ с расстоянием $d^{\theta} : \overline{\mathbb{S}} \times \overline{\mathbb{S}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $d^{\theta}(z_1, z_2) = \operatorname{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \theta(z_1(t), z_2(t))$. В случае $\theta = \theta_0$ это пространство обозначаем $\overline{\mathbb{S}}^{\theta_0} = (\overline{\mathbb{S}}, d^{\theta_0})$. Предполагаем, что задана измеримая функция $\mathcal{K} : [0,\tau] \times [0,\tau] \to \mathbb{R}$ такая, что

$$k_0 := \operatorname{vrai}\sup_{t\in[0,\tau]} \int_0^{\tau} |\mathcal{K}(t,s)|ds < \infty.$$

Пусть также заданы $\widehat{z} \in \overline{\mathbb{S}}$ и функция $f : [0,\tau] \times \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, измеримая по первому аргументу и непрерывная по совокупности второго и третьего аргументов. Рассмотрим интегральное уравнение

$$f\big(t, \int_0^{\tau} \mathcal{K}(t,s)x(s)ds, x(t)\big) = \widehat{z}(t), \quad t \in [0,\tau], \tag{2.3.6}$$

с неизвестной функцией $x \in \mathbb{S}$. Для произвольного $x \in \mathbb{S}$ обозначим $(Kx)(t) = \int_0^{\tau}\mathcal{K}(t,s)x(s)ds$ и определим функции

$$\overline{g}^{[x]} : [0,\tau] \times \overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}, \quad \forall t \in [0,\tau] \ \ \forall u \in \overline{\mathbb{R}} \ \ \overline{g}^{[x]}(t,u) = f(t,u,x(t)),$$
$$g^{[x]} : [0,\tau] \times \mathbb{R}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}, \quad \forall t \in [0,\tau] \ \ \forall u \in \mathbb{R} \ \ g^{[x]}(t,u) = f(t,(Kx)(t),u).$$

Теорема 2.3.1. *Пусть задана функция $x_0 \in \mathbb{S}$ такая, что*

$$R_0 := \operatorname{vrai}\sup_{t\in[0,\tau]} \theta\big(\widehat{z}(t), f(t, v_0(t), x_0(t))\big) < \infty, \quad \text{где} \ \ v_0(t) := (Kx_0)(t).$$

Пусть $\alpha > 0$, $\sigma \in (0,\alpha)$, $R := \sigma^{-1}R_0$. Определим многозначное отображение $\overline{\Omega} : [0,\tau] \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}$, $\forall t \in [0,\tau]$ $\overline{\Omega}(t) := [v_0(t) - k_0R, v_0(t) + k_0R]$. Пусть при любом $x \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, R)$ при п.в. $t \in [0,\tau]$ выполнены включения

$$\big(x(t), \widehat{z}(t)\big) \in \operatorname{Cov}_{\alpha}\big[g^{[x]}(t,\cdot); \mathbb{R}\big], \quad \big((Kx)(t), \widehat{z}(t)\big) \in \operatorname{Lip}_{\beta}\big[\overline{g}^{[x]}(t,\cdot); \overline{\Omega}(t)\big],$$

где $\beta := {k_0}^{-1}(\alpha - \sigma)$. *Тогда в шаре* $B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, R)$ *существует решение уравнения* (2.3.6).

В заключительном пункте 2.3.4 результаты об интегральных уравнениях применяются к исследованию краевых задач для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной. Рассматриваемая краевая задача сводится к интегральному уравнению, что позволяет воспользоваться результатами, полученными в пунктах 2.3.2 и 2.3.3.

Для дифференциального уравнения (2.2.1) рассматривается краевая задача с условием

$$\mathfrak{L}x := \lambda x(0) + \int_0^\tau \Lambda(s)\dot{x}(s)ds = A. \tag{2.3.11}$$

Здесь $\lambda, A \in \mathbb{R}$, $\Lambda \in \mathbb{L}_\infty$, $\Lambda \neq 0$. Эта краевая задача записывается в виде эквивалентного интегрального уравнения (2.3.6) следующим образом.

В случае $\lambda \neq 0$ сделаем замену $(\mathcal{L}x)(t) := \dot{x}(t) = v(t)$. Обозначим

$$\mathrm{f}(t, x, v) = f(t, \frac{A}{\lambda} + x, v),$$

$$\mathrm{K}(t, s) = \begin{cases} 1 - \frac{\Lambda(s)}{\lambda} & \text{при } 0 \le s \le t \le \tau, \\ \quad -\frac{\Lambda(s)}{\lambda} & \text{при } 0 \le t < s \le \tau. \end{cases}$$

Если же $\lambda = 0$, то сделаем замену $(\mathcal{L}x)(t) := \dot{x}(t) - \Lambda(t)x(t) = v(t)$ и тогда обозначим

$$M(t) = \exp\Big(\int_0^t \Lambda(s)ds\Big), \quad \Delta(t) = \int_t^\tau \Lambda(\nu)^2 M(\nu)d\nu, \quad t \in [0, \tau].$$

$$\mathrm{f}(t, x, v) = f\Big(t, \frac{AM(t)}{\Delta(0)} + x, v + \frac{A\Lambda(t)M(t)}{\Delta(0)} + \Lambda(t)x\Big),$$

$$\mathrm{K}(t, s) = \begin{cases} 1 - \dfrac{M(t)\Lambda(s)}{\Delta(0)} - \dfrac{M(t)\Delta(s)}{M(s)\Delta(0)} & \text{при } 0 \le s \le t \le \tau, \\ \quad -\dfrac{M(t)\Lambda(s)}{\Delta(0)} - \dfrac{M(t)\Delta(s)}{M(s)\Delta(0)} & \text{при } 0 \le t < s \le \tau, \end{cases}$$

В этих обозначениях краевая задача (2.2.1),(2.3.11) относительно функции $v \in \mathbb{L}$ эквивалентна интегральному уравнению

$$\mathrm{f}\big(t,\, \int_0^\tau \mathrm{K}(t,s)\, v(s) ds,\, v(t)\big) = \widehat{y}(t).$$

Применим к этому уравнению теорему 2.3.1.

Обозначим $\mathrm{k}_0 = \operatorname{vrai}\,\sup_{t\in[0,\tau]} \int_0^\tau |\mathrm{K}(t,s)| ds$. Для любого $v \in \mathbb{L}$ положим $(\mathbf{K}v)(t) = \int_0^\tau \mathrm{K}(t,s) v(s) ds$ и определим функции $\overline{\mathrm{g}}^{[v]} : [0,\tau] \times \overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$, $\mathrm{g}^{[v]} : [0,\tau] \times \mathbb{R}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ соотношениями

$$\forall t \in [0,\tau] \;\; \forall u \in \mathbb{R} \quad \overline{\mathrm{g}}^{[v]}(t,u) = \mathrm{f}(t,u,v(t)), \;\; \overline{\mathrm{g}}^{[v]}(t,\infty) = \infty,$$
$$\forall t \in [0,\tau] \;\; \forall u \in \mathbb{R} \quad \mathrm{g}^{[v]}(t,u) = \mathrm{f}(t,(\mathbf{K}v)(t),u).$$

Теорема 2.3.3. *Пусть задана функция $v_0 \in \mathbb{L}$ такая, что*

$$R_0 := \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \theta\big(\widehat{y}(t),\, \mathrm{f}(t,u_0(t),v_0(t))\big) < \infty, \quad \textit{где} \;\; u_0(t) := (\mathbf{K}v_0)(t).$$

Пусть $\alpha > 0$, $\sigma \in (0,\alpha)$, $R = \sigma^{-1}R_0$. Определим многозначное отображение $\overline{\Omega} : [0,\tau] \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}$, $\forall t \in [0,\tau]$ $\overline{\Omega}(t) := [u_0(t) - \mathrm{k}_0 R, u_0(t) + \mathrm{k}_0 R]$. Пусть при любом $v \in B_{\mathbb{L}^{\theta_0}}(v_0,R)$ при п.в. $t \in [0,\tau]$ выполнены включения

$$\big(v(t), \widehat{y}(t)\big) \in \mathrm{Cov}_\alpha\big[\mathrm{g}^{[v]}(t,\cdot);\mathbb{R}\big], \quad \big((\mathbf{K}v)(t), \widehat{y}(t)\big) \in \mathrm{Lip}_\beta\big[\overline{\mathrm{g}}^{[v]}(t,\cdot);\overline{\Omega}(t)\big],$$

где $\beta := \mathrm{k}_0{}^{-1}(\alpha - \sigma)$. Тогда существует решение x краевой задачи (2.2.1), (2.3.11) *такое, что $\mathcal{L}x \in B_{\mathbb{L}^{\theta_0}}(v_0,R)$.*

Глава 1. НАКРЫВАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ С ОБОБЩЕННЫМИ МЕТРИКАМИ

§ 1.1. Точки совпадения двух отображений, действующих из метрического пространства в множество, снабженное расстоянием

В этом параграфе предлагаются утверждения, распространяющие теорему Арутюнова [23] и некоторые другие известные утверждения о существовании и свойствах точек совпадения (см. [3, 24, 25]) на отображения, действующие из метрического пространства в множество с расстоянием, удовлетворяющим всего одной из аксиом метрики — аксиоме тождества. Вначале в пункте 1.1.1 рассматривается понятие сходящейся последовательности в пространстве с расстоянием; вводятся определения непрерывности и замкнутости отображений, действующих из метрического пространства в множество с расстоянием, устанавливается связь между этими свойствами, предлагается ослабление свойства замкнутости. В пункте 1.1.2 получено распространение теоремы Арутюнова о существовании точки совпадения на отображения, действующие из метрического пространства в множество с расстоянием. В пункте 1.1.3 предлагается дальнейшее распространение этих результатов, использующее множества накрывания и липшицевости отображений — обобщение понятий накрывания и липшицевости, соответственно. Также здесь получены условия устойчивости точек совпадения отображений к изменениям этих отображений. В заключительном пункте 1.1.4 определены условия полунепрерывной зависимости от параметра множества точек совпадения.

1.1.1 Непрерывные и замкнутые отображения, действующие из метрического пространства в множество с расстоянием

Пусть заданы: метрическое пространство $X = (X, \rho)$ с метрикой $\rho : X^2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ и непустое множество Y, на котором задано *расстояние* — отображение $d : Y^2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$, удовлетворяющее условию

$$\forall y_1, y_2 \in Y \quad d(y_1, y_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = y_2 \tag{1.1.1}$$

(здесь $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$, таким образом, и метрика ρ, и расстояние d могут принимать не только конечные значения, но и ∞). В пространстве Y определим понятие *сходимости* последовательности $\{y_i\} \subset Y$ к элементу $y \in Y$ при $i \to \infty$ соотношением

$$y_i \to y \quad \Leftrightarrow \quad d(y, y_i) \to 0.$$

Отметим, что при такой сходимости предел y может быть не единственным, а «симметричная» числовая последовательность $d(y_i, y)$ может не сходиться к 0. Для произвольной последовательности $\{y_i\} \subset Y$ обозначим через $\operatorname{Lim} y_i = \{y \mid y_i \to y\}$ множество всех ее пределов.

Для отображений, действующих из X в Y, пользуемся следующими аналогами «обычных определений». Отображение $f : X \to Y$ называем *непрерывным в точке* $x \in X$, если для любой сходящейся к x последовательности $\{x_i\}$ выполнено $f(x_i) \to f(x)$ (т.е. $d\big(f(x), f(x_i)\big) \to 0$). Отображение $f : X \to Y$ называем *замкнутым в точке* $x \in X$, если из сходимости к x последовательности $\{x_i\} \subset X$ и существования $y \in Y$ такого, что $f(x_i) \to y$ следует равенство $f(x) = y$. Отображение, непрерывное (замкнутое) во всех точках множества $V \subset X$, называем *непрерывным* (*замкнутым*) на множестве V, а в случае $V = X$ такое отображение называем просто *непрерывным* (*замкнутым*).

Отметим, что единственность предела последовательности $\{f(x_i)\}$ для любой сходящейся к x последовательности $\{x_i\} \subset X$ не требуется для непрерывности f в точке x. Приведем соответствующий пример.

Пример 1.1.1. Пусть $X = Y = [0,1]$, причем в X задана «стандартная метрика»

$$\forall x, u \in [0,1] \ \ \rho(x,u) = |x-u|,$$

а в Y — расстояние, определяемое следующими соотношениями:

$$\forall y, z \in [0,1] \ \ y > z \ \Rightarrow$$
$$d(y,z) = d(z,y) = \begin{cases} y - z & \text{при } y \neq 1 \text{ и } z \neq 0; \\ \min\{z, 1-z\} & \text{при } y = 1 \text{ и } z \neq 0; \\ \min\{y, 1-y\} & \text{при } y \neq 1 \text{ и } z = 0; \\ 1 & \text{при } y = 1 \text{ и } z = 0. \end{cases}$$

В пространстве Y каждая из последовательностей $y_i = i^{-1}$, $z_i = -i^{-1} + 1$ имеет два предела 0 и 1. И тем не менее отображение $f : X \to Y$, равное $f(x) = x$ при $x \in (0,1)$, и принимающее любое из значений 0 или 1 при $x = 0$ и $x = 1$, является непрерывным на всем пространстве X.

Итак, для непрерывного в точке x отображения f для сходящейся к x последовательности $\{x_i\} \subset X$ множество $\operatorname{Lim} f(x_i)$ может содержать более одного элемента, при этом, конечно, значение $f(x)$ должно принадлежать этому множеству. А для замкнутости f в точке x необходимо, чтобы предел последовательности $\{f(x_i)\}$, где $x_i \to x$, был единственным. Таким образом, в случае, когда расстояние в Y не является метрикой, нет «привычной связи» между понятиями непрерывности и замкнутости: замкнутость не следует из непрерывности.

Пример 1.1.2. Пусть $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R} \cup \{\vartheta\}$. Определим в Y «обычное» расстояние $d(x,u) = |x-u|$ для $x, u \in \mathbb{R}$, и полагаем $d(x,\vartheta) = d(\vartheta,x) = |x|$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $d(0,\vartheta) = d(\vartheta,0) = 1$. Также полагаем $d(\vartheta,\vartheta) = 0$. Это расстояние удовлетворяет аксиомам тождества и симметрии, но не выполнено неравенство треугольника: например, для $x = 3^{-1}$ имеем $d(0,x) = 3^{-1}$, $d(x,\vartheta) = 3^{-1}$, $d(0,\vartheta) = 1 > d(0,x) + d(x,\vartheta)$.

Определим отображение $f : \mathbb{R} \to Y$ при любом аргументе x соотношением $f(x) = x$. Это отображение, очевидно, непрерывно во всех точках, однако не является замкнутым в точке $x = 0$. Действительно, для последовательности $\{x_i\} \subset \mathbb{R}$, сходящейся к точке $x = 0$, последовательность тех же чисел в пространстве Y сходится к двум пределам: 0 и ϑ. Следовательно, $f(x_i) \to \vartheta$, но $f(x) = 0 \neq \vartheta$.

Сформулируем определение свойства «ослабленной» замкнутости, которое в отличие от замкнутости привычным образом связано со свойством непрерывности отображения.

Определение 1.1.1. Отображение $f : X \to Y$ называем *d-замкнутым в точке* $x \in X$, если из сходимости к x последовательности $\{x_i\} \subset X$ и существования $\operatorname{Lim} f(x_i) \neq \emptyset$ следует включение $f(x) \in \operatorname{Lim} f(x_i)$. Отображение, d-замкнутое во всех точках, называем *d-замкнутым.*

Очевидно, что отображение, непрерывное в некоторой точке, является в этой точке d-замкнутым. Обратное не верно.

1.1.2 Распространение теоремы Арутюнова

Формально переносим на отображения рассматриваемых пространств следующие определения, известные для отображений, действующих в метрических пространствах (см. [23]).

Определение 1.1.2. Пусть $\alpha > 0$. Отображение $f : X \to Y$ называем *α-накрывающим*, если выполнено соотношение

$$\forall x_0 \in X \quad \forall y \in Y \quad \exists x \in X: \; f(x) = y \quad \text{и} \quad \rho(x, x_0) \le \frac{1}{\alpha} d\big(f(x), f(x_0)\big).$$

Отметим, что накрывающее отображение сюръективно.

Определение 1.1.3. Пусть $\beta \ge 0$. Отображение $f : X \to Y$ называем *β-липшицевым*, если выполнено соотношение

$$\forall x, u \in X \;\; d\big(f(x), f(u)\big) \le \beta \rho(x, u).$$

Если отображение β-липшицево, то оно, очевидно, непрерывно и d-замкнуто. Но при этом отображение может не быть замкнутым. В рассмотренном выше примере 1.1.2 отображение f является липшицевым с константой $\beta = 1$, поэтому непрерывным и d-замкнутым, но в точке $x = 0$ это отображение не замкнуто.

Приведем утверждение о существовании точки совпадений двух отображений, действующих из X в Y, аналогичное теореме Арутюнова [23]. Напомним, что в теореме Арутюнова оба пространства X и Y предполагались метрическими, а здесь Y — это пространство с расстоянием, удовлетворяющим только одному условию (1.1.1).

Пусть заданы два отображения $\psi, \varphi : X \to Y$.

Определение 1.1.4. Точкой совпадения отображений ψ, φ называют элемент $x \in X$ такой, что

$$\psi(x) = \varphi(x). \tag{1.1.2}$$

Т е о р е м а 1.1.1. *Пусть метрическое пространство* X *является полным и выполнены следующие условия: отображение* $\psi : X \to Y$ *является* α*-накрывающим и замкнутым; отображение* $\varphi : X \to Y$ *является* β*-липшицевым. Тогда, если* $\alpha > \beta$, *то для любого* $x_0 \in X$ *такого, что* $d\big(\varphi(x_0, \psi(x_0))\big) < \infty$ *существует точка совпадения* $\xi \in X$ *отображений* ψ, φ, *удовлетворяющая неравенству*

$$\rho(\xi, x_0) \leq \frac{1}{\alpha - \beta} d\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big). \tag{1.1.3}$$

Доказательство. Пусть для некоторого $x_0 \in X$ значение расстояния $d\big(\varphi(x_0, \psi(x_0))\big)$ конечно. Определим последовательность $\{x_n\} \subset X$ следующим образом.

Так как отображение ψ является α-накрывающим, то существует $x_1 \in X$ такой, что

$$\psi(x_1) = \varphi(x_0), \quad \rho(x_1, x_0) \leq \frac{1}{\alpha} d(\psi(x_1), \psi(x_0)) = \frac{1}{\alpha} d\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big).$$

Вследствие липшицевости отображения φ выполнено неравенство

$$d(\varphi(x_1), \varphi(x_0)) \leq \beta \rho(x_1, x_0).$$

Снова, в силу $\alpha-$ накрывания отображения ψ, существует $x_2 \in X$ такой, что $\psi(x_2) = \varphi(x_1)$, и имеют место неравенства

$$\rho(x_2, x_1) \leq \frac{1}{\alpha} d(\psi(x_2), \psi(x_1)) \leq \frac{1}{\alpha} d(\varphi(x_1), \varphi(x_0)) \leq \frac{\beta}{\alpha} \rho(x_1, x_0).$$

Аналогично, при каждом натуральном n устанавливается существование элемента $x_n \in X$, для которого справедливы соотношения

$$\psi(x_n) = \varphi(x_{n-1}), \tag{1.1.4}$$

$$\rho(x_n, x_{n-1}) \le \frac{\beta}{\alpha}\rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \le \frac{\beta^{n-1}}{\alpha^{n-1}}\rho(x_1, x_0). \tag{1.1.5}$$

Покажем, что построенная последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной. Из неравенства треугольника, учитывая $\alpha > \beta$, для любых $n < m$ получаем

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots \rho(x_{m-1}, x_m) \le$$
$$\le \frac{\beta^n}{\alpha^n}\frac{d\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big)}{\alpha} + \frac{\beta^{n+1}}{\alpha^{n+1}}\frac{d\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big)}{\alpha} + \cdots + \frac{\beta^{m-1}}{\alpha^{m-1}}\frac{d\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big)}{\alpha} \le$$
$$\le \Big(\frac{\beta^n}{\alpha^n} + \frac{\beta^{n+1}}{\alpha^{n+1}} + \cdots + \frac{\beta^{m-1}}{\alpha^{m-1}}\Big)\frac{d\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big)}{\alpha} \le \Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^n \frac{1}{\alpha - \beta} d\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big).$$

Таким образом, для любого $\epsilon > 0$, если выбрать

$$N = \log_{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{\epsilon(\alpha - \beta)}{d\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big)},$$

то при всех $n, m > N$ будет выполнено неравенство $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$.

Итак, последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной, и в полном пространстве X сходится к некоторой точке ξ. Докажем, что ξ есть точка совпадения отображений ψ и φ. Вследствие непрерывности липшицева отображения φ получаем $\varphi(\xi) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)$. Согласно равенству (1.1.4) выполнено $\lim_{n\to\infty} \psi(x_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi(\xi)$. Отсюда в силу замкнутости отображения ψ получаем соотношение $\psi(\xi) = \lim_{n\to\infty} \psi(x_n) = \varphi(\xi)$.

Теперь докажем справедливость соотношения (1.1.3). Из неравенств

(1.1.5) при любим n имеем

$$\rho(x_0, x_n) \le \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \cdots \rho(x_{n-1}, x_n) \le$$
$$\le \Big(1 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \cdots + \frac{\beta^{n-1}}{\alpha^{n-1}}\Big)\frac{d\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big)}{\alpha} \le \frac{1}{\alpha - \beta} d\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ получаем неравенство (1.1.3). $\square$

З а м е ч а н и е 1.1.1. *В теореме 1.1.1 условие замкнутости отображения $\psi : X \to Y$ может быть заменено менее обременительным условием d-замкнутости, но в этом случае потребуется дополнительно предположить, что*

$$\forall \{x_i\} \subset X \;\; \forall x \in X \quad \big(\, x_i \to x \;\; \text{и} \;\; \varphi(x) \in \operatorname{Lim} \psi(x_i) \,\big) \;\; \Rightarrow \;\; \varphi(x) = \psi(x).$$

Приведем примеры отображений, удовлетворяющих условиям теоремы 1.1.1, действующих из метрического пространства во множество, не являющееся метрическим пространством. Последнее обстоятельство не позволяет применить к ним результаты [23], в то же время, теорема 1.1.1 гарантирует существование точек совпадения и соответствующую оценку (1.1.3).

Пример 1.1.3. Пусть каждое из множеств X, Y состоит из пяти элементов: $X = \{x_i, \; i = \overline{1,5}\}, \;\; Y = \{y_i, \; i = \overline{1,5}\}$. В множестве X определим расстояние $\rho : X^2 \to \mathbb{R}_+$ формулой

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(x_2, x_1) = \rho(x_1, x_5) =$$
$$= \rho(x_5, x_1) = \rho(x_2, x_5) = \rho(x_5, x_2) = 1/2,$$
$$\rho(x_i, x_i) = 0 \text{ при } i = \overline{1,5}, \quad \rho(x_i, x_j) = 3 \text{ при остальных } (i, j).$$

Очевидно, X является полным метрическим пространством.

На множестве Y зададим расстояние $d : Y^2 \to \mathbb{R}_+$ соотношениями

$$d(y_1, y_2) = d(y_2, y_1) = 1, \quad d(y_1, y_5) = d(y_5, y_1) = 1/3,$$
$$d(y_1, y_4) = d(y_4, y_1) = 2, \quad d(y_2, y_5) = d(y_5, y_2) = 1/2,$$
$$d(y_i, y_i) = 0 \text{ при } i = \overline{1,5}, \quad d(y_i, y_j) = 3 \text{ при остальных } (i, j).$$

Это отображение не удовлетворяет неравенству треугольника, так как

$$d(y_1, y_5) = 1/3,\ d(y_5, y_2) = 1/2,\ d(y_1, y_2) = 1 > 1/3 + 1/2.$$

Таким образом, к отображениям, действующим в множество Y, не применима теорема Арутюнова [23] о точках совпадения. Однако, то обстоятельство, что Y не является метрическим пространством, не препятствует применению теоремы 1.1.1.

Пусть отображение $\psi : X \to Y$ определено следующим образом

$$\psi(x_i) = y_i.$$

Это отображения является накрывающим с коэффициентом

$$\alpha = \min\left\{\frac{d(y_i, y_j)}{\rho(x_i, x_j)},\ i \neq j,\ i, j = \overline{1,5}\right\} = \frac{2}{3}.$$

Определим отображение $\varphi : X \to Y$ равенствами

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \varphi(x_5) = y_1,\ \varphi(x_3) = y_5,\ \varphi(x_4) = y_2.$$

Это отображения является липшицевым с коэффициентом

$$\beta = \max\left\{\frac{d\big(\varphi(x_i), \varphi(x_j)\big)}{\rho(x_i, x_j)},\ i \neq j,\ i, j = \overline{1,5}\right\} =$$
$$= \max\left\{\frac{d(y_1, y_5)}{\rho(x_2, x_3)}, \frac{d(y_1, y_2)}{\rho(x_1, x_4)}, \frac{d(y_1, y_2)}{\rho(x_4, x_2)}, \frac{d(y_1, y_5)}{\rho(x_1, x_3)},\right.$$
$$\left.\frac{d(y_1, y_2)}{\rho(x_5, x_4)}, \frac{d(y_1, y_5)}{\rho(x_5, x_3)}, \frac{d(y_5, y_2)}{\rho(x_3, x_4)}\right\} = \frac{1}{3}.$$

Итак, $\beta < \alpha$ и выполнены все условия теоремы 1.1.1, отображения ψ, φ имеют точку совпадения.

В рассмотренном примере не только Y не является метрическим пространством, но и оба его подмножества $\varphi(X) \subset \psi(X) \subset Y$ (с индуцированным расстоянием) также не являются метрическими пространствами.

Прежде чем привести следующий пример, сформулируем определение f-квазиметрического пространства (подробнее см. [27, 45, 5]).

Пусть задана функция $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ такая, что

$$(r_1, r_2) \to (0, 0) \;\Rightarrow\; f(r_1, r_2) \to 0; \tag{1.1.6}$$

говорят, что расстояние $d : Y^2 \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет f*-неравенству треугольника*, если выполнено соотношение

$$\exists \sigma > 0 \;\; \forall x, y, z \in Y \;\; \big(d(x, y) < \sigma, \; d(y, z) < \sigma \big) \;\Rightarrow \\ d(x, z) \le f\big(d(x, y), d(y, z)\big). \tag{1.1.7}$$

При выполнении аксиомы тождества и условия (1.1.7) отображение d называют f*-квазиметрикой,* а пространство (Y, d) называют f*-квазиметрическим* [5]. Согласно [5], f-неравенство треугольника равносильно *асимптотическому неравенству треугольника*:

$$\forall \{x_i\}_{i=1}^{\infty}, \{y_i\}_{i=1}^{\infty}, \{z_i\}_{i=1}^{\infty} \subset Y \\ d(x_i, y_i) \to 0, \;\; d(y_i, z_i) \to 0 \;\Rightarrow\; d(x_i, z_i) \to 0, \tag{1.1.8}$$

т. е., если расстояние d удовлетворяет условию (1.1.7) с функцией f, обладающей свойством (1.1.6), то d удовлетворяет и соотношению (1.1.8); обратно, из (1.1.8) следует существование функции f такой, что имеет место (1.1.6) и справедливо (1.1.7).

Пример 1.1.4. Обозначим через $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ множества натуральных и целых чисел, соответственно, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; символом $[\,\cdot\,]$ — целую часть действительного числа.

Пусть $X = \{x_i,\, i \in \mathbb{Z}\}$. Определим на этом множестве метрику — симметрическую функцию $\rho : X^2 \to \mathbb{R}_+$, равную

$$\rho(x_i, x_i) = 0, \quad i \in \mathbb{Z},$$

$$\rho(x_i, x_{i+1}) = \begin{cases} 1, & i = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \\ \frac{1}{k+2}, & i = 2k+1, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \end{cases}$$

$$\rho(x_{-i}, x_{-i-1}) = \frac{1}{2([\frac{i}{2}] + 2)}, \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

$$\rho(x_i, x_{i+m}) = \sum_{j=i}^{i+m-1} \rho(x_j, x_{j+1}), \quad i \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, для такой функции выполнено неравенство треугольника.

Покажем что X является полным метрическим пространством. Любая последовательность, содержащая бесконечно много различных элементов этого множества, не является фундаментальной, так как для любого i вследствие расходимости гармонического ряда выполнено $\lim\limits_{j\to\infty} \rho(x_i, x_j) = \infty$, $\lim\limits_{j\to-\infty} \rho(x_i, x_j) = \infty$. Таким образом, фундаментальной может быть только последовательность, которая начиная с некоторого номера постоянна, и такая последовательность, очевидно, сходится.

Далее, зададим множество $Y = \{y_i,\, i \in \mathbb{Z}\}$ и определим в нём расстояние — симметрическую функцию $d : Y^2 \to \mathbb{R}_+$ со следующими значениями:

$$\forall i \in \mathbb{Z}_+ \quad d(y_i, y_{i+1}) = \frac{1}{[\frac{i}{2}] + 2}, \quad d(y_i, y_{i+2}) = 1;$$

$$d(y_{-i}, y_{-i}) = 0; \quad d(y_{-i}, y_{-i-1}) = \begin{cases} 2, & i = 2k, \\ 1, & i = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z}_+; \end{cases} \quad d(y_{-i}, y_{-i-2}) = 3;$$

$$
d(y_i, y_{i+m}) = \begin{cases} k, & m = 2k, \\ k + \dfrac{1}{[\frac{i+2k}{2}] + 2}, & m = 2k+1, \ k \in \mathbb{N}; \end{cases}
$$

$$
d(y_{-i}, y_{-i-m}) = \sum_{s=i}^{i+m-1} d(y_{-s}, y_{-s-1}),
$$

$$
d(y_{-i}, y_m) = d(y_{-i}, y_0) + d(y_0, y_m), \quad m \in \mathbb{N}.
$$

Очевидно, что Y не является метрическом пространством, так как при любом $i \in \mathbb{N}$ выполнено

$$
d(y_i, y_{i+1}) + d(y_{i+1}, y_{i+2}) \le d(y_i, y_{i+2}).
$$

Более того, Y не является даже f—квазиметрическим пространством. Действительно, для последовательностей $\{y_i\}$, $\{y_{i+1}\}$, $\{y_{i+2}\}$ имеют место сходимости $d(y_i, y_{i+1}) \to 0$, $d(y_{i+1}, y_{i+2}) \to 0$, но $d(y_i, y_{i+2}) = 1$. Таким образом, асимптотическое неравенство треугольника (1.1.8) нарушено.

Определим отображение $\varphi : X \to Y$ соотношениями

$$
\varphi(x_i) = y_i, \quad \varphi(x_{-i}) = y_0 \ \ \forall i \in \mathbb{Z}_+.
$$

Отображение φ является липшицевым с коэффициентом

$$
\beta = \max_{i,j \in \mathbb{Z}_+} \left\{ \frac{d\big(\varphi(x_i), \varphi(x_j)\big)}{\rho(x_i, x_j)} \right\} = \max \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \right\} = 1.
$$

Определим отображение

$$
\psi : X \to Y, \ \ \psi(x_i) = y_{-i} \ \ i \in \mathbb{Z}.
$$

Это отображение (как и любое определенное на данном пространстве X отображение) является непрерывным, поскольку для любой сходящейся к $x \in X$ последовательности $\{x_{i_n}\} \subset X$ существует такое n_0, что при всех $n \geq n_0$ выполнено $x_{i_n} = x$. Тогда $\psi(x_{i_n}) = \psi(x)$, и таким образом $\psi(x_{i_n}) \to \psi(x)$.

Отображение $\psi : X \to Y$ является накрывающим с коэффициентом

$$\alpha = \min_{i,j \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{d\big(\psi(x_i), \psi(x_j)\big)}{\rho(x_i, x_j)} \right\} = \min_{i,j \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{d(y_{-i}, y_{-j})}{\rho(x_i, x_j)} \right\} = 2 > \beta.$$

Итак, выполнены все условия теоремы 1.1.1, и отображения φ и ψ имеют точку совпадения. Результаты [23] в данном случае не применимы.

1.1.3 Условия существования точек совпадения в терминах множеств накрывания и липшицевости

Здесь определяется понятия множеств накрывания и липшицевости отображений, действующих из метрического пространства (X, ρ) в пространство Y с удовлетворяющем аксиоме тождества расстоянием d, обобщающие определения 1.1.2 и 1.1.3. В терминах таких множеств будет получено ещё одно утверждение о существовании точки совпадения, из которого следует теорема 1.1.1 и известные теоремы, полученные в [3, 23, 24, 25].

Обозначим $B_X(x_0, r) = \{x \in X \,|\, \rho(x, x_0) \leq r\}$ — замкнутый шар в метрическом пространстве X с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r \in [0, \infty]$ (полагаем $B_X(x_0, 0) = \{x_0\}$, $B_X(x_0, \infty) = X$).

Пусть задано множество $U \subset X$. Для отображения $f : X \to Y$ определим множества:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}_\alpha[f; U] &:= \big\{(x, y) \in X \times Y \,| \\ &\qquad \exists u \in U \;\; f(u) = y, \;\; \rho(u, x) \leq \alpha^{-1} d(y, f(x)), \;\; \rho(u, x) < \infty \big\}; \\ \mathrm{Lip}_\beta[f; U] &:= \big\{(x, y) \in X \times Y \,|\, \forall u \in U \;\; f(u) = y \Rightarrow d(y, f(x)) \leq \beta \rho(u, x) \big\}; \end{aligned}$$

первое из которых назовем *множеством* α*-накрывания отображения* f *относительно множества* U, а второе — *множеством* β*-липшицевости этого отображения относительно* U. Очевидно, соотношение $\mathrm{Cov}_\alpha[f;X] = X \times Y$ означает, что отображение f является α-накрывающим, а соотношение $\mathrm{Lip}_\beta[f;X] = X \times Y$ справедливо тогда и только тогда, когда f липшицево с коэффициентом β. Определенные здесь множества накрывания и липшицевости отображения f обладают следующим свойством монотонности относительно $U \subset X$:

$$U \subset \overline{U} \subset X \;\Rightarrow\; \mathrm{Cov}_\alpha[f;U] \subset \mathrm{Cov}_\alpha[f;\overline{U}], \;\; \mathrm{Lip}_\beta[f;U] \supset \mathrm{Lip}_\beta[f;\overline{U}]. \quad (1.1.9)$$

Т е о р е м а 1.1.2. *Пусть метрическое пространство* X *полное и заданы* $\alpha > \beta \geq 0$, $x_0 \in X$ *такие, что* $d\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big) < \infty$. *Положим*

$$R = (\alpha - \beta)^{-1} d\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big), \quad U = B_X(x_0, R).$$

Предположим, что для любого $x \in U$ *выполнены включения*

$$(x, \psi(x)) \in \mathrm{Lip}_\beta[\varphi; U], \quad (x, \varphi(x)) \in \mathrm{Cov}_\alpha[\psi; X];$$

на шаре U *отображение* ψ *является замкнутым, а отображение* φ — *непрерывным. Тогда в шаре* U *существует точка совпадения отображений* ψ, φ.

Доказательство. Покажем, что существует последовательность $\{x_i\} \subset X$ такая, что выполнены соотношения

$$\begin{aligned} &x_i \in U, \quad \psi(x_i) = \varphi(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, \\ &\rho(x_{i-1}, x_i) \leq q\rho(x_{i-2}, x_{i-1}), \quad i = 2, 3, \ldots, \quad \text{где } q = \beta/\alpha. \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

Проверим эти соотношения при $i = 1$ и $i = 2$. Пусть x_0 — это заданный в условиях теоремы элемент, $y_0 = \varphi(x_0)$. В силу того, что выполнено включение $(x_0, \varphi(x_0)) \in \mathrm{Cov}_\alpha[\psi; X]$, существует $x_1 \in X$, удовлетворяющий соотношениям

$$\psi(x_1) = \varphi(x_0) \ \text{ и } \ \rho(x_1, x_0) \le \alpha^{-1} d\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big). \qquad (1.1.11)$$

Поэтому $\rho(x_1, x_0) \le R$, и значит, $x_1 \in U$. Положим $y_1 = \varphi(x_1)$. Поскольку $(x_1, \psi(x_1)) \in \mathrm{Lip}_\beta[\varphi; U]$, имеет место неравенство

$$d(y_0, y_1) = d\big(\varphi(x_0), \varphi(x_1)\big) \le \beta \rho(x_0, x_1). \qquad (1.1.12)$$

Теперь, в силу включения $(x_1, \varphi(x_1)) \in \mathrm{Cov}_\alpha[\psi; X]$, существует $x_2 \in X$ такой, что

$$\psi(x_2) = \varphi(x_1) \ \text{ и } \ \rho(x_2, x_1) \le \alpha^{-1} d\big(\varphi(x_1), \psi(x_1)\big),$$

из соотношения (1.1.11) и (1.1.12) получим

$$\rho(x_1, x_2) \le q \rho(x_0, x_1).$$

Заметим, что $x_2 \in U$, так как

$$\rho(x_0, x_2) \le \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) \le \alpha^{-1}(1+q) d(\varphi(x_0), \psi(x_0)) \le R.$$

Таким образом, при $i = 1$ и $i = 2$ соотношения (1.1.10) выполнены.

Предположим, что при всех натуральных $i = \overline{1, n}$ определены элементы $x_i \in X$, так, что выполнены соотношения (1.1.10). Покажем, что существует элемент x_{n+1}, удовлетворяющий также этим соотношениям.

Положим $y_n = \varphi(x_n)$. Так как $(x_n, \varphi(x_n)) \in \mathrm{Cov}_\alpha[\psi; X]$, существует $x_{n+1} \in X$ такой, что

$$\psi(x_{n+1}) = \varphi(x_n)$$

и имеет место неравенство

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^{-1} d\big(\varphi(x_n), \psi(x_n)\big).$$

Следовательно,

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^{-1} d\big(\varphi(x_n), \varphi(x_{n-1})\big) \leq q\rho(x_n, x_{n-1}). \tag{1.1.13}$$

Из неравенства (1.1.10), справедливого по предположению индукции при всех $i = \overline{1, n}$, и неравенства (1.1.13) получаем

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^{-1} q^n d\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big). \tag{1.1.14}$$

Таким образом,

$$\rho(x_0, x_{n+1}) \leq \alpha^{-1} \sum_{i=1}^{n} q^i d\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big) \leq \frac{1}{\alpha(1-q)} d\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big) = R,$$

т. е. $x_{n+1} \in U$. Итак, доказано, что при $i = n + 1$ соотношения (1.1.10) выполнены.

Из неравенства (1.1.14) очевидно следует, что последовательность $\{x_i\}$ является фундаментальной. Пусть $x_i \to \xi$. Тогда $\xi \in U$ и, вследствие непрерывности отображения φ на шаре U получаем $\varphi(x_i) \to \varphi(\xi)$. А так как $\psi(x_{i+1}) = \varphi(x_i)$, то $\psi(x_i) \to \varphi(\xi)$. Вследствие замкнутости на шаре U отображения ψ получаем $\psi(\xi) = \varphi(\xi)$. □

З а м е ч а н и е 1.1.2. *В аналогичных теоремах о точках совпадения отображений метрических пространств непрерывность отображения φ не предполагается, поскольку непрерывность следует из липшицевости этого отображения. Используемое в теореме 1.1.2 ослабленное предположение липшицевости (принадлежность пары $(x, \varphi(x))$ при любом $x \in U$ множеству липшицевости отображения ψ) уже не обеспечивает требуемую для этого утверждения непрерывность φ.*

Приведем пример отображений, не имеющих точки совпадения, для которых выполнены все условия теоремы 1.1.2 кроме непрерывности φ.

Пример 1.1.5. Пусть $X = Y = \mathbb{R}$ — вещественная прямая с «обычной метрикой», определим функции $\psi, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ формулами

$$\psi(x) = 2x, \quad \varphi(x) = \begin{cases} x & \text{если } x \neq 0, \\ 1 & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Очевидно, функция ψ является 2-накрывающей и непрерывной на всем пространстве $\mathbb{R}$. Покажем, что для $\beta = 1$ выполнено $(x, \psi(x)) \in \mathrm{Lip}_\beta[\varphi; \mathbb{R}]$ также на всем $\mathbb{R}$.

Если $x \neq 0$ и $x \neq 1/2$, то $\psi(x) = 2x \neq 0$ и $\psi(x) = 2x \neq 1$. В этом случае равенство $\psi(x) = \varphi(u)$ выполнено только при $u = 2x$, и тогда имеем

$$|\varphi(x) - \varphi(u)| = |\varphi(x) - \varphi(2x)| = |x|, \quad |x - u| = |x - 2x| = |x|.$$

Для $x = 0$ получаем $\psi(0) = 0$, а равенство $\varphi(u) = 0$ невозможно. В случае $x = 1/2$ получаем $\psi(1/2) = 1$, соответствующее уравнение $\varphi(u) = 1$ имеет два решения: $u = 0$, $u = 1$. Для этих значений получаем

$$|\varphi(1/2) - \varphi(u)| = 1/2, \quad |1/2 - u| = 1/2.$$

Итак, $(x, \psi(x)) \in \mathrm{Lip}_\beta[\varphi; \mathbb{R}]$ $(\beta = 1)$ на всем $\mathbb{R}$, но при этом функция φ не является непрерывной. Остальные условия теоремы 1.1.2 выполнены, тем не менее, рассматриваемые функции не имеют точки совпадения.

З а м е ч а н и е 1.1.3. *В теореме 1.1.2 условие замкнутости отображения* $\psi : X \to Y$ *может быть заменено менее обременительным* *условием d-замкнутости, но в этом случае потребуется дополнительно предположить, что*

$$\forall \{x_i\} \subset U \ \ \forall x \in U \quad \bigl(x_i \to x \ \ \textit{и} \ \ \varphi(x) \in \operatorname{Lim} \psi(x_i) \bigr) \ \Rightarrow \ \varphi(x) = \psi(x).$$

Отметим, что из теоремы 1.1.2 следует полученная выше теорема 1.1.1, в которой использовались аналоги «классических» условий накрывания и липшицевости отображений, т.е. предполагались более обременительные условия $\mathrm{Cov}_\alpha[\psi, X] = X \times Y$, $\mathrm{Lip}_\beta[\varphi, U] \supset \mathrm{Lip}_\beta[\varphi, X] = X \times Y$ (здесь используется свойство (1.1.9) множества липшицевости).

Используя теорему 1.1.2, получим условия устойчивости множества точек совпадения отображений $\psi, \varphi \colon X \to Y$ к малым изменениям данных отображений.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ заданы отображения $\psi_n, \varphi_n \colon X \to Y$. Устойчивость множества точек совпадения трактуется здесь как сходимость при $n \to \infty$ последовательности точек совпадения отображений ψ_n, φ_n к точке совпадения отображений ψ, φ в случае, когда есть некоторая сходимость ψ_n к ψ и φ_n к φ.

Напомним, что точкой совпадения отображений ψ_n, φ_n называют решение уравнения

$$\psi_n(x) = \varphi_n(x). \tag{1.1.15}$$

Т е о р е м а 1.1.3. *Пусть метрическое пространство X является полным; известна точка совпадения $\xi \in X$ отображений $\psi, \varphi \colon X \to Y$; при каждом $n \in \mathbb{N}$ заданы числа $0 \le \beta_n < \alpha_n$. Положим*

$$r_n = \frac{1}{\alpha_n - \beta_n} d\bigl(\varphi_n(\xi), \psi_n(\xi)\bigr), \ U_n = B_X(\xi, r_n), \tag{1.1.16}$$

и будем предполагать, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ при любом $x \in U_n$ выпол-

нены включения

$$(x, \psi_n(x)) \in \mathrm{Lip}_{\beta_n}\big[\varphi_n; U_n\big], \quad (x, \varphi_n(x)) \in \mathrm{Cov}_{\alpha_n}\big[\psi_n; X\big],$$

отображение ψ_n *является замкнутым на шаре* U_n, *а отображение* φ_n *— непрерывным на шаре* U_n. *Если при* $n \to \infty$ *выполнено* $r_n \to 0$, *то при любом* $n \in \mathbb{N}$ *уравнение* (1.1.15) *разрешимо и существует такое его решение* ξ_n, *что при* $n \to \infty$ *имеет место сходимость* $\xi_n \to \xi$ *в* X.

Доказательство. При любом n для отображений $\psi_n, \varphi_n \colon X \to Y$ выполнены условия теоремы 1.1.2, где $x_0 = \xi$. Следовательно, при любом n существует решение ξ_n уравнения (1.1.15) такое, что $\rho(\xi_n, \xi) \leq r_n$. Из этого неравенства, в силу сходимости $r_n \to 0$, получаем $\xi_n \to \xi$ при $n \to \infty$. $\square$

Замечание 1.1.4. *В теореме 1.1.3 вместо предположения замкнутости на шаре* U_n *отображения* $\psi_n : X \to Y$ *можно потребовать, чтобы это отображение являлось* d*-замкнутым на* U_n *и выполнялось соотношение*

$$\forall \{x_i\} \subset U_n \;\; \forall x \in U_n \;\; \big(\, x_i \to x \;\; \text{и} \;\; \varphi_n(x) \in \mathrm{Lim}\, \psi_n(x_i) \,\big) \;\Rightarrow\; \varphi_n(x) = \psi_n(x).$$

1.1.4 Непрерывная зависимость точек совпадения от параметров

Для исследования задачи о непрерывной зависимости от параметров точек совпадения потребуются следующие сведения о многозначных отображениях (подробнее см. [26, § 2.3], [35, § 1.2]).

Пусть M — подмножество метрического пространства (X, ρ), $r > 0$. Обозначим r-раздутие $\big\{x \in X \mid \exists x_0 \in M \;\; \rho(x, x_0) < r\big\}$ множества M через $O(M, r)$. Пусть задано топологическое пространство T. Для $t_0 \in T$ обозначим $\mathcal{T}(t_0)$ — совокупность окрестностей точки t_0. Отображение

Φ, которое каждому $t \in T$ сопоставляет непустое замкнутое множество $\Phi(t) \subset X$ называют многозначным отображением. Для такого многозначного отображения будем использовать обозначение $\Phi\colon T \rightrightarrows X$. Многозначное отображение Φ называют полунепрерывным снизу в точке $t_0 \in T$, если для любого открытого множества $V \subset X$ такого, что $\Phi(t_0) \cap V \neq \emptyset$, существует окрестность $W(t_0)$ точки t_0, для которой $\Phi(t) \cap V \neq \emptyset$ при всех $t \in W(t_0)$. Многозначное отображение Φ является полунепрерывным снизу в точке $t_0 \in T$ тогда и только тогда, когда справедливо соотношение

$$\forall x_0 \in \Phi(t_0) \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists W(t_0) \in \mathcal{T}(t_0) \\ \forall t \in W(t_0) \ \ \exists x \in \Phi(t) \ \ \rho(x, x_0) < \varepsilon. \qquad (1.1.17)$$

Многозначное отображение Φ называют полунепрерывным сверху в точке $t_0 \in T$, если для любого открытого множества $V \subset X$ такого, что $\Phi(t_0) \subset V$, существует окрестность $W(t_0)$ точки t_0, для которой $\Phi\big(W(t_0)\big) \subset V$. Если отображение Φ полунепрерывно сверху и снизу в точке t_0, то говорят, что оно непрерывно в этой точке. Многозначное отображение называется полунепрерывным снизу (полунепрерывным сверху, непрерывным), если оно полунепрерывно снизу (полунепрерывно сверху, непрерывно) в каждой точке $t_0 \in T$.

Наряду с приведенными «топологическими» определениями нам потребуются определения полунепрерывности и непрерывности многозначного отображения, связанные с метрикой Хаусдорфа. Отображение Φ называют h-полунепрерывным снизу (h-полунепрерывным сверху) в точке $t_0 \in T$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $W(t_0)$ точки t_0 такая, что при любом $t \in W(t_0)$ справедливо вложение $\Phi(t_0) \subset O\big(\Phi(t), \varepsilon\big)$ (вложение $\Phi(t) \subset O\big(\Phi(t_0), \varepsilon\big)$, соответственно). Отметим, что из h-полунепрерывности снизу отображения следует его полунепрерывность снизу, а полунепрерывное сверху отображение является h-полунепрерывным сверху (см. [35, п. 1.2.3]). Если отображение Φ h-полунепрерывно сверху и снизу в точке t_0, то оно называется h-непрерывным в этой точке. Многозначное отображение называется h-полунепрерывным снизу (h-полунепрерывным сверху, h-непрерывным), если оно h-полунепрерывно снизу (h-полунепрерывно сверху, h-непрерывно) в каждой точке $t_0 \in T$.

Теперь рассмотрим задачу о непрерывной зависимости точек совпадения от параметров. Пусть заданы отображения $\psi, \varphi\colon X \times T \to Y$. Рассмотрим уравнение

$$\psi(x,t) = \varphi(x,t), \tag{1.1.18}$$

с параметром $t \in T$ относительно неизвестного $x \in X$. Обозначим через $\mathrm{Coin}(t)$ множество решений этого уравнения, т. е. множество точек совпадения отображений $\psi(\cdot,t), \varphi(\cdot,t)\colon X \to Y$.

Для каждого $x \in X$ определим функционал

$$\eta_x\colon T \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \eta_x(t) = d\big(\varphi(x,t), \psi(x,t)\big). \tag{1.1.19}$$

Пусть задана точка $t_0 \in T$. Рассмотрим условия

(C_-) для любого $x \in X$, если $\eta_x(t_0) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $W(t_0)$ точки t_0 такая, что $\eta_x(t) < \varepsilon$ при всех $t \in W(t_0)$;

($\widehat{\mathrm{C}}_-$) для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $W(t_0)$ точки t_0 такая, что для любого $x \in X$, если $\eta_x(t_0) = 0$, то $\eta_x(t) < \varepsilon$ при всех $t \in W(t_0)$;

($\widehat{\mathrm{C}}_+$) для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $W(t_0)$ точки t_0 такая, что для любых $x \in X$, $t \in W(t_0)$, если $\eta_x(t) = 0$, то $\eta_x(t_0) < \varepsilon$.

Очевидно, условие (C_-) выполнено, если функционал η_x непрерывен в точке t_0. В свою очередь, для непрерывности η_x достаточно, чтобы непрерывными в этой точке были отображения $\psi(x,\cdot)$, $\varphi(x,\cdot)$, а расстояние d было бы симметричным и удовлетворяло условию f-неравенства треугольника (1.1.7) с функцией f, обладающей свойством (1.1.6). Условия $(\widehat{\mathrm{C}}_-)$ и $(\widehat{\mathrm{C}}_+)$ выполнены, если множество $\{\eta_x \mid x \in X\}$ равностепенно непрерывно в точке t_0. А это справедливо, если равностепенно непрерывным в точке t_0 является множество $\{\psi(x,\cdot), \varphi(x,\cdot) \mid x \in X\}$ и расстояние d отвечает перечисленным выше условиям.

Теорема 1.1.4. *Пусть метрическое пространство X является полным, заданы $t_0 \in T$, $0 \le \beta < \alpha$. Пусть существует такая окрестность $V(t_0)$ точки t_0, что при любом $t \in V(t_0)$ найдется $u \in X$, для которого $d\big(\varphi(u,t), \psi(u,t)\big) < \infty$, и при любых $x \in X$, $t \in V(t_0)$ выполнены включения*

$$(x, \psi(x,t)) \in \mathrm{Lip}_\beta\big[\varphi(\cdot,t), X\big], \quad (x, \varphi(x,t)) \in \mathrm{Cov}_\alpha\big[\psi(\cdot,t), X\big],$$

отображение $\psi(\cdot,t)\colon X \to Y$ является замкнутым, а отображение $\varphi(\cdot,t)\colon X \to Y$ — непрерывным. Тогда при любом $t \in V(t_0)$ множество $\mathrm{Coin}(t)$ *не пусто и замкнуто в X. Кроме того, многозначное отображение* $\mathrm{Coin}\colon V(t_0) \rightrightarrows X$, *при выполнении условия* (C_-) *на функционалы* (1.1.19), *является полунепрерывным снизу в точке t_0, при выполнении условия* $(\widehat{\mathrm{C}}_-)$ *— h-полунепрерывным снизу в t_0, а при выполнении* $(\widehat{\mathrm{C}}_+)$ *— h-полунепрерывным сверху в t_0.*

Доказательство. Из теоремы 1.1.2 следует, что при любом $t \in V(t_0)$ множество $\mathrm{Coin}(t)$ не пусто. Докажем замкнутость этого множества. Пусть последовательность $\{\xi_i\} \subset \mathrm{Coin}(t)$ сходится к элементу $\xi \in X$. В силу непрерывности отображения $\varphi(\cdot, t)\colon X \to Y$ получим $\varphi(\xi_i, t) \to \varphi(\xi, t)$. Так как $\psi(\xi_i, t) = \varphi(\xi_i, t)$, $i = 1, 2, \ldots$, имеем $\psi(\xi_i, t) \to \varphi(\xi, t)$. Отсюда вследствие замкнутости отображения $\psi(\cdot, t)\colon X \to Y$ получаем $\psi(\xi, t) = \varphi(\xi, t)$. Таким образом, $\xi \in \mathrm{Coin}(t)$, т. е. множество $\mathrm{Coin}(t)$, действительно, является замкнутым.

Покажем, что при выполнении условия (C_-) многозначное отображение $\mathrm{Coin}\colon V(t_0) \rightrightarrows X$ полунепрерывно снизу в точке t_0. Проверим для этого отображения справедливость соотношения (1.1.17). Пусть $\xi_0 \in \mathrm{Coin}(t_0)$, т. е. $\varphi(\xi_0, t_0) = \psi(\xi_0, t_0)$. Тогда $\eta_{\xi_0}(t_0) = 0$. В силу условия (C_-) для любого $\varepsilon > 0$ можно определить такую окрестность $\mathcal{V}(t_0)$ точки t_0, что при всех $t \in \mathcal{V}(t_0)$ выполнено

$$\eta_{\xi_0}(t) = d\big(\varphi(\xi_0, t), \psi(\xi_0, t)\big) < (\alpha - \beta)\varepsilon.$$

Согласно теореме 1.1.2 при любом $t \in V(t_0) \cap \mathcal{V}(t_0)$ уравнение (1.1.18) имеет решение $\xi \in \mathrm{Coin}(t)$, удовлетворяющее оценке

$$\rho(\xi, \xi_0) \leq \frac{1}{\alpha - \beta} d\big(\varphi(\xi_0, t), \psi(\xi_0, t)\big) < \varepsilon.$$

Полунепрерывность снизу отображения Coin доказана.

Пусть теперь выполнено условие $(\widehat{\mathrm{C}}_-)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ определим такую окрестность $\mathcal{V}(t_0)$ точки t_0, что для любого элемента $x \in X$, если $\eta_x(t_0) = 0$, то $\eta_x(t) < \varepsilon(\alpha - \beta)$ при всех $t \in \mathcal{V}(t_0)$. Для любого $t \in V(t) \cap \mathcal{V}(t)$ и для любого $\xi_0 \in \mathrm{Coin}(t_0)$ согласно теореме 1.1.2 существует $\xi \in \mathrm{Coin}(t)$ такой, что

$$\rho(\xi, \xi_0) \leq \frac{1}{\alpha - \beta}\, d\big(\varphi(\xi_0, t), \psi(\xi_0, t)\big) = \frac{1}{\alpha - \beta}\, \eta_{\xi_0}(t) < \varepsilon.$$

Таким образом, $\mathrm{Coin}(t_0) \subset O_X(\mathrm{Coin}(t), \varepsilon)$, т. е. многозначное отображение Coin является h-полунепрерывным снизу в точке t_0.

В заключение покажем, что при выполнении условия $(\widehat{\mathrm{C}}_+)$ отображение $\mathrm{Coin}\colon V(t_0) \rightrightarrows X$ является h-полунепрерывным сверху в точке t_0. Для любого $\varepsilon > 0$ определим такую окрестность $\mathcal{V}(t_0)$ точки t_0, что для любых $x \in X$, $t \in \mathcal{V}(t_0)$, если $\eta_x(t) = 0$, то $\eta_x(t_0) < \varepsilon(\alpha - \beta)$. Тогда для любого $t \in V(t) \cap \mathcal{V}(t)$ и для любого $\xi \in \mathrm{Coin}(t)$ согласно теореме 1.1.2 существует $\xi_0 \in \mathrm{Coin}(t_0)$ такой, что

$$\rho(\xi, \xi_0) \leq \frac{1}{\alpha - \beta}\, d\big(\varphi(\xi, t_0), \psi(\xi, t_0)\big) = \frac{1}{\alpha - \beta}\, \eta_\xi(t_0) < \varepsilon.$$

Таким образом, $\mathrm{Coin}(t) \subset O_X(\mathrm{Coin}(t_0), \varepsilon)$, т. е. многозначное отображение Coin является h-полунепрерывным сверху в точке t_0. □

З а м е ч а н и е 1.1.5. *Как и в приведенных выше теоремах, в теореме 1.1.4 условие замкнутости отображения $\psi(\cdot, t) : X \to Y$ при любом $t \in V(t_0)$ может быть заменено менее обременительным условием его d-замкнутости совместно с предположением*

$$\forall \{x_i\} \subset X \ \forall x \in X \ \ \big(x_i \to x \ \text{ и } \varphi(x,t) \in \operatorname{Lim} \psi(x_i, t) \big) \ \Rightarrow \ \varphi(x,t) = \psi(x,t).$$

§ 1.2. Уравнения с отображениями, действующими из метрического пространства в множество, снабженное расстоянием

В этом параграфе рассматривается уравнение

$$G(x) = \widehat{y}$$

относительно неизвестного x — элемента метрического пространства X. Предполагается, что действующее из X в Y (Y — это множество, снабженное расстоянием) отображение G представимо в виде отображения двух элементов, по одному из которых является накрывающим, а по другому — липшицевым. Для рассматриваемого уравнения в пункте 1.2.1 получены утверждения о существовании и оценках решений, об устойчивости решений к изменениям отображения G и правой части $y \in Y$. Предлагаемые утверждения являются развитием и обобщением теорем о липшицевых возмущениях накрывающих отображений, полученных в [6, 18, 24, 28, 52, 70]. В цитируемых работах предполагалось, что пространство Y является метрическим и используются несколько более обременительные определения накрывания и липшицевости. Отметим, что данная тематика восходит к теореме Милютина о возмущениях [42], в которой предполагалось, что пространство Y является линейным метрическим, а отображение G представимо разностью накрывающего и липшицева отображений.

В пункте 1.2.2 получены условия полунепрерывной сверху и снизу зависимости множества решений от параметров. Эти результаты являются новыми и в случае метрического пространства Y.

1.2.1 Существование решений

Здесь, как и выше, обозначаем X — метрическое пространство с метрикой $\rho : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, Y — непустое множество, на котором задано расстояние $d : Y \times Y \to \overline{\mathbb{R}}_+$, удовлетворяющее условию (1.1.1).

Пусть задано отображение $F : X \times X \to Y$ и элемент $\widehat{y} \in Y$. Рассмотрим уравнение

$$G(x) := F(x, x) = \widehat{y}. \tag{1.2.1}$$

Сформулируем условия его разрешимости.

Пусть задано множество $U \subset X$. Определим множество

$$\mathrm{Cl}[G;U] := \big\{(x,y) \in X \times Y \mid \forall \{x_n\} \subset U \ x_n \to x, \ G(x_n) \to y \ \Rightarrow \ G(x) = y\big\},$$

которое назовем *множеством замкнутости отображения* $G : X \to Y$ *относительно* U. Отметим, что множество $\mathrm{Cl}[G;U]$ антитонно по $U \subset X$, т. е. справедливо соотношение

$$U \subset \overline{U} \subset X \ \Rightarrow \ \mathrm{Cl}[G;U] \supset \mathrm{Cl}[G;\overline{U}]. \tag{1.2.2}$$

Очевидно, соотношение $\mathrm{Cl}[G;X] = X \times Y$ равносильно замкнутости отображения G.

Т е о р е м а 1.2.1. *Пусть метрическое пространство* X *является полным,* $x_0 \in X$, $\alpha > \beta \geq 0$ *и*

$$R := (\alpha - \beta)^{-1} d(\widehat{y}, F(x_0, x_0)) < \infty. \tag{1.2.3}$$

Предположим что для любого $x \in U := B_X(x_0, R)$ *выполнены включения*

$$(x, \widehat{y}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\cdot, x); X], \quad (x, \widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x, \cdot); U], \quad (x, \widehat{y}) \in \mathrm{Cl}[G;U].$$

Тогда в шаре U *существует решение уравнения* (1.2.1).

Доказательство. Если x_0 является решением уравнения (1.2.1), то утверждение теоремы справедливо. Поэтому будем предполагать, что x_0 не удовлетворяет уравнению (1.2.1). Докажем, что существует последовательность $\{x_n\}$, для которой при всех $n = 1, 2, \ldots$ выполнены условия:

$$\begin{gathered} F(x_n, x_{n-1}) = \widehat{y}, \quad \rho(x_n, x_0) \leq \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^n(\alpha - \beta)} d(\widehat{y}, F(x_0, x_0)), \\ d(\widehat{y}, F(x_n, x_n)) \leq \beta \rho(x_n, x_{n-1}). \end{gathered} \tag{1.2.4}$$

Для доказательства используем метод математической индукции.

Сначала проверим соотношения (1.2.4) при $n = 1$. Очевидно, выполнено $x_0 \in U$, поэтому согласно условиям теоремы справедливо включение $(x_0, \widehat{y}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\cdot, x_0); X]$. Это означает существование элемента $x_1 \in X$ такого, что

$$F(x_1, x_0) = \widehat{y} \quad \text{и} \quad \rho(x_1, x_0) \le \frac{1}{\alpha} d(\widehat{y}, F(x_0, x_0)) < R.$$

Так как $x_1 \in U$, имеем $(x_1, \widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x_1, \cdot); U]$, таким образом, справедливо неравенство

$$d(\widehat{y}, F(x_1, x_1)) \le \beta \rho(x_1, x_0).$$

Итак, для $n = 1$ соотношения (1.2.4) выполнены.

Предположим, что соотношения (1.2.4) справедливы для всех натуральных $n \le k$. Докажем, что соотношения (1.2.4) верны при $n = k + 1$. Поскольку

$$\rho(x_k, x_0) \le \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha^k(\alpha - \beta)} d(\widehat{y}, F(x_0, x_0)) < R,$$

в силу предположений теоремы имеем

$$(x_k, \widehat{y}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\cdot, x_k); X] \quad \text{и} \quad (x_k, \widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x_k, \cdot); U].$$

Таким образом, существует элемент x_{k+1}, для которого $F(x_{k+1}, x_k) = \widehat{y}$ и

$$\rho(x_{k+1}, x_k) \le \frac{1}{\alpha} d\big(\widehat{y}, F(x_k, x_k)\big) = \frac{1}{\alpha} d\big(F(x_k, x_{k-1}), F(x_k, x_k)\big) \le \frac{\beta}{\alpha} \rho\big(x_k, x_{k-1}\big).$$

Так как аналогичное соотношение $\rho(x_{n+1}, x_n) \le \alpha^{-1} \beta \rho\big(x_n, x_{n-1}\big)$ справедливо при любом натуральном $n < k$, получаем

$$\rho(x_{k+1}, x_k) \le \frac{\beta^k}{\alpha^k} \rho(x_1, x_0) \le \frac{\beta^k}{\alpha^{k+1}} d\big(\widehat{y}, F(x_0, x_0)\big).$$

Теперь, в силу предположения индукции, заключаем

$$\rho(x_0, x_{k+1}) \le \rho(x_0, x_k) + \rho(x_k, x_{k+1}) \le$$
$$\le \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha^k(\alpha - \beta)} d(\widehat{y}, F(x_0, x_0)) + \frac{\beta^k}{\alpha^{k+1}} d\big(\widehat{y}, F(x_0, x_0)\big) =$$
$$= \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha^{k+1}(\alpha - \beta)} d\big(\widehat{y}, F(x_0, x_0)\big).$$

Из полученной оценки следует, что $x_{k+1} \in U$, и поэтому выполнено включение $(x_{k+1}, \widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x_{k+1}, \cdot); U]$, которое гарантирует, что

$$d(\widehat{y}, F(x_{k+1}, x_{k+1})) \le \beta \rho(x_{k+1}, x_k).$$

Итак, для $n = k+1$ все соотношения (1.2.4) выполнены.

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной. При любых натуральных $n, m,\ n < m$ имеем

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + \rho(x_{m-1}, x_m) \le$$
$$\le \frac{1}{\alpha} \sum_{i=n}^{m-1} \frac{\beta^i}{\alpha^i} d\big(\widehat{y}, F(x_0, x_0)\big) \le \frac{\beta^n}{\alpha^n} \frac{1}{\alpha - \beta} d\big(\widehat{y}, F(x_0, x_0)\big).$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$, если определить

$$N = \log_{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{\varepsilon(\alpha - \beta)}{d\big(\widehat{y}, F(x_0, x_0)\big)},$$

то при всех натуральных $n, m,\ m > n > N$ будет выполнено неравенство

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Фундаментальная последовательность $\{x_n\} \subset U$ в полном пространстве X сходится к некоторой точке $\widehat{x} \in B_X(x_0, R)$. Из последнего в (1.2.4) неравенства $d\big(\widehat{y}, F(x_n, x_n)\big) \le \beta \rho(x_{n+1}, x_n)$ следует сходимость

$d\big(\widehat{y}, F(x_n, x_n)\big) \to 0$, т. е. $G(x_n) \to \widehat{y}$. А так как имеет место включение $(x_n, \widehat{y}) \in \mathrm{Cl}[G; U]$, получим $G(\widehat{x}) = \widehat{y}$. $\square$

Из теоремы 1.2.1 может быть выведена теорема 1.1.1. Для этого следует определить отображение

$$F : X \times X \to \mathbb{R}, \quad F(x, u) := d\big(\varphi(u), \psi(x)\big), \quad x, u \in X,$$

и рассмотреть уравнение

$$G(x) := d\big(\varphi(x), \psi(x)\big) = 0. \tag{1.2.5}$$

Если при $x_0 \in X$ справедливо $d\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big) < \infty$, то определив

$$R := (\alpha - \beta)^{-1} d\big(\varphi(x_0), \psi(x_0)\big), \quad U := B_X(x_0, R),$$

легко проверить, что имеет место включение $(x, 0) \in \mathrm{Cl}_\alpha[G; U]$, из α-накрывания отображения ψ следует, что при любом $x \in X$ выполнено включение $(x, 0) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\cdot, x); X]$, а из β–липшицевости отображения φ — включение $(x, 0) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x, \cdot); U]$. Поэтому в условиях теоремы 1.1.1 для уравнения (1.2.5) выполнены предположения теоремы 1.2.1.

Аналогично, из теоремы 1.2.1 выводится теорема 1.1.2.

Конечно, теорема 1.2.1 применима к исследованию точек совпадения отображений, определенных на метрическом пространстве и действующих не только в пространство с расстоянием, но и в пространство с «обычной» метрикой; таким образом из теоремы 1.2.1 может быть выведена теорема Арутюнова [23]. Отметим, что связь между уравнениями (1.1.2) и (1.2.1) оставалась не замеченной авторами, утверждения о точках совпадения накрывающего и липшицева отображений и утверждения о липшицевом возмущении накрывающего отображения считались независимыми.

Приведем пример отображения, удовлетворяющего условиям теоремы 1.2.1, действующего во множество, не являющееся метрическим пространством. Это обстоятельство не позволяет применить результаты [6, 18, 28], в то же время, теорема 1.2.1 гарантирует существование решения соответствующую операторного уравнения и его оценку.

Пример 1.2.1. Рассмотрим определенные в примере 1.1.4 полное метрическое пространство (X, ρ) и пространство Y с расстоянием d.

Определим отображение $F\colon X^2 \to Y$ соотношением

$$F(x_i, x_j) = y_{-i}, \quad \forall i, j \in \mathbb{Z}$$

и проверим, удовлетворяет ли оно условиям теоремы 1.2.1.

Отображение $F(x_i, \cdot)$ постоянно, т. е. является липшицевым с коэффициентом $\beta = 0$. Отображение $F(\cdot, x_j)$ (как и любое определенное на данном пространстве X отображение) является непрерывным, поскольку для любой сходящейся к некоторому элементу $u \in X$ последовательности $\{x_{i_n}\} \subset X$ существует такое n_0, что $x_{i_n} = u$ при всех $n \geq n_0$. Тогда $F(x_{i_n}, x_j) = F(u, x_j)$ и, таким образом, $F(x_{i_n}, x_j) \to F(u, x_j)$. При любом $x \in X$ отображение $F(\cdot, x)\colon X \to Y$ является сюръективным и накрывающим с коэффициентом

$$\alpha = \min_{i,j,l \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{d\big(F(x_i, x_j), F(x_l, x_j)\big)}{\rho(x_i, x_l)} \right\} = \min_{i,j \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{d(y_{-i}, y_{-l})}{\rho(x_i, x_l)} \right\} = 2 > \beta = 0.$$

Итак, в рассматриваемом примере для любых $\widehat{y} \in Y$, $x_0 \in X$ выполнены все условия теоремы 1.2.1, и операторное уравнение (1.2.1) имеет решение в шаре $B_X(x_0, R)$, радиус которого определяется формулой (1.2.3). Результаты [6, 18, 28] в данном случае не применимы.

Используя теорему 1.2.1, получим условия устойчивости решений уравнения (1.2.1) к малым изменениям отображения F.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ заданы отображение $F_n \colon X \times X \to Y$ и элемент $\widehat{y}_n \in Y$. Определим отображение $G_n \colon X \to Y$, $G_n(x) = F_n(x,x)$ и рассмотрим уравнение

$$G_n(x) = \widehat{y}_n. \tag{1.2.6}$$

Нас будет интересовать вопрос о сходимости решений уравнения (1.2.6) при $n \to \infty$ к решению уравнения (1.2.1) в случае, если есть некоторая сходимость G_n к G и $\widehat{y}_n$ к $\widehat{y}$. Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Т е о р е м а 1.2.2. *Пусть метрическое пространство X является полным, известно решение $\widehat{x}$ уравнения* (1.2.1), *при каждом $n \in \mathbb{N}$ заданы числа $0 \le \beta_n < \alpha_n$. Положим*

$$r_n := \frac{1}{\alpha_n - \beta_n} d\big(\widehat{y}_n, G_n(\widehat{x})\big), \quad U := B_X(\widehat{x}, r_n). \tag{1.2.7}$$

Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ при любом $x \in U$ выполнено

$$(x, \widehat{y}_n) \in \mathrm{Cov}_{\alpha_n}\big[F_n(\cdot, x); X\big], \ \ (x, \widehat{y}_n) \in \mathrm{Lip}_{\beta_n}\big[F_n(x, \cdot); U\big], \ \ (x, \widehat{y}_n) \in \mathrm{Cl}\big[G_n; U\big].$$

Если при $n \to \infty$ выполнено $r_n \to 0$, то при любом $n \in \mathbb{N}$ уравнение (1.2.6) *разрешимо и существует такое его решение $\widehat{x}_n$, что при $n \to \infty$ имеет место сходимость $\widehat{x}_n \to \widehat{x}$ в X.*

Доказательство. При любом n для уравнения (1.2.6) выполнены условия теоремы 1.2.1. Следовательно, при любом n существует решение $\widehat{x}_n$ уравнения (1.2.6) такое, что $\rho(\widehat{x}_n, \widehat{x}) \le r_n$. Из этого неравенства, в силу сходимости $r_n \to 0$, получаем $\widehat{x}_n \to \widehat{x}$ при $n \to \infty$. $\square$

Отметим, что условие $r_n \to 0$ выполнено, например, в случае, когда имеет место сходимость $d\big(\widehat{y}_n, G_n(\widehat{x})\big) \to 0$, а константы накрывания α_n и липшицевости β_n, соответственно, отображений $F_n(\cdot, x)$, $F_n(x, \cdot)$ не зависят от n.

1.2.2 Непрерывная зависимость решений от параметров

Здесь рассматривается задача о полунепрерывной зависимости от параметров множеств решений уравнений. Необходимые для формулировки основного результата определения полунепрерывности сверху и снизу многозначных отображений, действующих из топологического пространства T в метрическое пространство X, приведены выше в пункте 1.1.4 (подробнее см. [26, § 2.3], [35, § 1.2]). Нам также потребуются данные в в пункте 1.1.4 определения свойств функционалов, заданных на топологическом пространстве T. Напомним их. Пусть каждому $x \in X$ поставлен в соответствие некоторый функционал $\eta_x \colon T \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Пусть задана точка $t_0 \in T$. Нас будут интересовать следующие условия:

(C_-) для любого $x \in X$, если $\eta_x(t_0) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $W(t_0)$ точки t_0 такая, что $\eta_x(t) < \varepsilon$ при всех $t \in W(t_0)$;

($\widehat{\mathrm{C}}_-$) для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $W(t_0)$ точки t_0 такая, что для любого $x \in X$, если $\eta_x(t_0) = 0$, то $\eta_x(t) < \varepsilon$ при всех $t \in W(t_0)$;

($\widehat{\mathrm{C}}_+$) для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $W(t_0)$ точки t_0 такая, что для любых $x \in X$, $t \in W(t_0)$, если $\eta_x(t) = 0$, то $\eta_x(t_0) < \varepsilon$.

Сформулируем исследуемую здесь задачу. Пусть заданы отображения $\widehat{y}\colon T \to Y$, $F\colon X \times X \times T \to Y$. Определим отображение $G\colon X \times T \to Y$ соотношением $G(x,t) := F(x,x,t)$. Рассмотрим уравнение

$$G(x,t) = \widehat{y}(t), \tag{1.2.8}$$

с параметром $t \in T$ относительно неизвестного $x \in X$. Обозначим множество решений этого уравнения через $\mathcal{R}(t)$ и получим условия полунепрерывности многозначного отображения $t \in T \mapsto \mathcal{R}(t) \subset X$.

Для каждого $x \in X$ определим функционал

$$\eta_x\colon T \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \eta_x(t) = d\big(\widehat{y}(t), G(x,t)\big). \tag{1.2.9}$$

Для такого функционала условие (C_-) выполнено, например, если в точке t_0 непрерывны отображения $\widehat{y}\colon T \to Y$ и отображение $G(x,\cdot)\colon T \to Y$ при каждом $x \in X$, а расстояние d симметрично и удовлетворяет условию f-неравенства треугольника (1.1.7) с функцией f, обладающей свойством (1.1.6). Оба условия $(\widehat{\mathrm{C}}_-)$ и $(\widehat{\mathrm{C}}_+)$ выполнены, если множество $\big\{G(x,\cdot) \mid x \in X\big\}$ равностепенно непрерывно в точке t_0, отображение $\widehat{y}\colon T \to Y$ непрерывно в точке t_0, и расстояние d отвечает перечисленным выше условиям.

Т е о р е м а 1.2.3. *Пусть метрическое пространство X является полным, $t_0 \in T$, $0 \le \beta < \alpha$. Пусть существует такая окрестность $V(t_0)$ точки t_0, что при любом $t \in V(t_0)$ найдется $u \in X$, для которого $d\big(\widehat{y}(t), G(u,t)\big) < \infty$, и при любых $x \in X$, $t \in V(t_0)$*

$$(x,\widehat{y}(t)) \in \mathrm{Cov}_\alpha\big[F(\cdot,x,t);X\big], \quad (x,\widehat{y}(t)) \in \mathrm{Lip}_\beta\big[F(x,\cdot,t);X\big],$$
$$(x,\widehat{y}(t)) \in \mathrm{Cl}\big[F(x,\cdot,t);X\big].$$

Тогда при любом $t \in V(t_0)$ *множество* $\mathcal{R}(t)$ *решений уравнения* (1.2.8) *не пусто и замкнуто в* X. *Кроме того, многозначное отображение* $\mathcal{R}\colon V(t_0) \rightrightarrows X$, *при выполнении условия* (C_-) *на функционалы* (1.2.9), *является полунепрерывным снизу в точке* t_0, *при выполнении условия* ($\widehat{\mathrm{C}}_-$) — h*-полунепрерывным снизу в* t_0, *а при выполнении* ($\widehat{\mathrm{C}}_+$) — h*-полунепрерывным сверху в* t_0.

Доказательство. Из теоремы 1.2.1 следует, что при любом $t \in V(t_0)$ множество $\mathcal{R}(t)$ не пусто. Докажем замкнутость этого множества. Пусть последовательность $\{\widehat{x}_i\} \subset \mathcal{R}(t)$ сходится к элементу $\widehat{x} \in X$. Так как $G(\widehat{x}_i, t) = \widehat{y}(t)$, $i = 1, 2, \dots$, в силу справедливости при любом $x \in X$ включения $(x, \widehat{y}(t)) \in \mathrm{Cl}\big[F(x, \cdot, t); X\big]$ имеем $G(\widehat{x}, t) = \widehat{y}(t)$. Таким образом, $\widehat{x} \in \mathcal{R}(t)$, т. е. множество $\mathcal{R}(t)$ является замкнутым.

Покажем, что при выполнении условия (C_-) многозначное отображение $\mathcal{R}\colon V(t_0) \rightrightarrows X$ полунепрерывно снизу в точке t_0. Проверим для $\mathcal{R}$ справедливость соотношения (1.1.17). Пусть $\widehat{x}_0 \in \mathcal{R}(t_0)$, т. е. справедливо $G(\widehat{x}_0, t_0) = \widehat{y}(t_0)$. Тогда $\eta_{\widehat{x}_0}(t_0) = 0$. В силу условия ($\mathrm{C}_-$) для любого $\varepsilon > 0$ можно определить такую окрестность $\mathcal{V}(t_0)$ точки t_0, что при всех $t \in \mathcal{V}(t_0)$ выполнено

$$\eta_{\widehat{x}_0}(t) = d\big(\widehat{y}(t), G(\widehat{x}_0, t)\big) < (\alpha - \beta)\varepsilon.$$

Согласно теореме 1.2.1 при любом $t \in V(t_0) \cap \mathcal{V}(t_0)$ уравнение (1.2.8) имеет решение $\widehat{x} \in \mathcal{R}(t)$, удовлетворяющее оценке

$$\rho(\widehat{x}, \widehat{x}_0) \le \frac{1}{\alpha - \beta} d\big(\widehat{y}(t), G(\widehat{x}_0, t)\big) < \varepsilon.$$

Полунепрерывность снизу отображения $\mathcal{R}$ доказана.

Пусть теперь выполнено условие $(\widehat{\mathrm{C}}_-)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ определим такую окрестность $\mathcal{V}(t_0)$ точки t_0, что для любого элемента $x \in X$, если $\eta_x(t_0) = 0$, то $\eta_x(t) < \varepsilon(\alpha - \beta)$ при всех $t \in \mathcal{V}(t_0)$. Для любого $t \in V(t) \cap \mathcal{V}(t)$ и для любого $\widehat{x}_0 \in \mathcal{R}(t_0)$ согласно теореме 1.2.1 существует $\widehat{x} \in \mathcal{R}(t)$ такой, что

$$\rho(\widehat{x}, \widehat{x}_0) \leq \frac{1}{\alpha - \beta}\, d\big(\widehat{y}(t), G(\widehat{x}_0, t)\big) = \frac{1}{\alpha - \beta}\, \eta_{\widehat{x}_0}(t) < \varepsilon.$$

Таким образом, $\mathcal{R}(t_0) \subset O_X(\mathcal{R}(t), \varepsilon)$, т. е. многозначное отображение $\mathcal{R}$ является h-полунепрерывным снизу в точке t_0.

В заключение покажем, что при выполнении условия $(\widehat{\mathrm{C}}_+)$ отображение $\mathcal{R}\colon V(t_0) \rightrightarrows X$ является h-полунепрерывным сверху в точке t_0. Для любого $\varepsilon > 0$ определим такую окрестность $\mathcal{V}(t_0)$ точки t_0, что для любых $x \in X$, $t \in \mathcal{V}(t_0)$, если $\eta_x(t) = 0$, то $\eta_x(t_0) < \varepsilon(\alpha - \beta)$. Тогда для любого $t \in V(t) \cap \mathcal{V}(t)$ и для любого $\widehat{x} \in \mathcal{R}(t)$ согласно теореме 1.1.2 существует $\widehat{x}_0 \in \mathcal{R}(t_0)$ такой, что

$$\rho(\widehat{x}, \widehat{x}_0) \leq \frac{1}{\alpha - \beta}\, d\big(\widehat{y}(t_0), G(\widehat{x}, t_0)\big) = \frac{1}{\alpha - \beta}\, \eta_{\widehat{x}}(t_0) < \varepsilon.$$

Таким образом, $\mathcal{R}(t) \subset O_X(\mathcal{R}(t_0), \varepsilon)$, т. е. многозначное отображение $\mathcal{R}$ является h-полунепрерывным сверху в точке t_0. $\square$

В условиях теоремы 1.2.3 не гарантируется полунепрерывность сверху многозначного отображения $\mathcal{R}$ и, следовательно, не гарантируется его непрерывность. Приведем соответствующий пример.

Пример 1.2.2. Пусть в пространствах $T = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$ задана «обычная» евклидова метрика, $\widehat{y} = 0 \in \mathbb{R}$. Определим отображение $F\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ соотношением $F(x, u, t) = x_1 - t$, где $x = (x_1, x_2)$,

$u = (u_1, u_2)$. Это линейное отображение, очевидно, непрерывно. При любых $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$ отображение $F(t, x, \cdot)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, очевидно, является липшицевым с константой $\beta = 0$. Покажем, что при любых $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^2$ отображение $F(\cdot, u, t)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ является накрывающим. При любых $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y' \in \mathbb{R}$ положим $x' = (y' + t, x_2) \in \mathbb{R}^2$ (т. е. $x_1' = y' + t$, $x_2' = x_2$). Для этого элемента выполнено

$$F(x', u, t) = y' \ \text{ и } \ \bigl|F(x', u, t) - F(x, u, t)\bigr| = |y' - x_1 + t| = |x_1' - x_1| = \rho_{\mathbb{R}^2}(x', x).$$

Таким образом, отображение $F(\cdot, u, t)$ является накрывающим с константой $\alpha = 1$.

Положим $G(x, t) = F(x, x, t) = x_1 - t$. Отображение $G(x, \cdot)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ равностепенно непрерывно. Итак, при любом $t_0 \in \mathbb{R}$ выполнены все условия теоремы 1.2.3. Уравнение (1.2.8), которое здесь имеет вид

$$x_1 - t = 0,$$

разрешимо при любом t, его решения образуют множество

$$\mathcal{R}(t) = \{(x_1, x_2)\colon\ x_1 = t,\ x_2 \in \mathbb{R}^+\}.$$

Многозначное отображение $\mathcal{R}\colon \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ является h-непрерывным (в любой точке $t_0 \in \mathbb{R}$), но не обладает свойством полунепрерывности сверху ни в одной точке $t_0 \in \mathbb{R}$.

Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, НЕ РАЗРЕШЕННОЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

§ 2.1. Функциональные уравнения в пространстве измеримых функций

В этом параграфе рассматривается функциональное уравнение с отклоняющимся аргументом относительно неизвестной измеримой функции. Исследование основано на полученных в первой главе результатах об операторных уравнениях с накрывающими отображениями, действующими из метрического пространства в множество, снабженное расстоянием. Для применения соответствующих теорем в пространстве измеримых функций вводится расстояние и для действующих в полученном пространстве операторов суперпозиции определяются множества замкнутости, накрывания и липшицевости. Этим вопросам посвящен пункт 2.1.1. В пункте 2.1.2 доказана теорема существования измеримого решения функционального уравнения с отклоняющимся аргументом. Доказательство фактически состоит в проверке условий теоремы 1.2.1. В заключительном пункте 2.1.3 получены условия устойчивости решений к изменениям функций, порождающих рассматриваемое функциональное уравнение.

2.1.1 Множества накрывания и липшицевости отображений, порождаемых функциональными и дифференциальными уравнениями, в пространствах измеримых функций

Пусть $\tau > 0$. Обозначим меру Лебега на $[0, \tau]$ через μ, а через $\mathbb{S} = \mathbb{S}([0, \tau], \mathbb{R})$ — пространство измеримых (по Лебегу) функций $u : [0, \tau] \to \mathbb{R}$. Выделим в $\mathbb{S}$ подмножество $\mathbb{S}_+$ неотрицательных функций. Определим в пространстве $\mathbb{S}$ расстояние следующим образом.

Пусть задана функция двух аргументов $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условию

($\mathcal{A}$) *при любом фиксированном втором аргументе* $z \in \mathbb{R}$ *функция первого аргумента* $\theta(\cdot, z) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *непрерывна в точке* z, *справедливо равенство* $\theta(z, z) = 0$ *и имеет место соотношение*

$$\forall \delta > 0 \ \exists \gamma = \gamma(z, \delta) > 0 \ \forall \upsilon \in \mathbb{R} \ \ |\upsilon - z| \geq \delta \ \Rightarrow \ \theta(\upsilon, z) \geq \gamma. \qquad (2.1.1)$$

Будем также предполагать, что *функция* θ *суперпозиционно измерима:* $\theta(z_1, z_2) \in \mathbb{S}$ *для любых* $z_1, z_2 \in \mathbb{S}$ (это предположение выполнено, например, если функция θ непрерывна по каждому аргументу; более общие условия суперпозиционной измеримости получены в [80], см. также [46, с. 110] и [75]).

Зададим отображение $d^\theta : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ соотношением

$$\forall \upsilon, z \in \mathbb{S} \ \ d^\theta(\upsilon, z) = \operatorname{vrai}\sup_{t \in [0,\tau]} \theta(\upsilon(t), z(t)). \qquad (2.1.2)$$

Для отображения d^θ очевидно выполнена аксиома тождества, т. е. это отображение является расстоянием в $\mathbb{S}$. Пространство $(\mathbb{S}, d^\theta)$ будем обозначать $\mathbb{S}^\theta$. Отметим, что расстояние d^θ не обязано быть симметричным и может не удовлетворять неравенству треугольника.

Заметим также, что для функции $\theta_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, определенной формулой

$$\theta_0(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|,$$

соответствующее отображение $d^{\theta_0} : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ является метрикой в $\mathbb{S}$. Будем обозначать эту метрику через ρ (т. е. $\rho = d^{\theta_0}$), а соответствующее пространство измеримых функций — через $\mathbb{S}^{\theta_0} = (\mathbb{S}, \rho)$. Метрическое пространство $\mathbb{S}^{\theta_0}$ является полным. В этом пространстве шар $B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, r)$ с центром в $x_0 \in \mathbb{S}^{\theta_0}$ радиуса $r \in (0, \infty]$ — это множество измеримых функций $x : [0, \tau] \to \mathbb{R}$ таких, что $x(t) \in B_{\mathbb{R}}(x_0(t), r) = [x_0(t) - r, x_0(t) + r]$ при п.в. $t \in [0, \tau]$. При $r = \infty$ полагаем $B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, \infty) = \mathbb{S}^{\theta_0}$ при любом $x_0 \in \mathbb{S}^{\theta_0}$.

Пусть задана удовлетворяющая условиям Картеодори функция $g : [0, \tau] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, т. е. по первому аргументу она измерима, а по второму — непрерывна. Определим оператор Немыцкого

$$(N_g u)(t) = g(t, u(t)). \tag{2.1.3}$$

В силу принятых на функцию g предположений этот оператор отображает измеримые функции в измеримые. Исследуем свойства замкнутости, непрерывности, накрывания и липшицевости оператора N_g, как действующего из $\mathbb{S}^{\theta_0} = (\mathbb{S}, \rho)$ в $\mathbb{S}^{\theta} = (\mathbb{S}, d^{\theta})$, где функция $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяет условию $(\mathcal{A})$.

Предложение 2.1.1. *Оператор $N_g : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$ является замкнутым. Если дополнительно множество функций $\{g(t, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \in [0, \tau]\}$ равностепенно непрерывно, т. е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall t \in [0, \tau] \ \ \forall x, u \in \mathbb{R}$$
$$|x - u| < \delta \Rightarrow \ |g(t, x) - g(t, u)| < \varepsilon, \tag{2.1.4}$$

а для функции $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ выполнено соотношение

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall \upsilon, z \in \mathbb{R} \ \ |\upsilon - z| < \delta \ \Rightarrow \ \theta(\upsilon, z) < \varepsilon, \tag{2.1.5}$$

то оператор $N_g : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$ непрерывен.

Доказательство. Покажем, что для любого $z \in \mathbb{R}$ и для любой последовательности $\{z_i\} \subset \mathbb{R}$ соотношение $\theta(z, z_i) \to 0$ эквивалентно тому, что $|z - z_i| \to 0$.

Сначала, пусть $\theta(z, z_i) \to 0$. Если соотношение $|z - z_i| \to 0$ не выполнено, то существует подпоследовательность $\{z_{i_j}\}$ и положительное число δ такие, что $|z - z_{i_j}| \geq \delta$. Из (2.1.1) получим, что $\theta(z, z_{i_j}) \geq \gamma$ при некотором положительном γ. Это неравенство противоречит сходимости $\theta(z, z_i) \to 0$. Итак, $|z - z_i| \to 0$.

Обратно, в силу непрерывности функции $\theta(\cdot, z)$ в точке z получаем, что в случае $|z - z_i| \to 0$ будет выполнено $\theta(z, z_i) \to \theta(z, z) = 0$.

Теперь докажем замкнутость оператора $N_g : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$. Пусть заданы элементы $u \in \mathbb{S}^{\theta_0}$, $y \in \mathbb{S}^{\theta}$ и последовательность $\{u_i\} \subset \mathbb{S}^{\theta_0}$ такие, что

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \theta_0\big(u(t), u_i(t)\big) = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \big|u(t) - u_i(t)\big| \to 0, \tag{2.1.6}$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \theta\big(y(t), g(t, u_i(t))\big) \to 0. \tag{2.1.7}$$

Согласно доказанному выше, из соотношений (2.1.6) и (2.1.7) следуют сходимости

$$u_i(t) \to u(t), \quad g(t, u_i(t)) \to y(t) \quad \text{при п.в. } t \in [0, \tau].$$

Так как функция $g(t, \cdot)$ непрерывна, имеем $g(t, u_i(t)) \to g(t, u(t))$ при п.в. $t \in [0, \tau]$. Тогда в силу единственности предела числовой последовательности получаем $g(t, u(t)) = y(t)$.

Теперь, предполагая, что выполнены условия (2.1.4), (2.1.5), докажем непрерывность оператора $N_g : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$.

Пусть задана сходящаяся последовательность $\{u_i\} \subset \mathbb{S}^{\theta_0}$, т. е. имеет место (2.1.6). Из (2.1.4) и (2.1.6) следует, что

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} |g(t,u(t)) - g(t,u_i(t))| \to 0,$$

а из (2.1.5) получим соотношение

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \theta\big(g(t,u(t)), g(t,u_i(t))\big) \to 0.$$

Таким образом непрерывность оператора $N_g : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$ доказана. $\square$

Пусть задано многозначное отображение $\Omega : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$ (т. е. отображение, сопоставляющее каждому $t \in [0,\tau]$ непустое замкнутое множество $\Omega(t) \subset \mathbb{R}$). Будем предполагать, что это отображение измеримо (используемые ниже сведения об измеримых многозначных отображениях см., например, в [26, §2.5], [35, §1.5], [59, п. 8.1.2]). Множество его измеримых сечений не пусто, обозначим его через

$$\mathrm{Sel}(\Omega) := \{u \in \mathbb{S} \mid u(t) \in \Omega(t) \text{ при п.в. } t \in [0,\tau]\}.$$

Предложение 2.1.2. *Пусть заданы $x, y \in \mathbb{S}$, $\alpha > 0$ и измеримое многозначное отображение $\Omega : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$. Пусть при п.в. $t \in [0,\tau]$ выполнено следующее условие*

$$\exists u \in \Omega(t) \quad g(t,u) = y(t) \quad \text{и} \quad |u - x(t)| \le \alpha^{-1}\theta\big(y(t), g(t,x(t))\big). \qquad (2.1.8)$$

Тогда $(x,y) \in \mathrm{Cov}_\alpha[N_g; \mathrm{Sel}(\Omega)]$, где оператор $N_g : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$ определен соотношением (2.3.1)*. В частности, если выполнено условие* (2.1.8)*, в котором $\Omega(t) \equiv \mathbb{R}$, то $(x,y) \in \mathrm{Cov}_\alpha\big[N_g; \mathbb{S}^{\theta_0}\big]$.*

Доказательство. Положим $r(t) = \alpha^{-1}\theta\big(y(t), g(t,x(t))\big)$. Так как функция g удовлетворяет условиям Каратеодори, а функция θ суперпозиционно измерима, определенная здесь функция $[0,\tau] \ni t \mapsto r(t) \in \mathbb{R}_+$ измерима. Теперь определим многозначное отображение $[0,\tau] \ni t \mapsto \mathfrak{B}(t) = [x(t)-r(t), x(t)+r(t)]$, очевидно, являющееся измеримым. Из (2.1.8) следует включение $y(t) \in g\big(t, \mathfrak{B}(t) \cap \Omega(t)\big)$ при п.в. $t \in [0,\tau]$. Согласно лемме Филиппова (см., например, [35, лемма 1.5.15]), существует функция $\widehat{u} \in \mathbb{S}^{\theta_0}$ такая, что $\widehat{u}(t) \in \mathfrak{B}(t) \cap \Omega(t)$ и $g(t, \widehat{u}(t)) = y(t)$ при п.в. $t \in [0,\tau]$. Для этой функции выполнено $u \in \mathrm{Sel}(\Omega)$ и

$$\rho(\widehat{u}, x) = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \big|\widehat{u}(t) - x(t)\big| \leq \alpha^{-1} \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \theta\big(y(t), g(t, x(t))\big) = \\ = \alpha^{-1} d^{\theta}(y, N_g x),$$

следовательно, $(x,y) \in \mathrm{Cov}_\alpha[N_g; \mathrm{Sel}(\Omega)]$. □

З а м е ч а н и е 2.1.1. *Определим на числовой прямой* $\mathbb{R}$ *расстояние* θ *и обозначим* $\mathbb{R}^\theta = (\mathbb{R}, \theta)$, *а символом* $\mathbb{R}$ *будем обозначать вещественное пространство с «обычной метрикой»* θ_0. *Функцию* g *можем рассматривать как отображение* $[0,\tau] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\theta$. *Тогда соотношение* (2.1.8) *означает, что выполнено включение*

$$(x(t), y(t)) \in \mathrm{Cov}_\alpha[g(t,\cdot); \Omega(t)], \quad g(t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\theta, \quad t \in [0,\tau]. \tag{2.1.9}$$

Таким образом, предложение 2.1.2 можно сформулировать следующим образом: если для $x, y \in \mathbb{S}$ *и* $\alpha > 0$ *имеет место включение* (2.1.9), *то* $(x,y) \in \mathrm{Cov}_\alpha[N_g; \mathrm{Sel}(\Omega)]$, $N_g : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^\theta$.

Пример 2.1.1. Определим функцию $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ соотношениями:

$$z_1 z_2 \geq 0 \;\Rightarrow\; \theta(z_1, z_2) = \begin{cases} \big|\sqrt{|z_1|} - \sqrt{|z_2|}\big|, & \text{если } \sqrt{|z_1|} + \sqrt{|z_2|} \leq 1, \\ |z_1 - z_2|, & \text{если } \sqrt{|z_1|} + \sqrt{|z_2|} > 1; \end{cases} \tag{2.1.10}$$

$$z_1 z_2 < 0 \;\Rightarrow\; \theta(z_1, z_2) = \theta(z_1, 0) + \theta(0, z_2). \tag{2.1.11}$$

Для этой функции выполнено условие $(\mathcal{A})$.

Приведем еще одно свойство функции θ, очевидно следующее из ее определения:

$$\forall\lambda \in [0, 1)\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}\ \ \lambda\,\theta(z_1, z_2) \le \theta(\lambda z_1, \lambda z_2) \le \sqrt{\lambda}\,\theta(z_1, z_2). \tag{2.1.12}$$

Действительно, в случае $z_1 z_2 \ge 0$ имеем

$$\sqrt{|z_1|} + \sqrt{|z_2|} \le 1 \;\Rightarrow$$
$$\theta(\lambda z_1, \lambda z_2) = \sqrt{\lambda}\,\Big|\sqrt{|z_1|} - \sqrt{|z_2|}\Big| = \sqrt{\lambda}\,\theta(z_1, z_2) \;\Rightarrow\; (2.1.12);$$
$$1 < \sqrt{|z_1|} + \sqrt{|z_2|} \le 1/\sqrt{\lambda} \;\Rightarrow\; \theta(\lambda z_1, \lambda z_2) = \frac{\sqrt{\lambda}\,|z_1 - z_2|}{\sqrt{|z_1|} + \sqrt{|z_2|}} \;\Rightarrow\; (2.1.12);$$
$$\sqrt{|z_1|} + \sqrt{|z_2|} > 1/\sqrt{\lambda} \;\Rightarrow\; \theta(\lambda z_1, \lambda z_2) = \lambda |z_1 - z_2| = \lambda\theta(z_1, z_2) \;\Rightarrow\; (2.1.12).$$

А если $z_1 z_2 < 0$, то $\theta(\lambda z_1, \lambda z_2) = \theta(\lambda z_1, 0) + \theta(0, \lambda z_2)$, следовательно,

$$\theta(\lambda z_1, \lambda z_2) \le \sqrt{\lambda}\,\theta(z_1, 0) + \sqrt{\lambda}\theta(0, z_2) = \sqrt{\lambda}\,\theta(z_1, z_2);$$
$$\theta(\lambda z_1, \lambda z_2) \ge \lambda\,\theta(z_1, 0) + \lambda\,\theta(0, z_2) = \lambda\,\theta(z_1, z_2).$$

Доказанное соотношение (2.1.12) равносильно соотношению

$$\forall\nu > 1\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}\ \ \sqrt{\nu}\,\theta(z_1, z_2) \le \theta(\nu z_1, \nu z_2) \le \nu\,\theta(z_1, z_2). \tag{2.1.13}$$

Пусть $\tau = 1$, $\mathbb{S} = \mathbb{S}([0, 1], \mathbb{R})$. Определим по функции θ, заданной соотношениями (2.1.10), (2.1.11), расстояние d^θ в пространстве $\mathbb{S}$ формулой (2.1.2). Это расстояние симметрично и удовлетворяет неравенству треугольника, т. е. является ∞-метрикой.

Прежде всего заметим, что в силу неравенства $\theta(z_1, z_2) \ge |z_1 - z_2|$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, справедливо $d^\theta(x_1, x_2) \ge d^{\theta_0}(x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{S}$. Следовательно, любое отображение в пространстве $\mathbb{S}$, являющееся α-накрывающим относительно «обычной метрики» d^{θ_0} (т. е. как отображение $\mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta_0}$) будет также α-накрывающим как отображение $\mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$. Рассмотрим отображение, которое, если считать его отображением $\mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta_0}$, не является накрывающим ни с какой константой α, и тем не менее 1-накрывающее как отображение $\mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$.

Пусть задана функция $q \in \mathbb{S}$ такая, что $q(t) \geq 1$ при п.в. $t \in [0,1]$. Рассмотрим функции $g_0, g_1, \colon [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определяемые при любых $t \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}$, формулами

$$g_0(t,x) = x^2, \quad g_1(t,x) = q(t)x^2.$$

Согласно предложению 2.1.1 соответствующие этим функциям операторы Немыцкого $N_{g_0}, N_{g_1} : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$ замкнуты. Исследуем вначале «множество накрывания» $\mathrm{Cov}_\alpha[N_{g_0};\mathbb{S}]$ оператора Немыцкого N_{g_0}, порожденного функцией g_0. Заметим, что функция первого аргумента $g_0(\cdot, x)$ постоянна, функция второго аргумента $g_0(t,\cdot)$ четная, её сужение на $\mathbb{R}_+$ инъективно, монотонно, а как действующее в $\mathbb{R}_+$, еще и сюръективно. Покажем, что для $\alpha = 1$, любых функций $x \in \mathbb{S}$ и $y \in \mathbb{S}_+$ выполнены условия предложения 2.1.2, где $\Omega(t) \equiv \mathbb{R}$, т. е. проверим справедливость соотношения (2.1.8).

Пусть $t \in [0,1]$. Предположим для простоты, что $x(t) \geq 0$. Определим $u = \sqrt{y(t)}$ (если $x(t) < 0$, то следует положить $u = -\sqrt{y(t)}$). Имеем

$$\begin{aligned}
&x(t) + u \leq 1 \ \Rightarrow \ \theta(y(t), g_0(t,x(t))) = |u - x(t)|,\\
&x(t) + u > 1 \ \Rightarrow \ \theta(y(t), g_0(t,x(t))) = |u^2 - x^2(t)| =\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = |u - x(t)|(u + x(t)) \geq |u - x(t)|.
\end{aligned}$$

Итак, соотношение (2.1.8) справедливо, поэтому согласно предложению 2.1.2 получаем

$$\forall x \in \mathbb{S},\ \forall y \in \mathbb{S}_+ \ \ (x, y) \in \mathrm{Cov}_\alpha[N_{g_0}; \mathbb{S}],\ \text{где}\ \alpha = 1.$$

Теперь покажем, что для оператора Немыцкого $N_{g_1} : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$, порожденного функцией g_1, множество $\mathrm{Cov}_\alpha[N_{g_1}; \mathbb{S}]$ при $\alpha = 1$ также содержит все пары $(x, y) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S}_+$. Поскольку $\big(x(\cdot),\, q^{-1}(\cdot)y(\cdot)\big) \in \mathrm{Cov}_\alpha[N_{g_0}; \mathbb{S}]$, существует функция $u \in \mathbb{S}$ такая, что

$$(N_{g_0}u)(\cdot) = q^{-1}(\cdot)y(\cdot) \ \Leftrightarrow\ N_{g_1}u = y$$

и имеет место неравенство

$$\rho(u, x) \leq d^{\theta}(q^{-1}(\cdot)y(\cdot), N_{g_0}x) = d^{\theta}\big(q^{-1}(\cdot)y(\cdot),\, q^{-1}(\cdot)(N_{g_1}x)(\cdot)\big).$$

На основании соотношения (2.1.12) получаем неравенство

$$\rho(u, x) \leq d^{\theta}(y, N_{g_1}x).$$

Итак, доказано, что $(x, y) \in \mathrm{Cov}_\alpha[N_{g_1}; \mathbb{S}]$ при всех $(x, y) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S}_+$.

Пример 2.1.2. Рассмотрим еще одну функцию $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющую условию $(\mathcal{A})$, определенную соотношениями:

$$z_1 z_2 \geq 0 \ \Rightarrow\ \theta(z_1, z_2) = \begin{cases} |z_1^2 - z_2^2|, & \text{если } |z_1 + z_2| \leq 1, \\ |z_1 - z_2|, & \text{если } |z_1 + z_2| > 1; \end{cases} \tag{2.1.14}$$

$$z_1 z_2 < 0 \ \Rightarrow\ \theta(z_1, z_2) = \theta(z_1, 0) + \theta(0, z_2). \tag{2.1.15}$$

В пространстве $\mathbb{S} = \mathbb{S}([0, 1], \mathbb{R})$ формулой (2.1.2) зададим расстояние d^{θ}. Это расстояние симметрично, и тем не менее не является метрикой, так как не удовлетворяет неравенству треугольника, например, для $z_1 = 0$, $z_2 = 1/2$, $z_3 = 1$ имеем

$$\theta(z_1, z_2) = 1/4, \quad \theta(z_2, z_3) = 1/2, \quad \theta(z_1, z_3) = 1 > 1/4 + 1/2.$$

Рассмотрим функцию $\widehat{g}_0 : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\widehat{g}_0(t, x) = |x| + \sqrt{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,1]. \tag{2.1.16}$$

Легко проверить (проведя такие же рассуждения, как в примере 2.1.1), что для $\alpha = 1$, любых $x \in \mathbb{S}$ и $y \in \mathbb{S}_+$ выполнены условия предложения 2.1.2, где $\Omega(t) \equiv \mathbb{R}$. Таким образом,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S}_+ \ \ (x, y) \in \mathrm{Cov}_\alpha[N_{\widehat{g}_0}; \mathbb{S}], \text{ где } \alpha = 1.$$

Предложение 2.1.3. *Пусть заданы* $x, y \in \mathbb{S}$, $\beta \geq 0$ *и измеримое многозначное отображение* $\Omega : [0, \tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$. *Пусть при п.в.* $t \in [0, \tau]$ *выполнено*

$$\forall u \in \Omega(t) \ \ g(t, u) = y(t) \ \Rightarrow \ \theta\big(y(t), g(t, x(t))\big) \leq \beta \big|u - x(t)\big|. \tag{2.1.17}$$

Тогда $(x, y) \in \mathrm{Lip}_\beta[N_g; \mathrm{Sel}(\Omega)]$, *где оператор* $N_g : S^{\theta_0} \to \mathbb{S}^\theta$ *определен соотношением* (2.3.1).

Доказательство. Пусть для некоторой функции $\widehat{u} \in \mathrm{Sel}(\Omega)$ выполнено $N_g \widehat{u} = y$. Тогда из соотношения (2.1.17) следует, что

$$d^\theta\big(y, N_g x\big) = \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [0,\tau]} \theta\big(y(t), g(t, x(t))\big) \leq \beta \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [0,\tau]} \big|\widehat{u}(t) - x(t)\big| = \beta \rho(\widehat{u}, x).$$

Таким образом, $(x, y) \in \mathrm{Lip}_\beta[N_g; \mathrm{Sel}(\Omega)]$. $\square$

З а м е ч а н и е 2.1.2. *Соотношение* (2.1.17) *означает, что выполнено включение*

$$(x(t), y(t)) \in \mathrm{Lip}_\beta[g(t,\cdot), \Omega(t)], \quad g(t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\theta, \quad t \in [0,\tau]. \tag{2.1.18}$$

Поэтому предложение 2.1.2 можно сформулировать следующим образом: если для $x, y \in \mathbb{S}$ *и* $\beta \geq 0$ *выполнено* (2.1.18), *то* $(x, y) \in \mathrm{Lip}_\beta[N_g; \mathrm{Sel}(\Omega)]$, $N_g : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^\theta$.

Следствие 2.1.1. *Пусть задано измеримое многозначное отображение* $\Omega : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$. *Предположим, что при п.в.* $t \in [0,\tau]$ *отображение* $g(t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\theta$ *является* β*-липшицевым на множестве* $\Omega(t)$, *т. е. для любых* $x, u \in \Omega(t)$ *выполнено неравенство*

$$\theta\big(g(t,u), g(t,x)\big) \leq \beta\big|u - x\big|. \tag{2.1.19}$$

Тогда при всех функциях $x \in \mathrm{Sel}(\Omega)$, $y \in \mathbb{S}^\theta$ *справедливо включение* $(x, y) \in \mathrm{Lip}_\beta[N_g; \mathrm{Sel}(\Omega)]$, *где* $N_g : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^\theta$, *т. е. оператор* N_g *является* β*-липшицевым на множестве* $\mathrm{Sel}(\Omega)$.

Пример 2.1.3. Как и в примере 2.1.1, определим функцию θ формулами (2.1.10), (2.1.11). В силу неравенства $\theta(z_1, z_2) \geq |z_1 - z_2|$ любая функция $g : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая при некотором $\beta \geq 0$ условию (2.1.19) будет также удовлетворять и «обычному условию Липшица»

$$|g(t,u) - g(t,x)| \leq \beta|u - x|, \quad x, u \in \Omega(t). \tag{2.1.20}$$

Обратное неверное. Так для функции $g(t,x) = x$ соотношение (2.1.20) имеет место при $\Omega(t) \equiv \mathbb{R}$ с коэффициентом Липшица равным 1, но условие (2.1.19) не выполняется ни при каком $\beta \geq 0$ даже если $\Omega(t) \equiv [0,\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно малое. Действительно, для любого $x > 0$ имеем $\theta\bigl(g(t,0), g(t,x)\bigr) = \sqrt{x} = \beta_x|x-0|$, где $\beta_x = 1/\sqrt{x} \to \infty$ при $x \to 0+$.

Теперь рассмотрим функцию, удовлетворяющую условию (2.1.19). Пусть заданы: функция $p \in \mathbb{S}$ такая, что $p(t) \geq 1/2$ при п.в. $t \in [0,1]$, и число $\beta \geq 0$. Положим

$$g_2 : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_2(t,x) = \beta|x| + p(t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,1]. \tag{2.1.21}$$

Значения этой функции при любых аргументах t, x, удовлетворяют неравенству $g_2(t,x) \geq 1/2$, поэтому в силу формулы (2.1.10) при всех $x, u \in \mathbb{R}$ и $t \in [0,1]$ имеем

$$\theta\bigl(g_2(t,u), g_2(t,x)\bigr) = \bigl|g_2(t,u) - g_2(t,x)\bigr| = \beta\bigl||u| - |x|\bigr| \leq \beta|u-x|.$$

Итак, выполнены предположения следствия 2.1.1 (где $\Omega(t) \equiv \mathbb{R}$) и поэтому определяемый функцией g_2 оператор Немыцкого $N_{g_2} : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$ является липшицевым с константой β на всем пространстве $\mathbb{S}^{\theta_0}$. Заметим также, что согласно предложению 2.1.1 оператор N_{g_2} замкнут.

Пример 2.1.4. Как и в примере 2.1.2, определим функцию θ формулами (2.1.14), (2.1.15) и функцию $\widehat{g}_0 : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ соотношением (2.1.16). Для этой функции справедливо неравенство (2.1.19) с коэффициентом $\beta = 4$ при всех $x, u \in \mathbb{R}$. Согласно следствию 2.1.1 определяемый функцией $\widehat{g}_0$ оператор Немыцкого $N_{\widehat{g}_0} : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$ является липшицевым с константой $\beta = 4$ на всем пространстве $\mathbb{S}^{\theta_0}$.

Сформулируем условия липшицевости еще одного отображения, необходимого для исследования различных функциональных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Пусть задана функция $h:[0,\tau]\to[0,\tau]$ такая, что

$$\forall E\subset[0,\tau]\ \ \mu(E)=0\ \Rightarrow\ \mu(h^{-1}(E))=0. \tag{2.1.22}$$

Это условие обеспечивает измеримость функции $u(h(\cdot))$ для любой измеримой функции $u:[0,\tau]\to\mathbb{R}$ (см. [19, §1.3], [41, с. 707]), что позволяет определить оператор

$$S_h:\mathbb{S}\to\mathbb{S},\ \ (S_hu)(t)=u(h(t)),\ \ t\in[0,\tau].$$

Используя предложение 2.1.3, исследуем множество β-липшицевости композиции

$$N_gS_h:\mathbb{S}^{\theta_0}\to\mathbb{S}^{\theta},\ \ (N_gS_hx)(t)=g\big(t,x(h(t))\big),\ \ t\in[0,\tau]. \tag{2.1.23}$$

Для этого исследования нам потребуется следующее утверждение.

Л е м м а 2.1.1. *Для измеримого многозначного отображения* $\Omega:[0,\tau]\rightrightarrows\mathbb{R}$ *композиция* $\Omega h:[0,\tau]\rightrightarrows\mathbb{R}$ *также измерима. Если функция* $\omega\in\mathbb{S}$ *является сечением отображения* Ω, *т. е.* $\omega(t)\in\Omega(t)$ *при п.в.* $t\in[0,\tau]$, *то функция* $S_h\omega$ *измерима и является сечением отображения* Ωh, *т. е. выполнено* $\omega(h(t))\in\Omega(h(t))$ *при п.в.* $t\in[0,\tau]$.

Доказательство. Многозначное отображение измеримо тогда и только тогда, когда оно обладает представлением Кастена (см. [35, теорема 1.5.6 и замечание 1.5.7]. Поэтому существует такой счетный набор измеримых сечений ω_n, $n=1,2,\ldots,$ отображения Ω, что

$$\Omega(t)=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega_n(t)\}}\ \text{ при п.в. } t\in[0,\tau]$$

(чертой обозначено замыкание множества в пространстве $\mathbb{R}$). В силу условия (2.1.22) функции $S_h\omega_n$, $n = 1, 2, \dots,$ измеримы. Докажем, что выполнено соотношение

$$\Omega(h(t)) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega_n(h(t))\}} \text{ при п.в. } t \in [0,\tau]. \tag{2.1.24}$$

Определим множество $I = \Big\{t \in [0,\tau] \,|\, \Omega(h(t)) \neq \overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{\omega_n(h(t))\}}\Big\}$. Очевидно, выполнено

$$I = h^{-1}(E),$$

где $E = \Big\{s \in [0,\tau] \,|\, \Omega(s) \neq \overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{\omega_n(s)\}}\Big\}$. Так как $\mu(E) = 0$, в силу условия (2.1.22), имеем $\mu(I) = 0$. Итак, соотношение (2.1.24) выполнено. Таким образом, для многозначного отображения $\Omega h : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$ имеет место представление Кастена, поэтому это отображение измеримо.

Пусть для некоторой функции $\omega \in \mathbb{S}$ при п.в. $t \in [0,\tau]$ выполнено включение $\omega(t) \in \Omega(t)$. Определим множество

$$I = \big\{t \in [0,\tau] \,|\, \omega(h(t)) \notin \Omega(h(t))\big\}.$$

Это множество представим в виде

$$I = h^{-1}(E),$$

где $E = \big\{s \in [0,\tau] \,|\, \omega(s) \notin \Omega(s)\big\}$. Так как $\mu(E) = 0$, в силу условия (2.1.22), имеем $\mu(I) = 0$. Итак, $\omega(h(t)) \in \Omega(h(t))$ при п.в. $t \in [0,\tau]$. $\square$

Предложение 2.1.4. *Пусть заданы* $x, y \in \mathbb{S}$, $\beta \geq 0$ *и измеримое многозначное отображение* $\Omega : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$. *Пусть при п.в.* $t \in [0,\tau]$ *выполнено включение* $(x(h(t)), y(t)) \in \mathrm{Lip}_\beta[g(t,\cdot), \Omega(h(t))]$, $g(t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\theta$, *т. е. справедливо соотношение*

$$\forall u \in \Omega(h(t))\ g(t,u)=y(t)\ \Rightarrow\ \theta\big(y(t), g(t, x(h(t)))\big) \leq \beta\big|u - x(h(t))\big|. \quad (2.1.25)$$

Тогда $(x, y) \in \mathrm{Lip}_\beta[N_g S_h; \mathrm{Sel}(\Omega)]$, *где оператор* $N_g S_h : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^\theta$ *определен соотношением* (2.1.23).

Доказательство. Пусть для некоторой функции $\widehat{u} \in \mathrm{Sel}(\Omega)$ выполнено $N_g S_h \widehat{u} = y$. Согласно лемме 2.1.1, $\widehat{u}(h(t)) \in \Omega(h(t))$ при п.в. $t \in [0, \tau]$. Из соотношения (2.1.25) следует, что

$$d^\theta\big(y, N_g S_h x\big) = \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [0,\tau]} \theta\big(y(t), g(t, x(h(t)))\big) \leq$$
$$\leq \beta \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [0,\tau]} \big|\widehat{u}(h(t)) - x(h(t))\big|. \quad (2.1.26)$$

Определим множество

$$I = \big\{t \in [0, \tau] \mid \big|\widehat{u}(h(t)) - x(h(t))\big| > \rho(x, \widehat{u})\big\}.$$

Представим это множество в виде

$$I = h^{-1}(E), \quad E = \big\{s \in [0, \tau] \mid \big|\widehat{u}(s) - x(s)\big| > \rho(\widehat{u}, x)\big\}.$$

Так как $\mu(E) = 0$, получаем $\mu(I) = 0$, и поэтому $\big|\widehat{u}(h(t)) - x(h(t))\big| \leq \rho(\widehat{u}, x)$ при п.в. $t \in [0, \tau]$. Учитывая это неравенство, из соотношения (2.1.26) получаем

$$d^\theta\big(y, N_g S_h x\big) \leq \beta \rho(\widehat{u}, x).$$

Таким образом, $(x, y) \in \mathrm{Lip}_\beta[N_g S_h; \mathrm{Sel}(\Omega)]$. □

Следствие 2.1.2. *Пусть задано измеримое многозначное отображение* $\Omega : [0, \tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$. *Предположим, что при п.в.* $t \in [0, \tau]$ *отображение*

$g(t,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{\theta}$ *является* β*-липшицевым на множестве* $\Omega(h(t))$, *т. е. для любых* $x,u\in\Omega(h(t))$ *выполнено неравенство* (2.1.19). *Тогда для определенного соотношением* (2.1.23) *оператора* $N_gS_h:\mathbb{S}^{\theta_0}\to\mathbb{S}^{\theta}$ *при всех* $x\in\mathrm{Sel}(\Omega)$, $y\in\mathbb{S}^{\theta}$ *справедливо включение* $(x,y)\in\mathrm{Lip}_{\beta}[N_gS_h;\mathrm{Sel}(\Omega)]$, *т. е.* N_gS_h *является* β*-липшицевым на множестве* $\mathrm{Sel}(\Omega)$ *оператором.*

Пример 2.1.5. Пусть функция $\theta:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{+}$ задана формулами (2.1.10), (2.1.11), а функция $g_2:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — соотношением (2.1.21), где $\beta\geq 0$ и $p(t)\geq 1/2$ при п.в. $t\in[0,1]$. Как показано в примере 2.1.3, эта функция удовлетворяет условию (2.1.19) при всех $x,u\in\mathbb{R}$. Поэтому в силу следствия 2.1.2 композиция

$$N_{g_2}S_h:\mathbb{S}^{\theta_0}\to\mathbb{S}^{\theta},\ \ (N_{g_2}S_hx)(t)=\beta\big|x(h(t))\big|+p(t),$$

является β-липшицевым на всем пространстве $\mathbb{S}$ оператором.

2.1.2 Разрешимость функциональных уравнений

Применим полученные в п. 2.1.1 утверждения к исследованию функционального уравнения с отклоняющимся аргументом. Пусть задана функция $f:[0,\tau]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, являющаяся измеримой по первому аргументу и непрерывной по совокупности второго и третьего аргументов, функция $h:[0,\tau]\to[0,\tau]$, удовлетворяющая условию (2.1.22), и измеримая функция $\widehat{y}:[0,\tau]\to\mathbb{R}$. Рассмотрим уравнение

$$f\big(t,x(h(t)),x(t)\big)=\widehat{y}(t),\ \ t\in[0,\tau], \tag{2.1.27}$$

относительной неизвестной измеримой функции $x:[0,\tau]\to\mathbb{R}$.

Замечание 2.1.3. *В исследованиях функциональных уравнений обычно рассматриваются уравнения с правой частью, равной* 0, *посколь-*

ку функцию $\widehat{y}$, очевидно, можно перенести в левую часть и «включить» в функцию f. При этом в стандартных метриках функциональных пространств расстояние между функциями $f\big(\cdot, x(h(\cdot)), x(\cdot)\big)$ и $\widehat{y}(\cdot)$, совпадает с расстоянием от функции $f\big(\cdot, x(h(\cdot)), x(\cdot)\big) - \widehat{y}(\cdot)$ до 0. *Однако, для введенной в пункте 2.1.1 метрики d^{θ} пространства измеримых функций эти расстояния различны, т. е. возможна ситуация, когда некоторые условия выполнены для заданной правой части $\widehat{y}$, однако будут нарушены если $\widehat{y}$ перенести в левую часть и «включить» в f. Именно поэтому здесь рассматривается уравнение с ненулевой правой частью. Ниже по той же причине рассматриваются дифференциальные и интегральные уравнения с ненулевой правой частью.*

Для произвольного $v \in \mathbb{S}$ определим функции $g_1^{[v]}, g_2^{[v]} : [0,\tau] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ соотношениями

$$g_1^{[v]}(t,x) = f(t, v(h(t)), x), \quad g_2^{[v]}(t,x) = f(t, x, v(t)), \quad t \in [0,\tau], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Функции $g_1^{[v]}, g_2^{[v]}$, очевидно, удовлетворяют условиям Каратеодори.

Т е о р е м а 2.1.1. *Пусть заданы $\alpha > \beta \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{S}$ такие, что*

$$R := \frac{1}{\alpha - \beta} \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [0,\tau]} \theta\big(\widehat{y}(t),\ f(t, x_0(h(t)), x_0(t))\big) < \infty. \tag{2.1.28}$$

Пусть для каждого $v \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, R)$ функция $g_1^{[v]}$ удовлетворяет условию (2.1.8) *при любом $x \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, R)$, заданном $y = \widehat{y}$ и $\Omega(t) \equiv \mathbb{R}$, а функция $g_2^{[v]}$ — условию* (2.1.25) *при тех же функциях x, y, но с иным многозначным отображением: $\Omega(t) = B_{\mathbb{R}}(x_0(t), R)$ при п.в. $t \in [0,\tau]$. Тогда существует решение $\widehat{x} \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, R)$ уравнения* (2.1.27).

Доказательство. Обозначим через $N_f : \mathbb{S}^{\theta_0} \times \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$ оператор Немыцкого

$$(N_f(x,u))(t) = f(t, u(t), x(t)), \quad t \in [0,\tau],$$

и определим отображения

$$F : \mathbb{S}^{\theta_0} \times \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}, \quad F(x,u) = N_f(x, S_h u); \quad G : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}, \quad G(x) = F(x,x).$$

Докажем замкнутость отображений F, G. Пусть для произвольных последовательностей $\{x_i\}, \{u_i\} \subset \mathbb{S}^{\theta_0}$, элементов $x, u \in \mathbb{S}^{\theta_0}$ и $w \in \mathbb{S}^{\theta}$ при $i \to \infty$ выполнено $\rho(x, x_i) \to 0$, $\rho(u, u_i) \to 0$ и $d^{\theta}\big(w, F(x_i, u_i)\big) \to 0$. Тогда, как показано при доказательстве предложения 2.1.1, при п.в. $t \in [0,\tau]$ имеют место сходимости

$$x_i(t) \to x(t), \quad u_i(t) \to u(t), \quad (F(x_i, u_i))(t) \to w(t).$$

В силу второго из этих трех соотношений при п.в. $t \in [0,\tau]$ имеем $u_i(h(t)) \to u(h(t))$. Поэтому вследствие непрерывности функции $f(t,\cdot,\cdot)$ при п.в. $t \in [0,\tau]$ выполнено $f(t, u_i(h(t)), x_i(t)) \to f(t, u(h(t)), x(t))$. Итак, $(F(x_i,u_i))(t) \to (F(x,u))(t)$ и $(F(x_i,u_i))(t) \to w(t)$, следовательно, $(F(x,u))(t) = w(t)$, $t \in [0,\tau]$. Доказано, что отображение F является замкнутым, а следовательно, отображение G также замкнуто.

Для произвольной функции $v \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, R)$ оператор $F(\cdot, v) : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$ является оператором Немыцкого $N_{g_1^{[v]}}$, порожденным функцией $g_1^{[v]}$. Этот оператор удовлетворяет условиям предложения 2.1.2 при $y = \widehat{y}$, любом $x \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, R)$ и многозначном отображении $t \in [0,\tau] \mapsto \Omega(t) = \mathbb{R}$. Согласно предложению 2.1.2 пара $(x, \widehat{y})$ при любом $x \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, R)$ принадлежит множеству $\mathrm{Cov}_{\alpha}[F(\cdot, v); \mathbb{S}]$. Следовательно, пара $(v, \widehat{y})$ также принадлежит множеству $\mathrm{Cov}_{\alpha}[F(\cdot, v); \mathbb{S}]$.

Оператор $F(v,\cdot):\mathbb{S}^{\theta_0}\to\mathbb{S}^{\theta}$ — это композиция $N_{g_2^{[v]}}S_h$, удовлетворяющая условиям предложения 2.1.4 при $y=\widehat{y}$, любом $x\in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0,R)$ и многозначном отображении $t\in[0,\tau]\mapsto\Omega(t)=B_{\mathbb{R}}(x_0(t),R)$. В силу предложения 2.1.4 для любого $x\in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0,R)$ выполнено $(x,\widehat{y})\in\mathrm{Lip}_\beta[F(v,\cdot);B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0,R)]$. Следовательно, $(v,\widehat{y})\in\mathrm{Lip}_\beta[F(v,\cdot);B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0,R)]$.

В заключение напомним, что пространство $\mathbb{S}^{\theta_0}$ является полным. Итак, выполнены все условия теоремы 1.2.1, и согласно этой теореме существует решение $\widehat{x}\in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0,R)$ уравнения (2.1.27). $\square$

З а м е ч а н и е 2.1.4. *В теореме 2.1.1 предполагается, что функция* $g_2^{[v]}$ *удовлетворяет условию* (2.1.25)*, где* $y=\widehat{y}$, $x\in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0,R)$ *и* $\Omega(t)=B_{\mathbb{R}}(x_0(t),R)$. *Согласно следствию 2.1.2, для выполнения этого условия достаточно, чтобы при п.в.* $t\in[0,\tau]$ *отображение* $g_2^{[v]}(t,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{\theta}$ *было* β*-липшицевым на множестве* $[x_0(h(t))-R,x_0(h(t))+R]$.

Пример 2.1.6. Пусть заданы функции $p,\widehat{y}\in\mathbb{S}_+$, $\gamma\geq 0$ и функция $h:[0,1]\to[0,1]$, удовлетворяющая условию (2.1.22) (где $\tau=1$). Рассмотрим уравнение

$$x^2(t)\big(p(t)+\gamma x(h(t))\big)=\widehat{y}(t),\quad t\in[0,1]. \tag{2.1.29}$$

Нас будет интересовать существование неотрицательного решения этого уравнения, принадлежащего некоторой окрестности функции $x_0(t)\equiv 0$ в пространстве $\mathbb{S}$. Отображения

$$x(\cdot)\in\mathbb{S}\mapsto x^2(\cdot)\in\mathbb{S},\quad x(\cdot)\in\mathbb{S}\mapsto x(h(t))\in\mathbb{S},$$

составляющие левую часть уравнения (2.1.29), ни при каком $\alpha>0$ не являются α-накрывающими относительно «обычной метрики» $\rho=d^{\theta_0}$ пространства $\mathbb{S}$. Таким образом, к рассматриваемому здесь уравнению нельзя применить теоремы о таких отображениях. Продемонстрируем возможности теоремы 2.1.1 в исследовании уравнения (2.1.29).

Положим

$$R = 2\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,1]} \widehat{y}(t). \tag{2.1.30}$$

Покажем, что при выполнении условий

$$p(t) \geq 1 \text{ при п.в. } t \in [0,1]; \quad 2\gamma\, R < 1 \ \text{ и } \ 2\gamma\, R^2 < 1$$

уравнение (2.1.29) имеет решение $x \in \mathbb{S}_+$ такое, что $x(t) \leq R$ п.в. на $[0,1]$.

Определим вспомогательное уравнение

$$x^2(t)\big(p(t) + \gamma\big|x(h(t))\big|\big) = \widehat{y}(t), \quad t \in [0,1]. \tag{2.1.31}$$

Для любого решения $x \in \mathbb{S}$ уравнения (2.1.31) функция $|x(\cdot)|$ будет решением уравнения (2.1.29), и по решению $x \in \mathbb{S}_+$ уравнения (2.1.29) очевидно определяются решения уравнения (2.1.31). Итак, разрешимости в $\mathbb{S}_+$ уравнений (2.1.29), (2.1.31) равносильны, но областью определения функции

$$f(t, x_1, x_2) = x_2^2\big(p(t) + \gamma|x_1|\big)$$

является $[0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, поэтому нам удобнее будет исследовать вспомогательное уравнение (2.1.31).

Определим формулой (2.1.10) функцию $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ и зададим соответствующее расстояние d^θ в пространстве $\mathbb{S}$.

Для произвольного $v \in \mathbb{S}$ определим функции $g_1^{[v]}, g_2^{[v]} : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g_1^{[v]}(t,x) = x^2\big(p(t) + \gamma|v(h(t))|\big), \quad g_2^{[v]}(t,x) = v^2(t)\big(p(t) + \gamma|x|\big).$$

Положим $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$ и $x_0(t) \equiv 0$ на $[0,1]$. Вычисленное по формуле (2.1.28) значение R совпадает с (2.1.30). Как показано в примере 2.1.1, функция $g_1^{[v]}$ удовлетворяет условию (2.1.8), в котором $\Omega(t) \equiv \mathbb{R}$, а $x, y \in \mathbb{S}$ — любые функции (в том числе, если $x \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, R)$ и $y = \widehat{y}$ — заданная правая часть уравнения (2.1.29)).

Согласно примеру 2.1.3, функция $g_2(t,x) = p(t) + \gamma|x|$ при всех $x, u \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию (2.1.19) с коэффициентом γ. А из неравенств (2.1.12), (2.1.13) следует, что при любом $v \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, R)$ функция $g_2^{[v]}$ удовлетворяет условию (2.1.19) с коэффициентом

$$\max\left\{\gamma R^2,\, \gamma R\right\} \leq 1/2 = \beta.$$

В соответствии с теоремой 2.1.1 уравнение (2.1.31), а следовательно и уравнение (2.1.29) имеет решение $x \in \mathbb{S}_+$ такое, что $x(t) \leq R$ п.в. на $[0,1]$.

2.1.3 Корректность решений функциональных уравнений

Используя теорему 2.1.1, получим условия устойчивости решений уравнения (2.1.27) к малым изменениям функции $f\colon [0,\tau] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ задана функция $f_n\colon [0,\tau] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, являющаяся измеримой по первому аргументу и непрерывной по совокупности второго и третьего аргументов, функция $h_n : [0,\tau] \to [0,\tau]$, удовлетворяющая условию (2.1.22), и измеримая функция $\widehat{y}_n : [0,\tau] \to \mathbb{R}$. Рассмотрим уравнение

$$f_n\big(t, x(h_n(t)), x(t)\big) = \widehat{y}_n(t), \quad t \in [0,\tau], \tag{2.1.32}$$

относительной неизвестной измеримой функции $x : [0,\tau] \to \mathbb{R}$.

Для произвольной измеримой функции $v \in \mathbb{S}$ определим функции $g_{1n}^{[v]}, g_{2n}^{[v]} : [0,\tau] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ соотношениями

$$g_{1n}^{[v]}(t,x) = f_n(t, v(h_n(t)), x), \quad g_{2n}^{[v]}(t,x) = f_n(t, x, v(t)), \quad t \in [0,\tau], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Функции $g_{1n}^{[v]}, g_{2n}^{[v]}$, очевидно, удовлетворяют условиям Каратеодори.

Рассмотрим задачу о сходимости при $n \to \infty$ решений уравнения (2.1.32) к решению уравнения (2.1.27) в случае, если есть некоторая сходимость f_n к f, h_n к h и $\widehat{y}_n$ к $\widehat{y}$. В следующем утверждении предлагаются условия такой сходимости.

Т е о р е м а 2.1.2. *Пусть при всех $n \in \mathbb{N}$ заданы числа $0 \leq \beta_n < \alpha_n$, известно решение $\widehat{x}$ уравнения* (2.1.27). *Положим*

$$r_n = \frac{1}{\alpha_n - \beta_n} d\big(\widehat{y}_n, f_n(t, \widehat{x}(h_n(t)), \widehat{x}(t))\big).$$

Пусть для каждого $v \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(\widehat{x}, r_n)$ функция $g_{1n}^{[v]}$ удовлетворяет условию (2.1.8) *при любом $x \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(\widehat{x}, r_n)$, заданном $y = \widehat{y}_n$ и $\Omega(t) \equiv \mathbb{R}$, а функция $g_{2n}^{[v]}$ – условию* (2.1.25) *при тех же функциях x, y, но с иным многозначным отображением: $\Omega_n(t) = B_{\mathbb{R}}(\widehat{x}(t), r_n)$ при п.в. $t \in [0, \tau]$. Если при $n \to \infty$ выполнено $r_n \to 0$, то при любом $n \in \mathbb{N}$ уравнение* (2.1.32) *разрешимо и существует такое его решение $\widehat{x}_n \in \mathbb{S}$, что при $n \to \infty$ имеет место сходимость $\widehat{x}_n \to \widehat{x}$ в пространстве $\mathbb{S}^{\theta_0}$.*

Доказательство. При любом $n \in \mathbb{N}$ для уравнения (2.1.32) выполнены все условия теоремы 2.1.1. Согласно теореме 2.1.1 при любом $n \in \mathbb{N}$ существует решение $\widehat{x}_n$ уравнения (2.1.32) такое, что $\widehat{x}_n \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(\widehat{x}, r_n)$, т. е. $\rho(\widehat{x}, \widehat{x}_n) \leq r_n$. Из этого неравенства, в силу предположения сходимости $r_n \to 0$, получаем $\widehat{x}_n \to \widehat{x}$. $\square$

§ 2.2. Задача Коши

В этом параграфе рассматривается задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной искомой функции. Исследование основано на полученных в первой главе результатах об операторных уравнениях с накрывающими отображениями, действующими из метрического пространства в множество, снабженное расстоянием. Задача Коши сводится к интегральному уравнению с отображением, действующим из пространства суммируемых функций $\mathbb{L}$ в пространство измеримых функций $\mathbb{S}$. Для применения соответствующих теорем в пространстве $\mathbb{L}$ вводится метрика $\rho = d^{\theta_0}$, а в пространстве $\mathbb{S}$ — расстояние d^{θ}, затем используются утверждения о множествах накрывания и липшицевости оператора Немыцкого, полученные в пункте 2.1.1

Параграф разделен на два пункта. В пункте 2.2.1 получена теорема существования решения задачи Коши. В пункте 2.2.2 исследуется устойчивость решений задачи Коши к изменениям функции, порождающей дифференциальное уравнение, и начального условия.

2.2.1 Существование решений задачи Коши

В пространстве $\mathbb{S} = \mathbb{S}([0,\tau],\mathbb{R})$ выделим подпространство $\mathbb{L} = \mathbb{L}([0,\tau],\mathbb{R})$ суммируемых (по Лебегу) функций. Это пространство с определенным формулой (2.1.2) расстоянием d^{θ} будем обозначать $\mathbb{L}^{\theta}$. Отображение $\rho = d^{\theta_0}$ является метрикой в $\mathbb{L}$, соответствующее метрическое пространство $\mathbb{L}^{\theta_0}$ является полным. Отметим, что для любых $x \in \mathbb{L}$, $r \in \mathbb{R}_+$ выполнено $B_{\mathbb{L}^{\theta_0}}(x,r) = B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x,r)$. Обозначим $\mathbb{AC} = \mathbb{AC}([0,\tau],\mathbb{R})$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x : [0,\tau] \to \mathbb{R}$, имеющих п.в. на $[0,\tau]$ производную $\dot{x} \in \mathbb{L}$.

Пусть функция $\widehat{y} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ измерима, функция $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима по первому аргументу и непрерывна по совокупности второго и третьего аргументов. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$f\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) = \widehat{y}(t), \quad t \geq 0. \tag{2.2.1}$$

Пусть $\tau > 0$. Решением уравнения (2.2.1), определенным на $[0,\tau]$, называем функцию $x \in \mathbb{AC}([0,\tau],\mathbb{R})$, удовлетворяющую этому уравнению при п.в. $t \in [0,\tau]$. Получим условия существования решения $x \in \mathbb{AC}([0,\tau],\mathbb{R})$ уравнения (2.2.1), удовлетворяющего при заданном $A \in \mathbb{R}$ начальному условию

$$x(0) = A. \tag{2.2.2}$$

Для произвольных функций $v \in \mathbb{AC}([0,\tau],\mathbb{R})$ и $w \in \mathbb{L}([0,\tau],\mathbb{R})$ определим функции $g_1^{[v]}, g_2^{[w]} : [0,\tau] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ соотношениями

$$g_1^{[v]}(t,x) = f(t, v(t), x), \quad g_2^{[w]}(t,x) = f(t, x, w(t)), \quad t \in [0,\tau], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Определенные здесь функции, очевидно, удовлетворяют условиям Каратеодори.

Т е о р е м а 2.2.1. *Пусть заданы числа $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, $\tau > 0$ такие, что $\beta\tau < \alpha$, и функция $x_0 \in \mathbb{AC}([0,\tau],\mathbb{R})$, удовлетворяющая условию* (2.2.2). *Пусть*

$$R := \frac{1}{\alpha - \beta\tau} \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [0,\tau]} \theta\big(\widehat{y}(t), f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))\big) < \infty. \tag{2.2.3}$$

Определим многозначные отображения $V, \dot{V} : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$ соотношениями

$$V(t) = B_{\mathbb{R}}(x_0(t), Rt), \quad \dot{V}(t) = B_{\mathbb{R}}(\dot{x}_0(t), R), \quad t \in [0,\tau]. \tag{2.2.4}$$

Предположим, что для любой абсолютно непрерывной функции $v \in \mathrm{Sel}(V)$ *функция* $g_1^{[v]}$ *удовлетворяет условию* (2.1.8) *при* $y = \widehat{y}\big|_{[0,\tau]}$, *всех* $x \in \mathrm{Sel}(\dot{V})$, $\Omega(t) \equiv \mathbb{R}$; *для любого* $w \in \mathrm{Sel}(\dot{V})$ *функция* $g_2^{[w]}$ *удовлетворяет условию* (2.1.17) *при* $y = \widehat{y}\big|_{[0,\tau]}$, *всех абсолютно непрерывных функциях* $x \in \mathrm{Sel}(V)$ *и* $\Omega = V$. *Тогда существует определенное на* $[0,\tau]$ *решение* x *задачи Коши* $(2.2.1), (2.2.2)$ *такое, что* $\dot{x} \in B_{\mathbb{L}^{\theta_0}}(\dot{x}_0, R)$.

Доказательство. Запишем задачу $(2.2.1), (2.2.2)$ в виде уравнения

$$f\big(t, A + \int_0^t u(s)ds, u(t)\big) = \widehat{y}(t), \quad t \in [0,\tau]. \tag{2.2.5}$$

относительно неизвестной функции $u = \dot{x} \in \mathbb{L}([0,\tau],\mathbb{R})$. Определим отображение $F : \mathbb{L}^{\theta_0} \times \mathbb{L}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$ соотношением

$$(F(u,z))(t) = f\big(t, A + \int_0^t z(s)ds, u(t)\big), \quad t \in [0,\tau],$$

и отображение

$$G : \mathbb{L}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}, \quad G(u) = F(u,u).$$

При таком определении отображения G уравнение (2.2.5) принимает вид (1.2.1) и его разрешимость можно доказать на основании теоремы 1.2.1. Проверим выполнение ее условий.

Докажем замкнутость отображений F, G. Пусть для произвольных $\{u_i\}, \{z_i\} \subset \mathbb{L}^{\theta_0}$, $u, z \in \mathbb{L}^{\theta_0}$ и $y \in \mathbb{S}^{\theta}$ выполнено $\rho(u,u_i) \to 0$, $\rho(z,z_i) \to 0$ и $d^{\theta}\big(y, F(u_i,z_i)\big) \to 0$. Из последнего соотношения следует сходимость $(F(u_i,z_i))(t) \to y(t)$ при п.в. $t \in [0,\tau]$ (см. доказательство предложения 2.1.1). А из второго соотношения получаем $\int_0^t z_i(s)ds \to \int_0^t z(s)ds$ при п.в. $t \in [0,\tau]$. Далее, в силу непрерывности функции $f(t,\cdot,\cdot)$ при п.в. $t \in [0,\tau]$ выполнено $(F(u_i,z_i))(t) \to (F(u,z))(t)$. А так как $(F(u_i,z_i))(t) \to y(t)$, получаем $(F(u,z))(t) = y(t),\ t \in [0,\tau]$. Итак, доказано, что отображение F является замкнутым, соответственно, отображение G также замкнуто.

Для произвольной функции $w \in \mathrm{Sel}(\dot V)$ оператор $F(\cdot, w) : \mathbb{L}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$ является оператором Немыцкого $N_{g_1^{[v]}}$, порожденным функцией $g_1^{[v]}$, где $v(t) = A + \int_0^t w(s)ds$. Очевидно, $v \in \mathrm{Sel}(V)$ и $v \in \mathbb{AC}([0,\tau],\mathbb{R})$. Согласно принятым предположениям оператор $N_{g_1^{[v]}}$ удовлетворяет условиям предложения 2.1.2 при $y = \widehat{y}$, любом $x \in \mathrm{Sel}(\dot V)$ и $\Omega(t) \equiv \mathbb{R}$. Согласно предложению 2.1.2 выполнено вложение $\mathrm{Sel}(\dot V) \times \{\widehat{y}\} \subset \mathrm{Cov}_{\alpha}[F(\cdot,w);\mathbb{S}]$, следовательно, $(w,\widehat{y}) \in \mathrm{Cov}_{\alpha}[F(\cdot,w);\mathbb{S}]$.

Теперь рассмотрим оператор $F(w,\cdot) : \mathbb{L}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$, где w — любое измеримое сечение многозначного отображения $\dot V$. Оператор $F(w,\cdot)$ является композицией интегрального оператора $K : \mathbb{L}^{\theta_0} \to \mathbb{L}^{\theta_0}$, определяемого формулой $(Kz)(t) = \int_0^t z(s)ds$, и оператора Немыцкого $N_{g_2^{[w]}} : \mathbb{L}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$, порожденного функцией $g_2^{[w]}$. Оператор K является липшицевым с коэффициентом τ на множестве $\mathrm{Sel}(\dot V)$ и выполнено $K(\mathrm{Sel}(\dot V)) \subset \mathbb{AC} \cap \mathrm{Sel}(V)$. Функция $g_2^{[w]}$ удовлетворяет условиям предложения 2.1.3 при $y = \widehat{y}$, любом $x \in \mathbb{AC} \cap \mathrm{Sel}(V)$ и $\Omega = V$. Поэтому, в силу предложения 2.1.3 для любого $x \in \mathbb{AC} \cap \mathrm{Sel}(V)$ выполнено $(x,\widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_{\beta}[N_{g_2^{[w]}};\mathrm{Sel}(V)]$. Следовательно, для любого $z \in \mathrm{Sel}(\dot V)$ выполнено $(z,\widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_{\beta\tau}[N_{g_2^{[w]}}K;\mathrm{Sel}(\dot V)]$. Таким образом, $\mathrm{Sel}(\dot V) \times \widehat{y} \subset \mathrm{Lip}_{\beta\tau}[N_{g_2^{[w]}}K;\mathrm{Sel}(\dot V)]$, следовательно, $(w,\widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_{\beta\tau}[N_{g_2^{[w]}}K;\mathrm{Sel}(\dot V)]$.

Итак, для уравнения (2.2.5) выполнены условия теоремы 1.2.1, поэтому это уравнение имеет решение $\widehat{u} \in \mathrm{Sel}(\dot V) = B_{\mathbb{L}^{\theta_0}}(\dot x_0, R)$. А значит существует определенное на $[0,\tau]$ решение x задачи (2.2.1), (2.2.2) такое, что $\dot x \in B_{\mathbb{L}^{\theta_0}}(\dot x_0, R)$. $\square$

Пример 2.2.1. Пусть заданы измеримые неотрицательные функции $p, \widehat{y} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и число $\gamma \geq 0$. Предполагаем, что $p(t) \geq 1$ при п.в. $t \geq 0$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}^2(t)\big(p(t) + \gamma|x(t)|\big) = \widehat{y}(t), \quad t \geq 0. \tag{2.2.6}$$

Предположим, что

$$R := 2\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,1]} \widehat{y}(t) < \infty. \tag{2.2.7}$$

Покажем, что для любого $\tau > 0$ такого, что

$$2\gamma\, R\tau < 1, \quad 2\gamma\, R^2\tau < 1, \tag{2.2.8}$$

существует определенное на $[0,\tau]$ решение x уравнения (2.2.6), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = 0$ и такое, что $|\dot{x}(t)| \leq R$ при п.в. $t \in [0,\tau]$.

Зафиксируем произвольное $\tau > 0$, удовлетворяющее неравенствам (2.2.8). Определим формулой (2.1.10) функцию $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ и зададим соответствующее расстояние d^θ в пространстве $\mathbb{S}$. Для произвольных функций $v \in \mathbb{AC}$ и $w \in \mathbb{L}$ определим функции $g_1^{[v]}, g_2^{[w]} : [0,\tau] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ соотношениями

$$g_1^{[v]}(t,x) = x^2\big(p(t)+\gamma|v(t)|\big), \;\; g_2^{[w]}(t,x) = w^2(t)\big(p(t)+\gamma|x|\big), \;\; t \in [0,\tau], \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Положим $x_0(t) \equiv 0$ на $[0,\tau]$. Определим многозначные отображения $V, \dot{V} : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$ формулами (2.2.4).

Для любой функции $v \in \mathbb{AC}$ (в том числе для $v \in \mathrm{Sel}(V) \cap \mathbb{AC}$) функция $g_1^{[v]}$ удовлетворяет условию (2.1.8) с коэффициентом $\alpha = 1$ при любых $x, y \in \mathbb{S}$ (включая $y = \widehat{y}$ и все $x \in \mathrm{Sel}(\dot{V})$), $\Omega(t) \equiv \mathbb{R}$ (см. пример 2.1.6).

Для любого $w \in \mathrm{Sel}(\dot V)$ функция $g_2^{[w]}$ удовлетворяет условию (2.1.17) с коэффициентом $\beta = \max\{\gamma R, \gamma R^2\}$ при $y = \widehat{y}$, всех абсолютно непрерывных $x \in \mathrm{Sel}(V)$ и $\Omega = V$ (см. пример 2.1.6).

В силу неравенств (2.2.8) выполнено неравенство $\beta \le (2\tau)^{-1}$. Таким образом, $\alpha - \beta\tau \ge 2^{-1}$. Следовательно, вычисленное по формуле (2.2.7) значение R не превосходит значения (2.2.3). В соответствии с теоремой 2.2.1 существует определенное на $[0,\tau]$ решение x уравнения (2.2.6) такое, что $x(0) = 0$ и $|\dot x(t)| \le R$ п.в. на $[0,\tau]$.

2.2.2 Корректность решений задачи Коши

Используя теорему 2.2.1, получим условия устойчивости решений задачи Коши (2.2.1), (2.2.2) к малым изменениям функции $f\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и начального значения A.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ заданы: функция $f_n\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, являющаяся измеримой по первому аргументу и непрерывной по совокупности второго и третьего аргументов, измеримая функция $\widehat{y}_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ и число A_n. Рассмотрим уравнение

$$f_n\bigl(t, x(t), \dot x(t)\bigr) = \widehat{y}_n(t), \quad t \ge 0, \tag{2.2.9}$$

с начальным условием

$$x(0) = A_n. \tag{2.2.10}$$

Пусть задано определенное на некотором отрезке $[0,\tau]$ решение $\widehat{x}$ задачи (2.2.1), (2.2.2). Сформулируем достаточные условия существования при любом $n \in \mathbb{N}$ определенного на $[0,\tau]$ решения $\widehat{x}_n$ задачи (2.2.9), (2.2.10) такого, что последовательность $\{\dot{\widehat{x}}_n\}$ сходится к $\dot{\widehat{x}}$ в пространстве $\mathbb{L}([0,\tau], \mathbb{R})$.

Для произвольных функций $v \in \mathbb{AC}([0,\tau],\mathbb{R})$ и $w \in \mathbb{L}([0,\tau],\mathbb{R})$ определим функции $g_{1n}^{[v]}, g_{2n}^{[w]} : [0,\tau] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ соотношениями

$$g_{1n}^{[v]}(t,x) = f_n(t, v(t), x), \quad g_{2n}^{[w]}(t,x) = f_n(t, x, w(t)), \quad t \in [0,\tau], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Функции $g_{1n}^{[v]}, g_{2n}^{[v]}$, очевидно, удовлетворяют условиям Каратеодори.

Т е о р е м а 2.2.2. *Пусть* $\widehat{x} \in \mathbb{AC}([0,\tau],\mathbb{R})$ *— определенное на* $[0,\tau]$ *решение задачи Коши* (2.2.1), (2.2.2). *Пусть при каждом* $n \in \mathbb{N}$ *заданы числа* $\alpha_n > 0$ *и* $\beta_n \geq 0$ *такие, что* $\beta_n \tau < \alpha_n$. *Положим*

$$r_n := \frac{1}{\alpha_n - \beta_n \tau}\, d\Big(\widehat{y}_n(t),\, f_n\big(t,\, \widehat{x}(t) + A_n - A,\, \dot{\widehat{x}}(t)\big)\Big)\,,$$

определим многозначные отображения $V_n, \dot{V}_n : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$ *соотношениями*

$$V_n(t) = B_{\mathbb{R}}\big(\widehat{x}(t) + A_n - A,\, r_n t\big), \quad \dot{V}_n(t) = B_{\mathbb{R}}\big(\dot{\widehat{x}}(t), r_n\big), \quad t \in [0,\tau]. \quad (2.2.11)$$

Предположим, что для любой абсолютно непрерывной функции $v \in \mathrm{Sel}(V_n)$ *функция* $g_{1n}^{[v]}$ *удовлетворяет условию* (2.1.8) *при* $y = \widehat{y}\big|_{[0,\tau]}$, *всех* $x \in \mathrm{Sel}(\dot{V}_n)$, $\Omega(t) \equiv \mathbb{R}$; *для любого* $w \in \mathrm{Sel}(\dot{V}_n)$ *функция* $g_{2n}^{[w]}$ *удовлетворяет условию* (2.1.17) *при* $y = \widehat{y}\big|_{[0,\tau]}$, *всех абсолютно непрерывных функциях* $x \in \mathrm{Sel}(V_n)$ *и* $\Omega = V_n$. *Если при* $n \to \infty$ *выполнено* $r_n \to 0$, *то при любом* $n \in \mathbb{N}$ *задача* (2.2.9), (2.2.10) *разрешима и существует такое ее решение* $\widehat{x}_n \in \mathbb{AC}([0,\tau],\mathbb{R})$, *что при* $n \to \infty$ *имеет место сходимость* $\dot{\widehat{x}}_n \to \dot{\widehat{x}}$ *в пространстве* $\mathbb{L}^{\theta_0}([0,\tau],\mathbb{R})$.

Доказательство. Заметим, что функция $\widehat{x}(t) + A_n - A$ удовлетворяет начальному условию (2.2.10). При любом n для уравнения (2.2.9) выполнены условия теоремы 2.1.1 (с функцией $x_0(t) = \widehat{x}(t) + A_n - A$).

Согласно этой теореме при любом n существует решение $\widehat{x}_n$ уравнения (2.2.9) такое, что $\rho(\dot{\widehat{x}}_n, \dot{\widehat{x}}) \leq r_n$. Из этого неравенства, в силу сходимости $r_n \to 0$, получаем $\dot{\widehat{x}}_n \to \dot{\widehat{x}}$ при $n \to \infty$. □

§ 2.3. Интегральные уравнения и краевые задачи

Здесь рассматриваются интегральные уравнения, не разрешенные относительно искомой функции. Используются полученные в первой главе результаты об абстрактных уравнениях с отображениями, действующими из метрического пространства в пространство, на котором задано расстояние, а также утверждения пункта 2.1.1 второй главы об операторе Немыцкого в пространствах измеримых функций. В пункте 2.3.1 исследуются множества накрывания и липшицевости отображений, порождаемых интегральными уравнениями. В пункте 2.3.2 получены условия существования решений интегральных уравнений в пространстве измеримых (не обязательно суммируемых) функций и найдены оценки таких решений. В пункте 2.3.3 получены утверждения об устойчивости решений к изменениям функций, порождающих интегральное уравнение. В заключительном пункте 2.3.4 результаты об интегральных уравнениях применяются к исследованию краевых задач для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной. Рассматриваемая краевая задача сводится к интегральному уравнению, что позволяет воспользоваться результатами, полученными в пунктах 2.3.2 и 2.3.3.

2.3.1 Множества накрывания и липшицевости отображений, порождаемых интегральными уравнениями, в пространствах измеримых функций

Мы будем рассматривать интегральные уравнения в классе измеримых по Лебегу функций. Если окажется, что интеграл от некоторой измеримой функции не существует, будем писать, что этот интеграл равен ∞. Поэтому нам потребуется расширить вещественную прямую символом ∞. Обозначим такое множество через $\overline{\mathbb{R}}$, т. е. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Определим разность двух элементов, среди которых есть ∞, соотношениями

$$\infty - \infty = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \;\; x - \infty = \infty - x = \infty.$$

Определим также множество $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ и операцию вычисления модуля $|\cdot| : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, причем, будем полагать, что $|\infty| = +\infty$.

Пусть задана функция $\theta : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, удовлетворяющая условию $(\mathcal{A})$. Функция θ определяет расстояние в $\overline{\mathbb{R}}$, это пространство будем обозначать через $\overline{\mathbb{R}}^{\theta} := (\overline{\mathbb{R}}, \theta)$. В частности, «стандартная» метрика в $\overline{\mathbb{R}}$ определяется функцией

$$\theta_0 : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \forall z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{R}} \quad \theta_0(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|,$$

т. е. «обычное» метрическое пространство действительных чисел в принятых здесь обозначениях — это пространство $\overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} := (\overline{\mathbb{R}}, \theta_0)$.

Отметим, что сходимости в $\overline{\mathbb{R}}$ относительно расстояния θ и «стандартной» метрики θ_0 совпадают. Действительно, если для некоторых $z \in \overline{\mathbb{R}}$, $\{z_i\} \subset \overline{\mathbb{R}}$, выполнено $\theta(z_i, z) \to 0$, и тем не менее $\theta_0(z_i, z) := |z_i - z| \not\to 0$, то существует $\delta > 0$ и подпоследовательность $\{z_{i_j}\}$ такие, что $|z_{i_j} - z| \geq \delta$. Из (2.1.1) следует, что найдется $\gamma > 0$, для которого $\theta(z_{i_j}, z) \geq \gamma$, что противоречит соотношению $\theta(z_i, z) \to 0$. Обратно, в силу непрерывности функции $\theta(\cdot, z)$ в точке z получаем, что из сходимости $|z_i - z| \to 0$ следует $\theta(z_i, z) \to \theta(z, z) = 0$.

Так как сходимости в $\overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ и $\overline{\mathbb{R}}^{\theta_0}$ совпадают, то для действующих в $\overline{\mathbb{R}}$ функций свойства непрерывности не зависят от того, какое из расстояний θ или θ_0 задано в $\overline{\mathbb{R}}$. Также следствием доказанной эквивалентности сходимостей относительно расстояния θ и метрики θ_0 является совпадение замкнутых множеств пространств $\overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ и $\overline{\mathbb{R}}^{\theta_0}$ (соответственно, и совпадение открытых множеств этих пространств). Поэтому мы будем говорить о непрерывности функций, замкнутости (или открытости) множеств в $\overline{\mathbb{R}}$, не упоминая конкретное расстояние в этом пространстве.

Обозначим через $\overline{\mathbb{S}} = \overline{\mathbb{S}}([0,\tau],\overline{\mathbb{R}})$ множество измеримых (по Лебегу) функций $u : [0,\tau] \to \overline{\mathbb{R}}$. Для определения расстояния в $\overline{\mathbb{S}}$ будем предполагать, что функция θ суперпозиционно измерима, т. е. $\theta(z_1, z_2) \in \overline{\mathbb{S}}$ для любых $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{S}}$ (полученные в [46, с. 110], [80] условия суперпозиционной измеримости для функций, принимающих конечные значения, остаются верными, если функции принимают значения из пространства $\overline{\mathbb{R}}$). Расстояние в $\overline{\mathbb{S}}$ зададим формулой

$$d^{\theta} \colon \overline{\mathbb{S}} \times \overline{\mathbb{S}} \to \overline{\mathbb{R}}_+, \ \ \forall z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{S}} \ \ d^{\theta}(z_1, z_2) = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \theta(z_1(t), z_2(t)).$$

Обозначим $\overline{\mathbb{S}}^{\theta} = (\overline{\mathbb{S}}, d^{\theta})$. Рассмотренное выше в пункте 2.1.1 пространство $\mathbb{S}^{\theta}$ является подпространством определенного здесь пространства $\overline{\mathbb{S}}^{\theta}$.

Используя функцию θ_0, получим следующее расстояние в $\overline{\mathbb{S}}$:

$$d^{\theta_0} \colon \overline{\mathbb{S}} \times \overline{\mathbb{S}} \to \overline{\mathbb{R}}_+, \ \ \forall z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{S}} \ \ d^{\theta_0}(z_1, z_2) = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} |z_1(t) - z_2(t)|.$$

Очевидно d^{θ_0} — это метрика в $\overline{\mathbb{S}}$. Обозначим $\rho := d^{\theta_0}$, $\overline{\mathbb{S}}^{\theta_0} := (\overline{\mathbb{S}}, \rho)$. Рассмотренное в пункте 2.1.1 метрическое пространство $\mathbb{S}^{\theta_0}$ есть подпространства пространства $\overline{\mathbb{S}}^{\theta_0}$. Метрическое пространство $\overline{\mathbb{S}}^{\theta_0}$ является полным, шар $B_{\overline{\mathbb{S}}^{\theta_0}}(z_0, r) = \left\{ z \in \overline{\mathbb{S}} \,|\, \rho(z, z_0) \le r \right\}$ в этом пространстве — это множество измеримых функций $z : [0,\tau] \to \overline{\mathbb{R}}$ со значениями, удовлетворяющими включению $z(t) \in [z_0(t) - r, z_0(t) + r]$ при п.в. $t \in [0,\tau]$.

Теперь рассмотрим отображения, действующие в определенных здесь пространствах измеримых функций, которые будут использованы в исследовании интегральных уравнений.

Пусть задана удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $g : [0,\tau] \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ (т. е. для любых $x \in \mathbb{R}$ и п.в. $t \in [0,\tau]$ функция $g(\cdot,x) : [0,\tau] \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима, а функция $g(t,\cdot) : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ непрерывна). Отметим, что для такой функции при любом фиксированном $t \in [0,\tau]$ выполнено

$$\exists \tilde{x} \in \mathbb{R} \;\; g(t,\tilde{x}) \neq \infty \;\Rightarrow\; \forall x \in \mathbb{R} \;\; g(t,x) \neq \infty.$$

Это прямо следует из замкнутости следующих двух множеств: множества $\{x \in \mathbb{R} \,|\, g(t,x) \neq \infty\}$ и его дополнения $\{x \in \mathbb{R} \,|\, g(t,x) = \infty\}$ (замкнутость этих множеств очевидна: если $x_i \to x$, то $g(t,x_i) \to g(t,x)$, при этом в случае $g(t,x_i) \in \mathbb{R}$ получаем $g(t,x) \in \mathbb{R}$, а в случае $g(t,x_i) = \infty$ получаем $g(t,x) = \infty$).

Определим оператор Немыцкого соотношением

$$N_g : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}, \;\; \forall u \in \mathbb{S}^{\theta_0} \quad (N_g u)(t) = g(t,u(t)), \quad t \in [0,\tau]. \qquad (2.3.1)$$

Приведем два утверждения об операторе $N_g : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$, которые распространяют соответствующие результаты пункта 2.1.1 (см. предложения 2.1.1 и 2.1.2) на определенные здесь пространства измеримых функций.

Предложение 2.3.1. *Определенный соотношением* (2.3.1) *оператор* $N_g : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$ *является замкнутым.*

Несмотря на то, что функция θ здесь удовлетворяет менее ограничительным условиям, чем в предложении 2.1.1, доказательство сформулированного предложения не отличается от предложения 2.1.1, поэтому мы его опускаем.

Пусть задано измеримое многозначное отображение $\Phi : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$, значения которого $\Phi(t) \neq \emptyset$, $t \in [0,\tau]$, являются замкнутыми в $\mathbb{R}$ множествами. Определим множество измеримых сечений этого отображения

$$\mathrm{Sel}(\Phi) := \big\{ u \in \mathbb{S} \mid u(t) \in \Phi(t) \text{ при п.в. } t \in [0,\tau] \big\}.$$

Имеем $\mathrm{Sel}(\Phi) \neq \emptyset$.

Следующее предложение устанавливает связь множества накрывания оператора Немыцкого $N_g : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$ относительно $\mathrm{Sel}(\Phi) \subset \mathbb{S}^{\theta_0}$ и множества накрывания функции $g(t,\cdot) : \mathbb{R}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ относительно $\Phi(t) \subset \mathbb{R}^{\theta_0}$.

Предложение 2.3.2. *Пусть заданы* $x \in \mathbb{S}$, $z \in \overline{\mathbb{S}}$, $\alpha > 0$. *Если при п.в.* $t \in [0,\tau]$ *выполнено* $\big(x(t), z(t)\big) \in \mathrm{Cov}_{\alpha}\big[g(t,\cdot); \Phi(t)\big]$, *т. е. имеет место соотношение*

$$\exists u \in \Phi(t) \quad g(t,u) = z(t) \quad \text{и} \quad |x(t) - u| \leq \alpha^{-1}\theta\big(g(t,x(t)), z(t)\big),$$

то $(x,z) \in \mathrm{Cov}_{\alpha}\big[N_g; \mathrm{Sel}(\Phi)\big]$. *В частности, если справедливо включение* $\big(x(t), z(t)\big) \in \mathrm{Cov}_{\alpha}\big[g(t,\cdot); \mathbb{R}\big]$, *то* $(x,y) \in \mathrm{Cov}_{\alpha}\big[N_g; \mathbb{S}\big]$.

Сформулированное утверждение аналогично полученному в пункте 2.1.1 при более ограничительных требованиях на функцию θ предложению 2.1.2 о множестве накрывания оператора Немыцкого $\mathbb{S}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^{\theta}$. Тем не менее, доказательство этого результата сохраняется практически без изменений для оператора $\mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$, и поэтому здесь не приводятся.

Теперь рассмотрим нелинейный интегральный оператор следующего вида. Пусть задана удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $\overline{g} : [0,\tau] \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ и измеримая функция $\mathcal{K} : [0,\tau] \times [0,\tau] \to \mathbb{R}$. Определим отображение

$$\Upsilon : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}, \ \forall u \in \mathbb{S}^{\theta_0} \quad (\Upsilon u)(t) = \overline{g}\Big(t, \int_0^{\tau} \mathcal{K}(t,s)u(s)ds\Big), \ t \in [0,\tau]. \quad (2.3.2)$$

Этот оператор можно представить в виде композиции $\Upsilon = N_{\overline{g}}K$ линейного интегрального оператора

$$K : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta_0}, \;\; \forall u \in \mathbb{S} \;\; (Ku)(t) = \int_0^\tau \mathcal{K}(t,s)u(s)ds, \;\; t \in [0,\tau],$$

и оператора Немыцкого

$$N_{\overline{g}} : \overline{\mathbb{S}}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}, \;\; \forall y \in \overline{\mathbb{S}} \;\; (N_{\overline{g}}y)(t) = \overline{g}(t, y(t)), \;\; t \in [0,\tau].$$

Исследуем множество липшицевости оператора $N_{\overline{g}} : \overline{\mathbb{S}}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$. Установим его связь с множеством липшицевости функции $\overline{g} : [0,\tau] \times \overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$, порождающей этот оператор.

Пусть задано многозначное отображение $\Omega : [0,\tau] \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}$ такое, что $\Omega(t) \neq \emptyset, \; t \in [0,\tau]$. Будем предполагать, что это отображение имеет измеримое сечение, т. е.

$$\mathrm{Sel}(\Omega) := \big\{u \in \overline{\mathbb{S}} \mid u(t) \in \Omega(t) \text{ при п.в. } t \in [0,\tau]\big\} \neq \emptyset.$$

Предложение 2.3.3. *Пусть заданы* $v, z \in \overline{\mathbb{S}}, \;\; \beta \geq 0$. *Если при п.в.* $t \in [0,\tau]$ *выполнено* $\big(v(t), z(t)\big) \in \mathrm{Lip}_\beta\big[\overline{g}(t,\cdot); \Omega(t)\big]$, *т. е. имеет место соотношение*

$$\forall u \in \Omega(t) \;\; \overline{g}(t,u) = z(t) \;\Rightarrow\; \theta\big(\overline{g}(t, v(t)), z(t)\big) \leq \beta\big|v(t) - u\big|, \tag{2.3.3}$$

то $(v, z) \in \mathrm{Lip}_\beta\big[N_{\overline{g}}; \mathrm{Sel}(\Omega)\big]$.

Доказательство предложения 2.3.3 с очевидностью следует из определения множества липшицевости. Предложение 2.3.3 аналогично сформулированному в пункте 2.1.1 предложению 2.1.3, в котором было описано множество липшицевости порожденного функцией $g : [0,\tau] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ оператора Немыцкого в пространстве $\mathbb{S}$.

Предложение 2.3.4. *Пусть*

$$k_0 := \operatorname{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \int_0^\tau |\mathcal{K}(t,s)|ds < \infty, \tag{2.3.4}$$

заданы $x \in \mathbb{S}$, $z \in \overline{\mathbb{S}}$, $\beta \geq 0$ *и многозначное отображение* $\Phi : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$, *со значениями* $\Phi(t) \neq \emptyset$, $t \in [0,\tau]$, *и такое, что*

$$\mathrm{Sel}(\Phi) := \big\{ u \in \mathbb{S} \,|\, u(t) \in \Phi(t) \text{ при п.в. } t \in [0,\tau] \big\} \neq \emptyset.$$

Пусть для пары функций $v = Kx \in \overline{\mathbb{S}}$, $z \in \overline{\mathbb{S}}$ *и многозначного отображения* $\Omega : [0,\tau] \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}$,

$$\Omega(t) = (K\Phi)(t) := \Big\{ \int_0^\tau \mathcal{K}(t,s)u(s)ds, \ \forall u \in \mathrm{Sel}(\Phi) \Big\}, \quad t \in [0,\tau],$$

при п.в. $t \in [0,\tau]$ *выполнено* (2.3.3). *Тогда* $(x,z) \in \mathrm{Lip}_{k_0\beta}[\Upsilon; \mathrm{Sel}(\Phi)]$.

Доказательство. Для любого $u \in \mathrm{Sel}(\Phi)$ функция $Ku \in \overline{\mathbb{S}}$ является измеримым сечением многозначного отображения Ω, поэтому множество $\mathrm{Sel}(\Omega) \subset \overline{\mathbb{S}}$ не пусто.

Пусть для некоторой функции $\widehat{u} \in \mathrm{Sel}(\Phi)$ выполнено $N_{\overline{g}}K\widehat{u} = z$. Определим $u := K\widehat{u}$. Очевидно выполнено $u \in \mathrm{Sel}(\Omega)$, $N_{\overline{g}}u = z$. Поскольку справедливо соотношение (2.3.3), в силу предложения 2.3.3 имеем $(v,z) \in \mathrm{Lip}_\beta[N_{\overline{g}}; \mathrm{Sel}(\Omega)]$. Согласно определению множества липшицевости $\mathrm{Lip}_\beta[N_{\overline{g}}; \mathrm{Sel}(\Omega)]$ получаем

$$d^\theta\big(N_{\overline{g}}Kx, z\big) = d^\theta\big(N_{\overline{g}}v, z\big) \leq \beta\rho(v,u) = \beta\rho(Kx, K\widehat{u}).$$

Следовательно,

$$d^\theta\big(N_{\overline{g}}Kx, z\big) \leq \beta \operatorname{vrai\,sup}_{s\in[0,\tau]} \big|x(s) - \widehat{u}(s)\big| \operatorname{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \int_0^\tau |\mathcal{K}(t,s)|ds = k_0\beta\rho(x,\widehat{u}).$$

Итак, $(x,z) \in \mathrm{Lip}_{k_0\beta}[N_{\overline{g}}K; \mathrm{Sel}(\Phi)]$. $\square$

З а м е ч а н и е 2.3.1. *Условие* (2.3.4) *выполнено, например, в случае, если ядро* $\mathcal{K}(t,s)$ *линейного интегрального оператора* $K : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta_0}$ *мажорируется суммируемой функцией, т. е. существует такая функция* $M \in \mathbb{S}$, *что выполнено соотношение*

$$|\mathcal{K}(t,s)| \le M(s) \ \ \text{\textit{при п.в.}}\ (t,s) \in [0,\tau]\times[0,\tau] \ \ \text{\textit{и}} \ \ \int_0^\tau M(s)ds < \infty. \quad (2.3.5)$$

2.3.2 Существование решений интегральных уравнений

Применим полученные утверждения к исследованию разрешимости интегрального уравнения. Как и выше предполагаем, что задана измеримая функция $\mathcal{K} : [0,\tau] \times [0,\tau] \to \mathbb{R}$, которая удовлетворяет условию (2.3.4). Пусть также заданы $\widehat{z} \in \overline{\mathbb{S}}$ и функция $f : [0,\tau] \times \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, измеримая по первому аргументу и непрерывная по совокупности второго и третьего аргументов. Рассмотрим уравнение

$$f\big(t, \int_0^\tau \mathcal{K}(t,s)x(s)ds, x(t)\big) = \widehat{z}(t), \quad t \in [0,\tau], \qquad (2.3.6)$$

относительной неизвестной функции $x \in \mathbb{S}$.

Для произвольного $x \in \mathbb{S}$ определим функции $\overline{g}^{[x]} : [0,\tau] \times \overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ и $g^{[x]} : [0,\tau] \times \mathbb{R}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ соотношениями

$$\forall t \in [0,\tau] \ \ \forall u \in \overline{\mathbb{R}} \ \ \overline{g}^{[x]}(t,u) = f(t,u,x(t)),$$
$$\forall t \in [0,\tau] \ \ \forall u \in \mathbb{R} \ \ g^{[x]}(t,u) = f(t, \int_0^\tau \mathcal{K}(t,s)x(s)ds, u).$$

Функции $g^{[x]}, \overline{g}^{[x]}$, очевидно, удовлетворяют условиям Каратеодори.

Т е о р е м а 2.3.1. *Пусть задана функция* $x_0 \in \mathbb{S}$ *такая, что*

$$R_0 := \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \theta\big(\widehat{z}(t), f(t, v_0(t), x_0(t))\big) < \infty,$$

где

$$v_0(t) := (Kx_0)(t) = \int_0^\tau \mathcal{K}(t,s)x_0(s)ds.$$

Пусть $\alpha > 0$, $\sigma \in (0,\alpha)$. *Положим* $R = \sigma^{-1}R_0$ *и определим многозначное отображение* $\overline{\Omega} : [0,\tau] \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}$ *соотношением*

$$\forall t \in [0,\tau] \ \ \overline{\Omega}(t) := [v_0(t) - k_0R, v_0(t) + k_0R].$$

Пусть при любом $x \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0,R)$ *при п.в.* $t \in [0,\tau]$ *выполнены включения*

$$\big(x(t), \widehat{z}(t)\big) \in \mathrm{Cov}_\alpha\big[g^{[x]}(t,\cdot);\mathbb{R}\big], \quad \big((Kx)(t), \widehat{z}(t)\big) \in \mathrm{Lip}_\beta\big[\overline{g}^{[x]}(t,\cdot);\overline{\Omega}(t)\big],$$

где $\beta := {k_0}^{-1}(\alpha - \sigma)$. *Тогда в шаре* $B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0,R)$ *существует решение уравнения* (2.3.6).

Доказательство. Определим отображение $F : \mathbb{S}^{\theta_0} \times \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$,

$$\forall x, u \in \mathbb{S}^{\theta_0} \ \ (F(x,u))(t) = f\big(t, (Ku)(t), x(t)\big), \quad t \in [0,\tau].$$

и отображение $G : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$,

$$\forall x \in \mathbb{S}^{\theta_0} \ \ G(x) = F(x,x).$$

Уравнение (2.3.6), таким образом, записывается в виде (1.2.1). Проверим для такого уравнения выполнение условий теоремы 1.2.1.

Прежде всего отметим, что пространство $\mathbb{S}^{\theta_0}$ является полным.

Покажем, что отображения F, G замкнуты. Пусть для произвольных последовательностей $\{x_i\}, \{u_i\} \subset \mathbb{S}^{\theta_0}$, элементов $x, u \in \mathbb{S}^{\theta_0}$ и $z \in \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$ при $i \to \infty$ имеют место сходимости

$$\rho(x,x_i) \to 0, \quad \rho(u,u_i) \to 0, \quad d^{\theta}\big(z, F(x_i,u_i)\big) \to 0.$$

Так как $\rho(Ku, Ku_i) \le k_0\rho(u, u_i),$ в силу второго из перечисленных соотношений получаем $\rho(Ku, Ku_i) \to 0.$ Согласно определению расстояний ρ, d^θ при п.в. $t \in [0, \tau]$ выполнено

$$\theta_0\big(x(t), x_i(t)\big) \to 0, \quad \theta_0\big((Ku)(t), (Ku_i)(t)\big) \to 0, \quad \theta\big(z(t), (F(x_i, u_i))(t)\big) \to 0.$$

А так как сходимости в пространствах $\overline{\mathbb{R}}^\theta$ и $\overline{\mathbb{R}}^{\theta_0}$ совпадают, получаем

$$x_i(t) \to x(t), \quad (Ku_i)(t) \to (Ku)(t), \quad (F(x_i, u_i))(t) \to z(t).$$

Отсюда в силу непрерывности при п.в. $t \in [0, \tau]$ функции $f(t, \cdot, \cdot)$ (по совокупности двух аргументов) получаем, что

$$f(t, (Ku_i)(t), x_i(t)) \to f(t, (Ku)(t), x(t)) \ \Leftrightarrow\ (F(x_i, u_i))(t) \to (F(x, u))(t).$$

В то же время, $(F(x_i, u_i))(t) \to z(t),$ следовательно, $(F(x, u))(t) = z(t),$ $t \in [0, \tau].$ Таким образом, доказано, что отображение F является замкнутым, следовательно, отображение G также замкнуто.

Для произвольного $x \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, R)$ оператор $F(x, \cdot)$ — это оператор $\Upsilon :$ $\mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^\theta,$ определяемый формулой (2.3.2), в которой $\overline{g} := \overline{g}^{[x]}.$ Определим многозначное отображение

$$\Phi : [0, \tau] \rightrightarrows \mathbb{R}, \quad \forall t \in [0, \tau] \ \ \Phi(t) := [x_0(t) - R, x_0(t) + R].$$

Очевидно, что $\Omega(t) := (K\Phi)(t) \subset \overline{\Omega}(t).$ Следовательно (см. (1.1.9)),

$$\big((Kx)(t), \widehat{z}(t)\big) \in \mathrm{Lip}_\beta\big[\overline{g}^{[x]}(t, \cdot); \Omega(t)\big].$$

Согласно предложению 2.3.4 имеем $(x, \widehat{z}) \in \mathrm{Lip}_{k_0\beta}[F(x, \cdot); \mathrm{Sel}(\Phi)].$ Учитывая, что $\mathrm{Sel}(\Phi) = B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, R),$ получаем $(x, \widehat{z}) \in \mathrm{Lip}_{k_0\beta}[F(x, \cdot); B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, R)].$ Заметим, что здесь коэффициент липшицевости $k_0\beta = \alpha - \sigma.$

Для произвольного $x \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, R)$ оператор $F(\cdot, x) : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$ является оператором Немыцкого $N_{g^{[x]}} : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$, порожденным функцией $g^{[x]} : [0, \tau] \times \mathbb{R}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$. Согласно предложению 2.3.2 имеет место включение $(x, \widehat{z}) \in \mathrm{Cov}_{\alpha}[F(\cdot, x); \mathbb{S}]$.

Таким образом, для уравнения (2.3.6) выполнены все условия теоремы 2.1.1. Согласно этой теореме в шаре $B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, R)$ существует решение уравнения (2.3.6). $\square$

Замечание 2.3.2. *В условиях теоремы 2.3.1 утверждается существование решения x интегрального уравнения* (2.3.6)*, принадлежащего шару $B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(x_0, R)$ в пространстве измеримых на $[0, \tau]$ функций. Это включение означает, что для решения при п.в. $t \in [0, \tau]$ выполнено неравенство $x_0(t) - R \leq x(t) \leq x_0(t) + R$. Из полученной оценки следует, что если функция x_0 суммируема с некоторой p-ой степенью на $[0, \tau]$, то решение x также суммируемо с p-ой степенью на $[0, \tau]$.*

2.3.3 Корректность решений интегральных уравнений

Рассмотрим задачу об устойчивости решений интегрального уравнения (2.3.6) к изменениям функций $f, \mathcal{K}, \widehat{y}$.

Пусть заданы измеримые функции $\mathcal{K}_n : [0, \tau] \times [0, \tau] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие условию

$$k_n := \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [0, \tau]} \int_0^{\tau} |\mathcal{K}_n(t, s)| ds < \infty, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.3.7}$$

Пусть также заданы функции $\widehat{y}_n \in \overline{\mathbb{S}}$ и функции $f_n : [0, \tau] \times \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, измеримые по первому аргументу и непрерывные по совокупности второго и третьего аргументов. Рассмотрим последовательность уравнений

$$f_n\bigl(t, \int_0^\tau \mathcal{K}_n(t,s)x(s)ds, x(t)\bigr) = \widehat{y}_n(t), \quad t \in [0,\tau]. \tag{2.3.8}$$

Получим условия существования при каждом n решения $x = \xi_n \in \mathbb{S}$ уравнения (2.3.8) такого, что последовательность $\{\xi_n\} \subset \mathbb{S}$ сходится к решению $x = \xi \in \mathbb{S}$ уравнения (2.3.6) в метрике $\rho = d^{\theta_0}$.

Для произвольной функции $x \in \mathbb{S}$ при любом $n \in \mathbb{N}$ определим функции $\overline{g}_n^{[x]} : [0,\tau] \times \overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$, $g_n^{[x]} : [0,\tau] \times \mathbb{R}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ соотношениями

$$\forall t \in [0,\tau] \;\; \forall u \in \overline{\mathbb{R}} \quad \overline{g}_n^{[x]}(t,u) = f_n(t,u,x(t)),$$
$$\forall t \in [0,\tau] \;\; \forall u \in \mathbb{R} \quad g_n^{[x]}(t,u) = f_n(t, \int_0^\tau \mathcal{K}_n(t,s)x(s)ds, u).$$

Заданные здесь функции $g_n^{[x]}, \overline{g}_n^{[x]}$, очевидно, измеримы по первому аргументу и непрерывны по второму аргументу. Определим также при любом $n \in \mathbb{N}$ операторы $K_n : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta_0}$ соотношением

$$\forall u \in \mathbb{S} \;\; (K_n u)(t) = \int_0^\tau \mathcal{K}_n(t,s)u(s)ds, \quad t \in [0,\tau].$$

Т е о р е м а 2.3.2. *Пусть задано решение $\xi \in \mathbb{S}$ уравнения* (2.3.6). *Предположим, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ существует $\sigma_n > 0$ такое, что при $n \to \infty$ имеет место сходимость*

$$R_n := \frac{1}{\sigma_n} \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [0,1]} \theta\left(\widehat{y}_n(t),\; f_n\bigl(t, (K_n\xi)(t), \xi(t)\bigr)\right) \to 0.$$

Далее, пусть для всех $n \in \mathbb{N}$ существует $\alpha_n > \sigma_n$ такое, что для любой функции $x \in U_n := B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(\xi, R_n)$ при п.в. $t \in [0,\tau]$ выполнены включения

$$\bigl(x(t), \widehat{y}_n(t)\bigr) \in \mathrm{Cov}_{\alpha_n}\bigl[g_n^{[x]}(t,\cdot); \mathbb{R}\bigr], \tag{2.3.9}$$

$$\bigl((K_n x)(t), \widehat{y}_n(t)\bigr) \in \mathrm{Lip}_{\beta_n}\bigl[\overline{g}_n^{[x]}(t,\cdot); \overline{\Omega}_n(t)\bigr], \tag{2.3.10}$$

где $\beta_n := {k_n}^{-1}(\alpha_n - \sigma_n)$, $\overline{\Omega}_n(t) := [(K_n\xi)(t) - k_nR_n,\ (K_n\xi)(t) + k_nR_n]$. *Тогда для любого* $n \in \mathbb{N}$ *существует решение* $x = \xi_n \in \mathbb{S}^{\theta_0}$ *уравнения* (2.3.8) *такое, что последовательность* $\{\xi_n\}$ *при* $n \to \infty$ *сходится в пространстве* $\mathbb{S}^{\theta_0}$ *к заданному решению* ξ *уравнения* (2.3.6).

Доказательство. При любом $n \in \mathbb{N}$ для уравнения (2.3.8) выполнены все условия теоремы 2.3.1. Согласно теореме 2.3.1 при любом $n \in \mathbb{N}$ существует решение ξ_n уравнения (2.3.8) такое, что $\xi_n \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(\xi, R_n)$, т. е. $\rho(\xi, \xi_n) \leq R_n$. Из этого неравенства, в силу предположения сходимости $R_n \to 0$, получаем $\xi_n \to \xi$. $\square$

З а м е ч а н и е 2.3.3. *В большинстве работ по интегральным уравнениям исследуется уравнения, разрешенное относительно неизвестной функции. Такие уравнения обычно рассматриваются в банаховых пространствах непрерывных или суммируемых функций. Полученные здесь теорема 2.3.2, как и рассмотренная выше теорема 2.3.1, позволяет исследовать не разрешенное относительно неизвестной функции интегральное уравнение не только в классе измеримых функций, но и в пространстве* $\mathbb{L}_p$ *суммируемых со степенью* $p \in [1, \infty]$ *на отрезке* $[0, \tau]$ *функций. При выполнении предположений теоремы 2.3.2, если дополнительно известно, что решение* ξ *«предельного уравнения»* (2.3.6) *принадлежит пространству* $\mathbb{L}_p$, *то для любого* $n \in \mathbb{N}$ *существует решение* $\xi_n \in \mathbb{L}_p$ *уравнения* (2.3.8) *такое, что последовательность* $\{\xi_n\}$ *сходится к функции* ξ *равномерно, а следовательно и по норме пространства* $\mathbb{L}_p$.

2.3.4 Краевые задачи для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной

Применим результаты об интегральном уравнении, изложенные в пунктах 2.3.2, 2.3.3, к исследованию краевой задачи для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной.

В рассматриваемых ниже функциональных пространствах элементами являются функции, определенные на $[0,\tau]$ и имеющие значения в $\mathbb{R}$, поэтому в обозначениях функциональных пространств области определения и значений функций — их элементов будем опускать.

Итак, пусть заданы: измеримая функция $\widehat{y}\,:\,[0,\tau]\to\mathbb{R}$ и функция $f\,:\,\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, измеримая по первому аргументу и непрерывная по совокупности второго и третьего аргументов. Рассмотрим дифференциальное уравнение (2.2.1) при $t\in[0,\tau]$. Получим условия существования решения $x\in\mathbb{AC}$ этого уравнения, удовлетворяющего краевому условию

$$\mathfrak{L}x := \lambda x(0)+\int_0^\tau \Lambda(s)\dot{x}(s)ds = A. \tag{2.3.11}$$

Здесь $\lambda, A\in\mathbb{R}$, $\Lambda\in\mathbb{L}_\infty$. Отметим, что любой линейный непрерывный функционал, определенный на пространстве $\mathbb{AC}$ со стандартной нормой $\|x\|_{\mathbb{AC}}=|x(0)|+\|\dot{x}\|_{\mathbb{L}}$, $\|v\|_{\mathbb{L}}=\int_0^\tau|v(s)|ds$, представим в виде $\mathfrak{L}$ с единственными $\lambda\in\mathbb{R}$ и $\Lambda\in\mathbb{L}_\infty$ (см. [19, § 2.1]).

Покажем, что краевая задача (2.2.1), (2.3.11) может быть записана в виде эквивалентного интегрального уравнения (2.3.6), и поэтому к исследованию краевой задачи (2.2.1), (2.3.11) применимы теоремы 2.3.1, 2.3.2.

Естественно, далее предполагается, что функция Λ не нулевая (иначе краевое условие превратится в начальное, а задача Коши выше рассмотрена и здесь нас не интересует). Рассмотрим две ситуации $\lambda\neq 0$ и $\lambda=0$, в каждой из которых воспользуемся заменой переменных, определяемой вспомогательной однозначно разрешимой краевой задачей с тем же краевым условием (2.3.11). Такой метод редукции краевых задач к интегральным уравнениям был предложен Н.В. Азбелевым и носит название «W-подстановка Азбелева» (подробнее для более общих функционально-дифференциальных уравнений W-подстановка описана в [19, с. 53]).

Сначала пусть $\lambda \neq 0$. В этом случае рассмотрим вспомогательное дифференциальное уравнение простейшего вида

$$(\mathcal{L}x)(t) := \dot{x}(t) = v(t), \quad t \in [0, \tau]. \tag{2.3.12}$$

Это уравнение сопоставляет каждой абсолютно непрерывной функции, удовлетворяющей условию (2.3.11), функцию $v \in \mathbb{L}$. Единственным решением задачи (2.3.12), (2.3.11) является

$$x(t) = \frac{A}{\lambda} - \int_0^\tau \frac{\Lambda(s)}{\lambda} v(s)ds + \int_0^t v(s)ds. \tag{2.3.13}$$

Соотношение (2.3.13) сопоставляет каждой функции $v \in \mathbb{L}$ абсолютно непрерывную функцию, удовлетворяющую условию (2.3.11). Таким образом, подставив (2.3.13) в уравнение (2.2.1), получим уравнение

$$f\big(t, \frac{A}{\lambda} - \int_0^\tau \frac{\Lambda(s)}{\lambda} v(s)ds + \int_0^t v(s)ds, \, v(t)\big) = \widehat{y}(t), \tag{2.3.14}$$

которое эквивалентно краевой задаче (2.2.1), (2.3.11) в следующем смысле. Краевая задача (2.2.1), (2.3.11) имеет решение тогда и только тогда, когда разрешимо в $\mathbb{L}$ уравнение (2.3.14), а формула (2.3.13) позволяет выразить решение $x \in \mathbb{AC}$ задачи (2.2.1), (2.3.11) через решение $v \in \mathbb{L}$ уравнения (2.3.14).

Уравнение (2.3.14) является интегральным, к его исследованию можно применить полученные в пунктах 2.3.2, 2.3.3 результаты. Действительно, обозначим

$$\mathrm{f}(t,x,v)=f(t,\,\frac{A}{\lambda}+x,v),$$

$$\mathrm{K}(t,s)=\begin{cases}1-\frac{\Lambda(s)}{\lambda} & \text{при } 0\le s\le t\le\tau,\\ \quad -\frac{\Lambda(s)}{\lambda} & \text{при } 0\le t<s\le\tau,\end{cases} \tag{2.3.15}$$

и запишем уравнение (2.3.14) следующим образом:

$$\mathrm{f}\big(t,\int_0^\tau \mathrm{K}(t,s)v(s)ds,v(t)\big)=\widehat{y}(t),\quad t\in[0,\tau],$$

то есть представим его в виде (2.3.6). Если для полученного уравнения справедливы условия теоремы 2.3.1 с суммируемой функцией x_0, то существует суммируемое решение интегрального уравнения (2.3.14) (см. замечание 2.3.2), а следовательно, задача (2.2.1), (2.3.11) разрешима.

Рассмотрим краевую задачу (2.2.1), (2.3.11), предполагая в краевом условии коэффициент $\lambda=0$, т. е. это условие теперь будет иметь вид

$$\mathfrak{L}x:=\int_0^\tau \Lambda(s)\dot{x}(s)ds=A, \tag{2.3.11$'$}$$

где $A\in\mathbb{R}$, $\Lambda\in\mathbb{L}_\infty$. В этом случае уравнение (2.3.12) в качестве вспомогательного использовать нельзя, так как для него краевая задача с условием $(2.3.11')$ разрешима не при всех $y\in\mathbb{L}$. Для рассматриваемого здесь условия в качестве вспомогательного выберем дифференциальное уравнение

$$(\mathcal{L}x)(t):=\dot{x}(t)-\Lambda(t)x(t)=v(t),\quad t\in[0,\tau]. \tag{2.3.16}$$

При любой функции $v\in\mathbb{L}$ существует единственное решение краевой задачи для уравнения (2.3.16) с условием $(2.3.11')$, найдем его. Общим решением уравнения (2.3.16) является функция

$$x(t)=CM(t)+\int_0^t \frac{M(t)}{M(s)}v(s)ds,\quad \text{где}\ \ M(t)=\exp\Big(\int_0^t \Lambda(s)ds\Big).$$

Производную этой функции

$$\dot{x}(t) = v(t) + CM(t)\Lambda(t) + \int_0^t \frac{\Lambda(t)M(t)}{M(s)}\, v(s)ds$$

подставим в условие $(2.3.11')$

$$\int_0^\tau \Lambda(s)v(s)ds + C\int_0^\tau M(s)\Lambda(s)^2 ds + \int_0^\tau \Lambda(\nu)\int_0^\nu \frac{\Lambda(\nu)M(\nu)}{M(s)}\, v(s)dsd\nu = A.$$

Из этого уравнения найдем постоянную C. Предварительно поменяем порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^\tau \Lambda(\nu)\int_0^\nu \frac{\Lambda(\nu)M(\nu)}{M(s)}\, v(s)dsd\nu = \int_0^\tau \frac{v(s)}{M(s)}\int_s^\tau \Lambda(\nu)^2 M(\nu)d\nu ds$$

и обозначим

$$\Delta(t) = \int_t^\tau \Lambda(\nu)^2 M(\nu)d\nu, \quad t \in [0,\tau].$$

Отметим, что поскольку $M(t) > 0$ при всех $t \in [0,\tau]$, а функция Λ не нулевая на $[0,\tau]$, справедливо неравенство $\Delta(0) \neq 0$. Итак,

$$C = \frac{A}{\Delta(0)} - \int_0^\tau \frac{\Lambda(s)}{\Delta(0)} v(s)ds - \int_0^\tau \frac{\Delta(s)}{M(s)\Delta(0)} v(s)ds,$$

и решением задачи (2.3.16), $(2.3.11')$ является

$$x(t) = \frac{AM(t)}{\Delta(0)} - \int_0^\tau \frac{M(t)\Lambda(s)}{\Delta(0)}\, v(s)ds - \int_0^\tau \frac{M(t)\Delta(s)}{M(s)\Delta(0)}\, v(s)ds + \int_0^t \frac{M(t)}{M(s)}\, v(s)ds.$$

Определим функцию (называемую функцией Грина данной задачи)

$$\mathrm{K}(t,s) = \begin{cases} 1 - \dfrac{M(t)\Lambda(s)}{\Delta(0)} - \dfrac{M(t)\Delta(s)}{M(s)\Delta(0)} & \text{при } 0 \le s \le t \le \tau, \\ -\dfrac{M(t)\Lambda(s)}{\Delta(0)} - \dfrac{M(t)\Delta(s)}{M(s)\Delta(0)} & \text{при } 0 \le t < s \le \tau, \end{cases} \tag{2.3.17}$$

и запишем через нее решение задачи (2.3.16), $(2.3.11')$:

$$x(t) = \frac{AM(t)}{\Delta(0)} + \int_0^\tau \mathrm{K}(t,s)\, v(s)ds. \tag{2.3.18}$$

Определим функции $\mathrm{f}, \mathbf{f} : [0,\tau] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathbf{f}(t,x,v) = f(t,\,x,\,v + \Lambda(t)x), \quad \mathrm{f}(t,x,v) = \mathbf{f}(t,\,\frac{AM(t)}{\Delta(0)} + x,\,v). \tag{2.3.19}$$

Подставим (2.3.18) в уравнение (2.2.1), получим интегральное уравнение

$$\mathrm{f}\big(t,\,\int_0^\tau \mathrm{K}(t,s)\,v(s)ds,\,v(t)\big) = \widehat{y}(t), \tag{2.3.20}$$

которое эквивалентно краевой задаче (2.2.1), $(2.3.11')$.

Итак, и в случае $\lambda \neq 0$, и в случае $\lambda = 0$ краевая задача (2.2.1), (2.3.11) записывается в виде интегрального уравнения (2.3.20). В первом случае в этом уравнении функции K, f определяются соотношениями (2.3.15), во втором случае — соотношениями (2.3.17), (2.3.19).

Для формулировки утверждения о разрешимости краевой задачи (2.2.1), (2.3.11) введем следующие дополнительные обозначения. Для любого $v \in \mathbb{L}$ обозначим

$$(\mathbf{K}v)(t) = \int_0^\tau \mathrm{K}(t,s)v(s)ds.$$

Далее, положим

$$\mathrm{k}_0 = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \int_0^\tau |\mathrm{K}(t,s)|ds.$$

Для любой функции $v \in \mathbb{L}$ определим функции $\overline{\mathrm{g}}^{[v]} : [0,\tau] \times \overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$, $\mathrm{g}^{[v]} : [0,\tau] \times \mathbb{R}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ соотношениями

$$\forall t \in [0,\tau] \;\; \forall u \in \mathbb{R} \quad \overline{\mathrm{g}}^{[v]}(t,u) = \mathrm{f}(t,u,v(t)), \quad \overline{\mathrm{g}}^{[v]}(t,\infty) = \infty,$$
$$\forall t \in [0,\tau] \;\; \forall u \in \mathbb{R} \quad \mathrm{g}^{[v]}(t,u) = \mathrm{f}(t, \int_0^\tau \mathrm{K}(t,s)v(s)ds, u).$$

Из теоремы 2.3.1 выводится следующее утверждение.

Т е о р е м а 2.3.3. *Пусть задана функция* $v_0 \in \mathbb{L}$ *такая, что*

$$R_0 := \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [0,\tau]} \theta\big(\widehat{y}(t),\, \mathrm{f}(t, u_0(t), v_0(t))\big) < \infty,$$

где

$$u_0(t) := (\mathbf{K}v_0)(t) = \int_0^\tau \mathrm{K}(t,s) v_0(s) ds.$$

Пусть $\alpha > 0$, $\sigma \in (0, \alpha)$. *Положим* $R = \sigma^{-1} R_0$ *и определим многозначное отображение* $\overline{\Omega} : [0, \tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$ *соотношением*

$$\forall t \in [0,\tau] \;\; \overline{\Omega}(t) := [u_0(t) - \mathrm{k}_0 R, u_0(t) + \mathrm{k}_0 R].$$

Пусть при любом $v \in B_{\mathbb{L}^{\theta_0}}(v_0, R)$ *при п.в.* $t \in [0, \tau]$ *выполнены включения*

$$\big(v(t), \widehat{y}(t)\big) \in \mathrm{Cov}_\alpha\big[\mathrm{g}^{[v]}(t, \cdot); \mathbb{R}\big], \quad \big((\mathbf{K}v)(t), \widehat{y}(t)\big) \in \mathrm{Lip}_\beta\big[\overline{\mathrm{g}}^{[v]}(t, \cdot); \overline{\Omega}(t)\big],$$

где $\beta := {\mathrm{k}_0}^{-1}(\alpha - \sigma)$. *Тогда существует решение* x *краевой задачи* (2.2.1), (2.3.11) *такое, что* $\mathcal{L}x \in B_{\mathbb{L}^{\theta_0}}(v_0, R)$.

Аналогично, используя эквивалентное краевой задаче (2.2.1), (2.3.11) интегральное уравнение (2.3.20), из теоремы 2.3.2 в качестве следствия можно получить условия устойчивости решения краевой задачи к изменениям функций, определяющих дифференциальное уравнение и краевое условие.

При каждом $n \in \mathbb{N}$ для уравнения (2.2.9) рассмотрим краевую задачу с условием

$$\mathfrak{L}x := \lambda x(0) + \int_0^\tau \Lambda(s) \dot{x}(s) ds = A_n. \tag{2.3.21}$$

Здесь $\lambda, A_n \in \mathbb{R}$, $\Lambda \in \mathbb{L}_\infty$. Пусть задано решение $\widehat{x}$ задачи (2.2.1), (2.3.11). Сформулируем достаточные условия существования при любом $n \in \mathbb{N}$ решения $\widehat{x}_n$ задачи (2.2.9), (2.3.21) такого, что последовательность $\{\widehat{x}_n\}$ сходится некоторым образом к $\widehat{x}$.

Краевая задача (2.2.9), (2.3.21) записывается в виде эквивалентного интегрального уравнения (2.3.8) следующим образом.

В случае $\lambda \neq 0,$ обозначим

$$\mathrm{f}_n(t,x,v) = f_n(t,\,\frac{A_n}{\lambda} + x, v),$$

$$\mathrm{K}(t,s) = \begin{cases} 1 - \frac{\Lambda(s)}{\lambda} & \text{при } 0 \leq s \leq t \leq \tau, \\ \quad -\frac{\Lambda(s)}{\lambda} & \text{при } 0 \leq t < s \leq \tau. \end{cases}$$

Если же $\lambda = 0,$ то полагаем

$$M(t) = \exp\Big(\int_0^t \Lambda(s)ds\Big), \quad \Delta(t) = \int_t^\tau \Lambda(\nu)^2 M(\nu) d\nu, \quad t \in [0,\tau].$$

$$\mathrm{f}_n(t,x,v) = f_n(t,\,\frac{A_n M(t)}{\Delta(0)} + x,\, v + \frac{A_n \Lambda(t) M(t)}{\Delta(0)} + \Lambda(t)x),$$

$$\mathrm{K}(t,s) = \begin{cases} 1 - \dfrac{M(t)\Lambda(s)}{\Delta(0)} - \dfrac{M(t)\Delta(s)}{M(s)\Delta(0)} & \text{при } 0 \leq s \leq t \leq \tau, \\ \quad -\dfrac{M(t)\Lambda(s)}{\Delta(0)} - \dfrac{M(t)\Delta(s)}{M(s)\Delta(0)} & \text{при } 0 \leq t < s \leq \tau. \end{cases}$$

В этих обозначениях краевая задача (2.2.9), (2.3.21) относительно функции $v = \mathcal{L}x \in \mathbb{L}$ эквивалентна интегральному уравнению

$$\mathrm{f}_n\big(t,\,\int_0^\tau \mathrm{K}(t,s)\, v(s) ds,\, v(t)\big) = \widehat{y}_n(t).$$

Применим к этому уравнению теорему 2.3.2.

Обозначим

$$\mathrm{k}_0 = \operatorname{vrai}\sup_{t\in[0,\tau]} \int_0^\tau |\mathrm{K}(t,s)| ds.$$

Для любого $v \in \mathbb{L}$ положим $(\mathbf{K}v)(t) = \int_0^\tau \mathrm{K}(t,s)v(s)ds$ и определим функции $\overline{\mathrm{g}}_n^{[v]} : [0,\tau] \times \overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta},$ $\mathrm{g}_n^{[v]} : [0,\tau] \times \mathbb{R}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ соотношениями

$$\forall t \in [0,\tau] \;\; \forall u \in \mathbb{R} \;\;\; \overline{\mathrm{g}}_n^{[v]}(t,u) = \mathrm{f}_n(t,u,v(t)), \;\; \overline{\mathrm{g}}_n^{[v]}(t,\infty) = \infty,$$

$$\forall t \in [0,\tau] \;\; \forall u \in \mathbb{R} \;\;\; \mathrm{g}_n^{[v]}(t,u) = \mathrm{f}_n(t,(\mathbf{K}v)(t),u).$$

Т е о р е м а 2.3.4. *Пусть задано решение* $\widehat{x}\in\mathbb{AC}$ *краевой задачи* (2.2.1), (2.3.11). *Обозначим* $\widehat{v}(t) := (\mathcal{L}\widehat{x})(t)$, $\widehat{u}(t) := (\mathbf{K}\widehat{v})(t)$, $t \in [0,\tau]$. *Предположим, что при каждом* $n\in\mathbb{N}$ *существует такое* $\sigma_n > 0$, *что при* $n\to\infty$ *имеет место сходимость*

$$R_n := \frac{1}{\sigma_n}\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]}\theta\big(\widehat{y}_n(t),\, \mathrm{f}_n(t,\widehat{u}(t),\widehat{v}(t))\big) \to 0.$$

Далее, пусть для всех $n\in\mathbb{N}$ *существует* $\alpha_n > \sigma_n$ *такое, что для любой функции* $v\in B_{\mathbb{L}^{\theta_0}}(\widehat{v},R_n)$ *при п.в.* $t\in[0,\tau]$ *выполнены включения*

$$\big(v(t),\widehat{y}_n(t)\big)\in \mathrm{Cov}_{\alpha_n}\big[\mathrm{g}_n^{[v]}(t,\cdot);\mathbb{R}\big],\quad \big((\mathbf{K}v)(t),\widehat{y}_n(t)\big)\in \mathrm{Lip}_{\beta_n}\big[\overline{\mathrm{g}}_n^{[v]}(t,\cdot);\overline{\Omega}_n(t)\big],$$

где $\beta_n := {\mathrm{k}_0}^{-1}(\alpha_n-\sigma_n)$, $\overline{\Omega}_n(t) := [\widehat{u}(t)-\mathrm{k}_0R_n, \widehat{u}(t)+\mathrm{k}_0R_n]$. *Тогда для любого* $n\in\mathbb{N}$ *существует решение* $\widehat{x}_n\in\mathbb{AC}$ *краевой задачи* (2.2.9), (2.3.21) *такое, что последовательность* $\{\mathcal{L}\widehat{x}_n\}$ *при* $n\to\infty$ *сходится в пространстве* $\mathbb{L}^{\theta_0}$ *к функции* $\widehat{v}=\mathcal{L}\widehat{x}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация направлена на исследование дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной, использующее утверждения о накрывающих отображениях. Основные результаты диссертации заключаются в следующем.

- Получены утверждения о существовании, оценках, устойчивости точек совпадения отображений, действующих из метрического пространства в пространство с расстоянием.

- Получены утверждения о существовании, непрерывной зависимости от параметра решений уравнения $G(x) = y$ с отображением G, действующим из метрического пространства в пространство с расстоянием и представимом в виде $G(x) = F(x, x)$, где отображение F является накрывающим по первому аргументу и липшицевым по второму аргументу.

- Получены утверждения о накрывающих свойствах оператора Немыцкого, действующего в пространствах измеримых функций.

- Получены утверждения о существовании, оценках, решений функциональных уравнений в пространствах измеримых функций, их устойчивости к изменениям функций, порождающих уравнение.

- Получены утверждения о существовании, оценках и корректности решений интегральных уравнений в пространствах измеримых функций.

- Получены утверждения о существовании, оценках и корректности решений задачи Коши для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной.

- Получены утверждения о существовании, оценках и корректности решений краевой задачи для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной.

В дальнейших исследованиях планируется близкими методами получить утверждения о точках совпадения многозначных отображений, действующих из метрического пространства в пространство с расстоянием, и утверждения о включении $G(x) \ni y$ с многозначным отображением G, действующим из метрического пространства в пространство с расстоянием и представимом в виде $G(x) = F(x, x)$, где F является накрывающим по первому аргументу и липшицевым по второму аргументу. Эти утверждения позволят исследовать дифференциальные включения вида

$$f(t, x, \dot{x}) \ni 0,$$

получить условия существования решений задачи Коши и краевых задач. Также планируется исследование задач управления для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной искомой функции. Такое исследование может использовать редукцию задачи управления к дифференциальному включению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *A. Aliouche, T. Hamaizia.* Common fixed point theorems for multivalued mappings in b-metric spaces with an application to integral inclusions // J Anal. 2021. https://doi.org/10.1007/s41478-021-00330-9

2. *V.I. Arnold, A.A. Davydov, V.A. Vassiliev, V.M. Zakalyukin* Mathematical models and control of catastrophic processes // UNESCO Encyclopaedia of Life Support Systems. V. II. Eds. Agoshkov V.I., Puel J.-P. EOLSS Publishers, Oxford, UK, 2005. P. 3–46 http://www.eolss.net/Sample-Chapters/C02/E6-03A-07-05.pdf

3. *A. Arutyunov, E. Avakov, B. Gel'man, A. Dmitruk, V. Obukhovskii.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications. 2009. V. 5. № 1. P. 105–127.

4. *A.V. Arutyunov, E.R. Avakov, S.E. Zhukovskiy.* Stability theorems for estimating the distance to a set of coincidence points // SIAM Journal on Optimization. 2015. V. 25. № 2. P. 807–828.

5. *A.V. Arutyunov, A.V. Greshnov, L.V. Lokoutsievskii, K.V. Storozhuk.* Topological and geometrical properties of spaces with symmetric and nonsymmetric f -quasimetrics // Topology Appl. 2017. V. 221. P. 178–194.

6. *A.V. Arutyunov, E.S. Zhukovskii, S.E. Zhukovskii.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. № 3. P. 1026–1044. https://doi.org/10.1016/j.na.2011.03.038

7. A.V.Arutyunov, E.S. Zhukovskiy, S.E. Zhukovskiy, Z.T. Zhukovskaya. Kantorovich's Fixed Point Theorem and Coincidence Point Theorems

for Mappings in Vector Metric Spaces // Set-Valued Var. Anal. 2021. https://doi.org/10.1007/s11228-021-00588-y

8. *A. Arutyunov, V.A. de Oliveira, F.L. Pereira, E. Zhukovskiy, S. Zhukovskiy.* On the solvability of implicit differential inclusions // Applicable Analysis. 2015. V. 94. № 1. P. 129–143.

9. *L. Dara.* Singularites generiques des equations differentielles multiformes // Bol. Soc. Bras. Mat. 1975. V. 6. № 2. P. 95–128.

10. *A.A. Davydov.* Qualitative Theory of Control Systems. Translations of Mathematical Monographs. V. 141. American Mathematical Society. Providence, Rhode Islans. 1994.

11. *Davydov A., Ishikawa G., Izumiya S., Sun W.-Z.* Generic singularities of implicit systems of first order differential equations on the plane // Japanese Journal of Mathematics. 2008. V. 3. № 1. P. 93–120.

12. *L.M. Graves.* Some mapping theorems // Duke Math. J. 1950. V. 17. P. 111–114.

13. *F. Lael, N. Saleem, M. Abbas.* On the fixed points of multivalued mappings in b-metric spaces and their application to linear systems // UPB Scientific Bulletin. Series A: Applied Mathematics and Physics. 2020. V. 82, № 4. P. 121–130.

14. *L.V. Nguyen, L.T. Phuong, N.T. Hong, et al.* Some fixed point theorems for multivalued mappings concerning F-contractions // J. Fixed Point TheoryAppl. 2018. V. 20. № 139. https://doi.org/10.1007/s11784-018-0621-7

15. *S. Sanhan, W. Sanhan, C. Mongkolkeha.* New Existence of Fixed

Point Results in Generalized Pseudodistance Functions with Its Application to Differential Equations // Mathematics. 2018. V. 6. № 12. https://doi.org/10.3390/math6120324

16. *F. Tokens.* Constrained equations; a study of imphcit differential equations and their discontinuous solutions. In Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences. Lect. Notes Math. Berlin: Springer, 1976. V. 525. P. 143–234.

17. *B. Zhang, W. Ouyang.* Coincidence points for set-valued mappings with directional regularity // Fixed Point Theory. 2021. V. 22, № 1. P. 391–406.

18. *Е.Р. Аваков , А.В. Арутюнов, Е.С. Жуковский* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.

19. *Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

20. *А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин.* Теория колебаний. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1959.

21. *В.И. Арнольд.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

22. *В.И. Арнольд.* Теория катастроф. М.: Знание. Сер. мат. кибернетика, № 9. 1981.

23. *А.В. Арутюнов.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.

24. *А.В. Арутюнов.* Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Матем. заметки. 2009. Т. 86. № 2. С. 163–169.

25. *А.В. Арутюнов.* Точки совпадения двух отображений // Функц. анализ и его прил. 2014. Т. 48. № 1. С. 89–93.

26. *А.В. Арутюнов.* Лекции по выпуклому и многозначному анализу. М.: Физматлит, 2014.

27. *А.В. Арутюнов, А.В. Грешнов.* Теория (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и точки совпадения // Докл. РАН. 2016. Т. 469. № 5. С. 527–531.

28. *А.В. Арутюнов, Е.С. Жуковский, С.Е. Жуковский.* О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.

29. *Ю.Е. Безмельницына, С.В. Корнев, В.В. Обуховский.* Метод случайных многолистных направляющих функций в периодической задаче для случайных дифференциальных включений // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2021. Т. 194. С. 38–45.

30. *Ю.Е. Безмельницына, С.В. Корнев, В.В. Обуховский.* Негладкие интегральные направляющие потенциалы в задаче об асимптотическом поведении траекторий некоторых классов функционально-дифференциальных включений // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2020. Т. 186. С. 13–20

31. *С. Бенараб, Е.С. Жуковский, В. Мерчела.* Теоремы о возмущениях накрывающих отображений в пространствах с расстоянием и в про-

странствах с бинарным отношением // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. С. 52–63.

32. *С. Бенараб, Е.С. Жуковский, В. Мерчела.* Распространение теорем о возмущениях накрывающих отображений // Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019). Материалы Международной конференции, посвященной 95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского. Екатеринбург, 2019. С. 67–70.

33. *И.А. Богаевский* Неявные обыкновенные дифференциальные уравнения: перестройки и усиление эквивалентности // Изв. РАН. Сер. матем. 2014. Т. 78. № 6. С. 5–20.

34. *Ю.А. Гришина, А.А. Давыдов* Структурная устойчивость простейших динамических неравенств // Труды МИАН. 2007. Т. 256. С. 89-101.

35. *Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальних включений. М.: Либроком, 2011.

36. *А.А. Давыдов* Особенности типичного дохода в модели Арнольда циклических процессов // Дифференциальные уравнения и динамические системы. Сборник статей. Тр. МИАН. 2005. Т. 250. С. 79–94.

37. *А.А. Давыдов.* Особенности предельных направлений типичных неявных ОДУ высших порядков // Дифференциальные уравнения и динамические системы. Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко. Тр. МИАН. 2002. Т. 236. М.: Наука. С. 134–141.

38. *А.А. Давыдов.* Нормальная форма уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности его особой точки // Функц. анализ и его приложения. 1985. Т. 19. № 2. С. 1–10.

39. *А.А. Давыдов, Е. Мена Матош.* Типичные фазовые переходы и особенности выгоды в модели Арнольда // Матем. сб. 2007. Т. 198. № 1. С. 21–42.

40. *А.А. Давыдов, Э. Росалес-Гонсалес.* Полная классификация типичных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными на плоскости // Докл. РАН. 1996. Т. 350. № 2. С. 151–154.

41. *Н. Данфорд, Дж. Шварц.* Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.

42. *А.В. Дмитрук, А.А. Милютин, Н.П. Осмоловский.* Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. 1980. Т. 35. № 6(216). С. 11–46.

43. *Т.В. Жуковская, В. Мерчела, А.И. Шиндяпин.* О точках совпадения отображений в обобщенных метрических пространствах // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 129. С. 18–24.

44. *Е.С. Жуковский.* О возмущениях векторно накрывающих отображений и системах уравнений в метрических пространствах // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57. № 2. С. 297–311.

45. *Е.С. Жуковский.* Неподвижные точки сжимающих отображений f-квазиметрических пространств // Сиб. матем. журн. 2018. Т. 59. № 6. С. 1338–1350.

46. *Е.С. Жуковский.* Об упорядоченно накрывающих отображениях и ин-

тегральных неравенствах типа Чаплыгина // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. № 1. С. 96–127.

47. *Е.С. Жуковский.* О точках совпадения многозначных векторных отображений метрических пространств // Математ. заметки. 2016. Т. 100. № 3. С. 344–362.

48. *Е.С. Жуковский, В. Мерчела.* О непрерывной зависимости от параметра множества решений операторного уравнения // Изв. ИМИ УдГУ. 2019. Т. 54. С. 27–37.

49. *Е.С. Жуковский, В. Мерчела.* О накрывающих отображениях в обобщенных метрических пространствах в исследовании неявных дифференциальных уравнений // Уфимск. матем. журн. 2020. Т. 12. № 4. С. 42–55.

50. *Е.С. Жуковский, В. Мерчела.* К вопросу о существовании точки совпадения двух отображений // Современные методы теории краевых задач. Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа Понтрягинские чтения – XXX. Воронеж, 2019. С. 134.

51. *Е.С. Жуковский, Е.А. Плужникова.* Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 439–455.

52. *Е.С. Жуковский, Е.А. Плужникова.* Об одном методе исследования разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений //

Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2010. Т. 15. № 6. С. 1673–1674.

53. *Е.С. Жуковский, Е.А. Плужникова.* Об управлении объектами, движение которых описывается неявными нелинейными дифференциальными уравнениями // Автомат. и телемех. 2015. № 1. С. 31–56.

54. *Е.С. Жуковский, Е.А. Плужникова.* К вопросу о разрешимости управляемых дифференциальных систем // Вестник Тамбовского университета. Серия: естеств. и техн. науки. 2013. Т. 18. № 1. С. 49–54.

55. *С.Е. Жуковский.* Минимумы функционалов и неявные дифференциальные уравнения // Вестник Тамбовского университета. Серия: естеств. техн. науки. 2017. Т. 22. № 6. С. 1298–1303.

56. *И.В. Закалюкин.* Особенности уравнений динамики некоторых неголономных систем и неявные дифференциальные уравнения. Автореферат дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.01 [Место защиты: Московский авиационный институт (государственный технический университет)]. М., 2010.

57. *Ю.Н. Захарян, Т.Н. Фоменко.* О сохранении совпадений у однопараметрического семейства пар многозначных отображений типа Замфиреску // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. мех. 2021. № 1. С. 28–34.

58. *Ю.Н. Захарян, Т.Н. Фоменко.* О точках совпадения для пары многозначных отображений типа Замфиреску // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2020. № 6. С. 26–33.

59. *А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974, 479 с.

60. *М.И. Каменский, В.В. Обуховский, Г.Г. Петросян.* О существовании решения периодической краевой задачи для полулинейных дифференциальных включений дробного порядка в банаховых пространствах // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 250–270.

61. *Л.А. Люстерник.* Об условных экстремумах функционалов // Математ. сборник. 1934. Т. 41. С. 390–401.

62. *В. Мерчела.* К теореме Арутюнова о точках совпадения двух отображений метрических пространств // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. 2018. Т. 23. № 121. С. 65–73.

63. *В. Мерчела.* Об устойчивости решений интегральных уравнений в классе измеримых функций // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 133. С. 44–54.

64. *В. Мерчела.* Один метод исследования разрешимости краевых задач для неявного дифференциального уравнения // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 136. С. 404–413.

65. *В. Мерчела.* Накрывающие отображения обобщенных метрических пространств в исследовании интегральных уравнений Вольтерры // Колмогоровские чтения. общие проблемы управления и их приложения (ОПУ–2020). Материалы IX Международной научной конференции, посвященной 70-летию со дня рождения Александра Ивановича Булгакова и 90-летию Института математики, физики и информаци-

онных технологий Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина. Тамбов, 2020. С. 73–75.

66. *В. Мерчела.* Накрывающие отображения обобщенных метрических пространств в исследовании интегральных уравнений // Теория управления и математическое моделирование. Материалы Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова. Ижевск, 2020. С. 96–98.

67. *В. Мерчела.* О существовании точек совпадения двух отображений, определенных на $(q_1; q_2)$-квазиметрическом пространстве // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби (CGS'2020). Материалы III Международного семинара, посвященного 75-летию акад. А.И. Субботина. Екатеринбург, 2020. С. 235–237.

68. *В.В. Обуховский, С.В. Корнев, Е.Н. Гетманова.* Об относительном индексе неподвижных точек для одного класса некомпактных многозначных отображений // Изв. вузов. Матем. 2021. № 5. С. 64–77.

69. *А.Д. Пилия, В.И. Федоров.* Особенности поля электромагнитной волны в холодной анизотропной плазме с двумерной неоднородностью // ЖЭТФ. 1971. Т. 60. № 1. С. 389–399.

70. *Е.А. Плужникова.* О накрывании оператора Немыцкого в пространстве суммируемых функций // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2010. Т. 15. № 6. С. 1686–1687.

71. *А. Пуанкаре.* Избранные груды, т. III. М.: Наука, 1974.

72. *А.В. Пхакадзе, А.А. Шестаков.* О классификации особых точек дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной // Матем. сборник. 1959. Т. 49. № 1. С. 3–12.

73. *А.О. Ремизов.* Многомерная конструкция Пуанкаре и особенности поднятых полей для неявных дифференциальных уравнений // Оптимальное управление. Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 19. М.:РУДН, 2006, С. 131–170.

74. *А.О. Ремизов.* Неявные дифференциальные уравнения и векторные поля с неизолированными особыми точками // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 11. С. 105–124.

75. *И.Д. Серова.* Суперпозиционная измеримость многозначной функции при обобщенных условиях Каратеодори // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 305-314.

76. *Т.Н. Фоменко* Существование нулей многозначных функционалов, совпадения и неподвижные точки в f-квазиметрическом пространстве // Матем. заметки. 2021. Т. 110. № 4. С. 598–609.

77. *Т.Н. Фоменко.* Поиск нулей функционалов, неподвижные точки и совпадения отображений в квазиметрических пространствах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2019 № 6. С. 14–22.

78. *Т.Н. Фоменко.* Сохранение существования точки совпадения при некоторых дискретных преобразованиях пары отображений метрических пространств // Тр. ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23. № 4. С. 292–300.

79. *Т.Н. Фоменко.* О приближении к точкам совпадения и общим непо-

движным точкам набора отображений метрических пространств // Матем. заметки. 2009. Т. 86. № 1. С. 110–125.

80. *И.В. Шрагин.* Суперпозиционная измеримость при обобщенных условиях Каратеодори // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. 2014. Т. 19. № 2. С. 476–478.