МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

на правах рукописи
УДК 517.957

Булатова Регина Рашидовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ В МОДИФИКАЦИИ ЛАДЫЖЕНСКОЙ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители
д.ф.-м.н., профессор Самохин Вячеслав Николаевич
д.ф.-м.н., профессор Чечкин Григорий Александрович

Москва 2019

Оглавление

Введение **4**

1 Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя **19**

§ 1.1. Постановка задачи о продолжении пограничного слоя . 19

§ 1.2. Переменные Мизеса 21

§ 1.3. Эквивалентность решений двух задач 23

§ 1.4. Теорема о существовании решения задачи в переменных Мизеса 25

1.4.1 Вспомогательные утверждения 26

1.4.2 Доказательство теоремы 44

§ 1.5. Теорема существования решения задачи в декартовых переменных 46

§ 1.6. Теорема единственности решения задачи в переменных Мизеса 46

§ 1.7. Теорема единственности решения задачи в декартовых переменных 50

§ 1.8. Отрыв пограничного слоя 50

2 Уравнения симметричного пограничного слоя **54**

§ 2.1. Постановка задачи симметричного пограничного слоя . . 54

§ 2.2. Переменные Крокко 56

§ 2.3. Теорема существования решения задачи в переменных Крокко 58

2.3.1 Вспомогательные утверждения 59

2.3.2 Существование и оценка приближенного решения w^k 60
2.3.3 Более точная оценка 66
2.3.4 Оценка производных 68
2.3.5 Доказательство теоремы 77
§ 2.4. Теорема существования решения задачи в декартовых переменных 80
§ 2.5. Теорема единственности решения задачи в переменных Крокко 85
§ 2.6. Теорема единственности решения задачи в декартовых переменных 87
§ 2.7. Асимптотики решения 87
§ 2.8. Уравнения симметричного магнитогидродинамического пограничного слоя 90

3 Нестационарный пограничный слой **93**
§ 3.1. Постановка задачи 93
§ 3.2. Переменные Крокко 94
§ 3.3. Теорема существования и единственности решения задачи в переменных Крокко 96
3.3.1 Вспомогательные утверждения 97
3.3.2 Существование и оценка приближенного решения w^k 98
3.3.3 Более точная оценка решения w^k 103
3.3.4 Оценка производных решения w^k 105
3.3.5 Доказательство теоремы 113
§ 3.4. Теорема существования и единственности задачи в декартовых переменных 116
§ 3.5. Устойчивость решений системы уравнений пограничного слоя 121

Введение

Теория пограничного слоя, изучающая движение вязких сплошных сред в окрестности твердой поверхности, составляет один из важнейших разделов гидродинамики. Её основателем является Л.Прандтль, предложивший в своей работе [15] для описания динамики маловязкой жидкости вблизи обтекаемой твердой поверхности систему уравнений, которая при определенных предположениях выводится из системы Навье–Стокса и является её упрощением. Система уравнений Навье–Стокса является основным средством описания и изучения динамики вязкой несжимаемой жидкости, подчиняющейся реологическому закону И. Ньютона, то есть предположению о линейной зависимости тензора напряжений от тензора скоростей деформаций. А именно,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta u, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta v, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta w, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

где $\nu > 0$ — коэффициент вязкости, ρ — плотность жидкости, p — давление.

Уравнения Навье–Стокса были предложены для описания движения реальных жидкостей, обладающих вязкостью, так как в конце XIX столетия, несмотря на значительные успехи теоретической гидродинамики, основанной на уравнениях Эйлера для движения идеальной жидкости, обнаружилось несоответствие теоретических и экспериментальных результатов в ряде практически важных задач. Несмотря на то, что в гидромеханике за долгие годы ее существования накопился богатый теоретический и экспериментальный материал, этого оказалось недостаточно для того, чтобы строго математически проанализировать явления, происходящие в жидкостях.

Гидродинамика прошла долгий и тернистый путь в поисках устранения многочисленных парадоксов. Первый длительный этап был связан с изучением потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости, то есть движения жидкости, при котором каждый малый объем деформируется и перемещается поступательно, но без вращения.

Таких течений оказалось достаточно для математического исследования, так же основалась почти совершенная наука – теория функций комплексного переменного, которая, казалось, могла разрешить все проблемы. Но знаменитый парадокс Эйлера–Даламбера о равенстве нулю суммарной силы, действующей на тело, обтекаемое потенциальным потоком, указывал на несовершенство теории идеальной жидкости. Все попытки устранить этот и ряд других парадоксов в условиях идеальной жидкости оказывались безрезультатными. Тогда и была создана математическая модель вязкой жидкости с её основной системой уравнений Навье–Стокса, которая была предложена для описания движения реальных жидкостей, обладающих вязкостью. Системе уравнений Навье–Стокса посвящено много работ, например [12], [11], [13], [30], [28], [37], [57].

Решение уравнений Навье–Стокса представляет собой очень трудную задачу с точки зрения теории дифференциальных уравнений. Чтобы упростить эту задачу Л. Прандтль предложил некоторый метод получения из уравнений Навье–Стокса более простой системы уравнений для описания динамики вязкой несжимаемой жидкости в области, непосредственно примыкающей к обтекаемой твердой поверхности. Гипотеза Людвига Прандтля справедлива при больших числах Рейнольдса.

Число $Re = \frac{\rho v l}{\mu}$, которое характеризует отношение силы инерции к силе трения, называется числом Рейнольдса. Движения жидкости, при которых число Рейнольдса меньше единицы ($Re < 1$), называются ползущими течениями (например, такими будут капли, радиус которых меньше $0,01$ мм. Из таких капель состоит туман).

В 1904 году Л. Прандтль в своем докладе "О движении жидкости при очень малом трении", прочитанном на Международном математическом конгрессе в Гейдельберге, дал объяснение явлению, оказывающему существенное влияние на характер движения жидкости. В докладе были изложены основы созданной им новой теории, которая в настоящее время носит название теории пограничного слоя.

В случае двумерного нестационарного пограничного слоя уравнения Прандтля имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\dfrac{\partial u^2}{\partial y^2}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

Теории пограничного слоя посвящено большое количество трудов, которые содержат теоретические и экспериментальные исследования, см., например, обзоры списка литературы в работах [62], [37].

Гидродинамика всегда была необходима кораблестроителям – проектировщикам и вышла на передовые позиции с появлением современных самолётов, в ряде задач которой особенно важной является теория Прандтля, где он предложил разделить поток, обтекающий твердую поверхность при больших числах Рейнольдса, на две области: тонкого пограничного слоя, где силы вязкости играют значительную роль, и область, вне этого тонкого слоя, где силами вязкости можно пренебречь. В частности, наглядным примером обтекаемости тел является крыло самолета. На данный момент времени, требования, которые предъявляют к самолету, - это высокая скорость полета и легкая управляемость. А для того, чтобы крыло имело максимальную подъемную силу при том угле атаки, после превышения которого происходит отрыв потока на верхней стороне профиля, число Рейнольдса должно возрастать (так же должна возрастать турбулентность воздушного потока при продувке в аэродинамической трубе). Но при малых числах Рейнольдса, $Re < 100000$, возможно возникновение условий, которые могут привести к резкому уменьшению подъемной силы. Поэтому при построении крыла самолета нужно учитывать эти явления. Также не стоит забывать о коэффициенте вязкости жидкости пограничного слоя, ведь с увеличением вязкости следует увеличение сопротивления, при этом легкость управления теряется. А в задачах обтекания тел при изучении движения жидкости вблизи твердой поверхности возможно применение теории пограничного слоя, что позволяет из полной системы уравнений получить более простую систему, которая существенно упрощает уравнения.

Идея Прандтля о возможности пренебречь вязкостью вне пограничного слоя дала новый толчок в развитии гидродинамики и оказалась очень продуктивной и применимой также для описания пограничного слоя реологически более сложных сред, чем ньютоновская. Методы и подходы Прандтля в дальнейшем были были развиты и неоднократно применялись в работах [11], [18], [20], [9], [14], [40]. Некоторые вопросы о продолжении пограничного слоя при просачивании через пористые преграды, оценки скорости сходимости при измельчении пор и другие вопросы асимптотического анализа в теории пограничного слоя рассмотрены в [48], [53], [54], [31], [34], [33], [45], [2], [32].

С начала 60-х годов теория пограничного слоя вязкой несжимаемой жидкости тщательно изучалась О.А. Олейник [38], [39], [42], [43], [41], [40]. Ей принадлежат фундаментальные результаты, которые положили начало развитию математической теории. В работах [38], [43], [39] впервые была доказана корректная разрешимость основных краевых и начально-краевых задач для системы уравнений Прандтля. Основную задачу теории пограничного слоя для стационарного движения несжимаемой жидкости Олейник О.А. рассмотрела в работе [43]. Эта задача состоит в нахождении решения системы уравнений

$$\begin{cases} \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u\dfrac{\partial u}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -U\dfrac{dU}{dx}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

в области $D = \{0 < x < X,\, 0 < y < \infty\}$ с граничными условиями

$$u(0,y) = u_0(y),\ u(x,0) = 0,\ v(x,0) = v_0(x),$$
$$u(x,y) \rightrightarrows U(x) \,\text{при}\, y \to +\infty$$

Решение этой задачи получено при некоторых предположениях о гладкости функций u_0, v_0, p_x и при выполнении условий согласования в точке $(0,0)$ при малых y:

$$\nu\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - v_0(0)\frac{\partial u_0}{\partial y} + U\frac{dU}{dx}\Big|_{x=0} = O(y^2).$$

Более того, доказана единственность этого решения при $X < X_0$, где X_0 определено данными исходной задачи. Также в работах [38], [40], [41] Олейник вывела условия отрыва пограничного слоя и существования безотрывных течений, а также показала достаточное условия отрыва пограничного слоя при вдуве проницаемой поверхности, то есть при $v_0(x) > 0$. А в работах Н.В. Хуснутниновой [59] показаны достаточные условия существования безотрывного течения при возрастающем давлении.

Вдув в пограничный слой [46], [56] или отсос [60] являются одними из способов управления пограничным слоем, так как ламинарный слой может преодолевать лишь небольшое расстояние без отрыва. Чтобы избежать отрыва пограничного слоя от обтекаемой поверхности Прандтль в своей работе [15] предложил повлиять на характеристики пограничного слоя способом отсасывания. Вероятность отрыва при турбулентном течении значительно меньше, так как оно даёт непрерывный перенос импульса из внешнего течения в пограничный слой. Тем не менее, желательно управлять пограничным слоем и при турбулентном течении.

В свою очередь, отрыв магнитогидродинамического пограничного слоя можно избежать, подействовав на него достаточно сильным поперечным магнитным полем. Одним из разделов современной гидродинамики является магнитная гидродинамика, которая успешно развивается уже многие годы. Это определяется, прежде всего, тем, что электропроводные жидкости широко применяются в современных технологиях. Благодаря силовому взаимодействию движущихся электропроводных жидкостей с магнитными полями возможна технологическая обработка жидкостей без механического контакта с ними. Это, в свою очередь, предотвращает структурное изменение жидкой среды и других нежелательных изменений. Кислоты, щелочи, различные растворы и расплавы, применяемые в полиграфии, являются электропроводными. Это свойство успешно используется, например, при перекачке их с помощью электромагнитных устройств, что позволяет ограничить или вовсе избежать контакта механических устройств с агрессивными средами и избежать повышенного износа механизмов. Вместе с этим воздействие достаточно сильного внешнего магнитного поля, поперечного потоку электропроводной среды, дает возможность предотвратить возникновение турбулентности, кавитации и других явлений, нарушающих ламинарность потока и заполнение жидкой средой полного сечения трубопроводов.

Если жидкость электропроводная (см. [16], [17]) и движется в магнитном поле, то к уравнению Прандтля добавляются слагаемые, характеризующие электромагнитные силы:

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\dfrac{\partial u^2}{\partial y^2} - jB, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Здесь $j = \sigma(E + uB)$ – z-компонента вектора электрического поля, $E = (0, 0, E)$ – электрическое поле, $B = (0, B, 0)$ – магнитное поле,

p, E, B – заданные функции от t, x. Скорость $U(x)$ внешнего потока определяется из соотношения $U\dfrac{dU}{dx} = -\dfrac{dp}{dx} - \sigma EB - B^2U$.

Существование и единственность этой системы была доказана в 1974 году профессором А.И. Сусловым в работе [55]. Сделан вывод о том, что при достаточно сильном магнитном поле возможно безотрывное течение независимо от других параметров движения вязкой сплошной среды. Подробное изложение этих вопросов можно найти в работах [24], [25], [26], [47], [55].

Магнитную гидродинамику некоторых сред следует рассматривать как динамику неньютоновских жидкостей, так как некоторые электропроводные жидкости и расплавы металлов при движении проявляют свойства неньютоновских жидкостей.

На основе аксиом Прандтля для неньютоновских жидкостей можно также вывести систему уравнений, обобщающую классическую систему пограничного слоя, которая применяется для описания движения вязких сред со сложной реологией. Одна из возможных модификаций уравнений Навье – Стокса была предложена О.А. Ладыженской [28]. Эта новая система уравнений имеет более сложную структуру, чем классическая, но при определенных предположениях к ней можно применить теорию Прандтля и вывести уравнения, описывающие движение сплошной среды в тонком слое, непосредственно примыкающем к обтекаемой поверхности. При этом предполагается, что реологический закон для рассматриваемой среды нелинеен и является обобщением реологического уравнения Ньютона. В работе рассматривается маловязкая среда, модель которой предложена в [28]. В этом случае динамика жидкости описывается системой уравнений, обобщающей уравнения Навье–Стокса и имеющей вид

$$\begin{cases} -\nu \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}[(1 + d\mathbf{v}^2(\mathbf{u}))\mathbf{v}_{ij}(\mathbf{u})] + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \end{cases},$$

где $i = 1, 2, 3, \quad \mathbf{v}_{ij}(\mathbf{u}) = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}, \qquad \mathbf{v}^2(\mathbf{u}) = \sum\limits_{j=1}^{3} \mathbf{v}_{ij}^2(u),$

ν — кинематическая вязкость среды, d — малая положительная постоянная. В книге [28] дано обоснование того, что $d \ll 1$. Предполагается, что ν и d — величины одного порядка. При этих условиях, с помощью процедуры, предложенной Прандтлем (см. [40]), из этих уравнений можно вывести систему уравнений, которая описывает динамику маловязкой среды вблизи обтекаемой поверхности и называется системой уравнений пограничного слоя:

$$\begin{cases} \nu\Big(1 + 3d\Big(\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\Big)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u\dfrac{\partial u}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -U\dfrac{dU}{dx}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Данная задача о продолжении модифицированного пограничного слоя для стационарных плоскопараллельных течений, которым соответствуют граничные условия

$$u(0, y) = u_0(y), \quad u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = v_0(x),$$
$$u(x, y) \rightrightarrows U(x) \,\text{при}\, y \to +\infty$$

в области $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$ изучена в работах [49], [51]. Здесь случаю продолжения граничного слоя соответствует условие $u(0, y) = u_0(y)$, при $y > 0$, если $u_0(y) > 0$.

Результаты настоящей работы являются продолжением и обобщением исследований математических задач пограничного слоя в модификации О.А. Ладыженской. Разобраны новые случаи, для которых применены как стандартные, так и новые методы исследования, основанные на принципе максимума. Для квазилинейных параболических вырождающихся уравнений справедлив принцип максимума.

Актуальность диссертационной работы заключается в совершенствовании способов и методов управления пограничного слоя вблизи твердой поверхности, являющихся неотъемлемой частью развития современных технологий, используемых в судо- и авиастроении.

Целью работы является исследование задач пограничного слоя реологически сложных сред, корректная разрешимость начально-краевых и краевых задач для системы типа Прандтля.

В свою очередь, настоящая работа заключается в построении асимптотик полученных решений и исследовании устойчивости решений нестационарных задач при возмущении некоторых начальных параметров.

Также целью диссертации является исследование поведения электропроводящей жидкости под воздействием поперечного магнитного поля.

Методы исследования. Методы исследования различных задач для системы уравнений пограничного слоя, применяемые в настоящей работе, основаны на преобразованиях Мизеса и Крокко, которые приводят систему уравнений типа Прандтля к одному квазилинейному параболическому уравнению (см. [10]). Также в диссертации используются методы эллиптической регуляризации, методы последовательных приближений, качественной теории дифференциальных операторов в частных производных, функционального анализа, элементы теории функций комплексного анализа.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные научные результаты:

- для системы уравнений МГД–пограничного слоя получена корректная разрешимость краевых задач, исследовано влияние поперечного магнитного поля на динамику электропроводящей жидкости;

- для системы уравнений симметричного пограничного слоя доказана теорема о существовании и единственности решения задачи, построены асимптотические ряды решений уравнений;

- исследована задача симметричного МГД–пограничного слоя в окрестности носовой точки;

- изучен случай нестационарного симметричного пограничного слоя реологически сложных сред, получено доказательство устойчивости решений при определенных изменениях начальных данных задачи.

Теоретическая и практическая значимость. Предлагаемая работа носит теоретический характер и может быть использована в различных разделах качественной теории дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, механики сплошных сред.

Апробация работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на заседаниях научного семинара под руководством Чечкина Г.А.

Также результаты работы докладывались на следующих научных конференциях:

1. XXIV международная конференция «Математика. Экономика. Образование», ЮФУ, Краснодарский край, Россия, (27 мая - 3 июня 2016);

2. VI Congress of the Turkic world mathematical society, Astana, Kazakhstan, (October 2-5 2017);

3. 60-я научная конференция МФТИ, Москва, Долгопрудный, Жуковский, Россия, (20-26 ноября 2017);

4. «Ломоносов 2018», Москва, Россия, МГУ имени М.В.Ломоносова, Россия, (9-13 апреля 2018);

5. Международная конференция «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXIX», посвященная 90-летию В.А.Ильина, МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет Вычислительной математики и Кибернетики, Россия, (2-6 мая 2018);

6. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, Россия, (6-11 июля 2018);

7. Воронежская Зимняя Математическая Школа «Современные Методы Теории Функций и Смежные Проблемы», Воронеж, Россия, (28 января - 2 февраля 2019);

8. Всероссийская научно-практическая конференция «Наука-общество-технологии 2019», Москва, Россия, (26 февраля 2019);
9. Понтрягинские чтения XXX в рамках Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач», г. Воронеж, Россия(3-8 мая 2019);
10. Международная научно-практическая конференция «Современные тенденции развития науки и образования: теория и практика», г. Москва, Россия, (20 июня 2019).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 19 публикациях, 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 14 — в прочих научных журналах и материалах конференций.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы и списка литературы, включающего 64 наименования. Общий объем диссертации составляет 135 страниц.

Публикации автора по теме диссертации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Булатова Р.Р. Влияние магнитного поля на положение точки отрыва пограничного слоя электропроводной жидкости // Известия высших учебных заведений. Проблемы полиграфии и издательского дела. 2018. № 1, с. 14-22
2. Bulatova R.R., Chechkin G.A., Chechkina T.P., Samokhin V.N. On the influence of a magnetic field on the separation of the boundary layer of a non–Newtonian MHD medium // Comptes Rendus–Mecánique, Elsevier BV (Netherlands). 2018. Т. 346, № 9, с. 807-814
3. Bulatova R.R., Samokhin V.N., Chechkin G.A. Equations of Magnetohydrodynamic Boundary Layer for a Modified Incompressible Viscous Medium. Boundary Layer Separation // Journal of Mathematical

Sciences. Plenum Publishers (United States). 2018. T. 232, № 3, P. 299-321 (Перевод статьи: Булатова Р.Р., Самохин В. Н.,Чечкин Г.А. Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя для модифицированной несжимаемой вязкой среды. Отрыв пограничного слоя // Проблемы математического анализа.- 2018.- т. 92. - с. 83–100.)

4. Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А. Система уравнений пограничного слоя реологически сложной среды. Переменные Крокко // Доклады Академии наук, М.: Наука. 2019. Т. 487, № 2, с. 119-125

5. Bulatova R.R., Samokhin V.N., Chechkin G.A. Equations of Symmetric Boundary Layer for the Ladyzhenskaya Model of a Viscous Medium in the Crocco Variables// Journal of Mathematical Sciences, Plenum Publishers (United States). 2019. T. 242, № 1, c. 85-118 (Перевод статьи: Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А. Уравнения симметричного пограничного слоя для модели вязкой среды О.А. Ладыженской в переменных Крокко// Проблемы математического анализа. 2019. Т. 98, с. 73-100.)

Остальные публикации автора по теме диссертации

6. Булатова Р.Р. Уравнения МГД-пограничного слоя для модификации О.А. Ла-дыженской системы Навье-Стокса // XXIV Международная конференция «Ма-тематика. Экономика. Образование». IX симпозиум «Ряды Фурье и их прило-жения». Международная конференция по стохастическим методам. Ростов-на-Дону: Фонд науки и образования, 2016. Тезисы докладов, с. 95-96. ISBN 978-5-9908134-9-6

7. Булатова Р.Р Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя нелинейно вязкой жидкости в модификации О.А. Ла-

дыженской // Труды 60-й Всероссийской научной конференции МФТИ. 20 - 26 ноября 2017 г. Прикладная математика и информатика. Москва: МФТИ Долгопрудный Жуковский, 2017. Тезисы докладов, с. 306-307. ISBN 978-5-7417-0652-7

8. Булатова Р.Р Симметрический пограничный слой нелинейной жидкости О.А.Ладыженской в переменных Крокко // Ломоносов 2018: материалы меж-дународного научного форума. Москва, 2018. Тезисы докладов.

9. Булатова Р.Р Влияние магнитного поля на движение электропроводной жид-кости в пограничном слое // Современные методы теории краевых задач. "Понтрягинские чтения-XXIX серия Материалы Международной конферен-ции посвященной 90-летию Владимира Александровича Ильина (Москва, 2–6 мая 2018 г.). Москва: МАКС Пресс, 2018. Тезисы докладов, с. 64-65. ISBN 978-5-9273-2453–8

10. Булатова Р.Р. Уравнение нестационарного пограничного слоя обобщенно нью-тоновской реологически сложной среды // «Ломоносов – 2019»: XV Междуна-родная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых: Те-зисы докладов XV Международной научной конференции: в 2-х частях (I часть). Нур-Султан: Казахстанский филиал МГУ им. М.В. Ломоносова, 2019. Тезисы, с. 20-21. ISBN 978-601-7804-69-5

11. Булатова Р.Р. Нестационарный пограничный слой модифицированной вязкой жидкости модели О.А.Ладыженской // «Современные методы теории краевых задач». Материалы Международной конференции «Воронежская весенняя ма-тематическая школа «Понтрягинские чтения – XXX», Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2019. Тезисы докладов, с. 81-82.

12. Bulatova R.R., Chechkin G.A., Samokhin V.N. On MHD boundary layer for the O.A. Ladyzhenskaya modification of the Navier-Stokes

system // Abstracts of VI Congress of the Turkic World Mathematical Society (October 2-5, 2017, Astana, Kazakhstan), 55. Astana: L.N. Gumilyov Eurasian National University, 2017. ISBN 978-9965-31-907-5

13. Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А. Уравнения симметрического погра-ничного слоя модифицированной жидкости О.А. Ладыженской в переменных Крокко // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль 6 - 11 июля 2018. Тезисы докладов, 274. Владимир : Аркаим, 2018. ISBN 978-5-93767-285-8

14. Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А. Система уравнений симметрическо-го пограничного слоя модифицированной жидкости О.А. Ладыженской в пе-ременных Крокко // Современные методы теории функции и смежные пробле-мы: материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа (28 января - 2 февраля 2019), 57-58. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2019. - 316 с. ISBN 978-5-9273-2724–9

15. Булатова Р.Р. Решение задачи нестационарного пограничного слоя модифицированной нелинейной вязкой жидкости в целом по t и его устойчивость // Современные тенденции развития науки и образования: теория и практика. Сборник материалов 3-й Международной научно-практической конференции. Москва: ВИПО, 2019. т. 4, с. 81-87. ISBN 978-5-9908488-3-2

16. Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А. Уравнение симметричного погра-ничного слоя модифицированной жидкости О.А. Ладыженской // Наука, тех-ника, педагогика. Новые технологии высшей школы: материалы Всероссий-ской научно-практической конференции «Наука – Общество – Технологии – 2019» (Россия, Москва, 26 февраля 2019 года), Московский Политех Москва, с. 8-13. ISBN 978-5-2760-2507-0

17. Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А. Модель Ладыженской вязкой не-сжимаемой жидкости и система уравнений МГД-пограничного слоя // Наука, техника, педагогика. Новые технологии высшей школы: материалы Всероссийской научно-практической конференции «Наука – Общество – Технологии – 2019» , 2019. Московский Политех, Москва, с. 5-8. ISBN 978-5-2760-2507-0

18. Булатова Р.Р. Нестационарный МГД-пограничный слой неньютоновской среды // «Наука XXI века: новый подход»: Материалы XXIII молодёжной международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных, 2019 года, г. Санкт-Петербург, с. 7-9. ISBN 978-0-359-71873-3

19. Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А.Уравнения симметрического МГД-пограничного слоя вязкой жидкости с реологическим законом О.А. Ладыжен-ской // Труды семинара им. И.Г. Петровского, Изд. МГУ им. М.В.Ломоносова Москва, 2019. т. 32, с. 72-90.

Глава 1

Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя

§ 1.1. Постановка задачи о продолжении пограничного слоя

Рассмотрим плоскопараллельный пограничный слой электропроводной жидкости в модификации Ладыженской вблизи изолированной поверхности при наличии электромагнитного поля. В безиндукционном приближении система уравнений пограничного слоя проводящей модифицированной жидкости в случае, когда вектор магнитной индукции перпендикулярен обтекаемой поверхности, имеет вид:

$$\begin{cases} \nu\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\left(1+d\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) - u\dfrac{\partial u}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} + B^2(U-u) = -U\dfrac{dU}{dx}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Здесь u, v — составляющие скорости жидкости в пограничном слое, $\nu > 0$ — реологическая константа среды, d — малая положительная постоянная, которая зависит от свойств жидкости, плотность жидкости ρ и проводимость среды σ предполагаются равными единице, $B(x)$ — ортогональная к обтекаемой поверхности составляющая вектора магнитной индукции, $U(x)$ — продольная составляющая скорости среды на внешней границе пограничного слоя. Функция $U(x)$ связана с давлением $p(x)$ и компонентами электромагнитного поля $B(x)$ соотношением

$$U\frac{dU}{dx} = -\frac{dp}{dx} - EB\sigma - B^2U.$$

Система уравнений (1.1.1) рассматривается в области

$$D = \{0 < x < X,\, 0 < y < \infty\}$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered} u(0,y) = u_0(y), \quad u(x,0) = 0, \quad v(x,0) = v_0(x), \\ u(x,y) \rightrightarrows U(x) \ \text{при} \ y \to +\infty. \end{gathered} \tag{1.1.2}$$

Функции $v_0(x)$, $u_0(x)$, $U(x)$, $B(x)$ предполагаются заданными.

Определение 1.1.1. *Классическим решением задача* (1.1.1), (1.1.2) *называются функции* $u(x,y)$, $v(x,y)$, *обладающие следующими свойствами:* u *и* v *— непрерывны в* $\overline{D}$, *имеют в* D *непрерывные производные, входящие в уравнение* (1.1.1); *удовлетворяют поточечно уравнениям* (1.1.1) *и условиям* (1.1.2).

Далее, будем предполагать, что

- $u_0(y) > 0$, при $y > 0$;
- $u_0(0) = 0, \quad u_0'(0) > 0$;
- $u_0(y) \to U(0)$ при $y \to \infty$;
- $\dfrac{dU}{dx}$, $v_0(x)$, $B(x)$ — непрерывно дифференцируемы при $x \in [0, X]$;
- $u_0(y), \quad u_0'(y), \quad u_0''(y)$ ограничены при $0 \le y < \infty$ и непрерывны по Гёльдеру ;
- в точке (0, 0) выполняется условие согласования при $y \to 0$

$$\nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(1+d\Big(\frac{\partial u_0}{\partial y}\Big)^2\right)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)-v_0(0)\frac{\partial u_0}{\partial y}+B^2(0)(U(0)-u_0(y))+ \\ +U(0)\frac{dU(0)}{dx}=O(y^2).$$

§ 1.2. Переменные Мизеса

Для того, чтобы доказать корректность поставленной нами краевой задачи, необходимо свести систему к одному уравнению.

Система уравнений (1.1.1) с условиями (1.1.2) сводится к квазилинейному дифференциальному уравнению при помощи преобразования Мизеса. С этой целью вводим новые независимые переменные:

$$x=x,\quad \psi=\psi(x,y), \tag{1.2.1}$$

и новую неизвестную функцию

$$w(x,\psi)=u^2(x,y), \tag{1.2.2}$$

где $u=\dfrac{\partial\psi}{\partial y},\quad v-v_0(x)=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x},\quad \psi(x,0)=0.$

Тогда

$$u=\sqrt{w};\qquad y=\int\limits_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{w(x,\psi)}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{1}{2\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial\psi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial\psi}\Big)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\psi}\Big(\frac{\partial w}{\partial\psi}\Big)\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\sqrt{w}}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}.$$

Подставив полученные выражения в первое уравнение системы (1.1.1)

$$\nu\frac{\sqrt{w}}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}\left(1+3d\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial\psi}\Big)^2\right)-\sqrt{w}\Big(\frac{1}{2\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{1}{2\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big)-$$

$$-\frac{1}{2}\Big(v_0(x)-\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big)\frac{\partial w}{\partial\psi}+B^2(U-\sqrt{w})=-U\frac{\partial U}{\partial x},$$

получим новое уравнение

$$\nu\sqrt{w}\left(1+\frac{3}{4}d\Big(\frac{\partial w}{\partial\psi}\Big)^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}-\frac{\partial w}{\partial x}-v_0\frac{\partial w}{\partial\psi}+2B^2(U-\sqrt{w})=-2U\frac{dU}{dx} \tag{1.2.3}$$

в области $G=\{0<x<X,\quad 0<\psi<\infty\}$ с условиями

$$w(0,\psi)=w_0(\psi),\quad w(x,0)=0,\quad w(x,\psi)\rightrightarrows U^2(x)\ \text{ при }\ \psi\to\infty. \tag{1.2.4}$$

Функция $w_0(\psi)$ определяется из уравнения

$$w_0\left(\int\limits_0^y u_0(\eta)d\eta\right)\equiv u_0^2(y).$$

Определение 1.2.1. *Решением задачи* (1.2.3), (1.2.4) *называется неотрицательная функция* $w(x,\psi)$, *которая непрерывна в* $\overline{G}$, *имеет в* G *непрерывные производные, входящие в уравнение* (1.2.3); *удовлетворяет уравнению* (1.2.3) *и условиям* (1.2.4).

Перепишем вышеизложенные предположения для переменных Мизеса. Пусть

- $w_0(\psi)>0,$ при $\psi>0;$
- $w_0(0)=0,\ w_0'(0)>0;$
- $w_0(\psi)\to U^2(0)$ при $\psi\to\infty;$
- $\dfrac{dU}{dx}$, $v_0(x)$, $B(x)$ - непрерывно дифференцируемы при $x\in[0,X];$

- $w_0(\psi)$, $w_0'(\psi)$, $w_0''(\psi)$ ограничены при $0 \le \psi < \infty$ и непрерывны по Гёльдеру;
- в точке $(0, 0)$ выполняется условие согласования при $\psi \to 0$ в виде

$$\mu(\psi) = \nu\sqrt{w_0(\psi)}\left(\left(1 + \frac{3}{4}d\Big(\frac{\partial w_0(\psi)}{\partial\psi}\Big)^2\right)\frac{\partial^2 w_0(\psi)}{\partial\psi^2}\right) - v_0(0)\frac{\partial w_0(\psi)}{\partial\psi} +$$

$$+ 2B^2(0)(U(0) - \sqrt{w_0(\psi)}) + 2U(0)\frac{dU(0)}{dx} = O(\psi).$$

Существование и единственность достаточно гладкого решения (1.2.3), (1.2.4) влечёт существование и единственность решения задачи (1.1.1), (1.1.2).

§ 1.3. Эквивалентность решений двух задач

Справедливо утверждение об эквивалентности решений двух задач.

Лемма 1.3.1. *Пусть в области* $G = \{0 < x < X,\ 0 < \psi < \infty\}$ *существует решение* $w(x,\psi)$ *задачи* (1.2.3), (1.2.4) *со следующими свойствами: функция* $w(x,\psi)$ *ограничена в* $\overline{G}$; $w(x,\psi) > 0$ *при* $\psi > 0$; *существуют постоянные* M, m, ψ_1, *выбор которых зависит только от значений* X, u_0, v_0, *и* $p(x)$, *такие, что*

$$\left|\frac{\partial w}{\partial\psi}\right| \le M, \quad \left|\sqrt{w}\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}\right| \le M, \quad (x,\psi) \in G; \qquad (1.3.1)$$

кроме того,

$$\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right| \le M\psi^{1-\beta}, \quad \frac{\partial w}{\partial\psi} \ge m > 0 \text{ при } 0 \le \psi \le \psi_1,\ 0 < \beta < \frac{1}{2}.$$

Тогда в области $D = \{0 < x < X,\ 0 < y < \infty\}$ *существует решение* $u(x,y), v(x,y)$ *задачи* (1.1.1), (1.1.2), *обладающее следующими свойствами: фукнция* $u(x,y)$ *непрерывна и ограничена в* $\overline{D}$, $u > 0$

при $y>0$; $\frac{\partial u}{\partial y}>m_1>0$ *при* $0<y<y_0\,(m_1$*и* y_0- *некоторые постоянные);* $\frac{\partial u}{\partial y}$ *и* $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ *непрерывны и ограничены в* D; $\frac{\partial u}{\partial x}$, v, $\frac{\partial v}{\partial y}$ *непрерывны и ограничены в любой конечной части* $\overline{D}$.

Доказательство. Обозначим $z(x,\psi)=\dfrac{\partial w}{\partial \psi}$. Дифференцируя уравнение (1.2.3) по ψ, для z получим уравнение

$$L(z)=\frac{\nu}{2\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial\psi}\left(1+\frac{3}{4}d\left(\frac{\partial w}{\partial\psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}+2\nu\sqrt{w}\frac{3}{4}d\frac{\partial w}{\partial\psi}\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}+$$
$$+\nu\sqrt{w}\left(1+\frac{3}{4}d\left(\frac{\partial w}{\partial\psi}\right)^2\right)\frac{\partial^3 w}{\partial\psi^3}-\frac{\partial^2 w}{\partial\psi\partial x}-v_0\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}-\frac{B^2}{\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial\psi}=0.$$

Учитывая, что $\dfrac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}=\dfrac{\partial z}{\partial\psi}$, $\dfrac{\partial^3 w}{\partial\psi^3}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial\psi^2}$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial\psi\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial x}$, перепишем уравнение в виде

$$L(z)=\nu\sqrt{w}\left(1+\frac{3}{4}d\left(\frac{\partial w}{\partial\psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial\psi^2}+\frac{3}{2}d\nu\sqrt{w}\frac{\partial w}{\partial\psi}\frac{\partial z}{\partial\psi}\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}+$$
$$+\frac{\nu}{2\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial\psi}\frac{\partial z}{\partial\psi}\left(1+\frac{3}{4}d\left(\frac{\partial w}{\partial\psi}\right)^2\right)-\frac{\partial z}{\partial x}-v_0\frac{\partial z}{\partial\psi}-\frac{B^2}{\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial\psi}=0.$$

Далее, применим принцип максимума в неограниченной области, положив

$$a(x,\psi)=\nu\sqrt{w}\left(1+\frac{3}{4}d\left(\frac{\partial w}{\partial\psi}\right)^2\right).$$

Заметим, что $a(x,\psi)\geq 0$ и ограничено; пусть

$$b(x,\psi)=\frac{3}{2}d\nu\sqrt{w}\frac{\partial w}{\partial\psi}\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}+\frac{\nu}{2\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial\psi}\left(1+\frac{3}{4}d\left(\frac{\partial w}{\partial\psi}\right)^2\right)-v_0,$$

$b(x,\psi)$ ограничено в силу неравенств (1.3.1) при $\psi\geq\psi_1$.

Пусть $Z_\pm = k_1 e^{-k_2\psi + k_3 x} \pm z(x,\psi)$. Тогда

$$L(Z_\pm) = k_1 e^{-k_2\psi + k_3 x}\biggl(k_2^2 \nu\sqrt{w}\Bigl(1 + \frac{3}{4}d\Bigl(\frac{\partial w}{\partial\psi}\Bigr)^2\Bigr) -$$

$$-k_2\Bigl(\frac{3}{2}d\nu\sqrt{w}\frac{\partial w}{\partial\psi}\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2} + \frac{\nu}{2\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial\psi}\Bigl(1 + \frac{3}{4}d\Bigl(\frac{\partial w}{\partial\psi}\Bigr)^2\Bigr) -$$

$$-v_0 - \frac{B^2}{\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial\psi}\Bigr) - k_3 < 0$$

при достаточно больших значениях параметра k_3 и при $\psi \geq \psi_1$.

Согласно принципу максимума $Z_\pm \geq 0$ в области

$$\{0 \leq x \leq X,\ \psi_1 < \psi < \infty\}.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\partial w}{\partial\psi}\right| \leq k_4 e^{-k_2\psi} \quad \text{при} \quad \psi \geq \psi_1.$$

Кроме того, функция $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ограничена в области D, так как при $\psi \geq \psi_1$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leq \left|\frac{1}{2\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial x}\right| + \left|\frac{1}{2\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial w}{\partial\psi}\right| \leq$$

$$\leq k_5 + \frac{1}{4}\left|\int\limits_0^\psi w^{-3/2}\frac{\partial w}{\partial x}\,d\psi\right| 2k_4 e^{-k_2\psi} \leq k_5 + k_6\psi e^{-k_2\psi} \leq k_7.$$

Ограниченность функции $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ вытекает из второго уравнения системы (1.1.1). Лемма доказана. $\square$

§ 1.4. Теорема о существовании решения задачи в переменных Мизеса

Имеет место утверждение.

Теорема 1.4.1 (Существование). *Пусть выполнены предположения относительно функций $U(x)$, $u_0(y)$, $v_0(x)$. Тогда задача (1.2.3), (1.2.4) при некотором X имеет в области $G = \{0 < x < X,\, 0 < \psi < \infty\}$ решение $w(x,\psi)$, обладающее следующими свойствами: $w(x,\psi)$ ограничена в $\overline{G}$, $w(x,\psi) > 0$ при $\psi > 0$,*

$$\left|\frac{\partial w}{\partial \psi}\right| \le M, \qquad \left|\sqrt{w}\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}\right| \le M \text{ в } G,$$

$$\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right| \le M\psi^{1-\beta}, \qquad \frac{\partial w}{\partial \psi} \ge m > 0 \text{ при } 0 \le \psi \le \psi_1, \quad 0 < \beta < \frac{1}{2},$$

где положительные постоянные M, m, ψ_1 зависят только от X, U, u_0, v_0.

Если $\big(U'(x) + B^2(x)\big) \ge 0$ и $v_0(x) \le 0$ либо $\big(U'(x) + B^2(x)\big) > 0$, то такое решение существует в G при любом $X > 0$.

Доказательство теоремы строится но основе лемм, приведённых ниже.

1.4.1 Вспомогательные утверждения

Докажем существование решения задачи в переменных Мизеса.

Рассмотрим область $G_\varepsilon = \left\{0 < x < X,\, 0 < \psi < \dfrac{1}{\varepsilon}\right\}$. Пусть

$$\Gamma_\varepsilon = \{0 < x < X,\, \psi = 0\} \cup \\ \cup \left\{x = 0, 0 < \psi < \frac{1}{\varepsilon}\right\} \cup \left\{0 < x < X,\, \psi = \frac{1}{\varepsilon}\right\}.$$

В области G_ε рассмотрим уравнение (1.2.3) с условиями

$$w(x,0) = w_0(\varepsilon)\exp\left(\frac{\mu(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)}\right), \qquad w(0,\psi) = w_0(\varepsilon + \psi),$$
$$w\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right) = w_0\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)\exp\left(\frac{\mu(\varepsilon + 1/\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon + 1/\varepsilon)}\right). \tag{1.4.1}$$

Имеет место утверждение.

Лемма 1.4.1. *Если задача (1.2.3), (1.4.1) имеет положительное решение $w_\varepsilon(x,\psi)$ в области G_ε, то существуют числа $X > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$, такие, что для любого $\varepsilon > \varepsilon_0$ выполнено неравенство*

$$w_\varepsilon(x,\psi) \geq w_\varepsilon(x,0) + f(\psi)(1+e^{-\alpha x}), \quad (x,\psi) \in G_\varepsilon, \tag{1.4.2}$$

где $\alpha > 0$, а функция $f(\psi)$ такова, что $f(\psi) = A_1\psi^{4/3} + A_2\psi$ при $\psi \leq 1$ и $f(1) \leq f(\psi) \leq A_3$ при $\psi > 1$; при этом $|f'(\psi)| \leq A_4, |f''(\psi)| \leq A_5$ при $\psi > 1$. Здесь $A_i -$ положительные постоянные.

Если $U'(x) \geq 0$ и $v_0(x) \leq 0$, то в области G_ε верна априорная оценка

$$w_\varepsilon(x,\psi) \geq w_\varepsilon(x,0) + f(\psi)e^{-\alpha x} \tag{1.4.3}$$

при любом $X > 0$ и достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$.

Если $U'(x) \geq \beta_0 > 0$, то в области G_ε имеет место неравенство

$$w_\varepsilon(x,\psi) \geq w_\varepsilon(x,0) + f(\psi). \tag{1.4.4}$$

Доказательство. Введем обозначение

$$\Phi_\varepsilon(x,\psi) = w_\varepsilon(x,0) + f(\psi)(1+e^{-\alpha x}),$$

где $\alpha = const > 0$. Тогда $\Phi_\varepsilon(x,0) = w_\varepsilon(x,0)$,

$$\Phi_\varepsilon\left(x,\frac{1}{\varepsilon}\right) = w_\varepsilon(x,0) + f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)(1+e^{-\alpha x}) = w_0 \exp\left(\frac{\mu(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)}\right)$$
$$+ f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)(1+e^{-\alpha x}) \leq w_0(\varepsilon)\exp\left(\frac{\mu(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)}\right) + 2A_3$$

на основании краевых условий (1.4.1).

В силу условия согласования для переменных Мизеса, при достаточно малых значениях ε, получаем $\mu(\varepsilon) \leq C_1\varepsilon$. Таким образом,

$$\frac{\mu(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)} \leq \frac{C_1\varepsilon x}{C_2\varepsilon} \leq Cx,$$

откуда следует

$$\Phi_\varepsilon\left(x,\frac{1}{\varepsilon}\right) \leq C_3\varepsilon e^{Cx} + 2A_3 \leq C_3\varepsilon e^{CX} + 2A_3.$$

С другой стороны

$$w_\varepsilon\left(x,\frac{1}{\varepsilon}\right)=w_0\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\right)\exp\left(\frac{\mu(\varepsilon+1/\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon+1/\varepsilon)}\right)\geq$$

$$\geq w_0\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\right)>\frac{1}{2}U^2(0)$$

при достаточно малых значениях ε. Далее выберем значение параметров ε и A_3 так, чтобы выполнялось неравенство

$$\Phi_\varepsilon\left(x,\frac{1}{\varepsilon}\right)<w_0\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\right)\leq w_\varepsilon\left(x,\frac{1}{\varepsilon}\right). \qquad (1.4.5)$$

При достаточно малых параметрах A_1, A_2 имеем

$$\Phi_\varepsilon(0,\psi)=w_\varepsilon(0,0)+2f(\varepsilon)=w_0(\varepsilon)+2A_1\varepsilon^{4/3}+2A_2\varepsilon<w_0(\varepsilon+\psi), \quad (1.4.6)$$

поскольку функция $w_0(\psi)$ возрастает при малых значениях ψ . При малых ε и больших значениях ψ имеет место неравенство $w_0(\varepsilon+\psi)>w_0(\varepsilon)$, так как $w_0(\psi)\to U^2(0)>0$.

Обозначим

$$L(w)\equiv\nu\sqrt{w}\Big(1+\frac{3}{4}d\Big(\frac{\partial w}{\partial\psi}\Big)^2\Big)\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}-\frac{\partial w}{\partial x}-v_0\frac{\partial w}{\partial\psi}-2B^2\sqrt{w}.$$

Рассмотрим

$$L(\Phi_\varepsilon)=\nu\sqrt{\Phi_\varepsilon}\Big(1+\frac{3}{4}d\big(f'(\psi)(1+e^{-\alpha x})\big)^2\Big)f''(\psi)(1+e^{-\alpha x})-$$

$$-\frac{\partial w_\varepsilon(x,0)}{\partial x}+\alpha f(\psi)e^{-\alpha x}-v_0f'(\psi)(1+e^{-\alpha x})-2B^2\sqrt{\Phi_\varepsilon}.$$

При $\psi\leq 1$ имеем

$$L(\Phi_\varepsilon)=\nu\sqrt{w_\varepsilon(x,0)+(A_1\psi^{4/3}+A_2\psi)(1+e^{-\alpha x})}\times$$

$$\times\left(1+\frac{3}{4}d\bigg(\Big(\frac{4}{3}A_1\psi^{1/3}+A_2\Big)(1+e^{-\alpha x})\bigg)^2\right)\left(\frac{4}{9}A_1\psi^{-2/3}\right)(1+e^{-\alpha x})-$$

$$-\mu(\varepsilon)\exp\left(\frac{\mu(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)}\right)+\alpha(A_1\psi^{4/3}+A_2\psi)e^{-\alpha x}-v_0(x)\left(\frac{4}{3}A_1\psi^{1/3}+A_2\right)\times$$

$$\times(1+e^{-\alpha x})-2B^2(x)\sqrt{w_\varepsilon(x,0)+(A_1\psi^{4/3}+A_2\psi)(1+e^{-\alpha x})}\geq$$

$$\geq\nu\frac{4}{9}\sqrt{A_2\psi}A_1\psi^{-2/3}-\mu(\varepsilon)\exp\left(\frac{\mu(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)}\right)+\alpha(A_1\psi^{4/3}+A_2\psi)e^{-\alpha x}-$$

$$-v_0(x)\left(\frac{4}{3}A_1\psi^{1/3}+A_2\right)(1+e^{-\alpha x})-$$

$$-2B^2(x)\sqrt{w_\varepsilon(x,0)+(A_1\psi^{4/3}+A_2\psi)(1+e^{-\alpha x})}.$$

В силу того, что $\dfrac{\mu(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)}\leq Cx$, из последнего получаем

$$L(\Phi_\varepsilon)\geq\frac{4}{9}\nu\sqrt{A_2}A_1\psi^{-1/6}-g(x),$$

где

$$g=|\mu(\varepsilon)|\,e^{Cx}+2\,|v_0|\left(\frac{4}{3}A_1+A_2\right)+2B^2(x)\sqrt{w_\varepsilon(x,0)+2(A_1+A_2)}.$$

Пусть $0<x<X$, тогда $g(x)+2\left|U\left(\dfrac{dU}{dx}+B^2\right)\right|\leq C_4$.

Поскольку $\psi^{-1/6}\to+\infty$ при $\psi\to 0$, то существует такое $\psi_1>0$, что при всех $\psi\in(0,\psi_1)$ имеем

$$\frac{4}{9}\nu\sqrt{A_2}A_1\psi^{-1/6}>g(x)+2\left|U\left(\frac{dU}{dx}+B^2\right)\right|.$$

Откуда

$$L(\Phi_\varepsilon)\geq 2\left|U\left(\frac{dU}{dx}+B^2\right)\right|$$

при всех $\psi \in (0, \psi_1)$.

При $\psi \geq \psi_1$ имеем $f(\psi) \geq \delta > 0$. Если α достаточно велико и выберем значение X так, чтобы выполнялось $e^{-\alpha X} \geq \frac{1}{2}$, то имеем

$$L(\Phi_\varepsilon) \geq \nu\sqrt{\Phi_\varepsilon} f''(\psi)(1+e^{-\alpha x}) - \mu(\varepsilon)\exp\left(\frac{\mu(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)}\right) + \alpha\frac{\delta}{2} -$$

$$-v_0(x)f'(\psi)(1+e^{-\alpha x}) - 2B^2(x)\sqrt{\Phi_\varepsilon} \geq \alpha\frac{\delta}{2} - C_5 \geq 2\left|U\left(\frac{dU}{dx} + B^2\right)\right|.$$

Из (1.4.5),(1.4.6) следует, что на Γ_ε $w_\varepsilon(x,\psi) \geq \Phi_\varepsilon(x,\psi)$ и

$$L(w_\varepsilon) - L(\Phi_\varepsilon) \leq -2U\left(\frac{dU}{dx} + B^2\right) - 2 \leq 0,$$

то $w_\varepsilon(x,\psi) - \Phi_\varepsilon(x,\psi) \geq 0$ всюду в $\overline{G}_\varepsilon$, согласно принципу максимума. Теперь докажем оценку (1.4.3). Выберем A_1, A_2, A_3 так, чтобы на Γ_ε при $\varepsilon > 0, \alpha > 0$ выполнялось

$$\Phi^1_\varepsilon(x,\psi) \equiv w_\varepsilon(x,0) + f(\psi)e^{-\alpha x} \leq w_\varepsilon(x,\psi).$$

В G_ε рассмотрим выражение

$$L(\Phi^1_\varepsilon) = e^{-\alpha x}\Big(\nu\sqrt{\Phi^1_\varepsilon}\Big(1 + \frac{3}{4}d(f'(\psi)e^{-\alpha x})^2\Big)f''(\psi) +$$

$$+\alpha f(\psi) - v_0(x)f'(\psi) + 2B^2\sqrt{\Phi^1_\varepsilon}\Big) - \mu(\varepsilon)exp\left(\frac{\mu(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)}\right).$$

Из того, что $v_0(x) \leq 0$, в последнем выражении сомножитель при $e^{-\alpha x}$ положителен, если α достаточно велико. Отсюда, если ε достаточно мало, получаем, что $L(\Phi^1_\varepsilon) \geq 0$. Следовательно,

$$L(w_\varepsilon) - L(\Phi^1_\varepsilon) \leq -2U\left(\frac{dU}{dx} + B^2\right) \leq 0.$$

Поскольку $w_\varepsilon(x,\psi) \geq \Phi^1_\varepsilon(x,\psi)$ на Γ_ε, по принципу максимума получаем, что $w_\varepsilon(x,\psi) \geq \Phi^1_\varepsilon(x,\psi)$ всюду в $\overline{G}_\varepsilon$.

Если $U'(x) \geq \beta_0 > 0$, то постоянные $A_1, ..., A_5$ и ε_0 выберем так, чтобы неравенства $L\big(w_\varepsilon(x,0) + f(\psi)\big) \geq -\beta_0$ в G_ε и $w_\varepsilon(x,\psi) \geq$

$w_\varepsilon(x,0)+f(\psi)$ на Γ_ε выполнялись при $\varepsilon<\varepsilon_0$. Тогда получим $L\big(w_\varepsilon\big)-L\big(w_\varepsilon(x,0)+f(\psi)\big)\leq 0$. Поэтому в области G_ε по принципу максимума справедливо неравенство (1.4.4). Лемма доказана. $\square$

Пусть w_ε - решение задачи (1.2.3), (1.4.1). Тогда для любой точки $(x,\psi)\in G_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$w_\varepsilon(x,\psi)\geq w_\varepsilon(x,0)+f(\psi)(1+e^{-\alpha x})\geq w_0(\varepsilon)\exp\left(\frac{\mu(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)}\right)\geq a(\varepsilon)>0,$$

где $a(\varepsilon)$ — некоторое положительное число, зависящее от ε.

В уравнении (1.2.3) при $w\leq a(\varepsilon)$ вместо коэффициента $\nu\sqrt{w}$ возьмём некоторую гладкую положительную ограниченную функцию (при каждом фиксированном значении ε). Получим квазилинейное параболическое уравнение с краевыми условиями (1.4.1), у которого существует решение w_ε (см. [40, лемма 2.1.7]). Это решение также является решением задачи (1.2.3), (1.4.1), так как при $w\geq a(\varepsilon)$ последнее уравнение совпадает с исходным уравнением (1.2.3), а мы доказали, что решение уравнения (1.2.3) всегда больше или равно $a(\varepsilon)$.

Лемма 1.4.2. *Пусть $w_\varepsilon(x,\psi)$ — решение задачи* (1.2.3), (1.4.1). *Тогда существуют такие положительные, не зависящие от ε постоянные M_1, M_2, M_3, что выполняются неравенства*

$$0<w_\varepsilon(x,\psi)<M_1, \tag{1.4.7}$$

$$M_2<\frac{\partial w}{\partial\psi}\bigg|_{\psi=0}<M_3. \tag{1.4.8}$$

Доказательство. Сделаем замену. Пусть $w(x,\psi)=e^{\alpha x}\overline{w}(x,\psi)$, и $\alpha=const>0$. Получим выражение

$$\nu\sqrt{w}e^{\alpha x}\left(1+\frac{3}{4}d\Big(\frac{\partial\overline{w}}{\partial\psi}\Big)^2e^{\alpha x}\right)\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial\psi^2}-e^{\alpha x}\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}-\alpha e^{\alpha x}\overline{w}-v_0e^{\alpha x}\frac{\partial\overline{w}}{\partial\psi}=$$
$$=2B^2\sqrt{w}-2U\left(\frac{dU}{dx}+B^2\right).$$

Пусть (x_0,ψ_0) — точка максимума функции $\overline{w}_\varepsilon = w_\varepsilon e^{-\alpha x}$. Если максимум достигается внутри области G_ε, то

$$\frac{\partial \overline{w}_\varepsilon}{\partial x}\Big|_{(x_0,\psi_0)} = 0; \qquad \frac{\partial \overline{w}_\varepsilon}{\partial \psi}\Big|_{(x_0,\psi_0)} = 0; \qquad \frac{\partial^2 \overline{w}_\varepsilon}{\partial \psi^2}\Big|_{(x_0,\psi_0)} \le 0.$$

Поэтому выполняется неравенство

$$\alpha e^{\alpha x}\overline{w_\varepsilon}\Big|_{(x_0,\psi_0)} = 2U\left(\frac{dU}{dx} + B^2\right)\Big|_{(x_0,\psi_0)} + \nu\sqrt{w_\varepsilon}e^{\alpha x}\frac{\partial^2 \overline{w_\varepsilon}}{\partial \psi^2}\Big|_{(x_0,\psi_0)} +$$
$$+2B^2\sqrt{w_\varepsilon}\Big|_{(x_0,\psi_0)} \le 2U\left(\frac{dU}{dx} + B^2\right) + 2B^2\sqrt{w_\varepsilon}.$$

То есть, функция $\overline{w}_\varepsilon$ ограничена во внутренней части G_ε. Поскольку функция $\overline{w}_\varepsilon$ ограничена и на границе Γ_ε, то эта функция ограничена во всей области G_ε, и, следовательно, функция w_ε ограничена в G_ε. Доказали неравенство (1.4.7).

Теперь докажем неравенство (1.4.8). Заметим, что в силу (1.4.2) выполняется

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big|_{\psi=0} = \lim_{\psi\to 0}\frac{w_\varepsilon(x,\psi) - w_\varepsilon(x,0)}{\psi} \ge \lim_{\psi\to 0}\frac{f(\psi)(1+e^{-\alpha x})}{\psi} =$$
$$= \lim_{\psi\to 0}\frac{A_1\psi^{4/3} + A_2\psi}{\psi} = A_2(1+e^{-\alpha x}) > M_2 > 0.$$

Рассмотрим правую часть исходного неравенства. Предположим, что

$$F_\varepsilon(x,\psi) = w_\varepsilon(x,0) + (2\psi - \psi^{4/3})e^{\alpha(x+1)}, \qquad 0 \le \psi \le 1;$$

$$L_0(w) = \nu\sqrt{w}\left(1 + \frac{3}{4}d\left(\frac{\partial w}{\partial \psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} - \frac{\partial w}{\partial x} - v_0\frac{\partial w}{\partial \psi} - 2B^2\sqrt{w}.$$

Получим

$$L_0\big(F_\varepsilon(x,\psi)\big) = \nu\sqrt{F_\varepsilon}\left(1+\frac{3}{4}d\left(2-\frac{4}{3}\psi^{1/3}\right)^2 e^{2\alpha(x+1)}\right)\left(-\frac{4}{9}\right)\psi^{-2/3}e^{\alpha(x+1)}-$$

$$-v_0(x)\left(2-\frac{4}{3}\psi^{1/3}\right)e^{\alpha(x+1)} - 2B^2\sqrt{F_\varepsilon}e^{\alpha(x+1)} - \left(\mu(\varepsilon)\exp\left(\frac{\mu(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)}\right)+\right.$$

$$\left.+\alpha\big(2\psi-\psi^{4/3}\big)e^{\alpha(x+1)}\right) \to -\infty \text{ при } \psi \to 0+0.$$

То есть $L_0\big(F_\varepsilon(x,\psi)\big) < C < 0$ для любого фиксированного $x \in [0,X]$ при достаточно больших значениях α.

Величина $U(U'+B^2)$ ограничена при $0 \le x \le X$, следовательно, найдется такое положительное α, при котором $L(F_\varepsilon) < -2\left|U(U'+B^2)\right|$ при $0 \le \psi \le 1$. При $\psi = 1$ имеем

$$F_\varepsilon(x,1) = w_\varepsilon(x,0) + e^{\alpha(x+1)} \ge e^\alpha.$$

Следовательно, $F_\varepsilon(x,1) - w_\varepsilon(x,0) \ge 0$ при достаточно больших величинах α и $0 \le x \le X$ (т.к. функция $w_\varepsilon(x,1)$ ограничена при $0 \le x \le X$). При $\psi = 0$ имеем $F_\varepsilon(x,0) = w_\varepsilon(x,0)$. Это означает, что $F_\varepsilon(x,0) - w_\varepsilon(x,0) = 0$ при $0 \le x \le X$. При $x = 0$ имеем

$$F_\varepsilon(0,\psi) = w_\varepsilon(0,\psi) + (2\psi - \psi^{4/3})e^\alpha,$$

поэтому

$$F_\varepsilon(0,\psi) \ge w_\varepsilon(0,\psi) = w_0(\varepsilon+\psi),$$

поскольку $w_\varepsilon(\varepsilon+\psi) \le C(\varepsilon+\psi)$ при достаточно малых значениях ε и ψ;

$$F_\varepsilon(0,\psi) = w_0(\varepsilon) + (2\psi-\psi^{4/3})e^\alpha = C\varepsilon + (2\psi-\psi^{4/3})e^\alpha \ge C(\varepsilon+\psi)$$

при достаточно больших значениях α. Откуда $F_\varepsilon(0,\psi) - w_\varepsilon(0,\psi) \ge 0$ при $0 \le \psi \le 1$.

Применяя принцип максимума в области $G = \{0 < x < X,\ 0 < \psi < 1\}$, находим

$$F_\varepsilon(x,\psi) \geq w_\varepsilon(x,\psi) \geq 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \psi \leq 1, \quad 0 \leq x \leq X,$$

т.к. в этой области выполняются неравенства

$$L_0(F_\varepsilon) < -2\left|U(U' + B^2)\right| \leq -2U(U' + B^2) = L_0(w_\varepsilon).$$

Таким образом,

$$(2\psi - \psi^{4/3})e^{\alpha(x+1)} \geq w_\varepsilon(x,\psi) - w_\varepsilon(x,0)$$

при $0 \leq \psi \leq 1, \quad 0 \leq x \leq X$. Тогда

$$\frac{\partial w}{\partial \psi}\Big|_{\psi=0} = \lim_{\psi\to 0}\frac{w_\varepsilon(x,\psi) - w_\varepsilon(x,0)}{\psi} \leq \lim_{\psi\to 0}(2 - \psi^{1/3})e^{\alpha(x+1)} \leq$$
$$\leq 2e^{\alpha(X+1)} < M_3$$

при $0 \leq x \leq X$. Лемма доказана.

□

Далее нам понадобятся утверждения об оценках производных w_ε. Справедливо утверждение.

Лемма 1.4.3. *Существует такая постоянная M_4, что*

$$\left|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\right| \leq M_4, \qquad (x,\psi) \in G_\varepsilon.$$

Доказательство. Продифференцируем уравнение (1.2.3) по переменной ψ в области G_ε. Имеем

$$\frac{\nu}{2\sqrt{w_\varepsilon}}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\left(1 + \frac{3}{4}d\Big(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big)^2\right)\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} + 2\nu\sqrt{w_\varepsilon}\frac{3}{4}d\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big(\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2}\Big) +$$
$$+\nu\sqrt{w_\varepsilon}\left(1 + \frac{3}{4}d\Big(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big)^2\right)\frac{\partial^2}{\partial \psi^2}\Big(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big) - v_0(x)\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big) -$$
$$-\frac{B^2}{\sqrt{w_\varepsilon}}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} = 0.$$

Обозначим $z_\varepsilon := \dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}$. Получим

$$\nu\sqrt{w_\varepsilon}\left(1+\frac{3}{4}d\Big(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big)^2\right)\frac{\partial^2 z_\varepsilon}{\partial \psi^2}+2\nu\sqrt{w_\varepsilon}\frac{3}{2}dz_\varepsilon\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial \psi}+$$
$$+\frac{\nu}{2\sqrt{w_\varepsilon}}\left(1+\frac{3}{4}d\big(z_\varepsilon\big)^2\right)\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial \psi}-v_0(x)\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial \psi}-\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x}-\frac{B^2}{\sqrt{w_\varepsilon}}z_\varepsilon=0.$$

Покажем, что функция z_ε ограничена на Γ_ε: так как при $\psi=0$ функция z_ε ограничена равномерно по ε в силу леммы (1.4.2); при $x=0$ функция $z_\varepsilon(0,\psi)=\dfrac{\partial w_0(\psi+\varepsilon)}{\partial \psi}$ ограничена равномерно по ε согласно условиям на функцию $w_0(\psi)$.

Осталось оценить $\dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big|_{\psi=1/\varepsilon}$. Пусть

$$\Lambda(w)=\nu\sqrt{w_\varepsilon}\left(1+\frac{3}{4}d\Big(\frac{\partial w}{\partial \psi}\Big)^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}-\frac{\partial w}{\partial x}-v_0\frac{\partial w}{\partial \psi}.$$

Обозначим $\Phi_1(x,\psi)=w_\varepsilon(x,1/\varepsilon)+A_1(1-e^{A_2(\psi-1/\varepsilon)})$, где A_1, A_2- некоторые положительные постоянные; $1/\varepsilon-1\le\psi\le 1/\varepsilon$ и ε достаточно мало. Тогда

$$\Lambda(\Phi_1)=\nu\sqrt{w_\varepsilon}\left(1+\frac{3}{4}d\left(-A_1A_2e^{A_2(\psi-1/\varepsilon)}\right)^2\right)\times$$
$$\times\left(-A_1A_2^2e^{A_2(\psi-1/\varepsilon)}\right)+v_0(x)A_1A_2e^{A_2(\psi-1/\varepsilon)}-$$
$$-\mu\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\right)\exp\left(\frac{\mu(\varepsilon+1/\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon+1/\varepsilon)}\right)=$$
$$=\nu\sqrt{w_\varepsilon}\left(-A_1A_2\left(1+\frac{3}{4}dA_1^2A_2^2e^{2A_2(\psi-1/\varepsilon)}\right)-v_0(x)\right)e^{A_2(\psi-1/\varepsilon)}-$$
$$-\mu\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\right)exp\left(\frac{\mu(\varepsilon+1/\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon+1/\varepsilon)}\right)<-2\left|B^2\sqrt{w_\varepsilon}-U\frac{dU}{dx}-UB^2\right|$$

при достаточно больших значениях A_1 и A_2. Значит,

$$\Lambda(w_\varepsilon)-\Lambda(\Phi_1)>-2U\left(\frac{dU}{dx}+B^2\right)+2\left|U\left(\frac{dU}{dx}+B^2\right)\right|\ge 0.$$

Увеличим при необходимости значение A_1 так, чтобы выполнялось неравенство

$$\Phi_1(0,\psi) = w_0\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right) + A_1\left(1 - e^{A_2(\psi - 1/\varepsilon)}\right) \geq w_\varepsilon(0,\psi).$$

Это можно сделать, поскольку $w_\varepsilon(0,\psi) \leq M_1$, где значение постоянной M_1 не зависит от ε. Далее, $\Phi_1(x, 1/\varepsilon) = w_\varepsilon(x, 1/\varepsilon)$;

$$\Phi_1\left(x, \frac{1}{\varepsilon} - 1\right) = w_\varepsilon\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right) + A_1\left(1 - e^{-A_2}\right) \geq M_1 \geq w_\varepsilon\left(x, \frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$$

при достаточно больших значениях A_1. Отсюда и из принципа максимума следует, что $w_\varepsilon(x,\psi) \leq \Phi_1(x,\psi)$ при $1/\varepsilon - 1 \leq \psi \leq 1/\varepsilon$. Следовательно,

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big|_{\psi=1/\varepsilon} = \lim_{\psi \to 1/\varepsilon - 0} \frac{w_\varepsilon(x,\psi) - w_\varepsilon(x, 1/\varepsilon)}{\psi - 1/\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\psi \to 1/\varepsilon - 0} \frac{w_\varepsilon(x,\psi) - \Phi_1(x,\psi) + A_1(1 - e^{A_2(\psi - 1/\varepsilon)})}{\psi - 1/\varepsilon} \geq$$

$$\geq \lim_{\psi \to 1/\varepsilon - 0} \frac{A_1(1 - e^{A_2(\psi - 1/\varepsilon)})}{\psi - 1/\varepsilon} = -A_1 A_2.$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi_2(x,\psi) = w_\varepsilon\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right) - A_3\left(1 - e^{A_4(\psi - 1/\varepsilon)}\right).$$

Совершенно аналогично получаем, что при достаточно больших значениях постоянных A_3, A_4 имеют место оценки

$$\Lambda(w_\varepsilon) - \Lambda(\Phi_2) < -2U\left(\frac{dU}{dx} + B^2\right) - 2\left|U\left(\frac{dU}{dx} + B^2\right)\right| \leq 0;$$

$$\Phi_2(0,\psi) \leq w_\varepsilon(0,\psi); \quad \Phi_2\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right) = w_\varepsilon\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right);$$

$$\Phi_2\left(x, \frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \leq w_\varepsilon\left(x, \frac{1}{\varepsilon} - 1\right),$$

т.е. $w_\varepsilon(x,\psi) \geq \Phi_2(x,\psi)$ при $1/\varepsilon - 1 \leq \psi \leq 1/\varepsilon$. Отсюда получим, что
$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big|_{\psi=1/\varepsilon} \leq A_3 A_4.$$

Показали, что функция $\dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}$ ограничена на Γ_ε. Отсюда и из принципа максимума, примененного к функции $z_\varepsilon = \dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}$, следует, что $|z_\varepsilon|$ ограничено равномерно по ε в области G_ε. Лемма доказана. □

Лемма 1.4.4. *Существуют положительные постоянные C_1, C_2(не зависящие от ε), такие, что в области G_ε выполнены оценки*
$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} \geq -C_1, \qquad \sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} \geq -C_2.$$

Доказательство. Продифференцируем уравнение (1.2.3) по переменной x в области G_ε:
$$\frac{\nu}{2\sqrt{w_\varepsilon}}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}\left(1+\frac{3}{4}d\Big(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big)^2\right)\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} + \nu\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2}\frac{3}{2}d\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big(\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi \partial x}\Big)+$$
$$+\nu\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial \psi^2}\Big(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}\Big)\left(1+\frac{3}{4}d\Big(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big)^2\right) - \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial x^2} - v_0'(x)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} - v_0(x)\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi \partial x}-$$
$$-2\sqrt{w_\varepsilon}(B^2(x))' - \frac{B^2(x)}{\sqrt{w_\varepsilon}}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} + 2\big((U'(x))^2 + B^2(x)U'(x) + U(x)U''(x)+$$
$$+U(x)(B^2(x))'\big) = 0.$$

Обозначим $r_\varepsilon = \dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}$, получим уравнение на r_ε :
$$\frac{\nu}{2\sqrt{w_\varepsilon}}r_\varepsilon\left(1+\frac{3}{4}d\Big(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big)^2\right)\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} + \nu\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2}\frac{3}{2}d\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big(\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial \psi}\Big)+$$
$$+\nu\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial^2 r_\varepsilon}{\partial \psi^2}\left(1+\frac{3}{4}d\Big(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big)^2\right) - \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x} - v_0'(x)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} - v_0(x)\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial \psi}-$$
$$-2\sqrt{w_\varepsilon}(B^2(x))' - \frac{B^2(x)}{\sqrt{w_\varepsilon}}r_\varepsilon + 2((U'(x))^2+$$
$$+B^2(x)U'(x) + U(x)U''(x) + U(x)(B^2(x))') = 0.$$

Поскольку в силу уравнения (1.2.3) имеем

$$\nu\left(1+\frac{3}{4}d\left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial\psi^2} = \\ =\frac{1}{\sqrt{w_\varepsilon}}\left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}+v_0(x)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}+2B^2(x)(U-\sqrt{w_\varepsilon})-2U(x)U'(x)\right),$$

получаем следующее соотношение:

$$\frac{1}{2w_\varepsilon}r_\varepsilon^2+r_\varepsilon\frac{v_0(x)}{2w_\varepsilon}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}+\frac{r_\varepsilon}{w_\varepsilon}U(x)U'(x)+\frac{r_\varepsilon}{w_\varepsilon}B^2(x)U-\frac{r_\varepsilon B^2(x)}{\sqrt{w_\varepsilon}}+ \\ +\left(\frac{3\nu\sqrt{w_\varepsilon}}{2}\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial\psi^2}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}-v_0(x)\right)\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial\psi}+\nu\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial^2 r_\varepsilon}{\partial\psi^2}\left(1+\frac{3}{4}d\left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}\right)^2\right)- \\ -\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x}-v_0'(x)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}-2\sqrt{w_\varepsilon}(B^2(x))'-\frac{B^2(x)}{\sqrt{w_\varepsilon}}r_\varepsilon+ \\ +2\big((U'(x))^2+B^2(x)U'(x)+U(x)U''(x)+U(x)(B^2(x))'\big)=0.$$

Если $r_\varepsilon(x,\psi)$ принимает отрицательный минимум во внутренней точке области G_ε, то в этой точке $\left.\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial\psi}\right|_{(x_0,\psi_0)}=\left.\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x}\right|_{(x_0,\psi_0)}=0$; $\left.\frac{\partial^2 r_\varepsilon}{\partial\psi^2}\right|_{(x_0,\psi_0)}\geq 0$. Следовательно, имеет место неравенство

$$\frac{1}{2w_\varepsilon}r_\varepsilon^2+r_\varepsilon\frac{v_0(x)}{2w_\varepsilon}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}+\frac{r_\varepsilon}{w_\varepsilon}U(x)U'(x)+\frac{r_\varepsilon}{w_\varepsilon}B^2(x)U-\frac{r_\varepsilon B^2(x)}{\sqrt{w_\varepsilon}}- \\ -v_0'(x)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}-2\sqrt{w_\varepsilon}\big(B^2(x)\big)'-\frac{B^2(x)}{\sqrt{w_\varepsilon}}r_\varepsilon+2\big((U'(x))^2+B^2(x)U'(x))+ \\ +U(x)U''(x)+U(x)(B^2(x))'\big)\leq 0$$

в точке (x_0,ψ_0) или, что то же самое,

$$\frac{r_\varepsilon^2}{2}+r_\varepsilon\frac{v_0(x)}{2}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}+r_\varepsilon U(x)U'(x)+r_\varepsilon B^2(x)U+r_\varepsilon B^2(x)\sqrt{w_\varepsilon}- \\ -\frac{B^2(x)}{\sqrt{w_\varepsilon}}r_\varepsilon\leq w_\varepsilon\left(v_0'(x)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}+2\sqrt{w_\varepsilon}\big(B^2(x)\big)'-2\big((U'(x))^2+ \\ +B^2(x)U'(x))+U(x)U''(x)+U(x)(B^2(x))'\big)\right).$$

Поскольку функции w_ε и $\dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}$ ограничены в области G_ε (леммы (1.4.2) и (1.4.3)), получаем, что $r_\varepsilon \geq -C_1$ во всех внутренних точках G_ε, причем значение постоянной C_1 не зависит от ε.

Рассмотрим функцию r_ε на границе области, т.е. на Γ_ε. Если значение ε достаточно мало, то имеют место следующие оценки:

$$\frac{\partial w_\varepsilon(x,0)}{\partial x} = \mu(\varepsilon)\exp\frac{\mu(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)} \geq -C_1,$$

так как $\mu(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$;

$$\frac{\mu(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)} \leq Cx; \qquad \frac{\partial w_\varepsilon(x,1/\varepsilon)}{\partial x} = \mu(\varepsilon+1/\varepsilon)\exp\frac{\mu(\varepsilon+1/\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon+1/\varepsilon)} \geq -C_1,$$

так как $\mu(\psi) \to const$ при $\psi \to +\infty$;

$$\frac{\partial w_\varepsilon(0,\psi)}{\partial x} = \nu\sqrt{w(0,\psi)}w''_{\psi\psi}(0,\psi) - v_0(0)w'_\psi(0,\psi) + 2B^2(0)\big(U(0)-$$
$$-\sqrt{w(0,\psi)}\big) + 2U(0)U'(0) = \nu\sqrt{w_0(\varepsilon+\psi)}w''_0(\varepsilon+\psi) - v_0(0)w'_0(\varepsilon+\psi)+$$
$$+2B^2(0)\big(U(0) - \sqrt{w_0(\varepsilon+\psi)}\big) + 2U(0)U'(0) = \mu(\varepsilon+\psi) \geq -C_1.$$

Таким образом, имеет место оценка $r_\varepsilon \geq -C_1$ в G_ε, откуда с учетом уравнения (1.2.3) получаем, что в G_ε

$$\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial\psi^2} \geq -C_2.$$

Лемма доказана. □

Заметим, что, согласно лемме (1.4.1), решение $w_\varepsilon(x,\psi)$ задачи (1.2.3), (1.4.1) удовлетворяет следующему свойству: $w_\varepsilon \geq a > 0$ при $\psi \geq \psi^*$, где $\psi^* > 0$ — некоторое число, и a не зависит от ε. Значит, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.4.5. *В области G_ε при $\psi \geq \psi^* > 0$ функция w_ε имеет производные $\dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}$, $\dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial\psi^2}$, удовлетворяющие в этой области* *условию Гёльдера, причем максимум модулей этих производных и постоянные из условий Гёльдера ограничены постоянной, зависящей от ψ^*, но не зависящей от ε. Показатели Гёльдера не зависят от ψ^* и ε.*

Эта лемма является аналогом [40, леммы 2.1.11].

Имеет место утверждение.

Лемма 1.4.6. *Существуют положительные постоянные C_3, C_4, C_5, не зависящие от ε и такие, что в области G_ε имеют место оценки*

$$\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial\psi^2} \le C_3, \qquad \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} \le C_4; \tag{1.4.9}$$

и для некоторого $\widetilde{\psi} \ge 0$ выполняется

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi} \ge C_5, \qquad 0 \le \psi \le \widetilde{\psi}. \tag{1.4.10}$$

Доказательство. Согласно лемме (1.4.5), достаточно показать, что существует число $\widetilde{\psi} > 0$, такое, что оценки (1.4.9),(1.4.10) выполняются в области G_ε при $0 \le \psi \le \widetilde{\psi}$.

Покажем, что при $0 \le \psi \le \widetilde{\psi}$, где $\widetilde{\psi}$ достаточно мало, выполнено неравенство (1.4.10). Имеем $\dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi} = \dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}\Big|_{\psi=0} + \displaystyle\int\limits_0^\psi \dfrac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial\psi^2}d\psi$. По лемме (1.4.2) имеем $\dfrac{\partial w_\varepsilon(x,0)}{\partial\psi} \ge M_2$, а из леммы (1.4.4) следует, что $\sqrt{w_\varepsilon}\dfrac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial\psi^2} \ge -C_2$; кроме того, $w_\varepsilon \ge C_6\psi$ при $\psi \le 1$ согласно (1.4.2)–(1.4.4). Поэтому при $\psi \le \widetilde{\psi}$ и достаточно малом $\widetilde{\psi}$ имеем

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi} \ge M_2 - \int\limits_0^\psi \frac{C_2 d\psi}{\sqrt{C_6\psi}} \ge C_5.$$

Докажем справедливость неравенства (1.4.9). Рассмотрим уравнение

$$\nu\sqrt{w_\varepsilon}\left(1+\frac{3}{4}d\left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z_\varepsilon}{\partial\psi^2}+2\nu\sqrt{w_\varepsilon}\frac{3}{2}dz_\varepsilon\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial\psi}+$$
$$+\frac{\nu}{2\sqrt{w_\varepsilon}}\left(1+\frac{3}{4}d(z_\varepsilon)^2\right)\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial\psi}-v_0(x)\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial\psi}-\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x}-\frac{B^2}{\sqrt{w_\varepsilon}}z_\varepsilon=0.$$

Сделаем в нем замену $z_\varepsilon=\varphi(S_\varepsilon)$ и обозначим $\sigma=\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial\psi}$. Получим уравнение на σ:

$$\nu\sqrt{w_\varepsilon}\left(1+\frac{3}{4}d\varphi^2\right)\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\sigma^2+\frac{\partial\sigma}{\partial\psi}\right)+\frac{3d\nu}{2}\sqrt{w_\varepsilon}\varphi\varphi'\sigma^2+$$
$$+\left(\frac{\nu}{2\sqrt{w_\varepsilon}}\varphi\left(1+\frac{3}{4}d\varphi^2\right)-v_0(x)\right)\sigma-\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial x}-\frac{B^2}{\sqrt{w_\varepsilon}}\varphi=0.$$

Продифференцировав последнее соотношение по ψ, получим

$$\nu\sqrt{w_\varepsilon}\Big(1+\frac{3}{4}d\varphi^2\Big)\frac{\partial^2\sigma}{\partial\psi^2}+\Big(\frac{\nu}{\sqrt{w_\varepsilon}}\varphi\Big(1+\frac{3}{4}d\varphi^2\Big)+\frac{9d\nu}{2}\sqrt{w_\varepsilon}\varphi\varphi'\sigma+$$
$$+\Big(2\nu\sqrt{w_\varepsilon}\Big(1+\frac{3}{4}d\varphi^2\Big)\frac{\varphi''}{\varphi'}\sigma-v_0(x)\Big)\frac{\partial\sigma}{\partial\psi}+$$
$$+\Big(3\nu\sqrt{w_\varepsilon}d\varphi\varphi''+\nu\sqrt{w_\varepsilon}\Big(1+\frac{3}{4}d\varphi^2\Big)\Big(\frac{\varphi''}{\varphi'}\Big)'+\frac{3d\nu}{2}\sqrt{w_\varepsilon}(\varphi')^2\Big)\sigma^3+$$
$$+\Big(\frac{3d\nu}{4w_\varepsilon^{3/2}}\varphi\varphi'+\Big(\frac{\nu}{2\sqrt{w_\varepsilon}}\varphi\frac{\varphi''}{\varphi'}+\frac{\nu}{2\sqrt{w_\varepsilon}}\varphi'\Big)\Big(1+\frac{3}{4}d\varphi^2\Big)+$$
$$+\frac{3d\nu}{4\sqrt{w_\varepsilon}}\varphi^2\varphi'\Big)\sigma^2-\frac{\nu}{4w_\varepsilon^{3/2}}\varphi^2\Big(1+\frac{3}{4}d\varphi^2\Big)\sigma-\frac{\partial\sigma}{\partial x}-\frac{B^2}{2w_\varepsilon^{3/2}}\varphi^2=0.$$

Введем функцию $q=\sqrt{w_\varepsilon}\sigma$ и заметим, что если положительный максимум функции q принимается во внутренней точке области Ω, то в силу последнего полученного соотношения в этой точке имеет место неравенство

$$\frac{\nu q^3}{w_\varepsilon}\left(\frac{3}{2}d(2\varphi\varphi'' + (\varphi')^2) + \left(1 + \frac{3}{4}d\varphi^2\right)\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)'\right) +$$

$$+\frac{q^2}{w_\varepsilon^{3/2}}\left(-\frac{\nu}{2}\frac{\varphi''}{\varphi'}\varphi\left(1 + \frac{3}{4}d\varphi^2\right) + \frac{\nu}{2}\left(1 + \frac{3}{4}\varphi^2\right)\varphi' - \frac{3d\nu}{2}\varphi\varphi'\right) +$$

$$+2U\left(\frac{dU}{dx} + B^2\right)\frac{q}{w_\varepsilon^{3/2}} \geq 0.$$

Положим, $\varphi(S) = C(1 - e^{-S})$. При таком выборе функции φ коэффициент при q^3 становится отрицательным. Из неравенства следует, что функция q ограничена в области Ω.

Дальнейшие рассуждения проводятся точно так же, как в [40, лемма 2.1.12], и завершают доказательство оценки (1.4.9). Лемма доказана. □

Лемма 1.4.7. *В области G_ε имеет место оценка*

$$\left|w_\varepsilon^{\beta-1}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}\right| \leq C_6, \tag{1.4.11}$$

где значение постоянной C_6 не зависит от ε, $0 < \beta < 1/2$.

Доказательство. Из леммы (1.4.5) следует, что $\left|w_\varepsilon^{\beta-1}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}\right| \leq C_6$ при $\psi \geq \psi^*$, поэтому достаточно доказать оценку (1.4.11) при $0 \leq \psi \leq \psi^*$. Будем полагать, что ψ^* достаточно мало, чтобы выполнялось неравенство $\dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} \geq C_5 > 0$ при $0 \leq \psi \leq \psi^*$. Положим $g = w_\varepsilon^\beta$. Поскольку $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \beta w_\varepsilon^{\beta-1}\dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}$, то остается оценить выражение $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}\right|$. Обозначив

$1/\beta = \gamma$, из уравннения (1.2.3) получим

$$\nu\left(1 + \frac{3}{4}d\gamma^2 g^{2\gamma-1}\Big(\frac{\partial g}{\partial\psi}\Big)^2\right)\left(\gamma(\gamma-1)g^{3/2\gamma-2}\Big(\frac{\partial g}{\partial\psi}\Big)^2 + \gamma g^{3/2\gamma-1}\frac{\partial^2 g}{\partial\psi^2}\right) -$$
$$-\gamma g^{\gamma-1}\frac{\partial g}{\partial x} - v_0(x)\gamma g^{\gamma-1}\frac{\partial g}{\partial\psi} - 2B^2(x)g^{\gamma/2} + 2U\left(\frac{dU}{dx} + B^2\right) = 0. \tag{1.4.12}$$

Дифференцируя последнее уравнение по переменной x, получим соотношение

$$\nu\Big(\frac{3}{4}d\gamma^2(2\gamma-1)g^{2\gamma-2}h\Big(\frac{\partial g}{\partial\psi}\Big)^2 + \frac{3}{4}d\gamma^2 g^{2\gamma-1}2\frac{\partial g}{\partial\psi}\frac{\partial h}{\partial\psi}\Big)\times$$

$$\times\Big(\gamma(\gamma-1)g^{3\gamma/2-2}\Big(\frac{\partial g}{\partial\psi}\Big)^2 + \gamma g^{3\gamma/2-1}\frac{\partial^2 g}{\partial\psi^2}\Big)+$$

$$+\nu\Big(1 + \frac{3}{4}d\gamma^2 g^{2\gamma-1}\Big(\frac{\partial g}{\partial\psi}\Big)^2\Big)\Big(\gamma(\gamma-1)\Big(\frac{3}{4}\gamma-2\Big)g^{3\gamma/2-3}h\Big(\frac{\partial g}{\partial\psi}\Big)^2+$$

$$+\gamma(\gamma-1)g^{3\gamma/2-2}2\frac{\partial g}{\partial\psi}\frac{\partial h}{\partial\psi} + \gamma\Big(\frac{3}{2}\gamma-1\Big)g^{3\gamma/2-2}h\frac{\partial^2 g}{\partial\psi^2} + \gamma g^{3\gamma/2-1}\frac{\partial^2 h}{\partial\psi^2}\Big)-$$

$$-\gamma(\gamma-1)g^{\gamma-2}h\frac{\partial g}{\partial x} - \gamma g^{\gamma-1}\frac{\partial h}{\partial x} - v_0'(x)\gamma g^{\gamma-1}\frac{\partial g}{\partial\psi}-$$

$$-v_0(x)\gamma(\gamma-1)g^{\gamma-2}h\frac{\partial g}{\partial\psi} - v_0(x)\gamma g^{\gamma-1}\frac{\partial h}{\partial\psi} - 4B\frac{dB}{dx}g^{\gamma/2} - \gamma B^2 g^{\gamma/2-1}h+$$

$$+2\frac{dU}{dx}\left(\frac{dU}{dx} + B^2\right) + 2U\left(\frac{d^2U}{dx^2} + 2B\frac{dB}{dx}\right) = 0,$$

где $h = \dfrac{\partial g}{\partial x}$. Подставляя сюда вместо $\dfrac{\partial^2 g}{\partial\psi^2}$ его значение из уравнения (1.4.12), можем получить новое уравнение на h. Перенесем все члены полученного уравнения в правую часть и выпишем коэффициент C при h. Имеем

$$C = \frac{\gamma^2}{2} g^{\gamma-2} h + v_0(x) \frac{\gamma^2}{2} g^{\gamma-2} \frac{\partial g}{\partial \psi} - 2\left(\frac{3}{2}\gamma - 1\right) g^{-1} U \frac{dU}{dx} -$$

$$-\nu\gamma(\gamma-1)\left(1 + \frac{3}{4} d\gamma^2 g^{2\gamma-1}\left(\frac{\partial g}{\partial \psi}\right)^2\right) g^{3\gamma/2-3}\left(\frac{\partial g}{\partial \psi}\right)^2 - B^2 \gamma g^{\gamma/2-1} +$$

$$+\frac{3d\nu}{4}\gamma^2(2\gamma-1) g^{2\gamma-2}\left(\frac{\partial g}{\partial \psi}\right)^2\left(\gamma(\gamma-1) g^{3\gamma/2-2}\frac{\partial g}{\partial \psi} + \gamma g^{3\gamma/2-1}\frac{\partial^2 g}{\partial \psi^2}\right).$$

Чтобы оценить теперь коэффициент C, вернемся к функции w_ε в правой части последнего соотношения и, учитывая оценки $\dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} \leq C_5$ при $\psi \leq \psi^*$; $\left|\dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}\right| \leq C_7$; $w_\varepsilon \leq C_8$, получим, что $C < -w_\varepsilon^{-\beta-1/2}\widetilde{C}$ при достаточно малых значениях ψ. Значит, если $|h|$ достигает наименьшего значения внутри области $\{0 < x < X,\, 0 < \psi < \psi^*\}$, то

$$|h| \leq \left(2\left|\frac{d^2U}{dU^2}\right| + \left|v_0'(x)\right|\left|w_\varepsilon^{\frac{1}{2}+\beta}\right|\right) C_7^{-1} \leq C_6.$$

Дальнейшие рассуждения проводятся точно так же, как в [40, лемма 2.1.13], и завершают доказательство оценки (1.4.11).

Лемма доказана.

□

1.4.2 Доказательство теоремы

Замечание. На основании доказанных выше лемм (1.3.1)–(1.4.7) устанавливается теорема существования для решения задачи (1.2.3), (1.2.4). Этот результат совместно с леммой (1.3.1) доказывает теорему (1.5.1).

Доказательство теоремы 1.4.1. Из лемм (1.4.2) – (1.4.7) следует, что из семейства решений w_ε задач (1.2.3), (1.4.1) можно выбрать последовательность, равномерно сходящуюся в G при $\psi \leq N$ и такую, что ее производные $w_{\varepsilon\psi}$, $w_{\varepsilon x}$, $w_{\varepsilon\psi\psi}$ сходятся равномерно при $1/N \le \psi \le N$, где $N > 1-$ любое число. Предельная функция $w(x,\psi)$, очевидно, удовлетворяет в области G уравнению (1.2.3). Из лемм следует также, что для производных функции $w(x,\psi)$ справедливы неравенства, указанные в теореме.

Проверим выполнения условия при $\psi \to +\infty$. Запишем уравнение (1.2.3) в виде

$$\nu\sqrt{w}\left(1+\frac{3}{4}d\Big(\frac{\partial w}{\partial\psi}\Big)^2\right)\frac{\partial^2(w+2p(x))}{\partial\psi^2}-\frac{\partial(w+2p(x))}{\partial x}-$$

$$-2B^2(x)\sqrt{w}-v_0\frac{\partial(w+2p(x))}{\partial\psi}=0.$$

Поскольку $U^2(x)+2p(x)=C=const$, $w_0(y)\to U^2(0)$ при $\psi\to\infty$, то

$$w(0,\psi)+2p(0)-C\to 0,\ \psi\to\infty.$$

Положим $F(x,\psi)=w(x,\psi)-2p(x)-C$. Для $F(x,\psi)$ имеем

$$L_1(F)\equiv\nu\sqrt{w}\left(1+\frac{3}{4}d\Big(\frac{\partial w}{\partial\psi}\Big)^2\right)\frac{\partial^2 F}{\partial\psi^2}-\frac{\partial F}{\partial x}-v_0\frac{\partial F}{\partial\psi}-2B^2(x)\sqrt{w}=0.$$

Кроме того, $F(0,\psi)\to 0$ при $\psi\to\infty$, а так же $|F|<M_0$ в области G, M_0 — положительная постоянная.

Пусть $\psi\ge\psi_1>0$. При $\psi=\psi_1$ и при $x=0$ получаем

$$V_\pm(x,\psi)=\pm F+\varepsilon+M_1e^{-\psi+\alpha x}\ge 0,$$

если $\varepsilon>0$, а $M_1>0$ и $\alpha>0$ достаточно велики; ψ_1 достаточно вклико в зависимости от ε (так, чтобы $\pm F(0,\psi)+\varepsilon\ge 0$ при $\psi\ge\psi_1$). Находим далее, что

$$L_1(V_\pm)=\left(\nu\sqrt{w}\left(1+\frac{3}{4}d\Big(\frac{\partial w}{\partial\psi}\Big)^2\right)-\alpha-v_0(x)-2B^2\sqrt{w}\right)M_1e^{-\psi+\alpha x}<0,$$

если $\alpha>0$ достаточно велико.

По принципу максимума в области G при $\psi \geq \psi_1$ выполняются неравенства $V_{\pm} \geq 0$. Следовательно , $|F| \geq \varepsilon + M_1 e^{\psi - \alpha x}$, то есть при произвольном $\varepsilon > 0$ и при $\psi \geq \psi_1(\varepsilon)$ имеем $|F| \leq \varepsilon$. Значит, равномерно по $x \in [0, X]$ получаем $w(x.\psi) \to C - 2p(x) = U^2(x)$, $\psi \to \infty$. Теорема доказана. □

§ 1.5. Теорема существования решения задачи в декартовых переменных

Теорема 1.5.1 (Существование). *В области D при некотором $X > 0$ задача* (1.1.1), (1.1.2) *имеет решение u, v, обладающее следующими свойствами: u непрерывна и ограничена в D; $u > 0$ при $y > 0$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} > m > 0$ при $0 \leq y \leq y_0$; m, $y_0 = const$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ограничены и непрерывны в любой конечной подобласти D. Решение задачи* (1.1.1), (1.1.2) *существует для любого $X > 0$, при условии*

$$\frac{dU}{dx} \geq 0 \quad \text{и} \quad v_0 \leq 0 \quad \text{или} \quad U\left(\frac{dU}{dx} + B^2\right) \geq \alpha = const > 0.$$

Доказательство теоремы 1.5.1. Используя теорему 1.4.1 и лемму 1.3.1, получим доказательство теоремы 1.5.1, т.е. существование решения задачи (1.1.1), (1.1.2). □

§ 1.6. Теорема единственности решения задачи в переменных Мизеса

Теорема 1.6.1 (Единственность). *Решение $w(x, \psi)$ задачи* (1.2.3), (1.2.4) *непрерывное и ограниченное в $\overline{G}$, удовлетворяющее неравенствам $k_1\psi \leq w(x, \psi) \leq k_2\psi$ при $\psi \leq \psi_1$; $w(x, \psi) \geq a > 0$ при $\psi \geq \psi_1$; $\sqrt{w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} \leq M$, является единственным в $\overline{G}$, где k_1, k_2, ψ_1, M– некоторые положительные постоянные.*

Доказательство теоремы 1.6.1. Пусть $w_1(x,\psi)$, $w_2(x,\psi)$ — два решения задачи (1.2.3), (1.2.4). Разность $w_1 - w_2$ решений удовлетворяет уравнению

$$\nu\sqrt{w_1}\Big(1+\frac{3}{4}d\Big(\frac{\partial w_1}{\partial \psi}\Big)^2\Big)\frac{\partial^2(w_1-w_2)}{\partial \psi^2} - \frac{\partial(w_1-w_2)}{\partial x} -$$
$$-\Big(v_0(x) - \frac{3}{4}d\nu\sqrt{w_1}\Big(\frac{\partial w_1}{\partial \psi}+\frac{\partial w_2}{\partial \psi}\Big)\frac{\partial^2 w_2}{\partial \psi^2}\Big)\frac{\partial(w_1-w_2)}{\partial \psi} +$$
$$+\Big(\frac{\nu}{\sqrt{w_1}+\sqrt{w_2}}\Big(1+\frac{3}{4}d\Big(\frac{\partial w_2}{\partial \psi}\Big)^2\Big)\frac{\partial^2 w_2}{\partial \psi^2} - \frac{2B^2(x)}{\sqrt{w_1}+\sqrt{w_2}}\Big)(w_1-w_2) = 0$$

и условиям

$$(w_1-w_2)(0,\psi) = 0;\ (w_1-w_2)(x,0) = 0;\ w_1 - w_2 \rightrightarrows 0 \text{ при } \psi \to \infty.$$

В силу сделанных в теореме предположений и априорных оценок, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{w_1}+\sqrt{w_2}}\Big(1+\frac{3}{4}d\Big(\frac{\partial w_2}{\partial \psi}\Big)^2\Big)\frac{\partial^2 w_2}{\partial \psi^2} \le Mk_3\Big(\frac{1}{\psi}+1\Big),$$

$$\frac{1}{\sqrt{w_1}+\sqrt{w_2}}\Big(1+\frac{3}{4}d\Big(\frac{\partial w_2}{\partial \psi}\Big)^2\Big)\frac{\partial^2 w_2}{\partial \psi^2}\big|w_1-w_2\big| < k_4.$$

Применить непосредственно принцип максимума здесь нельзя, так как коэффициент при $w_1 - w_2$ неизвестного знака и не ограничен в окрестности точки $\psi = 0$. Введем вспомогательную функцию $C_\delta(x,\psi)$, такую, что

$$C_\delta(x,\psi) = \frac{\nu}{\sqrt{w_1}+\sqrt{w_2}}\Big(1+\frac{3}{4}d\Big(\frac{\partial w_2}{\partial \psi}\Big)^2\Big)\frac{\partial^2 w_2}{\partial \psi^2}\,\text{при}\,\psi \ge \delta,$$
$$C_\delta(x,\psi) = 0\,\text{при}\,\psi < \delta.$$

Рассмотрим функцию $V(x,\psi) = e^{\alpha x}\varphi(\psi)$, где $\alpha > 0$ — некоторая постоянная; $\varphi(\psi) = \big(2\psi - \psi^{4/3}\big)$ при $\psi \le 1$ и $1 \le \varphi(\psi) \le 2$ при $\psi > 1$, причем производные $\varphi'(\psi)$ и $\varphi''(\psi)$ ограничены. Для оператора

$$L_\delta(V) = \nu\sqrt{w_1}\left(1 + \frac{3}{4}d\Big(\frac{\partial w_1}{\partial \psi}\Big)^2\right)\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} - \frac{\partial V}{\partial x} -$$
$$-\left(v_0(x) - \frac{3}{4}d\nu\sqrt{w_1}\Big(\frac{\partial w_1}{\partial \psi} + \frac{\partial w_2}{\partial \psi}\Big)\frac{\partial^2 w_2}{\partial \psi^2}\right)\frac{\partial V}{\partial \psi} + C_\delta V(x,\psi)$$

и введенной функции $V(x,\psi)$ при $\psi \le \psi_0 < 1$ имеем

$$L_\delta(V) = \nu\sqrt{w_1}\left(1 + \frac{3}{4}d\Big(\frac{\partial w_1}{\partial \psi}\Big)^2\right)\left(-\frac{4}{9}\psi^{-2/3}\right)e^{\alpha x} - \alpha e^{\alpha x}\big(2\psi - \psi^{4/3}\big) -$$
$$-\left(v_0(x) - \frac{3}{4}d\nu\sqrt{w_1}\Big(\frac{\partial w_1}{\partial \psi} + \frac{\partial w_2}{\partial \psi}\Big)\frac{\partial^2 w_2}{\partial \psi^2}\right)e^{\alpha x}\left(2 - \frac{4}{3}\psi^{1/3}\right) +$$
$$+ C_\delta(x,\psi)e^{\alpha x}\big(2\psi - \psi^{4/3}\big) \le$$
$$\le -k_5\psi^{-1/6} + k_6 + \nu M k_3\left(\frac{1}{\psi} + 1\right)\big(2\psi - \psi^{4/3}\big)e^{\alpha x} \le -k_7\psi^{-1/6} < 0,$$

если ψ_0 достаточно мало и не зависит от δ.

При $\psi \ge \psi_0$ выполняются неравенства $\varphi(\psi) \ge a_0 > 0$, откуда $L_\delta(V) < 0$, если $\alpha > 0$ достаточно велико.

Рассмотрим функцию $W_\pm = \varepsilon V \pm (w_1 - w_2)$, где $\varepsilon > 0$ произвольно. Очевидно, что $W_\pm(0,\psi) \ge 0$ и $W_\pm(x,0) = 0$. Пусть число N достаточно велико. Тогда $W_\pm(x,\psi) \ge 0$ при $\psi \ge N$, поскольку $w_1 - w_2 \to 0$ при $\psi \to +\infty$.

Покажем, что $W_+(x,\psi) \ge 0$ при $0 \le \psi \le N$. В самом деле, это неравенство выполняется при $x = 0$, $\psi = 0$, $\psi = N$. Функция $W_+(x,\psi)$ может принимать отрицательные значения только внутри области $G \cap \{\psi < N\}$ в тех точках (x,ψ), где $w_1(x,\psi) - w_2(x,\psi) < 0$.

Будем рассматривать только такие точки. При $\delta \leq \psi_0$ имеем

$$L_\delta(W_+) = \varepsilon L_\delta(V) + L_\delta(w_1 - w_2) =$$
$$= \varepsilon L_\delta(V) - \frac{\nu(w_1 - w_2)}{\sqrt{w_1} + \sqrt{w_2}}\left(1 + \frac{3}{4}d\left(\frac{\partial w_2}{\partial \psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 w_2}{\partial \psi^2} - \frac{2B^2(w_1 - w_2)}{\sqrt{w_1} + \sqrt{w_2}} <$$
$$< -\varepsilon k_7 \psi^{-1/6} + \frac{\nu|w_1 - w_2|}{\sqrt{w_1} + \sqrt{w_2}}\left(1 + \frac{3}{4}d\left(\frac{\partial w_2}{\partial \psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 w_2}{\partial \psi^2} - \frac{2B^2|w_1 - w_2|}{\sqrt{w_1} + \sqrt{w_2}} <$$
$$< -\varepsilon k_7 \psi^{-1/6} + \nu k_4 - B^2 k_8 < 0,$$

если $\psi \leq \delta$ и δ достаточно мало.

Для $\psi \geq \delta$ получаем $L_\delta(W_+) = \varepsilon L_\delta(v) < 0$ при соответствующем выборе α так же, как было указано выше.

Итак, мы показали, что $L_\delta(W_+) < 0$ в тех точках (x, ψ) области $G \cap \{\psi < N\}$, где $w_1(x,\psi) - w_2(x,\psi) < 0$. Перейдем от функции W_+ к функции R_+ по формуле $R_+ = W_+ e^{-\beta x}$, где β — некоторая постоянная, значение которой выберем позже. Получим, что

$$L_\delta(W_+) = L_\delta(e^{\beta x} R_+) = \left(\nu\sqrt{w_1}\left(1 + \frac{3}{4}d\left(\frac{\partial w_2}{\partial \psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 R_+}{\partial \psi^2} - \right.$$
$$-\frac{\partial V}{\partial x} - \left(v_0(x) - \frac{3}{4}d\nu\sqrt{w_1}\left(\frac{\partial w_1}{\partial \psi} + \frac{\partial w_2}{\partial \psi}\right)\frac{\partial^2 w_2}{\partial \psi^2}\right)\frac{\partial R_+}{\partial \psi} +$$
$$\left. + \big(C_\delta(x,\psi) - \beta\big) R_+ \right) e^{\beta x} < 0. \qquad (1.6.1)$$

Выберем значение β так, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$\beta > \max_{(x,\psi)} C_\delta(x,\psi).$$

В этом случае $C_\delta(x,\psi) - \beta < 0$.

Согласно принципу максимума, неравенство (1.6.1) не может выполняться в точке отрицательного минимума функции $W_+(x,\psi)$ в области $G \cap \{\psi < N\}$. Значит $W_+(x,\psi) > 0$ в области G при $\psi < N$.

Аналогично доказывается, что $W_-(x,\psi) \geq 0$ в области G при $\psi < N$. Следовательно, при достаточно больших значениях параметра N в области $G \cap \{\psi < N\}$ выполняется неравенство $\big|w_1 - w_2\big| \leq \varepsilon v$. Отсюда, в силу произвольности выбора ε, заключаем, что $\big|w_1 - w_2\big| \equiv 0$, т.е. $w_1 \equiv w_2$. Теорема доказана. □

§ 1.7. Теорема единственности решения задачи в декартовых переменных

Теорема 1.7.1 (Единственность). *Пусть функции* $u(x,y), v(x,y)$*– удовлетворяют системе* (1.1.1) *в области* $D = \{0 < x < X,\ 0 < y < \infty\}$, *непрерывны в* $\overline{D}$ *и удовлетворяют условиям* (1.1.2)*; пусть, кроме того, выполняются неравенства* $0 < u < C$ *при* $y > 0$*;*

$$k_1 y \leq u \leq k_2 y \quad \textit{при} \quad 0 < y < y_0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \leq k_3 \quad \textit{в} \quad D,$$

где $C,\ k_j,\ \ y_0$*– некоторые положительные постоянные. Тогда решение* $u(x,y)$, $v(x,y)$ *задачи* (1.1.1), (1.1.2) , *удовлетворяющее указанным условиям, единственно.*

Доказательство теоремы 1.7.1. Доказательство этой теоремы полностью повторяет доказательство теоремы 5.2 в [51], поэтому мы не будем тут его приводить.

□

§ 1.8. Отрыв пограничного слоя

В рассматриваемом пограничном слое при больших числах Рейнольдса имеет место так называемое явление отрыва. Оно заключается в том, что при определенных параметрах движения вязкой среды возникает обратное течение, которое на некотором участке отделяет пограничный слой от обтекаемой твердой поверхности и выносит его во внешнее течение (см. рис. 1.1).

Определение 1.8.1. *Точкой отрыва пограничного слоя называется такая точка x_0, что $u_y(x_0,0)=0$ и $u_y(x,0)>0$ при $0<x<x_0$. Тогда x_0 — верхняя грань таких $X>0$, что в области D задача* (1.1.1), (1.1.2) *имеет решение $u(x,y),\ v(x,y)$, такое, что $u_y(x,0)>0$.*

В теореме 1.5.1 утверждается безотрывность течения при $\left(B^2+\dfrac{dU}{dx}\right)\geq\alpha$, где $\alpha=const>0$, что достигается при сильном поперечном магнитном поле независимо от знака $\dfrac{dU}{dx}$, если эта производная ограничена, то есть для любого $X>0$ решение системы уравнений пограничного слоя существует при этих условиях в области D. Если же эти условия не выполнены, то $X>0$ ограничено сверху, и происходит явление отрыва пограничного слоя .

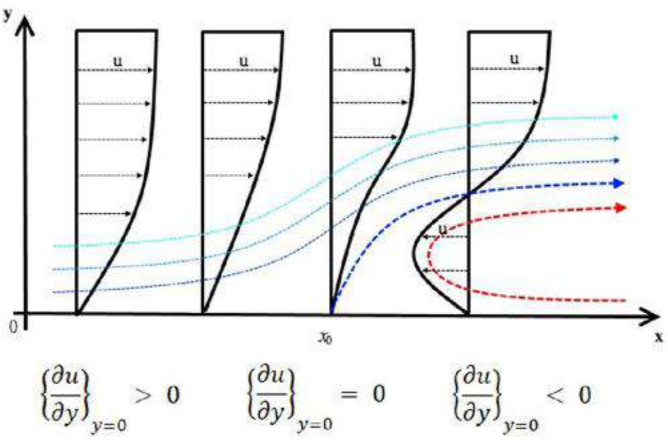

Рис. 1.1: Отрыв пограничного слоя

Справедлива теорема.

Теорема 1.8.1. *Если решение задачи* (1.1.1), (1.1.2) *существует в области $D=\{0<x<X, 0<y<\infty\}$, тогда $X<x_0$, где x_0*

определяется следующими условиями

$$\max_y u_0^2(y) - \int\limits_0^{x_0} \Big(-2U(x)\frac{dU}{dx} - 2B^2(x)U(x) \Big)\, dx = 0 \quad \text{\textit{и}} \quad \frac{dU(x_0)}{dx} < 0.$$

Доказательство. Рассмотрим задачу (1.2.3), (1.2.4) при условии непроницаемости обтекаемой поверхности, т.е. когда скорость вдува $v_0(x) \equiv 0$. Пусть $\dfrac{dU}{dx} < 0, \quad B^2 < \left|\dfrac{dU}{dx}\right|$.

Положим, $\max\limits_{\psi} w_0(\psi) = p_0$ и

$$\widetilde{w}(x) = p_0 - \int\limits_0^{x_0} \Big(-2U(x)\frac{dU}{dx} - 2B^2(x)U(x) \Big)\, dx \equiv p_0 - p(x).$$

Введем оператор $L(V) = \nu\sqrt{w}\left(1 + \dfrac{3}{4}d\Big(\dfrac{\partial w}{\partial \psi}\Big)^2\right)\dfrac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} - \dfrac{\partial V}{\partial x} - 2B^2\sqrt{V}$.

Пусть в области $G = \{0 < x < X,\ 0 < \psi < \infty\}$ существует решение $w(x,\psi)$ задачи (1.2.3), (1.2.4) и существует x_0, такое что $\widetilde{w}(x_0,\psi) = 0$, $\widetilde{w}(x,\psi) > 0$ при $x < x_0$, $\dfrac{dU}{dx} < 0$.

Рассмотрим разность $L(\widetilde{w}) \equiv -2U\dfrac{dU}{dx} - 2B^2U - 2B^2\sqrt{\widetilde{w}}$ и $L(w) \equiv -2U\dfrac{dU}{dx} - 2B^2U$. Вследствие чего имеем:

$$L(\widetilde{w}) - L(w) = -2B^2\sqrt{\widetilde{w}} \le 0 \quad \text{при} \quad \widetilde{w} \ge 0, \quad 0 < x \le x_0.$$

Поскольку

$$\max_{\psi} w_0(\psi) + 2\int\limits_0^{x} \Big(U\frac{dU}{dx} + B^2U \Big)\, dx > 0 = w(x,0),$$

то по принципу максимума получаем неравенство $w(x,\psi) \le \widetilde{w}(x,\psi)$ при $x \le x_0$.

Отсюда, если $\widetilde{w}(x_0) = 0$ и $\dfrac{\partial w(x_0, \psi)}{\partial x} = \int\limits_0^x 2\Big(U\dfrac{dU}{dx} + B^2 U\Big)\, dx < 0,$ то положительного решения $w(x, \psi)$ при $x > x_0$ нет. Это означает, что
$X < x_0$, т.е. при $0 < x < X$ не происходит отрыва пограничного слоя (см. рис. 1.2).

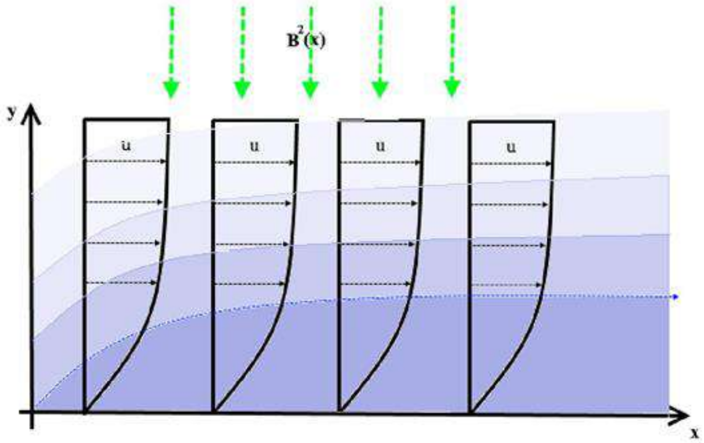

Рис. 1.2: Движение точки отрыва вниз по потоку

В случае, когда $B^2(x) > \left|\dfrac{dU}{dx}\right|$ данное предположение может не выполняться. Теорема доказана. $\square$

Глава 2

Уравнения симметричного пограничного слоя

§ 2.1. Постановка задачи симметричного пограничного слоя

Движение модифицированной жидкости Ладыженской в пограничном слое стационарного плоскопараллельного симметричного течения описывается системой уравнений вида

$$\begin{cases} \nu\Big(1+3d\Big(\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\Big)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-u\dfrac{\partial u}{\partial x}-v\dfrac{\partial u}{\partial y}=-U\dfrac{dU}{dx}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Здесь ν, d – постоянные, зависящие от свойств жидкости, плотность жидкости ρ предполагается равной единице, $U(x)$ – заданная функция, связанная с давлением $p(x)$ соотношением Бернулли $U^2(x)+2p(x)=const$.

Система уравнений (2.1.1) рассматривается в области $D=\{0<x<X,\ 0<y<\infty\}$ с граничными условиями

$$\begin{gathered} u(0,y)=0, \quad u(x,0)=0, \quad v(x,0)=v_0(x), \\ u(x,y)\rightrightarrows U(x) \quad \text{при} \quad y\to\infty, \end{gathered} \tag{2.1.2}$$

где $U(0) = 0, \quad U(x) > 0$ при $x > 0$. Пусть $U_x(x)$ измерима и ограничена, $U_x(0) > 0$, функция $u_0(x)$ предполагается заданной. Условия $U(0) = 0$ и $u(0, y) = 0$ определяют точку $x = 0$ как точку, в которой происходит остановка внешнего потока жидкости и симметрический слой симметричен относительно этой точки.

Известно, что поток в окрестности носовой точки обтекаемого тела обладает следующим свойством. Скорость потока меняется по закону $U(x) \sim Cx^m$, где $C = const > 0$, $0 < m < 1$, а угол $\varphi = 2\pi\frac{m}{m+1}$ (см. рис. 2.1).

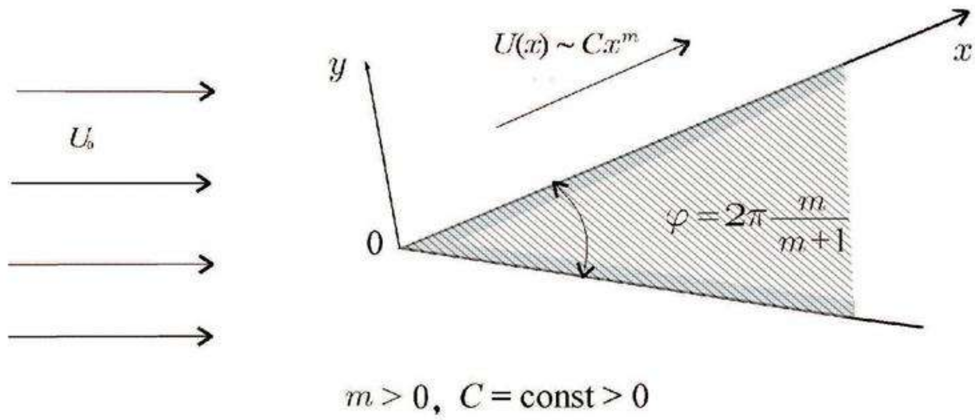

Рис. 2.1: Угол носовой точки

Замечание 2.1.1. *Поскольку угол $\varphi = \pi$ в нашей модели, нам естественно предположить, что $U(x) \sim Cx$ (см. рис. 2.2).Быть может из-за кривизны поверхности в этой асимптотике появятся младшие члены. Такую скорость внешнего потока будем рассматривать в дальнейшем.*

Определение 2.1.1. *Классическим решением задачи* (2.1.1), (2.1.2) *называются функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, обладающие следующими свойствами: u непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, v непрерывна в D, а по y в $\overline{D}$; u и v имеют в D непрерывные производные, входящие в уравнение* (2.1.1)*; удовлетворяют поточечно уравнениям* (2.1.1) *и граничным условиям* (2.1.2).

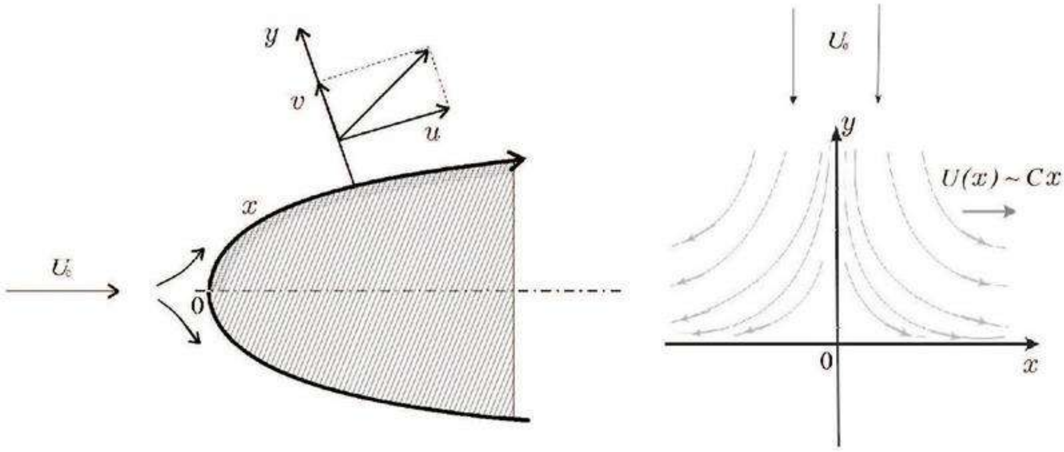

Рис. 2.2: Обтекание гладкой носовой точки

§ 2.2. Переменные Крокко

Задачу (2.1.1), (2.1.2) сведём к некоторой вспомогательной краевой задаче для одного квазилинейного вырождающегося уравнения. Нелинейные вырождающиеся уравнения встречаются также в работах [1], [21].

Введем новые независимые переменные ξ, η и новую неизвестную функцию $w(\xi, \eta)$:

$$\begin{gathered} \xi = x, \qquad \eta = \frac{u(x,y)}{U(x)}, \\ w(\xi,\eta) = \frac{u_y(x,y)}{U(x)}. \end{gathered} \tag{2.2.1}$$

Приведем задачу (2.1.1) к квазилинейному уравнению. Исключим v из системы уравнений (2.1.1), продифференцировав эти уравнения по y:

$$\nu\big(1 + 3d(u_y)^2\big)u_{yyy} + 6\nu d u_y u_{yy}^2 - u_y u_x - u u_{xy} - v_y u_y - v u_{yy} = 0$$

Из уравнения системы находим

$$v = \frac{1}{u_y}\Big(- u u_x + \nu\big(1 + 3d(u_y)^2\big)u_{yy} + U U_x\Big); \qquad v_y = -u_x.$$

И как следствие этих трёх равенств, выводим

$$\nu\big(1+3d(u_y)^2\big)u_{yyy}-\nu\big(1+3d(u_y)^2\big)\frac{u_{yy}^2}{u_y}+6\nu du_yu_{yy}^2-\big(uu_{xy}-\frac{u_{yy}}{u_y}uu_x\big)-$$
$$-\frac{u_{yy}}{u_y}UU_x=\nu\big(1+3d(u_y)^2\big)\frac{u_{yyy}u_y-u_{yy}^2}{u_y}-u\frac{u_{xy}u_y-u_{yy}u_x}{u_y}+$$
$$+6\nu du_yu_{yy}^2-\frac{u_{yy}}{u_y}UU_x=0$$

Вернемся к соотношениям (2.2.1), из которых получим

$$u=\eta U;\qquad u_y=wU;\qquad x=\xi$$
$$u_{yy}=w_\eta\eta_yU=w_\eta u_y;\qquad \frac{u_{yy}}{u_y}=w_\eta;$$
$$u_{yyy}=w_{\eta\eta}\eta_yu_y+w_\eta u_{yy}=w_{\eta\eta}\frac{u_y^2}{U}+w_\eta u_{yy};$$
$$u_{yx}=wU_\xi+Uw_\xi+w_\eta u_\xi-w_\eta u\frac{U_\xi}{U};\qquad u_yu_{yy}^2=w_\eta^2w^3U^3;$$
$$\frac{u_{xy}u_y-u_xu_{yy}}{u_y}=w_\xi U+wU_\xi-w_\eta u_\xi+w_\eta u_\xi-w_\eta\eta U_\xi;$$
$$\frac{u_{yyy}u_y-u_{yy}^2}{u_y}=w_{\eta\eta}\frac{u_y^2}{U}+w_\eta u_{yy}-\frac{u_{yy}}{u_y}u_{yy}=w_{\eta\eta}\frac{u_y^2}{U}+w_\eta u_{yy}-w_\eta u_{yy}=$$
$$=w_{\eta\eta}\frac{u_y^2}{U^2}U=w_{\eta\eta}w^2U;$$
$$-\frac{1}{U}\Big(u\frac{u_{xy}u_y-u_xu_{yy}}{u_y}+\frac{u_{yy}}{u_y}UU_x\Big)=-\frac{u}{U}\big(w_\xi U+wU_\xi-w_\eta\eta U_\xi\big)-$$
$$-w_\eta U_\xi=-\eta w_\xi U-\eta wU_\xi+\eta^2w_\eta U_\xi-w_\eta U_\xi=$$
$$=(\eta^2-1)w_\eta U_\xi-\eta w_\xi U-\eta wU_\xi.$$

Имеем

$$vu_y=-uu_x+\nu\big(1+3d(u_y)^2\big)u_{yy}+UU_x,$$
$$v\frac{u_y}{U}=-u\frac{u_x}{U}+\nu\big(1+3d(u_y)^2\big)\frac{u_{yy}}{U}+U_x,$$
$$vw=-u\frac{u_\xi}{U}+\nu\big(w+3dU^2w^3\big)w_\eta+U_\xi.$$

Поскольку из $y = 0$ следует $u = 0$, получаем

$$\nu\big(1 + 3dU^2w^2\big)ww_\eta - vw + U_\xi = 0.$$

В итоге выводим одно квазилинейное уравнение

$$\nu\big(1 + 3dU^2w^2\big)w^2w_{\eta\eta} - \eta U w_\xi + (\eta^2 - 1)U_\xi w_\eta - \eta U_\xi w + 6\nu dU^2 w_\eta^2 w^3 = 0. \tag{2.2.2}$$

в области $\Omega = \{0 < \xi < X,\, 0 < \eta < 1\}$ с граничными условиями

$$w(\xi, 1) = 0, \quad \Big(\nu ww_\eta\big(1 + 3dU^2w^2\big) - v_0(\xi)w + U_\xi\Big)\Big|_{\eta=0} = 0. \tag{2.2.3}$$

Определение 2.2.1. *Функция $w(\xi, \eta)$ называется решением задачи (2.2.2), (2.2.3), если: w непрерывна в $\overline{\Omega}$ и имеет непрерывные производные $w_\xi, w_\eta, w_{\eta\eta}$ в Ω; w_η непрерывна по η при $\eta = 0$; w удовлетворяет уравнению (2.2.2) в Ω и граничным условиям (2.2.3).*

§ 2.3. Теорема существования решения задачи в переменных Крокко

Основной результат для задачи в переменных Крокко сформулирован в следующем утверждении.

Теорема 2.3.1 (Существования). *Пусть U и v_0 удовлетворяют предположениям, приведённым выше.*

Тогда задача (2.2.2), (2.2.3) в области Ω, где X зависит от U, v_0, ν, имеет решение положительное при $\eta < 1$ обладающее следующими свойствами: непрерывные производные w_ξ, w_η, $w_{\eta\eta}$ существуют и удовлетворяют неравенствам

$$Ye^{-C_1\xi} \le w \le Ye^{C_2\xi}, \qquad Y_\eta e^{C_4\xi} \le w_\eta \le Y_\eta e^{-C_5\xi}, \tag{2.3.1}$$

$$\big|w_\xi(\xi, \eta)\big| \le C_3 Y, \qquad -C_6 \le ww_{\eta\eta} \le -C_7. \tag{2.3.2}$$

В любой замкнутой области, лежащей внутри Ω, функция w и ее производные, входящие в уравнение (2.2.2), удовлетворяют условию Гёльдера.

2.3.1 Вспомогательные утверждения

Если бы в уравнении (2.2.2) не было слагаемого с w_ξ, то это было бы обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Поэтому естественно провести доказательство теоремы по следующей схеме: заменить w_ξ разностным соотношением и получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, доказать теорему существования для нее и затем с помощью предельного перехода доказать существование решения исходного уравнения. Этот метод называется методом прямых.

Доказательство существования решения задачи (2.2.2), (2.2.3) проведем на основе этого метода.

Для любой функции $f(\xi,\eta)$ введем обозначение

$$f^k = f^k(\xi,\eta) \equiv f(kh,\eta), \qquad h = const > 0, \qquad k = 0,1,...,[X/h].$$

Положим $U(x) = xV(x), \qquad V(x) > 0, \qquad 0 \le x \le X.$

Уравнения (2.2.2) с условиями (2.2.3) заменим системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} L_k(w) := \nu\Big(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\Big)(w^k)^2 w^k_{\eta\eta} - \eta kh V^k \frac{w^k - w^{k-1}}{h} + \\ +(\eta^2-1)\big(V^k + khV^k_\xi\big)w^k_\eta - \eta\big(V^k + khV^k_\xi\big)w^k + \\ +6\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k_\eta)^2(w^k)^3 = 0, \quad 0<\eta<1, \quad k = 0,1,...,[X/h]. \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &w^k(1) = 0, \\ &l_k(w) := \Big(\nu\big(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\big)w^k w^k_\eta - v^k_0 w^k + \big(V^k + khV^k_\xi\big)\Big)\Big|_{\eta=0} = 0. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Сходимость решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка (2.3.3) доказывается методом априорных оценок. Докажем существование решения задачи (2.3.3), (2.3.4). В дальнейшем через M_i, K_i и C_i будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от h.

2.3.2 Существование и оценка приближенного решения w^k

Лемма 2.3.1. *Задача (2.3.3), (2.3.4) имеет решение $w^k(\eta)$, $k = 0, 1, ..., [X/h]$, которое непрерывно при $0 \le \eta \le 1$ и бесконечно дифференцируемо при $0 \le \eta < 1$, если $V_x > 0$ при $0 \le x \le X$ и V, V_x, v_0 ограничены при $0 \le x \le X$. Для этого решения справедлива оценка*

$$K_1(1-\eta) \le w^k(\eta) \le K_2(1-\eta)\sqrt{-\ln \mu(1-\eta)} \tag{2.3.5}$$

при $kh \le X$, *где* $h \le h_0$, $h_0 = const > 0$, $\mu = const$, $0 < \mu < 1$.

Доказательство. Решение системы (2.3.3) с условиями (2.3.4) получим как предел при $\varepsilon \to 0$ регуляризованного уравнения

$$L_{\varepsilon,k}(w) \equiv \nu\Big(\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\big)(w^k)^2+\varepsilon\Big)w^k_{\eta\eta}-\eta kh V^k\frac{w^k-w^{k-1}}{h}+$$
$$+(\eta^2-1)\big(V^k+khV^k_\xi\big)w^k_\eta-\eta\big(V^k+khV^k_\xi\big)w^k+6\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k_\eta)^2(w^k)^3=0 \tag{2.3.6}$$

при $0 < \eta < 1$, $\varepsilon > 0$, с условиями (2.3.4). Предположим, что задача (2.3.6), (2.3.4) имеет решение w^k, положительное при $\eta = 0$, получим для этого решения априорную оценку снизу.

Пусть $V_1^k = K_1(1-\eta)$. Тогда

$$L_{\varepsilon,k}(V_1^k) = (\eta^2-1)\big(V^k+khV^k_\xi\big)(-K_1)-\eta\big(V^k+khV^k_\xi\big)K_1(1-\eta)+$$
$$+6\nu d(kh)^2(V^k)^2(-K_1)^2(K_1(1-\eta))^3 = (1+\eta)(1-\eta)\big(V^k+khV^k_\xi\big)K_1-$$
$$-\eta\big(V^k+khV^k_\xi\big)K_1(1-\eta)+6\nu d(kh)^2(V^k)^2K_1^2K_1^2(1-\eta)^2K_1(1-\eta)=$$
$$=K_1(1-\eta)\Big(\big(V^k+khV^k_\xi\big)+6\nu d(kh)^2(V^k)^2K_1^2K_1^2(1-\eta)^2\Big)>0$$

при $0 \le \eta < 1$.

$$\lambda_{\varepsilon,k}(w) \equiv \Big(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\big)w^k_\eta - v_0^k + \frac{V^k+khV^k_\xi}{w^k}\Big)\Big|_{\eta=0}.$$

Тогда

$$\lambda_{\varepsilon,k}(V_1^k) = \Big(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(K_1)^2\big)(-K_1)-v_0^k+\frac{V^k+khV^k_\xi}{K_1}\Big)\Big|_{\eta=0} > 0,$$

если K_1 достаточно мало.

Положим $y^k = V_1^k - w^k$ и покажем, что $y^k \leq 0$. Получим

$$L_{\varepsilon,k}(V_1) - L_{\varepsilon,k}(w) = \Big(\nu\big(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(V_1^k)^2\big)(V_1^k)^2 + \varepsilon\Big)V^k_{1\,\eta\eta} -$$

$$-\eta khV^k\frac{V_1^k - V_1^{k-1}}{h} + (\eta^2 - 1)\big(V^k + khV_\xi^k\big)V^k_{1\,\eta} - \eta\big(V^k + khV_\xi^k\big)V_1^k +$$

$$+6\nu d(kh)^2(V^k)^2(V^k_{1\,\eta})^2(V_1^k)^3 - \Big(\nu\big(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\big)(w^k)^2 +$$

$$+\varepsilon\Big)w^k_{\eta\eta} + \eta khV^k\frac{w^k - w^{k-1}}{h} - (\eta^2 - 1)\big(V^k + khV_\xi^k\big)w_\eta^k +$$

$$+\eta\big(V^k + khV_\xi^k\big)w^k - 6\nu d(kh)^2(V^k)^2(w_\eta^k)^2(w^k)^3 > 0,$$

где $0 < \eta < 1$.

Применим принцип максимума к каждому слагаемому, используя при этом равенство $y^k = V_1^k - w^k$. Для удобного написания формул дискретизацию k будем опускать.

$$\Big(\nu\big(1 + 3d\xi^2V^2V_1^2\big)V_1^2 + \varepsilon\Big)V_{1\eta\eta} - \Big(\nu\big(1 + 3d\xi^2V^2w^2\big)w^2 + \varepsilon\Big)w_{\eta\eta} =$$

$$= \Big(\nu\big(1 + 3d\xi^2V^2V_1^2\big)V_1^2 + \varepsilon\Big)V_{1\eta\eta} - \Big(\nu\big(1 + 3d\xi^2V^2w^2\big)w^2 + \varepsilon\Big)V_{1\eta\eta} +$$

$$+\Big(\nu\big(1 + 3d\xi^2V^2w^2\big)w^2 + \varepsilon\Big)V_{1\eta\eta} - \Big(\nu\big(1 + 3d\xi^2V^2w^2\big)w^2 + \varepsilon\Big)w_{\eta\eta} =$$

$$= \Big(\nu\big(1 + 3d\xi^2V^2w^2\big)w^2 + \varepsilon\Big)y_{\eta\eta} + \nu V_{1\eta\eta}\Big(\big(1 + 3d\xi^2V^2V_1^2\big)V_1^2 -$$

$$-\big(1 + 3d\xi^2V^2w^2\big)w^2\Big) = \Big\{V_1^2 + 3d\xi^2V^2V_1^4 + 3d\xi^2V^2w^4 - w^2 =$$

$$= \big(V_1 + w\big)y + 3d\xi^2V^2\big(V_1^2 + w^2\big)\big(V_1 + w\big)y\Big\} =$$

$$= \Big(\nu\big(1 + 3d\xi^2V^2w^2\big)w^2 + \varepsilon\Big)y_{\eta\eta} +$$

$$+\nu V_{1\eta\eta}\Big(1 + 3d\xi^2V^2\big(V_1^2 + w^2\big)\Big)\big(V_1 + w\big)y.$$

Аналогичные действия проделываем и с оставшимися слагаемыми.

Следовательно,

$$L_\varepsilon^k(V_1^k) - L_\varepsilon^k(w^k) = \Big(\nu\big(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\big)(w^k)^2 + \varepsilon\Big)y_{\eta\eta}^k +$$
$$+\nu V_{1\ \eta\eta}^k\Big(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2\big((V_1^k)^2 + (w^k)^2\big)\Big)\big(V_1^k + w^k\big)y^k -$$
$$-\eta khV^k\frac{y^k - y^k - 1}{h} + (\eta^2 - 1)\big(V^k + khV_\xi^k\big)y_\eta^k + \eta\big(V^k + khV_\xi^k\big)y^k +$$
$$+6\nu d(kh)^2(V^k)^2\Big((V_{1\ \eta}^k)^2\big((V_1^k)^2 + V_1^k w^k + (w^k)^2\big)y^k +$$
$$+(w^k)^3\big(V_{1\ \eta}^k + w_\eta^k\big)y_\eta^k\Big) > 0$$

и

$$\lambda_{\varepsilon,k}(V_1) - \lambda_{\varepsilon,k}(w) = \nu\big(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k(0))^2\big)y_\eta^k(0) +$$
$$+3\nu d(kh)^2(V^k)^2V_{1\ \eta}^k(0)\big(V_1^k(0) + w^k(0)\big)y^k(0) - \frac{V^k + khV_\xi^k}{V_1^k(0)w^k(0)}y^k(0) > 0.$$

Из этих неравенств и условия $y^k(1) = 0$ следует, что $y^k \le 0$. Действительно, рассмотрим $S^k = y^k e^{-\alpha kh}$. Применяя теорему Лагранжа, получим

$$\Big(\nu\big(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\big)(w^k)^2 + \varepsilon\Big)S_{\eta\eta}^k - \eta khV^k\Big(\frac{S^k - S^{k-1}}{h}e^{-\alpha h} +$$
$$+ S^k\alpha e^{\alpha h'}\Big) + (\eta^2 - 1)\big(V^k + khV_\xi^k\big)S_\eta^k - \eta\big(V^k + khV_\xi^k\big)S^k +$$
$$+ 6\nu d(kh)^2(V^k)^2\big(V_{1\ \eta}^k + w_\eta^k\big)(w^k)^3 S_\eta^k + D_k S^k > 0 \qquad (2.3.7)$$

при $\eta < 1,\ 0 < h' < h$, и

$$\Big(\nu\big(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\big)S_\eta^k - \frac{V^k + khV_\xi^k}{w^k V_1^k}S^k +$$
$$+\nu V_{1\ \eta}^k 3d(kh)^2(V^k)^2\big(V_1^k + w^k\big)S^k\Big)\Big|_{\eta=0} > 0. \qquad (2.3.8)$$

Если $\alpha > 0$ достаточно велико и h достаточно мало, то коэффициент

$$D^k - \eta\big(V^k + khV_\xi^k\big) - \alpha e^{\alpha h'}\eta khV^k < 0$$

при S^k в (2.3.7) неположителен.

Поскольку $U_\xi = \big(V^k + khV_\xi^k\big) > 0$ и w^k, V_1^k положительны при $\eta = 0$, то из (2.3.7), (2.3.8) в силу принципа максимума следует, что $S^k \le 0$. Действительно, в противном случае функция $S^k(\eta)$ при некотором k имела имела бы положительный максимум при $0 \le \eta < 1$. При $0 < \eta < 1$ функция $S^k(\eta)$ не может принимать положительный максимум, так как в точке максимума имели бы

$$S^k > 0, \qquad S^k_\eta = 0, \qquad S^k_{\eta\eta} \le 0, \qquad \frac{S^k - S^{k-1}}{h} \ge 0,$$

что противоречит (2.3.7). При $\eta = 0$ положительный максимум S^k также не может достигаться, так как в противном случае приходим к противоречию между неравенствами $S^k_\eta(0) \le 0$ и (2.3.8). Значит, $S^k \le 0$ и $y^k = V_1^k - w^k \le 0$.

Следовательно, $w^k(\eta) \ge K_1(1-\eta)$ при $kh \le X$.

Мы получили априорную нижнюю оценку в предположении, что $w(0) > 0$. Поэтому нужно доказать существование именно такого решения. Рассмотрим то же дифференциальное уравнение, но с модифицированным граничным условием в нуле, и покажем, что решение в нуле будет положительным и совпадает с решением исходной системы. Существование решения мы будем доказывать для уравнения с модифицированным граничным условием Для доказательства существования решения задачи (2.3.6), (2.3.4) рассмотрим вместо условий (2.3.4) граничные условия вида

$$w^k(1) = 0, \qquad \Big(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\big)w^k_\eta - v^k_0 + \frac{V^k + khV^k_\xi}{\psi(w^k)}\Big)\Big|_{\eta=0} = 0, \tag{2.3.9}$$

где $\psi(w)$ — бесконечно дифференцируемая функция при $w \in (-\infty; +\infty)$ такая, что $\psi(w) = w$ при $w \ge K_3$, $\quad \psi(w) = K_3/2$ при $w \le K_3/4$, $\quad 0 \le \psi'(w) \le 1$ при $K_3/4 \le w \le K_3$. Постоянная K_3 выбрана так, что

$$w^k(0) \ge K_3, \qquad \max\frac{|v_0|}{U_\xi} < \frac{2}{K_3}, \qquad K_3 \le K_1.$$

Пусть $\widetilde{w}^k$ — любое решение задачи (2.3.6), (2.3.9) при $0 < \varepsilon \leq 1$. Покажем, что справедливо неравенство $\widetilde{w}^k \geq V_1^k$. Положим $\widetilde{y}^k = V_1^k - \widetilde{w}^k$. Имеем

$$\Big(\nu\big(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(V_1^k)^2\big)V_{1\,\eta}^k - v_0^k + \frac{V^k + khV_\xi^k}{\psi(V_1^k)}\Big)\Big|_{\eta=0} =$$
$$= -\nu\big(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2K_1^2\big)K_1 - v_0^k + \frac{V^k + khV_\xi^k}{K_1} > 0$$

в силу выбора K_1, и

$$\Big(\nu\big(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\big)\widetilde{y}_\eta^k + \nu V_{1\,\eta}^k 3d(kh)^2(V^k)^2\big(V_1^k + w^k\big)\widetilde{y}^k -$$
$$- \frac{V^k + khV_\xi^k}{\psi(V_1^k)\psi(w^k)}\widetilde{y}^k\Big)\Big|_{\eta=0} > 0,$$

$$\Big(\nu\big(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\big) + \varepsilon\Big)(w^k)^2\widetilde{y}_{\eta\eta}^k - \eta khV^k\frac{\widetilde{y}^k - \widetilde{y}^{k-1}}{h} +$$
$$+ (\eta^2 - 1)\big(V^k + khV_\xi^k\big)\widetilde{y}_\eta^k -$$
$$- \eta\big(V^k + khV_\xi^k\big)\widetilde{y}^k + D^k\widetilde{y}^k + 6\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^3(\widetilde{y}_\eta^k)^2 > 0$$

при $\eta < 1$.

Далее, для $\widetilde{S}^k = \widetilde{y}^k e^{-\alpha kh}$, как и для S^k, получим, что $\widetilde{S}^k \leq 0$ и $V_1^k \leq \widetilde{w}^k$ при $0 \leq \eta \leq 1$, $kh \leq X$. Следовательно, $w^k(0) \geq V^k(0) \geq K_4$, и поэтому $\psi(\widetilde{w}^k) = \widetilde{w}^k$. Таким образом, решение $\widetilde{w}^k(\eta)$ задачи (2.3.6), (2.3.9) является также решением задачи (2.3.6), (2.3.4), положительным при $\eta = 0$.

Доказательство существования решения задачи (2.3.6), (2.3.9) из класса C^2 при $\varepsilon > 0$ проводится на основе теоремы Лере–Шаудера, точно также, как на [40, стр. 89-91].

Мы получили равномерную по ε, h оценку снизу для решений $w^k(\eta)$ задачи (2.3.6), (2.3.4); таким образом,

$$w^k(\eta) \geq K_1(1 - \eta).$$

Оценим теперь решение задачи (2.3.6), (2.3.4) сверху равномерно относительно ε и h. Пусть

$$V_2^k = K_2(1-\eta)\sigma, \qquad \sigma = \sqrt{-\ln \mu(1-\eta)}, \quad 0 < \mu < 1.$$

Тогда

$$\begin{gathered}
L_{\varepsilon,k}(V_2) = \varepsilon K_2\Big(-\frac{1}{2\sigma(1-\eta)} - \frac{1}{4\sigma^3(1-\eta)}\Big) + \\
+ \Big(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2K_2^2(1-\eta)^2\sigma^2\big)K_2^2(1-\eta)^2\sigma^2\Big)\Big(-\frac{K_2}{2\sigma(1-\eta)} - \\
-\frac{K_2}{4\sigma^3(1-\eta)}\Big) - (1-\eta)(1+\eta)K_2\big(V^k + khV_\xi^k\big)\Big(\frac{1}{2\sigma} - \sigma\Big) - \eta K_2(1-\eta)\times \\
\times\,\sigma\big(V^k + khV_\xi^k\big) + 6\nu d(kh)^2(V^k)^2K_2^3(1-\eta)^3\sigma^3K_2^2\Big(\frac{1}{2\sigma} - \sigma\Big)^2 < 0
\end{gathered} \tag{2.3.10}$$

при $0 \le \eta < 1$, если $K_2 > 0$ достаточно велико; K_2 не зависит от ε и h. Далее,

$$\begin{gathered}
\lambda_k(V_2^k) = \Bigg(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^k)^2K_2^2(1-\eta)^2\sigma^2\big)K_2\Big(\frac{1}{2\sigma} - \sigma\Big) - v_0^k + \\
+\frac{V^k + khV_\xi^k}{K_2(1-\eta)\sigma}\Bigg)\Bigg|_{\eta=0} < 0,
\end{gathered} \tag{2.3.11}$$

если K_2 достаточно велико и $\sigma^2 > 1/2$ при $\eta = 0$, т.е. $\mu < e^{-1/2}$. Из неравенств (2.3.10), (2.3.11) и условия $(w^k - V_2^k)|_{\eta=1} = 0$ по принципу максимума получаем, что

$$w^k - V_2^k \le 0, \quad \text{при} \quad 0 \le \eta \le 1, \quad 0 \le x \le X.$$

Из уравнений (2.3.6), граничного условия (2.3.4) при $\eta = 0$ и оценок снизу и сверху для w^k следуют равномерные по ε оценки w_η^k, $w_{\eta\eta}^k$ на любом отрезке $0 \le \eta \le 1 - \delta$, $\delta = const > 0$. Дифференцируя уравнение (2.3.6) по η, устанавливаем, что производные любого порядка от функций w^k ограничены на отрезке $0 \le \eta \le 1 - \delta$ равномерно по ε.

Следовательно, из совокупности решений w^k задачи (2.3.6), (2.3.4) при $0 < \varepsilon \leq 1$ можно выделить последовательность w^k такую, что функции w^k вместе с их производными любого порядка при $\varepsilon \to 0$ равномерно сходятся на отрезке $0 \leq \eta \leq 1 - \delta$, причем предельная функция (в силу оценок $V \leq w^k \leq V_1$) непрерывна при $0 \leq \eta \leq 1$, обращается в нуль при $\eta = 1$ и удовлетворяет (2.3.3), (2.3.4) при $\eta < 1$.

Очевидно, что оценки (2.3.5) верны для предельных функций w^k. Лемма доказана. □

2.3.3 Более точная оценка

Рассмотрим вспомогательную граничную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения, решение которой будем использовать для последующих оценок решений задачи (2.3.3), (2.3.4). Пусть $V(0) = a$, $v_0(0) = b$. Согласно сделанным ранее предположениям, $a > 0$. Рассмотрим дифференциальное уравнение :

$$L(Y) \equiv \nu Y^2 Y_{\eta\eta} + (\eta^2 - 1)aY_\eta - \eta a Y = 0, \quad 0 < \eta < 1 \qquad (2.3.12)$$

с граничными условиями

$$l(Y) \equiv \Big(\nu Y Y_\eta - bY + a\Big)\Big|_{\eta=0} = 0, \qquad Y(1) = 0. \qquad (2.3.13)$$

Справедлив аналог леммы 3.2.2 из [40], а именно следующее утверждение.

Лемма 2.3.2. *Задача* (2.3.12), (2.3.13) *имеет решение со следующими свойствами:*

$$M_2(1-\eta)\sigma \leq Y(\eta) \leq M_1(1-\eta)\sigma \quad \text{\textit{при}} \quad 0 \leq \eta \leq 1, \qquad (2.3.14)$$

$$M_1(1-\eta)(\sigma - K_4) \leq Y(\eta) \quad \text{\textit{при}} \quad 0 < \eta_0 \leq \eta < 1, \qquad (2.3.15)$$

$$-M_4\sigma \leq Y_\eta(\eta) \leq -M_3\sigma, \qquad (2.3.16)$$

$$|YY_{\eta\eta}| \leq M_5, \qquad YY_{\eta\eta} \leq -M_6, \qquad (2.3.17)$$

$$\sigma = \sqrt{-\ln \mu(1-\eta)}, \quad \mu = const, \quad 0 < \mu < 1,$$

$$\nu M_1^2 = 2a, \quad \sigma(0) \geq \frac{|b|}{a} + 2, \quad \frac{K_4}{\sigma} < 1 \quad \text{\textit{при}} \quad \eta > \eta_0 = const \geq 0.$$

Имеет место утверждение.

Лемма 2.3.3. *Предположим, что* $V(x) = a + xa_1(x)$, $v_0(x) = b + xb_1(x)$, *и функции* $a_1(x)$, $a_{1x}(x)$, $b_1(x)$ *ограничены при* $0 \le x \le X$.

Тогда при $0 \le kh \le X$, *где* X *зависит от* $V(x)$, $v_0(x)$ *для решения* $w^k(\eta)$ *задачи* (2.3.3), (2.3.4) *имеют место неравенства*

$$Ye^{-C_1kh} \le w^k(\eta) \le Ye^{C_2kh}, \tag{2.3.18}$$

где $Y(\eta)$ *— решение задачи* (2.3.12), (2.3.13).

Доказательство. для функций $W^k = Ye^{-C_1kh}$ имеем

$$L_k(W) = \nu(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2Y^2e^{-2C_1kh})Y^2e^{-2C_1kh}Y_{\eta\eta}e^{-C_1kh} -$$
$$-\eta khV^kY\frac{e^{-C_1kh} - e^{-C_1(k-1)h}}{h} + (\eta^2 - 1)(V^k + khV^k_\xi)Y_\eta e^{-C_1kh} -$$
$$-\eta(V^k + khV^k_\xi)Ye^{-C_1kh} + 6\nu d(kh)^2(V^k)^2Y^3e^{-3C_1kh}Y^2_\eta e^{-2C_1kh} -$$
$$-\nu Y^2Y_{\eta\eta}e^{-3C_1kh} - (\eta^2 - 1)aY_\eta e^{-C_1kh} - \eta aYe^{-C_1kh} =$$
$$= e^{-C_1kh}\Big[\nu Y^2Y_{\eta\eta}(e^{-2C_1kh} - 1) + 3\nu d(kh)^2(V^k)^2Y^4Y_{\eta\eta}e^{-4C_1kh} -$$
$$-\eta khV^k\frac{1 - e^{C_1h}}{h} + (\eta^2 - 1)(V^k - a)Y_\eta + (\eta^2 - 1)khV^k_\xi Y_\eta -$$
$$-\eta(V^k - a)Y - \eta khV^k_xY + 6\nu d(kh)^2(V^k)^2Y^3e^{-3C_1kh}Y^2_\eta e^{-2C_1kh}\Big] =$$
$$= e^{-C_1kh}\Big[\nu Y^2Y_{\eta\eta}(e^{-2C_3kh'-1})kh + 3\nu d(kh)^2(V^k)^2Y^4Y_{\eta\eta}e^{-4C_1kh} -$$
$$-\eta khV^kYC_1e^{-C_1h''} + (\eta^2 - 1)kh(a^k_1 - V^k_\xi)Y_\eta -$$
$$-\eta kh(a^k_1 - V^k_\xi)Y + 6\nu d(kh)^2(V^k)^2Y^3e^{-3C_1kh}Y^2_\eta e^{-2C_1kh}\Big],$$

где $0 < h' < h$, $0 < h'' < h$. Кроме того, при $kh \le X$ и достаточно малом X

$$-C_3e^{-2C_3h'} \le -\frac{1}{2}khC_1, \qquad -C_3e^{-C_3h''} \le -khC_3,$$

а в силу леммы 2.3.2

$$\big|(\eta^2 - 1)kh\big(a^k_1 + V^k_\xi\big)Y_\eta\big| \le M_9khY.$$

Поэтому, если C_1 достаточно велико, то имеем неравенство $L_k(W) > 0$ при $0 \le \eta < 1$ и $0 \le kh \le X$.

Учитывая (2.3.13), находим, что

$$l_k(W) = \Big[\nu Y Y_\eta (e^{-2C_3 kh} - 1) + 3\nu d (kh)^2 (V^{m,k})^2 Y^3 Y_\eta e^{-4C_3 kh} - \\ - v_0^k Y \big(e^{-C_1 kh} - 1\big) - (v_0^k - b) Y + \big(a_1^k - khV_\xi^k\big)\Big]\Big|_{\eta=0}.$$

По условию леммы

$$\big|v_0^k - b\big| \le M_{10} kh, \quad \big|a_1^k - V_\xi^k\big| \le M_{11} kh \quad \text{при} \quad kh \le X.$$

Поэтому при достаточно большой постоянной C_1 и X_0, зависящем от V, v_0, имеем $l_k(W) > 0$ при $0 \le kh \le X_0$.

При $0 \le \eta < 1$ и $kh \le X$ получаем неравенства

$$L_k(W) - L_k(w) > 0, \qquad l_k(W) - l_k(w) > 0,$$

откуда следует

$$w^k \le W = Y e^{-C_1 kh} \quad \text{при} \quad 0 \le \eta \le 1, \quad 0 \le kh \le X_0.$$

Аналогично получается оценка (2.3.18) сверху, так как если $W_* = Y e^{C_2 kh}$ и C_2 достаточно велико, то $L_k(W_*) < 0$ и $l_k(W_*) < 0$ при $0 \le \eta < 1, \quad 0 \le kh \le X$. Лемма доказана. □

2.3.4 Оценка производных

Для обоснования предельного перехода в задаче (2.3.3), (2.3.4) при $h \to 0$ оценим величины

$$r^k = \frac{w^k - w^{k-1}}{h}, \qquad z^k = w_\eta^k, \qquad w^k w_{\eta\eta}^k$$

равномерно по h.

Лемма 2.3.4. *Пусть выполнены предположения леммы 2.3.3; кроме того, $a_{1xx}(x)$ и $b_{1x}(x)$ ограничены.*

Тогда при достаточно малом X и $0 \le kh \le X$ решения $w^k(\eta)$ задачи (2.3.3), (2.3.4) *удовлетворяют неравенствам*

$$\left|\frac{w^k - w^{k-1}}{h}\right| \le C_3 Y(\eta), \quad k = 1, 2, \dots, \frac{X}{h}, \tag{2.3.19}$$

$$Y_\eta e^{C_4 kh} \le w_\eta^k \le Y_\eta e^{-C_5 kh}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{X}{h}, \tag{2.3.20}$$

$$\left|w^k w_{\eta\eta}^k\right| < C_6, \quad w^k w_{\eta\eta}^k < -C_7, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{X}{h}, \tag{2.3.21}$$

где $Y(\eta)$ — решение задачи (2.3.12), (2.3.13).

Доказательство. Неравенства (2.3.19) – (2.3.21) докажем по индукции. В лемме 2.3.2 мы доказали неравенства (2.3.20), (2.3.21) при $k = 0$. Покажем, что постоянные C_j можно подобрать независимо от h так, что из выполнения неравенств (2.3.19) – (2.3.21) при $k - 1$ следует их справедливость при k, если $0 \le kh \le X$, где X зависит от V, v_0, ν и не зависит от h.

Для удобства в уравнениях

$$L_k(w) \equiv \nu\Big(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\Big)(w^k)^2 w_{\eta\eta}^k - \eta kh V^k \frac{w^k - w^{k-1}}{h} +$$
$$-(\eta^2 - 1)(V^k + khV_\xi^k)w_\eta^k - \eta(V^k + khV_\xi^k)w^k +$$
$$+6\nu d(kh)^2(V^k)^2(w_\eta^k)^2(w^k)^3 = 0$$

и

$$\lambda_k(w) = \left(\nu\Big(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\Big)w_\eta^k - v_0^k + \frac{V^k + khV_\xi^k}{w^k}\right)\Big|_{\eta=0} = 0$$

введем обозначения:

$$A^k \equiv (\eta^2 - 1)(V^k + khV_\xi^k), \qquad B^k \equiv -\eta(V^k + khV_\xi^k),$$

$$C^k \equiv 3\nu d(kh)^2(V^k)^2, \qquad D^k \equiv 6\nu d(kh)^2(V^k)^2, \qquad E^k \equiv V^k + khV_\xi^k.$$

Составим уравнения, которым удовлетворяют r^k и z^k. Для начала возьмем

$$w_{\eta\eta}^k = \frac{\eta kh V^k r^k - A^k z^k - B^k w^k - D^k (z^k)^2 (w^k)^3}{(\nu + C^k (w^k)^2)(w^k)^2}.$$

Из уравнения (2.3.3) для w^k вычтем уравнение (2.3.3) для w^{k-1} и разделим полученное равенство на h. Находим

$$\nu(w^k)^2 w^k_{\eta\eta} - \nu(w^{k-1})^2 w^{k-1}_{\eta\eta} = \nu(w^k)^2 w^k_{\eta\eta} - \nu(w^{k-1})^2 w^{k-1}_{\eta\eta} + \nu(w^k)^2 w^{k-1}_{\eta\eta} -$$
$$- \nu(w^k)^2 w^{k-1}_{\eta\eta} = \nu(w^k)^2 \frac{w^k_{\eta\eta} - w^{k-1}_{\eta\eta}}{h} h + \nu w^{k-1}_{\eta\eta} \frac{(w^k)^2 - (w^{k-1})^2}{h} h =$$
$$= \nu(w^k)^2 r^k_{\eta\eta} h + \nu(z^{k-1}_\eta) r^k (w^k + w^{k-1}) h;$$

Аналогичные действия применяем к оставшимся слагаемым. Используя вышеперечисленные выражения введем $R_k(r)$:

$$R_k(r) \equiv \nu(w^k)^2 r^k_{\eta\eta} + C^k (w^k)^4 r^k_{\eta\eta} + A^k r^k_\eta + B^k r^k -$$
$$- \eta \frac{khV^k - (k-1)hV^{k-1}}{h} r^k +$$
$$+ \frac{\big(w^k + w^{k-1}\big)\big(\nu + C^{k-1}\big((w^k)^2 + \big(w^{k-1})^2\big)\big)}{\big(\nu + C^{k-1}(w^{k-1})^2\big)(w^{k-1})^2} \Big[\eta(k-1)hV^{k-1} r^{k-1} -$$
$$- A^{k-1} z^{k-1} - B^{k-1} w^{k-1} - D^{k-1}(z^{k-1})^2 (w^{k-1})^3\Big] r^k -$$
$$- \eta(k-1)hV^{k-1} \frac{r^k - r^{k-1}}{h} + D^{k-1}(w^{k-1})^3 r^k (z^k + z^{k-1}) +$$
$$+ D^{k-1}(z^k)^2 r^k \big((w^k)^2 + w^k w^{k-1} + (w^{k-1})^2\big) = -\frac{D^k - D^{k-1}}{h} (z^k)^2 (w^k)^3 -$$
$$- \frac{3\nu d\big((kh)^2 (V^k)^2 - ((k-1)h)^2 (V^{k-1})^2\big)(w^k)^4}{h\big(\nu + C^{k-1}(w^{k-1})^2\big)(w^{k-1})^2} \Big[\eta(k-1)hV^{k-1} r^{k-1} -$$
$$- A^{k-1} z^{k-1} - B^{k-1} w^{k-1} - D^{k-1}(z^{k-1})^2 (w^{k-1})^3\Big] -$$
$$- z^{k-1} \frac{A^k - A^{k-1}}{h} - w^{k-1} \frac{B^k - B^{k-1}}{h}; \qquad k \geq 1.$$

Аналогично из (2.3.4) вытекает

$$\rho^k(r) \equiv \Big(\nu r^k_\eta + C^{k-1}(w^{k-1})^2 r^k_\eta + C^{k-1} z^k r^k \big(w^k + w^{k-1}\big) - \frac{E^k r^k}{w^k w^{k-1}}\Big)\Big|_{\eta=0} =$$
$$= \frac{v^k_0 - v^{k-1}_0}{h} - \frac{E^k - E^{k-1}}{hw^{k-1}(0)} - \frac{C^k - C^{k-1}}{h} (w^k)^2 z^k, \qquad r^k(1) = 0, \quad k \geq 1.$$

Дифференцируя уравнение (2.3.3) по η, для z^k получим уравнения

$$P_k(z) \equiv \nu(w^k)^2 z^k_{\eta\eta} + 2\nu w^k z^k z^k_\eta + 12\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^3 z^k z^k_\eta +$$
$$+ 3\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^4 z^k_{\eta\eta} - \eta khV^k\frac{z^k - z^{k-1}}{h} - khV^k r^k + A^k z^k_\eta + A^k_\eta z^k +$$
$$+ B^k z^k + B^k_\eta w^k + 18\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2(z^k)^3 +$$
$$+ 12\nu d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^3 z^k z^k_\eta = \nu(w^k)^2 z^k_{\eta\eta} + 2\nu w^k z^k z^k_\eta + 4C^k(w^k)^3 z^k z^k_\eta +$$
$$+ C^k(w^k)^4 z^k_{\eta\eta} - \eta khV^k\frac{z^k - z^{k-1}}{h} - khV^k r^k + A^k z^k_\eta + A^k_\eta z^k +$$
$$+ B^k z^k + B^k_\eta w^k + 3D^k(w^k)^2(z^k)^3 + 2D^k(w^k)^3 z^k z^k_\eta = 0.$$

Из граничного условия (2.3.4) при $\eta = 0$ следует условие

$$z^k(0) = \frac{v_0^k}{\big(\nu + C^k(w^k(0)\big)^2\big)} - \frac{E^k}{\big(\nu + C^k(w^k(0))^2\big)w^k(0)}.$$

Рассмотрим функцию $\varphi^k = C_3 Y$ и оценим $R^k(\varphi)$ при условии, что неравенства (2.3.19), (2.3.20) выполнены при $k-1$. Сначала заметим, что в силу результатов, полученных в лемме 2.3.2, выполнено неравенство

$$\Big|\nu C_3 Y^2 Y_{\eta\eta} + C_3 A^k Y_\eta - C_3 B^k Y\Big| \le C_3 M_{12} khY$$

при $0 \le kh \le X$. Так как $U_x > 0$ и $a_{1xx}(0)$ ограничена по предположению леммы, то $\dfrac{khV^k - (k-1)hV^{k-1}}{h} > 0$ при $h \le h_0$ и достаточно малом h_0; кроме того, отношения

$$\frac{(kh)^2(V^k)^2 - ((k-1)h)^2(V^{k-1})^2}{h}, \qquad \frac{A^k - A^{k-1}}{h},$$
$$\frac{B^k - B^{k-1}}{h}, \qquad \frac{C^k - C^{k-1}}{h}, \qquad \frac{D^k - D^{k-1}}{h}$$

ограничены.

Далее, учитывая предположения индукции, находим, что

$$
\begin{aligned}
&\eta(k-1)hV^{k-1}r^{k-1} - A^{k-1}z^{k-1} - B^{k-1}w^{k-1} - D^{k-1}(z^{k-1})^2(w^{k-1})^3 \le \\
&\le \eta(k-1)hV^{k-1}C_3Y - (A^{k-1} - a(\eta^2-1))z^{k-1} - (\eta^2-1)aY_\eta e^{-C_3kh} - \\
&- (B^{k-1}+\eta a)w^{k-1} - \eta aYe^{C_2kh} - \\
&- (D^{k-1} - 6\nu da^2)(z^{k-1})^2(w^{k-1})^3 - \\
&- 6\nu da^2Y^3Y_\eta^2 e^{3C_2kh}e^{-2C_5kh} \le \nu YY_{\eta\eta} + C^{k-1}Y^4Y_{\eta\eta} + \\
&+ M_{13}khY \le -M_{14}Y(\eta),
\end{aligned}
$$

если $kh \le X$ и X достаточно мало и не зависит от h.

Учитывая эти замечания, получаем, что

$$
\begin{aligned}
&R_k(\varphi) + \Big| - \frac{3\nu d\big((kh)^2(V^k)^2 - ((k-1)h)^2(V^{k-1})^2\big)(w^k)^4}{h\big(\nu + C^{k-1}(w^{k-1})^2\big)(w^{k-1})^2} * \\
&* \Big[\eta(k-1)hV^{k-1}r^{k-1} - A^{k-1}z^{k-1} - B^{k-1}w^{k-1} - \\
&- D^{k-1}(z^{k-1})^2(w^{k-1})^3\Big] - z^{k-1}\frac{A^k - A^{k-1}}{h} - w^{k-1}\frac{B^k - B^{k-1}}{h}\Big| < 0
\end{aligned}
\tag{2.3.22}
$$

при $0 \le \eta < 1$, $0 \le kh \le X(C_3, C_4, C_5)$, где C_3 достаточно велико и не зависит от h; здесь мы использовали неравенства

$$
-\eta\frac{khV^k - (k-1)hV^{k-1}}{h}C_3Y + \left|w^{k-1}\frac{B^k - B^{k-1}}{h}\right| < 0,
$$

$$
\big(w^k + w^{k-1}\big)\big((w^k)^2 + \big(w^{k-1})^2\big)C_3Y > \left|\frac{(kh)^2(V^k)^2 - ((k-1)h)^2(V^{k-1})^2}{h}\right|
$$

$$
\begin{aligned}
M_{12}kh \le \frac{1}{4}\Bigg|&\frac{\big(w^k + w^{k-1}\big)\big((w^k)^2 + \big(w^{k-1})^2\big)}{\big(\nu + C^{k-1}(w^{k-1})^2\big)(w^{k-1})^2}\big(\nu + C^{k-1}\big)\Big[\eta(k-1)hV^{k-1}r^{k-1} - \\
&-A^{k-1}z^{k-1} - B^{k-1}w^{k-1} - D^{k-1}(z^{k-1})^2(w^{k-1})^3\Big]\Bigg|.
\end{aligned}
$$

Постоянная C_3 не зависит от C_4 и C_5, так как если

$$M_{14} \geq \frac{M_{14}}{2} + \frac{M_{15}A^{k-1}z^{k-1}}{Y},$$

то

$$-\frac{C_3 M_{15}\big(w^k + w^{k-1}\big)\big((w^k)^2 + \big(w^{k-1})^2\big)\big(\nu + C^{k-1}\big)A^{k-1}z^{k-1}}{\big(\nu + C^{k-1}(w^{k-1})^2\big)(w^{k-1})^2} + \\ + \left| z^{k-1}\frac{A^k - A^{k-1}}{h}\right| < 0$$

при подходящем выборе C_3 и достаточно малом X.

Вычислим $\rho_k(\varphi)$. Имеем

$$\rho^k(\varphi) = C_3\Big(\nu Y_\eta + C^{k-1}(w^{k-1})^2 Y_\eta + C^{k-1}z^k Y\big(w^k + w^{k-1}\big) + \\ + \frac{C^k - C^{k-1}}{h}(w^k)^2 z^k - \frac{E^k Y}{w^k w^{k-1}}\Big)\Big|_{\eta=0} \leq -C_3 M_{16}, \qquad M_{16} > 0,$$

при $kh \geq 0$, $kh \leq X$ и достаточно малом X. Поэтому

$$\rho_k(\varphi) + \left| \frac{v_0^k - v_0^{k-1}}{h} - \frac{E^k - E^{k-1}}{hw^{k-1}(0)} \right| < 0, \tag{2.3.23}$$

если C_3 достаточно велико, $kh \leq X$ и $h \leq h_0$; здесь воспользовались тем, что по условия при малых h ограничены отношения

$$\frac{v_0^k - v_0^{k-1}}{h}, \qquad \frac{E^k - E^{k-1}}{h}.$$

Рассмотрим функции $S_\pm^k = \varphi^k \pm r^k$ при $0 \leq kh \leq X$. Из оценок (2.3.22), (2.3.23) получаем неравенства

$$R_k(S_\pm^k) < 0, \qquad \rho_k(S_\pm^k) < 0.$$

Поскольку $S_\pm^k(1) = 0$, из этих неравенств на основании принципа максимума находим, что $S_\pm^k(\eta) \geq 0$ при $0 \leq \eta \leq 1$ и, следовательно, $|r^k| \leq C_3 Y$.

Для оценки $Z^k = w^k_\eta$ рассмотрим функцию $F_1 = Y_\eta e^{-C_5 kh}$. Имеем

$$P^{m,k}(k_1) = e^{-C_5kh}\Big\{\Big(\nu Y^2 Y_{\eta\eta\eta} + 2\nu Y Y_\eta Y_{\eta\eta} + (\eta^2-1)aY_{\eta\eta} + \eta a Y_\eta - aY\Big)+$$
$$+\nu\big((w^{m,k})^2 - Y^2\big)Y_{\eta\eta\eta} + 3\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k})^4 Y_{\eta\eta\eta}+$$
$$+\big(A^{m,k} - (\eta^2-1)a\big)Y_{\eta\eta} + \big(A^{m,k}_\eta - 2\eta a\big)Y_\eta + \big(B^{m,k} + \eta a\big)Y_\eta\Big\}-$$
$$- khV^{m,k}r^{m,k} + 2\nu Y_\eta Y_{\eta\eta}\Big(w^{m,k}e^{-C_5kh} - Y)e^{-C_5kh}+$$
$$+24\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k})^3 Y_\eta Y_{\eta\eta} e^{-2C_5kh}+$$
$$+18\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k})^2 Y_\eta^3 e^{-3C_5kh}+$$
$$+\big(B^{m,k}_\eta w^{m,k} + aYe^{-C_9kh}\Big) + \eta kh C_5 V^k e^{C_5h'}e^{-C_5kh}Y_\eta. \qquad (2.3.24)$$

Дифференцируя уравнение (2.3.12) по η, получим

$$\nu Y^2 Y_{\eta\eta\eta} + 2\nu YY_\eta Y_{\eta\eta} + 2\eta a Y_\eta + (\eta^2-1)aY_{\eta\eta} - \eta a Y_\eta - aY = 0. \quad (2.3.25)$$

Из (2.3.25) следует, что $\left|Y^2 Y_{\eta\eta\eta}\right| \le M_{17}|Y_\eta|$, а также, что в (2.3.24) первое слагаемое правой части равно нулю. Слагаемые

$$khV^kr^k, \qquad B^k_\eta w^k + aYe^{-C_5kh}$$

имеют порядок khY и C_5khY соответственно. Остальные слагаемые в (2.3.24) имеют порядок khY_η. Если выбрать C_5 достаточно большим, то последние два члена в (2.3.24) превосходят по модулю остальные, если $kh \le X$, и X достаточно мало. Поэтому $P_k(F_1) < 0$ при $0 \le \eta \le 1$ и $0 \le kh \le X$.

Из неравенств (2.3.18) следует, что существует две последовательности $\eta_m \to 1$ и $\overline{\eta}_m \to 1$ при $m \to \infty$ такие, что

$$z^k\Big|_{\eta=\eta_m} \le Y_\eta(\eta_m)e^{-C_1kh}, \qquad z^k\Big|_{\eta=\overline{\eta}_m} \ge Y_\eta(\overline{\eta}_m)e^{C_2kh}. \qquad (2.3.26)$$

Пусть $C_5 > C_1$. Рассмотрим разность $S^k = F_1 - Z^k$. Из (2.3.26) следует, что $S^k(\eta_m) \ge 0$. При $k \ge 1$, $kh \le X$, достаточно малом X и достаточно большом C_5 имеем

$$S^k(0) = -\frac{v_0^k}{(\nu + C^k(w^k(0))^2)} - \frac{b}{\nu} + \frac{E^k}{\big(\nu + C^k(w^k(0))^2\big)w^k(0)}-$$

$$-\frac{a}{\big(\nu + C^k\big(Y(0)\big)^2\big)Y(0)} + Y_\eta(0)\big(e^{-C^5kh} - 1\big) > 0. \qquad (2.3.27)$$

Из уравнения (2.3.3) при $k = 1$ получаем для $z^1 = w^1_\eta$ уравнение

$$P^0_1(z_1) \equiv \nu(w^1)^2 z^1_\eta + C^1(w^1)^4 z^1_\eta + A^1 z^1 + D^1(w^1)^3 z^1 = -B^1 w^1 + \eta V^1 w^1.$$

Полагая $F_2 = Y_\eta e^{-C_8 h}$, находим

$$P^0_1(z^1 - F_2) = e^{-C_8 h}\Big\{\nu\big(Y^2 - (w^1)^2\big)Y_{\eta\eta} + C^k(w^1)^4 Y_{\eta\eta} + \big((\eta^2 - 1)a -$$
$$- A^1\big)Y_\eta + D^k(w^1)^3\big)Y_\eta\Big\} - \Big(B^1 w^1 + \eta a Y e^{-C_8 h}\Big) + \eta V^1\big(w^1 - Y\big) > 0$$

при достаточно большом C_8 и достаточно малом h; $\eta_0 \le \eta < 1$. Кроме того, если выберем $C_8 \ge C_1$, то из (2.3.26) получим неравенство

$$\big(z^1 - F_2\big)\Big|_{\eta=\eta^1_m} \le 0.$$

Как и при доказательстве леммы 2.3.2, находим, что $z^1 \le F_2$ при $\eta_0 \le \eta < 1$. Возьмем $C_5 \ge C_8$. Тогда при $\eta_0 \le \eta < 1$ получим неравенство

$$z^1 \le F^1_1. \qquad (2.3.28)$$

Для разности $z^k - F_1 = S^k$ имеем

$$P_k(F_1) - P_k(z) = \nu(w^k)^2 S^k_{\eta\eta} + C^k(w^k)^4 S^k_{\eta\eta} - \eta\frac{khV^k}{h}S^k + A^k S^k_\eta +$$
$$+ B^k S^k_\eta + 3D^k(w^k)^2(S^k_\eta)^3 + 2\nu w^k F^k_{1\,\eta} S^k + 2\nu w^k z^k S^k_\eta + 4C^k(w^k)^3 F^k_{1\,\eta} S^k +$$
$$+ 4C^k(w^k)^3 z^k S^k_\eta + A^k_\eta S^k + 2D^k(w^k)^3 F^k_{1\,\eta} S^k + 2D^k(w^k)^3 z^k S^k_\eta <$$
$$< -\eta\frac{khV^k}{h}S^{k-1}. \qquad (2.3.29)$$

В неравенстве (2.3.29) коэффициент при S^k равен

$$2\nu w^k F^k_{1\,\eta} + 4C^k(w^k)^3 F^k_{1\,\eta} + B^k + A^k_\eta + 2D^k(w^k)^3 F^k_{1\,\eta} - \eta k V^k. \qquad (2.3.30)$$

Если $0 \le kh \le X$ и X достаточно мало, то выражение (2.3.30) отрицательно при $k \ge 2$ для $0 \le \eta \le 1$ и при $k = 1$ для $0 \le \eta \le \eta_0$ в силу выбора η_0. Так как $S^1(0) > 0$, $S^1(\eta_0) > 0$, как показано выше, и $S^0 = 0$ в силу леммы 2.3.2, то из (2.3.29) по принципу максимума получаем $S^1 > 0$ при $0 \le \eta \le \eta_0$. Вместе с (2.3.28) это приводит к неравенству $S^1 \le 0$ при $0 \le \eta \le 1$.

Далее, в силу того, что сумма (2.3.30) при $k \le 2$ отрицательна, $S^1 \le 0$ при $0 \le \eta < 1$, из (2.3.29), (2.3.26) и (2.3.27) по принципу максимума выводим неравенство $S^k \le 0$ при $0 \le \eta < 1$, $k \le 2$. Поэтому

$$z^k \le F_1 = Y_\eta e^{-C_5 kh}.$$

Для оценки функции z^k снизу рассмотрим функцию $F_3 = Y_\eta e^{C_4 kh}$ и вычислим $P_k(F_3)$. Так же, как при оценке z^k сверху, покажем, что $P_k(F_3 > 0)$, если C_6 достаточно велико и X достаточно мало. Выбрав $C_4 > C_2$, получим

$$(F_3 - z^k)\Big|_{\eta=\overline{\eta}_m} \le 0, \qquad (F_3 - z^k)\Big|_{\eta=0} < 0$$

при достаточно большом C_4 и $0 \le kh \le x$. Рассуждая далее так же, как при доказательстве оценки z^k сверху, получим, что

$$z^k \ge Y_\eta e^{C_4 kh}.$$

Из полученных оценок функций w^k, r^k, z^k и уравнения (2.3.3) следует ограниченность произведения $w^k w^k_{\eta\eta}$. Установим второе из неравенств (2.3.21). Из (2.3.3) находим

$$\nu w^k w^k_{\eta\eta}\Big(1 + 3d(kh)^2(V^k)^2(w^k)^2\Big) = \eta kh V^k \frac{r^k}{w^k} -$$
$$-(\eta^2 - 1)\big(V^k + khV^k_\xi\big)\frac{w^k_\eta}{w^k} - \eta\big(V^k + khV^k_\xi\big) - D^k(w^k)^2(w^k_\eta)^2 \le$$
$$\le \eta kh V^k \frac{r^k}{w^k} - (\eta^2 - 1)\frac{aY_\eta}{Y} + \eta a + (\eta^2 - 1)\Big[\frac{aY_\eta}{Y} - \big(V^k + khV^k_\xi\big)\frac{w^k_\eta}{w^k}\Big] -$$
$$-\Big[\eta a - \eta\big(V^k + khV^k_\xi\big)\Big] - D^k(w^k)^2(w^k_\eta)^2 < -\nu M_6 M_{17} = -\nu C_7,$$

если $0 \le kh \le X$ и X достаточно мало. Этим доказательство леммы 2.3.4 завершено. $\square$

2.3.5 Доказательство теоремы

Доказательство. Продолжим решения $w^k(\eta) \equiv w(kh,\eta)$ задачи (2.3.3), (2.3.4) линейно по ξ при $kh \le \xi \le (k+1)h$, $k = 0,1,2,\dots,\frac{X}{h}$. В результате получим семейство функций $w_h(\xi,\eta)$, где $k = 0,1,2,\dots$,

$$w_h(kh(1-\lambda)+(k+1)h\lambda,\eta) = w^k(\eta)(1-\lambda)+w^{k+1}(\eta)\lambda, \quad 0 \le \lambda \le 1.$$

В силу лемм 2.3.1– 2.3.4, полученное семейство функций $w_h(\xi,\eta)$ удовлетворяет условию Липшица по ξ и при $0 \le \xi\ X$, $0 \le \eta \le 1-\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ имеют равномерно по h ограниченные производные по η. По теореме Арцела получаем, что существует последовательность функций $w_{h_i}(\xi,\eta)$ равномерно сходящаяся в прямоугольнике $0 \le x \le X$, $0 \le \eta \le 1-\varepsilon$ к некоторой $w(\xi,\eta)$ при $h_i \to 0$. Так как $K_1(1-\eta) \le w_h \le K_2(1-\eta)\sigma$, то последовательность w_{h_i} может быть выбрана равномерно сходящейся к w в области Ω.

Из оценок величин (2.3.19)–(2.3.21) следует, что w имеет ограниченные обобщенные производные w_ξ, w_η и обобщенную производную $w_{\eta\eta}$ такую, что произведение $ww_{\eta\eta}$ ограничено, так как слабый предел ограниченной последовательности ограничен той же постоянной. Следовательно, w_η непрерывна по $\eta < 1$. При этом последовательность w_{h_i} будем считать выбранной так, что производные w_ξ, w_η, $w_{\eta\eta}$ в области $\Omega = \{0 < \xi < X, 0 < \eta < 1-\varepsilon\}$, $\varepsilon = const > 0$, являются слабыми пределами в $L_2(\omega_\varepsilon)$ соответствующих функций

$$h^{-1}\big(w_{h_i}(\xi+h_i,\eta) - w_{h_i}(\xi,\eta)\big), \quad w_{h_i\eta}, \quad w_{h_i\eta\eta}.$$

Покажем, что уравнение (2.2.2) выполняется при $w(\xi,\eta)$ всюду в Ω. По построению функция $w_h^k(\eta)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}\nu\Big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w_h^k)^2\Big)(w_h^k)^2 w_{h\eta\eta}^k - \eta kh V^k \frac{w_h^k - w_h^{k-1}}{h} + \\ +(\eta^2-1)\big(V^k + khV_\xi^k\big)w_{h\eta}^k - \eta\big(V^k + khV_\xi^k\big)w_h^k + \quad (2.3.31)\\ +6\nu d(kh)^2(V^k)^2(w_{h\eta}^k)^2(w_h^k)^3 = 0, \quad k = 0,1,...,[X/h] = l(h).\end{aligned}$$

Пусть $\varphi(\xi,\eta)$ — бесконечно дифференцируемая функция, носитель которой расположен внутри Ω. Умножив (2.3.31) на $h\varphi^k(\eta)\equiv h\varphi(kh,\eta)$, проинтегрировав по η от 0 до 1 и просуммировав по k от 1 до $l(h)$, получим

$$\sum_{k=1}^{l(h)} h\int\limits_0^1 \Bigg[\nu\Big(1+3d(kh)^2(V^k)^2(w_h^k)^2\Big)(w_h^k)^2 w_{h\eta\eta}^k\varphi^k-\eta khV^k\frac{w_h^k-w_h^{k-1}}{h}\varphi^k+$$
$$+(\eta^2-1)\big(V^k+khV_\xi^k\big)w_{h\eta}^k\varphi^k-\eta\big(V^k+khV_\xi^k\big)w_h^k\varphi^k+ \tag{2.3.32}$$
$$+6\nu d(kh)^2(V^k)^2(w_{h\eta}^k)^2(w_h^k)^3\varphi^k\Bigg]d\eta=0,\qquad \frac{w_h^k-w_h^{k-1}}{h}\equiv\Big(\frac{\Delta w_h}{h}\Big)^k.$$

Обозначим через $\overline{f}(\xi,\eta)$ функцию, определенную в Ω и равную $f^k(\eta)=f(kh,\eta)$ при $(k-1)h<\xi\le kh$, $k=1,2,\dots,[X/h]$. С учетом этого обозначения перепишем равенство (2.3.32) в виде

$$\int\limits_\Omega \Bigg[\nu\Big(1+3d\xi^2V^2\overline{w}_h^2\Big)\overline{w}_h^2\overline{w}_{h\eta\eta}\overline{\varphi}-\overline{\eta\xi V\Big(\frac{\Delta w_h}{h}\Big)}\overline{\varphi}+$$
$$+\overline{\varphi}\overline{(\eta^2-1)\big(V+\xi V_\xi\big)}\overline{w}_{h\eta}-\overline{\varphi}\overline{\eta\big(V+\xi V_\xi\big)}\overline{w}_h+$$
$$+6\nu d\xi^2V^2(\overline{w}_{h\eta})^2(\overline{w}_h)^3\overline{\varphi}\Bigg]d\xi d\eta=0. \tag{2.3.33}$$

Функции $\overline{w}_h$ равномерно сходятся к w при $h_i\to 0$, так как

$$|\overline{w}_h-w|=|\overline{w}_h-w_h+w_h-w|\le M_{18}h\sigma+|w_h-w|.$$

Аналогично, заключаем, что $\overline{\eta\xi V}\overline{\varphi}$, $\overline{(\eta^2-1)\big(V+\xi V_\xi\big)}\overline{\varphi}$, $\overline{\eta\big(V+\xi V_\xi\big)}\overline{\varphi}$, $\overline{\varphi}$ равномерно сходятся к $\eta\xi V\varphi$, $(\eta^2-1)\big(V+\xi V_\xi\big)\varphi$, $\eta\big(V+\xi V_\xi\big)\varphi$, φ соответственно при $h_i\to 0$.

В области $\Omega_\varepsilon=\{0<\xi<X, 0<\eta, 1-\varepsilon\}$ при любом $\varepsilon\in(0,1)$ функции $\overline{\Delta w_h/h}$, $\overline{w}_{h\eta}$, $\overline{w}_{h\eta\eta}$ слабо сходится в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ к производным w_ξ,

w_η, $w_{\eta\eta}$ соответственно при $h_i \to 0$. Переходя к пределу при $h_i \to 0$ в (2.3.33), получим

$$\int\limits_{\Omega} \big[\nu(1+3d\xi^2V^2w^2)w^2w_{\eta\eta} - \eta\xi V w_\xi + (\eta^2-1)\big(V+\xi V_\xi\big)w_\eta -$$
$$-\eta\big(V+\xi V_\xi\big)w\big]\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta = 0, \quad (2.3.34)$$

откуда в силу выбора φ следует, что уравнение (2.2.2) выполняется почти всюду в области Ω для функции $w(\xi,\eta)$.

Чтобы доказать, что производные функции w, входящие в уравнение, удовлетворяют условию Гёльдера в любой внутренней подобласти Ω, рассмотрим в прямоугольнике $\Delta = \{\xi_1 \le \xi \le \xi_2,\ \eta_1 \le \eta \le \eta_2\}$ уравнение

$$\begin{aligned} \nu\big(1+3d(\xi V)^2w^2\big)w^2S_{\eta\eta} - \eta\xi V S_\xi + (\eta^2-1)(V+\xi V_\xi)S_\eta - \\ -\eta(V+\xi V_\xi)S + 6\nu d(\xi V)^2w^3S_\eta^2 = 0 \end{aligned} \qquad (2.3.35)$$

с условиями

$$S\big|_{\xi=\xi_1} = w\big|_{\xi=\xi_1}, \qquad S\big|_{\eta=\eta_1} = w\big|_{\eta=\eta_1}, \qquad S\big|_{\eta=\eta_2} = w\big|_{\eta=\eta_2}, \qquad (2.3.36)$$

где $0 < \xi_1 < \xi_2 < X$, $0 < \eta_1 < \eta_2 < 1$. Поскольку w удовлетворяет условию Липшица, то задача (2.3.35), (2.3.36) в области Δ имеет решение S такое, что S_η ограничено в Δ, S_η, S_ξ, $S_{\eta\eta}$ удовлетворяют условию Гёльдера в любой внутренней подобласти Δ. Покажем, что $S = w$. Функция $W = S - w$ удовлетворяет

$$\begin{aligned} \nu\big(1+3d(\xi V)^2w^2\big)w^2W_{\eta\eta} - \eta\xi V W_\xi + (\eta^2-1)(V+\xi V_\xi)W_\eta - \\ -\eta(V+\xi V_\xi)W + 6\nu d(\xi V)^2w^3W_\eta^2 = 0 \end{aligned} \qquad (2.3.37)$$

и

$$W\Big|_{\xi=\xi_1} = W\Big|_{\eta=\eta_1} = W\Big|_{\eta=\eta_2} = 0. \qquad (2.3.38)$$

Умножим уравнение (2.3.37) на $We^{-\alpha\xi}$, $\alpha = const > 0$, и проинтегрируем по Δ. Преобразуя некоторые члены интегрированием по частям, получим равенство

$$\int\limits_{\Delta} \Big[-\nu w^2 W_\eta^2 + \nu\big(w_\eta^2 + w w_{\eta\eta}\big)W^2 - 3\nu d\xi^2 V^2 w^4 W_\eta^2 +$$

$$+6\nu d\xi^2 V^2\big(3w^2 w_\eta^2 + w^3 w_{\eta\eta}\big)W^2 + \eta(\xi V)_\xi \frac{1}{2}W^2 - \eta\xi V\frac{1}{2}W^2\alpha -$$

$$-\eta(V+\xi V_\xi)W^2 - \eta(V+\xi V_\xi)W^2 - 3\nu d\xi^2 V^2 w^3 W_{\eta\eta} W^2 -$$

$$-9\nu d\xi^2 V^2 w^2 w_\eta W_\eta W^2\Big] e^{-\alpha\xi} d\xi d\eta - \int\limits_{\xi=\xi_2} \eta\xi V\frac{1}{2}W^2 e^{-\alpha\xi} d\eta = 0,$$

а из него неравенство

$$\int\limits_{\Delta} \Big[\nu\big(w_\eta^2 + w w_{\eta\eta}\big) + 6\nu d\xi^2 V^2\big(3w^2 w_\eta^2 + w^3 w_{\eta\eta}\big) + \frac{1}{2}\eta(\xi V)_\xi - \frac{1}{2}\eta\xi V\alpha -$$

$$-2\eta(V+\xi V_\xi)\Big] W^2 e^{-\alpha\xi} d\xi d\eta \geq 0. \tag{2.3.39}$$

При достаточно большом α выражение в квадратных скобках может быть сделано отрицательным, и тогда из (2.3.39) следует, что $W \equiv 0$ и $S = w$. Теорема существования доказана. □

§ 2.4. Теорема существования решения задачи в декартовых переменных

Обращая преобразование переменных (2.2.1), что возможно в силу свойств решения задачи (2.2.2), (2.2.3), получаем основной результат о существовании и единственности классического решения задачи (2.1.1), (2.1.2) в смысле данного нами определения. Сформулируем его в следующей теореме.

Теорема 2.4.1 (Существования). *Предположим, что*

$$U(x) = x\big(a + x a_1(x)\big), \qquad v_0(x) = b + x b_1(x),$$

где $a = const > 0$, $b = const$; $U > 0$ *при* $x > 0$; a_1, a_{1x}, a_{1xx}, b_1, b_{1x} *ограничены.*

Тогда задача (2.1.1), (2.1.2) *в области* D, *при* X, *зависящем от* U, v_0 *имеет решение* u, v, *которое обладает следующими свойствами:* $u_y > 0$ *при* $y \geq 0$ *и* $x > 0$; $\dfrac{u}{U}$, $\dfrac{u_y}{U}$ *ограничены и непрерывны в* $\overline{D}$; $u > 0$ *при* $y > 0$ *и* $x > 0$; $u \rightrightarrows U$ *при* $y \to \infty$, $u(x,0) = u(0,y) = 0$; $\dfrac{u_y}{U} > 0$ *при* $y \geq 0$; $\dfrac{u_y}{U} \to 0$ *при* $y \to \infty$; u_x, u_y, u_{yy} *ограничены и непрерывны в* $\overline{D}$; v *непрерывна в* $\overline{D}$ *по* y *при* $x > 0$; v *непрерывна по* x *и* y *внутри* D; u_{yyy} *ограничена в* $\overline{D}$; u_{xy} *ограничена в* D *при ограниченных* y; u_{xy} *и* u_{yyy} *непрерывны в* $\overline{D}$; $\dfrac{u_{yy}}{u_y}$ *непрерывна в* D *по* y; *имеют место оценки*

$$U(x)Y\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{-C_1 x} \leq u_y \leq U(x)Y\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{C_2 x},$$

$$Y_\eta\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{C_4 x} \leq \frac{u_{yy}}{u_y} \leq Y_\eta\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{-C_5 x},$$

$$e^{\left[-\frac{M_1^2}{4}y^2 e^{2C_2 x}\right]} \leq 1 - \frac{u}{U} \leq e^{\left[-\frac{M_1^2}{4}y^2 e^{-2C_1 x}\right]}.$$

где $Y(\eta)$ *— решение задачи* (2.3.12), (2.3.13).

Доказательство. Теорема 2.4.1 устанавливается на основе теоремы 2.3.1. Для начала покажем, что если $w(\xi, \eta)$ обладает свойствами, указанными в теореме 2.3.1, то можно с помощью замены (2.2.1) перейти от решения задачи (2.2.2), (2.2.3) перейти к решению задачи (2.1.1), (2.1.2), существование которого утверждается в теореме 2.4.1.

Согласно (2.2.1) имеем

$$w(\xi, \eta) = w(x, \frac{u}{U}) = \frac{u_y}{U}, \tag{2.4.1}$$

$$x = \xi, \qquad y = \int\limits_0^{\frac{u(x,y)}{U(x)}} \frac{ds}{w(x,s)}. \tag{2.4.2}$$

Отсюда в силу непрерывности $w(\xi,\eta)$ в $\overline{\Omega}$ и неравенства $w>0$ при $0\le\eta<1$ получаем, что $\dfrac{u(x)}{U(x)}$ непрерывна и ограничена в $\overline{D}$,

$$u(0,y)=0,\quad u(x,0)=0,\quad u(x,y)\to U(x)\quad \text{при}\quad y\to\infty,$$

u_y непрерывна и ограничена в $\overline{D}$, $u_y>0$ при $y\ge 0$, $x\ge 0$. Из (2.4.1), (2.4.2) находим, что

$$\begin{gathered}
u_y=wU;\qquad \frac{u_{yy}}{u_y}=w_\eta;\\
u_{yy}=Uw_\eta\eta_y=w_\eta u_y;\qquad u_{yyy}=w_{\eta\eta}\frac{u_y^2}{U}+w_\eta u_{yy};\\
u_{xy}=wU_\xi+Uw_\xi+u_\xi w_\eta-uw_\eta\frac{U_\xi}{U};\\
u_x=u\frac{U_x}{U}+wU\int_0^{\frac{u(x,y)}{U(x)}}\frac{w_\xi(x,s)}{w^2(x,s)}ds.
\end{gathered}\tag{2.4.3}$$

Из свойств функции w и ее производных ввиду равенств (2.4.3) следует, что обобщенные производные u_x, u_{yy}, u_{yyy} ограничены в D, u_{xy} ограничена при конечных y. Неравенства для u, утверждаемые теоремой 2.4.1, следуют из оценок функций w, w_ξ, w_η и $ww_{\eta\eta}$. Непрерывность u_x и u_{yy} по y следует из (2.4.3). Функцию $v(x,y)$ определим равенством

$$v=\frac{1}{u_y}\Big(-uu_x+\nu u_{yy}\big(1+3du_y^2\big)+UU_x\Big).\tag{2.4.4}$$

Покажем, что u и v, определенные формулами (2.4.2), (2.4.4), удовлетворяют системе (2.1.1) и условиям (2.1.2).

Функция v имеет производную по y в D. Дифференцируя (2.4.4) по y, получим

$$v_yu_y+vu_{yy}+u_yu_x+uu_{xy}-\nu u_{yyy}-6\nu du_yu_{yy}^2-3\nu du_y^2u_{yyy}=0,$$

$$\begin{multlined}
v_yu_y+\frac{u_{yy}}{u_y}\Big(-uu_x+\nu u_{yy}\big(1+3du_y^2\big)+UU_x\Big)+u_yu_x+uu_{xy}-\\
-\nu u_{yyy}-6\nu du_yu_{yy}^2-3\nu du_y^2u_{yyy}=0.
\end{multlined}\tag{2.4.5}$$

Функция $w(\xi,\eta) = \dfrac{u_y}{U}$ удовлетворяет уравнению (2.2.2). Заменяя в уравнении (2.2.2) производные w через производные от u, находим, что

$$\frac{1}{U}\Big\{\nu\big(1+3du_y^2\big)\frac{u_{yyy}u_y-u_{yy}^2}{u_y}-\frac{(u_{xy}u_y-u_xu_{yy})u}{u_y}-\frac{uU_x(uu_{yy}-u_y^2)}{Uu_y}+ \\ +\frac{(u^2-U^2)U_x}{U}\frac{u_{yy}}{u_y}+uu_y-\frac{uu_yU_x}{U}+6\nu du_{yy}^2u_y\Big\}=0. \tag{2.4.6}$$

Умножив (2.4.6) на U и складывая равенства (2.4.5) и (2.4.6), получим

$$u_x+v_y=0. \tag{2.4.7}$$

Уравнения (2.4.4), (2.4.7) представляют систему (2.1.1). Покажем, что $v(x,y)$ удовлетворяет условию

$$v(x,0)=v_0(x).$$

Из (2.2.3) следует, что

$$v_0=\left[\frac{\nu ww_\eta(1+3dU^2w^2)+U_x}{w}\right]\Bigg|_{\eta=0}. \tag{2.4.8}$$

Из равенств (2.4.4), (2.4.8) получаем $v(x,0)=\left[\frac{\nu(1+3du_y^2)u_{yy}+UU_x}{u_y}\right]\Big|_{y=0}=\left[\frac{\nu(1+3dU^2w^2)ww_\eta+U_x}{w}\right]\Big|_{\eta=0}=v_0(x)$. Здесь мы использовали непрерывность функций u, u_x, u_y, u_{yy} по y при $y=0$, а также непрерывность w и ww_η по η. Как следует из (2.4.6), функция v, определенная равенством (2.4.4), непрерывна в $\overline{D}$ по y и ограничена при ограниченных y; v_y ограничена в D, так как $v_y=-u_x$, а $\dfrac{u}{U}$ и u ограничены.

Выведем асимптотическую формулу для отношения $\dfrac{u(x,y)}{U(x)}$ при $y\to\infty$. Используя оценки функций $w(\xi,\eta)$ из теоремы 2.3.1 и оценки $Y(\eta)$

из леммы 2.3.2, получаем при $\eta_0 \le \eta \le 1$ неравенства

$$M_1(1-\eta)(\sigma - K_4)e^{-C_1 x} \le w(\xi,\eta) \le M_1(1-\eta)\sigma e^{C_2 x}.$$

Это приводит к неравенствам

$$M_1\Big(1-\frac{u}{U}\Big)\Big(\sigma\Big(\frac{u}{U}\Big) - K_4\Big)e^{-C_1 x} \le \frac{u_y}{U} \le M_1\Big(1-\frac{u}{U}\Big)\sigma\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{C_2 x}.$$

Из того, что $\sigma_y = \dfrac{\frac{u_y}{U}}{2\Big(1-\frac{u}{U}\Big)\sigma}$, получаем

$$\frac{u_y}{U} \le M_1\Big(1-\frac{u}{U}\Big)\sigma\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{C_2 x}, \quad \frac{2u_y\sigma}{2UM_1\Big(1-\frac{u}{U}\Big)\sigma e^{C_2 x}\sigma} \le 1, \quad \frac{2\sigma_y}{M_1 e^{C_2 x}} \le 1;$$

$$M_1\Big(1-\frac{u}{U}\Big)\Big(\sigma\Big(\frac{u}{U}\Big) - K_4\Big)e^{-C_1 x} \le \frac{u_y}{U}, \quad 1 \le \frac{u_y}{UM_1\Big(1-\frac{u}{U}\Big)(\sigma - K_4)e^{-C_1 x}},$$

$$1 \le \frac{2u_y\sigma}{2UM_1\Big(1-\frac{u}{U}\Big)(\sigma - K_4)e^{-C_1 x}\sigma}, \quad 1 \le \frac{2\sigma\sigma_y}{M_1(\sigma - K_4)e^{-C_1 x}},$$

откуда

$$\frac{2\sigma_y}{M_1 e^{C_2 x}} \le 1 \le \frac{2\sigma\sigma_y}{M_1(\sigma - K_4)e^{-C_1 x}}.$$

Интегрируя последние неравенства по y от y_0, соответствующего η_0, до произвольного $y \in (y_0, \infty)$, получаем

$$\frac{2(\sigma-\sigma_0)}{M_1 e^{C_2 x}} \le y - y_0 \le \frac{2(\sigma-\sigma_0)}{M_1 e^{-C_1 x}} + \frac{2K_4}{M_1 e^{-C_1 x}}[\ln(\sigma - K_4) - \ln(\sigma_0 - K_4)],$$

где $\sigma = \sqrt{-\ln\mu(1-\frac{u}{U})}$, $\sigma_0 = \sigma\big|_{y=y_0}$.

Из этих неравенств находим

$$\frac{(y-y_0)M_1 e^{-C_1 x}}{2} + K_4 \ln\left(1 + \frac{(y-y_0)M_1 e^{C_2 x}}{2(\sigma - K_4)}\right) + \sigma_0 \le$$
$$\le \sigma \le \frac{(y-y_0)M_1 e^{C_2 x}}{2} + \sigma_0$$

и, следовательно,

$$-\frac{y^2M_1^2e^{2C_2x}}{4}+\frac{yy_0M_1^2e^{2C_2x}}{2}-\frac{y_0^2M_1^2e^{2C_2x}}{4}+\ln\left(1-\frac{u(x,y_0)}{U(x)}\right)-$$
$$-(y-y_0)M_1e^{C_2x}\sigma_0\le\ln\left(1-\frac{u}{U}\right)\le-\frac{y^2M_1^2e^{-2C_1x}}{4}+\frac{yy_0M_1^2e^{-2C_1x}}{2}-$$
$$-\frac{y_0^2M_1^2e^{-2C_1x}}{4}+\ln\left(1-\frac{u(x,y_0)}{U(x)}\right)-(y-y_0)M_1e^{-2C_1x}\sigma_0-$$
$$-\left[M_1C_4(y-y_0)e^{-C_1x}+C_4^2\ln\left(1+\frac{(y-y_0)M_1e^{C_2x}}{2(\sigma-C_4)}\right)+2\sigma C_4\right]\times$$
$$\times\ln\left(1+\frac{(y-y_0)M_1e^{C_2x}}{2(\sigma-C_4)}\right),$$

что приводит к соотношению

$$e^{\left[-\frac{U(0)}{2\nu}y^2e^{2C_2x}+O(y)\right]}\le1-\frac{u}{U}\le e^{\left[-\frac{U(0)}{2\nu}y^2e^{-2C_1x}+O(y\ln y)\right]}\quad\text{при}\quad y\to\infty,$$

где $M_1^2=\dfrac{2a}{\nu}$, $a=U_x(0)$. Данные неравенства доказывают справедливость формулы

$$e^{\left[-\frac{M_1^2}{4}y^2e^{2C_2x}\right]}\le1-\frac{u}{U}\le e^{\left[-\frac{M_1^2}{4}y^2e^{-2C_1x}\right]}.$$

Теорема доказана. □

§ 2.5. Теорема единственности решения задачи в переменных Крокко

Теорема 2.5.1 (Единственности). *Задача* (2.2.2), (2.2.3) *в области* Ω *может иметь лишь одно неотрицательное решение* w, *обладающее свойствами:* w *непрерывна в* Ω; w_η, $w_{\eta\eta}$, w_ξ, *непрерывны во внутренних точках* Ω; $w>0$ *при* $\eta=0$; w_η *непрерывна по* η *при* $\eta=0$.

Доказательство. Предположим, что задача имеет два таких решения w_1 и w_2. Их разность $\overline{w} = w_1 - w_2$ удовлетворяет уравнению

$$\nu w_1^2 \overline{w}_{\eta\eta} + \nu(w_1 + w_2) w_{2\eta\eta} \overline{w} + 3\nu d\xi^2 V^2 w_1^4 \overline{w}_{\eta\eta} + 3\nu d\xi^2 V^2 (w_1^3 + w_1 w_2^2 + \\ + w_1^2 w_2 + w_2^3) w_{2\eta\eta} \overline{w} - \eta\xi V \overline{w}_\xi + (\eta^2 - 1)(V + \xi V_\xi) \overline{w}_\eta - \eta(V + \xi V_\xi) \overline{w} + \\ + 6\nu d\xi^2 V^2 (w_1^2 + w_1 w_2 + w_2^2) w_{1\eta}^2 \overline{w} + 6\nu d\xi^2 V^2 (w_{1\eta} + w_{2\eta}) w_2^3 \overline{w}_\eta = 0$$

с граничными условиями

$$\overline{w}\Big|_{\eta=1} = 0, \Big(\nu \overline{w}_\eta + 3\nu d\xi^2 V^2 w_1^2 \overline{w}_\eta + 3\nu d\xi^2 V^2 (w_1 + w_2) w_{2\eta} \overline{w} - \\ - \frac{(V + \xi V_\xi)\overline{w}}{w_1 w_2}\Big)\Big|_{\eta=0} = 0.$$

Для $W = \overline{w} e^{-\alpha\xi}$, $\alpha = const > 0$, имеем следующее уравнение в области Ω:

$$\nu w_1^2 W_{\eta\eta} + \nu(w_1 + w_2) w_{2\eta\eta} W + 3\nu d\xi^2 V^2 w_1^4 W_{\eta\eta} + 3\nu d\xi^2 V^2 (w_1^3 + w_1 w_2^2 \\ + w_1^2 w_2 + + w_2^3) w_{2\eta\eta} W - \eta\xi V W_\xi - \alpha\eta\xi V W_\xi + (\eta^2 - 1)(V + \xi V_\xi) W_\eta - \\ - \eta(V + \xi V_\xi) W + 6\nu d\xi^2 V^2 (w_1^2 + w_1 w_2 + w_2^2) w_{1\eta}^2 W + \\ + 6\nu d\xi^2 V^2 (w_{1\eta} + w_{2\eta}) w_2^3 W_\eta = 0, \tag{2.5.1}$$

а также граничные условия

$$W\Big|_{\eta=1} = 0, \Big(\nu W_\eta + 3\nu d\xi^2 V^2 w_1^2 W_\eta + 3\nu d\xi^2 V^2 (w_1 + w_2) w_{2\eta} W - \\ - \frac{(V + \xi V_\xi) W}{w_1 w_2}\Big)\Big|_{\eta=0} = 0. \tag{2.5.2}$$

При достаточно большом α коэффициент при W в (2.5.1) отрицателен, $(V + \xi V_\xi) > 0$ по условию. По принципу максимума из (2.5.1), (2.5.2) следует, что W не может иметь ни положительного максимума, ни отрицательного минимума при $0 \le \eta < 1$. Следовательно, $W \equiv 0$ и $\overline{w} \equiv 0$. $\square$

§ 2.6. Теорема единственности решения задачи в декартовых переменных

Теорема 2.6.1. *Пусть* u, v — *решение задачи* (2.1.1), (2.1.2) *такое, что: производные* u_x, u_y, v_y, u_{yy}, u_{yyy}, u_{xy} *непрерывны в* D; $\dfrac{u}{U}$ *и* $\dfrac{u_y}{U}$ *непрерывны в* $\overline{D}$; $u_y > 0$ *при* $y \geq 0$, $x > 0$; $\dfrac{u_y}{U} > 0$ *при* $y = 0$; $\frac{u_y}{U} \to 0$ *при* $y \to \infty$; $\dfrac{u_{yy}}{u_y}$, u_x *непрерывны по* y *при* $y = 0$; $\dfrac{u_{yyy}u_y - u_y^2}{u_y^2} \leq 0$.

Тогда u, v — *единственное решение задачи* (2.1.1), (2.1.2) *с указанными свойствами.*

Доказательство. Если u, v — решение задачи (2.1.1), (2.1.2) с этими свойствами, то с помощью замены независимых переменных (2.2.1) и введения новой неизвестной функции $w = \dfrac{u_y}{U}$ приходим к решению w задачи (2.2.2), (2.2.3), обладающему свойствами из теоремы 2.3.1, аналогично доказательству теоремы 2.3.2. Как показано выше, такое решение w единственно. □

§ 2.7. Асимптотики решения

Задача (2.1.1), (2.1.2) решена в предположении, что $V(x)$ и $v_0(x)$ допускают асимптотическое представление при $x \to 0$ до слагаемых не ниже первого порядка по x. При этом полученные оценки функций $w(\varepsilon, \eta)$ и $u_y(x, y)$ дают возможность найти главный член асимптотики этих функций при $x \to 0$. Если известны асимптотические при $x \to 0$ разложения функций $V(x)$ и $v_0(x)$ с любым числом членов, то возможно получить асимптотическое разложение функции $u_y(x, y)$ до слагаемых любого порядка по x и оценить остаточный член разложения. Следующие далее априорные оценки решения $w(\xi, \eta)$ задачи (2.2.2), (2.2.3) мы проведем, предполагая справедливыми некоторые асимптотические разложения.

Предположим, что имеют место асимптотические разложения

$$U(x) = x\Big(a + \sum_{\beta=1}^{q} a_\beta x^\beta + a_{q+1}(x)\Big), \quad v_0(x) = b + \sum_{\gamma=1}^{q} b_\gamma x^\gamma + b_{q+1}(x), \tag{2.7.1}$$

где $a = const > 0$; $a_\beta = const$; $\beta = 1, \ldots, q$; b, $b_\gamma = const$; $\gamma = 1, \ldots, q$;

$$|a_{q+1}(x)| \le C_9 x^{q+1}, \quad \left|\frac{da_{q+1}}{dx}\right| \le C_{10} x^q, \quad \left|\frac{d^2 a_{q+1}}{dx^2}\right| \le C_{11} x^{q-1},$$

$$|b_{q+1}(x)| \le C_{12} x^{q+1}, \quad \left|\frac{db_{q+1}}{dx}\right| \le C_{13} x^q, \quad q \ge 1.$$

Эти предположения выполняются, в частности, когда производная порядка $q+2$ функции $U(x)$ и производная порядка $q+1$ функции $v_0(x)$ ограничены.

Пусть $Y_m(\eta)$, $m = 1, \ldots, q$ — решения вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$T(Y_m) \equiv \nu Y_0^2 Y_{m\eta\eta} + (\eta^2 - 1) a Y_{m\eta} - 2\eta a Y_m + 2\nu Y_0 Y_{0\eta\eta} Y_m, \tag{2.7.2}$$

$$t(Y_m) \equiv \big(\nu Y_0 Y_{m\eta} + \nu Y_{0\eta} Y_m - b Y_m\big)\Big|_{\eta=0}. \tag{2.7.3}$$

Лемма 2.7.1. *Пусть имеют место асимптотические разложения (2.7.1). Тогда для решения $w(\xi,\eta)$ задачи (2.2.2), (2.2.3) справедливы оценки*

$$\sum_{m=0}^{q} \xi^m Y_m e^{-C_{14}\xi^{q+1}} \le w \le \sum_{m=0}^{q} \xi^m Y_m e^{C_{15}\xi^{q+1}}, \ \ 0 \le \xi \le X, \tag{2.7.4}$$

где $Y_0(\eta)$ — решение задачи (2.3.12), (2.3.13); $Y_1(\eta), \ldots, Y_q(\eta)$ — решение системы (2.7.2), с условиями (2.7.3); положительные постоянные X, C_{14}, C_{15} зависят от $U(x)$, $v_0(x)$.

Лемма 2.7.1 доказана в [40] (см. с. 387-388).

Из леммы 2.7.1 вытекают следующие теоремы об асимптотических разложениях.

Теорема 2.7.1. *Предположим, что для* $U(x)$ *и* $v_0(x)$ *имеем представления* (2.7.1) *при* $q \geq 1$. *Тогда для решения* $w(\xi, \eta)$ *задачи* (2.2.2), (2.2.3) *справедливо асимптотическое разложение вида*

$$\left| w(\xi, \eta) - \sum_{m=0}^{q} Y_m \xi^m \right| \leq C_{16} Y_0(\eta) \xi^{q+1}, \qquad 0 \leq \xi \leq X, \tag{2.7.5}$$

при $\xi \to 0$, *где* Y_m, $m = 1, \ldots, q$ *— решения задачи* (2.7.2), (2.7.3); Y_0 *— решения уравнения* (2.3.12) *с условиями* (2.3.13); C_{16} *— положительная постоянная.*

Доказательство. Пусть $C_{16} = \max(C_{14}, C_{15})$. По лемме 2.7.1 имеем

$$\sum_{m=0}^{q} \xi^m Y_m e^{-C_{16}\xi^{q+1}} \leq w \leq \sum_{m=0}^{q} \xi^m Y_m e^{C_{16}\xi^{q+1}}$$

Отсюда легко следует (2.7.5). □

Теорема 2.7.2. *Предположим, что имеют место представления* (2.7.1) *при* $q \geq 1$. *Тогда для решения* u, v *задачи* (2.1.1), (2.1.2) *справедлива оценка*

$$\left| u_y(x, y) - U(x) \sum_{m=0}^{q} Y_m \left(\frac{u}{U}\right) x^m \right| \leq C_{16} U(x) Y_0 \left(\frac{u}{U}\right) x^{q+1} \tag{2.7.6}$$

где $Y_0(\eta)$ *— решение задачи* (2.3.12), (2.3.13); Y_m, $m = 1, \ldots, q$ *— решения задачи* (2.7.2), (2.7.3).

Доказательство. Доказательство теоремы вытекает непосредственно из теоремы 2.7.1 и определения функции w. □

Из неравенства (2.7.6) вытекает, в частности, следующая оценка:

$$\left| u_y(x, 0) - U(x) \sum_{m=0}^{q} Y_m(0) x^m \right| \leq C_{16} U(x) Y_0(0) x^{q+1}. \tag{2.7.7}$$

Из (2.7.7) вытекает асимптотическое разложение

$$u_y(x,0) = U(x)\sum_{m=0}^{q} Y_m(0)x^m + O\big(U(x)x^{q+1}\big), \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Поскольку касательная составляющая τ напряжения вязкого трения на поверхности обтекаемого тела равна $\nu\rho u_y(x,0)$, имеем

$$\tau = \nu\rho U(x)\sum_{m=0}^{q} Y_m(0)x^m + O\big(U(x)x^{q+1}\big), \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

для любого целого положительного q.

§ 2.8. Уравнения симметричного магнитогидродинамического пограничного слоя

Методы решения задач теории пограничного слоя, изложенные выше, применимы и в задачах, связанных с магнитогидродинамическим пограничным слоем. Магнитное поле, приложенное к потоку проводящей вязкой жидкости, влияет на процесс возникновения пограничного слоя и на скорость распространения возмущений в сплошной среде.

Рассмотрим систему уравнений стационарного плоскопараллельного пограничного слоя проводящей жидкости в присутствии магнитного поля. Обтекаемую поверхность предполагаем изолированной. Координата x направлена вдоль обтекаемой поверхности, y — по нормали к поверхности, ось z перпендикулярна плоскости течения. Тогда система уравнений пограничного слоя проводящей жидкости при наличии внешнего магнитного поля, перпендикулярного потоку, рассматривается в области $D = \{0 < x < X,\, 0 < y < \infty\}$ и имеет вид

$$\begin{cases} \nu\Big(1 + 3d\Big(\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\Big)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u\dfrac{\partial u}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} + B^2(U-u) = -U\dfrac{dU}{dx}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{2.8.1}$$

Как обычно, ν — кинематическая вязкость среды и d — малая положительная постоянная, зависящие от свойств жидкости, плотность жидкости ρ и проводимость среды σ предполагаются равными единице, $B(x)$, $U(x)$ — заданные функции. Функция скорости внешнего потока $U(x)$ связана с давлением $p(x)$ и компонентами электрического поля $B(x)$ соотношением

$$U\frac{dU}{dx} = -\frac{dp}{dx} - E\frac{B}{\sigma} - B^2U.$$

Система рассматривается с граничными условиями

$$\begin{gathered} u(0,y)=0, \quad u(x,0)=0, \quad v(x,0)=v_0(x), \\ u(x,y)\rightrightarrows U(x) \quad \text{при} \quad y\to\infty, \end{gathered} \tag{2.8.2}$$

где $U(0)=0$, $\quad U(x)>0$ при $x>0$. Пусть $U_x(x)$ измерима и ограничена, $U_x(0)>0$, функция $v_0(x)$ предполагается заданной.

Справедливы следующие результаты.

Теорема 2.8.1 (Существования). *Предположим, что*

$$U(x) = x\big(a + xa_1(x)\big), \qquad v_0(x) = b + xb_1(x),$$

где $a = const > 0$, $b = const$; $U > 0$ при $x > 0$; a_1, a_{1x}, a_{1xx}, b_1, b_{1x} ограничены.

Тогда задача (2.1.1), (2.1.2) *в области D, при X, зависящем от U, v_0 имеет решение u, v, которое обладает следующими свойствами: $u_y > 0$ при $y \ge 0$ и $x > 0$; $\dfrac{u}{U}$, $\dfrac{u_y}{U}$ ограничены и непрерывны в $\overline{D}$; $u > 0$ при $y > 0$ и $x > 0$; $u \to U$ при $y \to \infty$, $u(x,0) = u(0,y) = 0$; $\dfrac{u_y}{U} > 0$ при $y \ge 0$; $\dfrac{u_y}{U} \to 0$ при $y \to \infty$; u_x, u_y, u_{yy} ограничены и непрерывны в $\overline{D}$; v непрерывна в $\overline{D}$ по y при $x > 0$; v непрерывна по x и y внутри D; u_{yyy} ограничена в $\overline{D}$; u_{xy} ограничена в D при ограниченных y; u_{xy} и u_{yyy} непрерывны в $\overline{D}$; $\dfrac{u_{yy}}{u_y}$ непрерывна в D по y; имеют место оценки*

$$UY\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{-C_1x} \le u_y \le U(x)Y\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{C_2x},$$

$$Y_\eta\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{C_4x} \le \frac{u_{yy}}{u_y} \le Y_\eta\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{-C_5x},$$

$$e^{\left[-\frac{M_1^2}{4}y^2e^{2C_2x}\right]} \le 1-\frac{u}{U} \le e^{\left[-\frac{M_1^2}{4}y^2e^{-2C_1x}\right]}.$$

где $Y(\eta)$ *— решение задачи* (2.3.12), (2.3.13).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.4.1. Как и в параграфе 1.2 переходим к переменным Крокко

$$\xi = x, \qquad \eta = \frac{u(x,y)}{U(x)}, \qquad w(\xi,\eta) = \frac{u_y(x,y)}{U(x)}.$$

При этом система (2.8.1) сводится к уравнению

$$\nu\big(1+3dU^2w^2\big)w^2w_{\eta\eta} - \eta U w_\xi + (\eta^2-1)U_\xi w_\eta - \eta U_\xi w + \\ +6\nu dU^2w_\eta^2w^3 + (\eta-1)B^2w_\eta - B^2Uw = 0$$

в области $\Omega = \{0<\xi<X,\ 0<\eta<1\}$ с граничными условиями

$$w(\xi,1)=0, \quad \Big(\nu w w_\eta\big(1+3dU^2w^2\big) - v_0(\xi)w + U_\xi + B^2\Big)\Big|_{\eta=0} = 0.$$

Теорема 2.8.2. *Пусть* u, v *— решение задачи* (2.1.1), (2.1.2) *такое, что: производные* u_x, u_y, v_y, u_{yy}, u_{yyy}, u_{xy} *непрерывны в* D; $\frac{u}{U}$ *и* $\frac{u_y}{U}$ *непрерывны в* $\overline{D}$; $u_y > 0$ *при* $y \ge 0$, $x > 0$; $\frac{u_y}{U} > 0$ *при* $y = 0$; $\frac{u_y}{U} \to 0$ *при* $y \to \infty$; $\frac{u_{yy}}{u_y}$, u_x *непрерывны по* y *при* $y = 0$; $\frac{u_{yyy}u_y - u_y^2}{u_y^2} \le 0$.

Тогда u, v *— единственное решение задачи* (2.1.1), (2.1.2) *с указанными свойствами.*

Этот результат доказывается аналогично теореме 2.6.1.

Глава 3

Нестационарный пограничный слой

§ 3.1. Постановка задачи

В случае двумерного нестационарного течения модифицированная система уравнений пограничного слоя имеет вид:

$$\begin{cases} \nu\Big(1 + 3d\big(u_y\big)^2\Big)u_{yy} - u_t - u\,u_x - v\,u_y = -U_t - U\,U_x, \\ u_x + v_y = 0. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Здесь ν, d – постоянные, зависящие от свойств жидкости, плотность жидкости ρ предполагается равной единице, $U(t,x)$ – заданная функция, связанная с давлением $p(t,x)$ уравнение Эйлера для скорости внешнего потока

$$-p_x = U_t + U\,U_x.$$

Система уравнений (3.1.1) рассматривается в области $Q = \{0 < t < \infty,\ 0 < x < X,\ 0 < y < \infty\}$ с начальным и граничными условиями

$$u(0,x,y) = u_1(x,y), \quad u(t,0,y) = 0, \quad u(t,x,0) = 0,$$

$$v(t,x,0) = v_0(t,x), \quad u(t,x,y) \rightrightarrows U(t,x) \ \text{ при } \ y \to \infty, \tag{3.1.2}$$

где $U(t,0) = 0$, $U_x(t,0) > 0$, $U(t,x) > 0$ при $x > 0$, а функция $v_0(t,x)$ предполагается заданной. Условия $U(t,0) = 0$ и $u(t,0,y) = 0$ определяют точку $x = 0$ как точку, в которой происходит остановка внешнего потока жидкости и пограничный слой симметричен относительно этой точки. Дополнительно предположим, что

$$U(t,x) = xV(t,x),$$

$V(t,x) > 0$ и V, V_x, V_t, v_0 ограничены при $0 < x \le X$.

Определение 3.1.1. *Решением задачи* (3.1.1), (3.1.2) *называется пара функций* $u(t,x,y)$ *и* $v(t,x,y)$, *обладающая следующими свойствами:* $u(t,x,y)$ *непрерывна и ограничена в замкнутой области* $\overline{Q}$, $v(t,x,y)$ *непрерывна по* y *в* $\overline{Q}$, *и ограничена при ограниченных* y *; обобщенные производные* u_t, u_x, u_y, u_{yy}, v_y *являются ограниченными измеримыми функциями;* u *и* v *удовлетворяют системе* (3.1.1) *в* Q *начальным и граничным условиям* (3.1.2).

§ 3.2. Переменные Крокко

Задачу (3.1.1), (3.1.2) сведем к некоторой вспомогательной краевой задаче для одного квазилинейного уравнения так же, как и в предыдущей главе. Для этого введем новые независимые переменные τ, ξ, η и новую неизвестную функцию $w(\tau,\xi,\eta)$ следующим образом:

$$\begin{gathered} \tau = t, \qquad \xi = x, \qquad \eta = \frac{u(t,x,y)}{U(t,x)}, \\ w(\tau,\xi,\eta) = \frac{u_y(t,x,y)}{U(t,x)}. \end{gathered} \tag{3.2.1}$$

Исключив v из системы уравнений (3.1.1) и продифференцировав эти уравнения по y, имеем

$$\begin{aligned} 0 = \nu\bigl(1+3d(u_y)^2\bigr)u_{yyy} - \nu\bigl(1+3d(u_y)^2\bigr)\frac{u_{yy}^2}{u_y} + \nu u_{yy}^2 6du_y - u_{ty} + u_t\frac{u_{yy}}{u_y} - \\ - \bigl(uu_{xy} - \frac{u_{yy}}{u_y}uu_x\bigr) - UU_x\frac{u_{yy}}{u_y} - U_t\frac{u_{yy}}{u_y} = \nu\bigl(1+3d(u_y)^2\bigr)\frac{u_{yyy}u_y - u_{yy}^2}{u_y} - \\ - u\frac{u_{xy}u_y - u_{yy}u_x}{u_y} - \frac{u_{yy}}{u_y}UU_x + 6\nu du_y u_{yy}^2 - u_{ty} + u_t\frac{u_{yy}}{u_y} - U_t\frac{u_{yy}}{u_y}. \end{aligned}$$

Последующие действия в точности повторяют шаги 2 главы. Приведем лишь новые вычисления:

$$u_{ty} = (w_\tau \tau_t + w_\eta \eta_t)U + wU_t = w_\tau U + \eta_t w_\eta U + wU_t = w_\tau U +$$
$$+ \frac{u_t U - uU_t}{U^2} w_\eta U + wU_t = w_\tau U + wU_t + w_\eta u_t - \eta w_\eta U_t;$$
$$\frac{1}{U}\Big(- u_{ty} + u_t \frac{u_{yy}}{u_y} - U_t \frac{u_{yy}}{u_y}\Big) = \frac{1}{U}\Big(- w_\tau U - wU_t - u_t w_\eta + \eta U_t w_\eta +$$
$$+ u_t w_\eta - U_t w_\eta\Big) = (\eta - 1)\frac{U_t}{U} w_\eta - \frac{U_t}{U} w - w_\tau.$$

В итоге, учитывая (3.1.2), выводим одно квазилинейное уравнение

$$\nu\big(1 + 3dU^2 w^2\big) w^2 w_{\eta\eta} - w_\tau - \eta U w_\xi + (\eta^2 - 1) U_x w_\eta + (\eta - 1)\frac{U_t}{U} w_\eta -$$
$$- \eta U_x w + 6\nu d U^2 w_\eta^2 w^3 - \frac{U_t}{U} w = 0 \tag{3.2.2}$$

в области $\Delta = \{0 < \tau < \infty,\ 0 < \xi < X,\ 0 < \eta < 1\}$ с условиями

$$\begin{aligned} & w(0, \xi, \eta) = w_0(\xi, \eta), \\ & w(\tau, \xi, 1) = 0, \\ & \Big(\nu\big(1 + 3dU^2 w^2\big) w w_\eta - v_0 w + \frac{U_t}{U} + U_x\Big)\Big|_{\eta=0} = 0, \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

где функция $w_0(\xi, \eta) = \dfrac{u_{1y}(x, y)}{U(0, x)}$.

Определение 3.2.1. *Функция $w(\tau, \xi, \eta)$ называется решением задачи (3.2.2), (3.2.3), если: w непрерывна в $\overline{\Delta}$ и имеет ограниченные обобщенные производные w_τ, w_ξ, w_η, причем w_η непрерывна по η при $\eta = 0$; существует обобщенная производная $w_{\eta\eta}$, такая что произведение $w w_\eta$ ограничено в $\overline{\Delta}$; уравнение (3.2.2) выполняется для w почти всюду в Δ и w удовлетворяет условиям (3.2.3).*

Далее воспользуемся введенным ранее предположением $U = xV$ и для удобства примем обозначения:

$$A = (\eta^2 - 1)(V + \xi V_x) + (\eta - 1)\frac{V_t}{V}, \qquad B = -\eta(V + \xi V_x) - \frac{V_t}{V},$$
$$C = V + \xi V_x + \frac{V_t}{V}.$$

Тогда задача (3.2.2) примет вид

$$\nu\big(1 + 3d\xi^2 V^2 w^2\big) w^2 w_{\eta\eta} - w_\tau - \eta\xi V w_\xi + A w_\eta + B w + 6\nu d\xi^2 V^2 w^3 w_\eta^2 = 0,$$

а ее начальное и граничные условия (3.2.3) перепишутся:

$$w(\tau, \xi, 1) = 0, \qquad \Big(\nu\big(1 + 3d\xi^2 V^2 w^2\big) w w_\eta - v_0 w + C\Big)\Big|_{\eta=0} = 0,$$
$$w(0, \xi, \eta) = w_0(\xi, \eta).$$

§ 3.3. Теорема существования и единственности решения задачи в переменных Крокко

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 3.3.1. *Пусть $U_x > 0$ при $0 \le x \le X$; функции V, V_x, v_0, v_{0x}, A_x, B_x, C_x ограничены, $|V_t| \le M_8 x$, $|A_t| \le M_9 x$, $|B_t| \le M_{10} x$, $|C_t| \le M_{11} x$, $|v_{0t}| \ge -M_{12} x$,*

$$Y e^{-M_1 \xi} \le w_0 \le Y e^{M_2 \xi}, \quad |w_{0\xi}| \le M_3(1 - \eta);$$

w_0 непрерывно дифференцируема по $\eta \in [0, 1)$ и

$$Y_\eta e^{M_4 \xi} \le w_{0\eta} \le Y_\eta e^{-M_5 \xi},$$

$$-M_6(1 - \eta) \le \nu\big(1 + 3d\xi^2 V^2 w_0^2\big) w_0^2 w_{0\eta\eta} + A w_{0\eta} + B w_0 + \\ + 6\nu d\xi^2 V^2 w_0^3 w_{0\eta}^2 \le M_7 x(1 - \eta),$$

$$\left(\nu(1 + 3d\xi V^2 w_0^2) w_0 w_{0\eta} - v_0 w_0 + U_x + \frac{U_t}{U}\right)\Big|_{\eta=0, \tau=0} = 0.$$

Тогда задача (3.2.2), (3.2.3) в области Δ при X, зависящем от V, v_0, w_0 имеет решение $w(\tau,\xi,\eta)$, обладающее следующими свойствами: w непрерывна в $\overline{\Delta}$,

$$Ye^{-C_1\xi} \le w \le Ye^{C_2\xi};$$

w_η непрерывна по $\eta < 1$,

$$Y_\eta e^{-C_3\xi} \le w_\eta \le Y_\eta e^{C_4\xi};$$

обобщенные производные w_τ, w_ξ, $w_{\eta\eta}$ удовлетворяют неравенствам

$$-C_5(1-\eta) \le w_\tau \le C_6\xi(1-\eta), \quad \left|w_\xi\right| \le C_7 Y, \quad -C_8 \le ww_{\eta\eta} \le -C_9,$$

где $Y(\eta)$ решение вспомогательной краевой задачи (3.3.10), (3.3.11), которую введем ниже. Решение задачи (3.2.2), (3.2.3) с такими свойствами единственно.

3.3.1 Вспомогательные утверждения

Пользуясь методом прямых, т.е. дискретизацией по ξ и заменой уравнения (3.2.2) системой обыкновенных дифференциальных уравнений, докажем при соответствующих предположениях о данных задачи существование и единственность решения задачи (3.2.2), (3.2.3). Как следствие, получим теоремы о существовании и единственности решения системы (3.1.1), (3.1.2).

Для любой функции $f(\tau,\xi,\eta)$ введем обозначение

$$\begin{gathered} f^{m,k} = f^{m,k}(\eta) \equiv f(mh, kh, \eta), \qquad h = const > 0, \\ m = 1, 2, ...; \quad k = 0, 1, ..., [X/h]; \quad 0 \le \eta \le 1. \end{gathered}$$

Уравнения (3.2.2) с условиями (3.2.3) заменим системой уравнений

$$\begin{multlined} L^{m,k}(w) := \nu\Big(1 + 3d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k})^2\Big)(w^{m,k})^2 w^{m,k}_{\eta\eta} - \\ -\frac{w^{m,k} - w^{m-1,k}}{h} - \eta khV^{m,k}\frac{w^{m,k} - w^{m,k-1}}{h} + A^{m,k}w^{m,k}_\eta + B^{m,k}w^{m,k} + \\ +6\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k})^3(w^{m,k}_\eta)^2 = 0, \end{multlined} \tag{3.3.1}$$

с граничными условиями

$$
\begin{aligned}
&w^{0,k}(\eta) = w_0(kh,\eta), \qquad w^{m,k}(1) = 0,\\
&l^{m,k}(w) := \Big(\nu w^{m,k} w_\eta^{m,k}\big(1 + 3d(kh)^2 (V^{m,k})^2 (w^{m,k})^2\big) -\\
&- v_0^{m,k} w^{m,k} + C^{m,k}\Big)\Big|_{\eta=0} = 0.
\end{aligned}
\tag{3.3.2}
$$

Далее всюду C_i, M_i — положительные постоянные, не зависящие от h.

Доказательство основных результатов проводим с помощью следующих лемм.

3.3.2 Существование и оценка приближенного решения w^k

Лемма 3.3.1. *Предположим, что* $U_x > 0$ *при* $0 \le x \le X$*; функции* V, V_x, v_0, *ограничены,* $\left|\dfrac{V_t}{V}\right| \le M_1 x$,

$$
M_2(1-\eta) \le w_0(\xi,\eta) \le M_3(1-\eta)\sigma, \tag{3.3.3}
$$

где $\sigma = \sqrt{-\ln\mu(1-\eta)}$, *и* $w_0(\xi,\eta)$ *имеет непрерывную производную по* $\eta \in [0,1)$. *Тогда при* $0 \le mh \le \infty$, $0 \le kh \le X$, *где* X *зависит от* V, v_0, w_0. *Задача* (3.3.1), (3.3.2) *имеет решение* $w^{m,k}(\eta)$, *обладающее непрерывной производной третьего порядка при* $0 \le \eta < 1$. *Для этого решения справедливы неравенства*

$$
C_1(1-\eta) \le w^{m,k}(\eta) \le C_2(1-\eta)\sigma. \tag{3.3.4}
$$

Доказательство леммы проводится методом эллиптической регуляризации.

Доказательство. Докажем, что если $w_0 \ge 0$ и $w^{m,k}(0) > 0$, то $w^{m,k}(\eta) > 0$ при $0 \le \eta < 1$. Также, при определенных условиях, мы докажем существование решения задачи (3.3.1), (3.3.2), положительного при $\eta = 0$. Данное решение, в силу предыдущего замечания, является решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.3.1) на отрезке $0 \le \eta \le 1$ с условиями (3.3.2).

Решение задачи (3.3.1), (3.3.2) получим как предел при $\varepsilon \to 0$ решений системы

$$L_\varepsilon^{m,k}(w) := \nu\Big(1 + 3d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k})^2(w^{m,k})^2 + \varepsilon\Big)w_{\eta\eta}^{m,k} -$$
$$- \frac{w^{m,k} - w^{m-1,k}}{h} - \eta khV^{m,k}\frac{w^{m,k} - w^{m,k-1}}{h} +$$
$$+ 6\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k})^3(w_\eta^{m,k})^2 + A^{m,k}w_\eta^{m,k} + B^{m,k}w^{m,k} = 0, \quad (3.3.5)$$

где $0 \le \eta \le 1$, $m \ge 1$, $k = 0, 1, \dots, [X/h]$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$, с условиями

$$w^{0,k}(\eta) = w_0^\varepsilon(kh, \eta), \qquad w^{m,k}(1) = 0, \qquad l^{m,k}(w) = 0. \qquad (3.3.6)$$

Здесь $w_0^\varepsilon = w_0(kh, \eta)$ при $0 \le \eta \le 1/2$, $w_0^\varepsilon = w_0(kh, \eta - \varepsilon) - w_0(kh, 1 - \varepsilon)$ при $\varepsilon + 1/2 \le \eta \le 1$; w_0^ε гладко продолжена на отрезок $[1/2, 1/2 + \varepsilon]$ и неотрицательна.

Из условий (3.3.3) следует, что $w^{0,k}(\eta) \ge M_2(1-\eta)$. Отсюда находим, что $w^{m,k} \ge C_1(1 - \eta)$.

Предположим, что существует решение задачи (3.3.5), (3.3.6), положительное при $\eta = 0$. Получим для него априорную оценку снизу, а затем докажем существование такого решения, аналогично лемме 2.4.1 2 главы.

Полагаем, $V_1^{m,k} = C_1(1 - \eta)$, где $(V_1^{m,k})' = -C_1$, $(V_1^{m,k})'' = 0$. Тогда

$$L_\varepsilon^{m,k}(V_1^{m,k}) = C_1(1 - \eta)\Big[V^{m,k} + khV_x^{m,k} +$$
$$+ 6\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2(-C_1)^2(C_1(1 - \eta))^2\Big] > 0,$$

при $0 \le \eta < 1$, $0 \le kh \le X$, $mh \ge 0$, так как $U_x > 0$ по условию леммы. Пусть $\lambda_\varepsilon^{m,k}(w) \equiv \left(\nu\big(1 + 3d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k})^2\big)w_\eta^{m,k} - v_0^{m,k} + \dfrac{C^{m,k}}{w^{m,k}}\right)\Big|_{\eta=0}$. Тогда

$$\lambda_\varepsilon^{m,k}(V_1^{m,k}) = \left(\nu\big(1 + 3d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k})^2\big)(-C_1) - v_0^{m,k} + \frac{C^{m,k}}{C_1}\right)\Big|_{\eta=0} > 0,$$

если C_1 достаточно мало и X выбрано так, что $C^{m,k} > 0$ при $0 \le kh \le X$. Очевидно, что $V_1^{m,k}(1) = 0$. Поэтому оценка снизу для $w^{m,k}(\eta)$ следует из принципа максимума. Положим $y^{m,k} = V_1^{m,k} - w^{m,k}$ и покажем, что $y^{m,k} \le 0$. Получим

$$L_\varepsilon^{m,k}(V_1^{m,k}) - L_\varepsilon^{m,k}(w^{m,k}) = \Big(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k})^2\big)(w^{m,k})^2 + \\ +\varepsilon\Big)y_{\eta\eta}^{m,k} + \nu V_1^{m,k}{}_{\eta\eta}\Big(1+3d(kh)^2(V^{m,k})^2\big((V_1^{m,k})^2+(w^{m,k})^2\big)\Big)\times \\ \times\big(V_1^{m,k}+w^{m,k}\big)y^{m,k} - \frac{y^{m,k}-y^{m-1,k}}{h} - \eta khV^{m,k}\frac{y^{m,k}-y^{m,k-1}}{h} + \\ +A^{m,k}y_\eta^{m,k} + B^{m,k}y^{m,k} + 6\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2\Big((V_1^{m,k}{}_\eta)^2\big((V_1^{m,k})^2 + \\ +V_1^{m,k}w^{m,k}+(w^{m,k})^2\big)y^{m,k} + (w^{m,k})^3\big(V_1^{m,k}{}_\eta + w_\eta^{m,k}\big)y_\eta^{m,k}\Big) > 0;$$

$$\lambda_\varepsilon^{m,k}(V_1) - \lambda_\varepsilon^{m,k}(w) = \nu\big(1+3d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k}(0))^2\big)y_\eta^{m,k}(0) + \\ +3\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2V_1^{m,k}{}_\eta(0) * \big(V_1^{m,k}(0)+w^{m,k}(0)\big)y^{m,k}(0) - \\ -\frac{C^{m,k}}{V_1^{m,k}(0)w^{m,k}(0)}y^{m,k}(0) > 0.$$

Как и в предыдущей главе, из этих неравенств и условия $y^{m,k}(1) = 0$ следует, что $y^{m,k} \le 0$.

Для доказательства существования решения задачи (3.3.5), (3.3.2) рассмотрим вместо условий (3.3.2) граничные условия вида

$$w^{0,k}(\eta) = w_0^\varepsilon(kh,\eta), \qquad w^{m,k}(1) = 0, \\ \Big(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k})^2\big)w_\eta^{m,k} - v_0^{m,k} + \frac{C^{m,k}}{\psi(w^{m,k})}\Big)\Big|_{\eta=0} = 0, \tag{3.3.7}$$

где $\psi(w)$ — бесконечно дифференцируемая функция при $w \in (-\infty;+\infty)$ такая, что $\psi(w) = w$ при $w \ge C_3$, $\psi(w) = C_3/2$ при $w \le C_3/4$, $0 \le \psi'(w) \le 1$ при $C_3/4 \le w \le C_3$. Постоянная C_3 выбрана так, что

$$w^{m,k}(0) \ge C_3, \qquad \max\frac{|v_0|}{U_x} < \frac{2}{C_3}, \qquad C_3 \le C_1.$$

Пусть $\widetilde{w}^{m,k}$ — любое решение задачи (3.3.5), (3.3.7) при $0 < \varepsilon \le 1$. Покажем, что справедливо неравенство $\widetilde{w}^{m,k} \ge V_1^{m,k}$. Положим $\widetilde{y}^{m,k} = V_1^{m,k} - \widetilde{w}^{m,k}$. Имеем

$$\Big(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^{m,k})^2(V_1^{m,k})^2\big){V_1^{m,k}}_\eta - v_0^{m,k} + \frac{C^{m,k}}{\psi(V_1^{m,k})}\Big)\Big|_{\eta=0} =$$
$$= -\nu\big(1+3d(kh)^2(V^{m,k})^2C_1^2\big)C_1 - v_0^{m,k} + \frac{C^{m,k}}{C_1} > 0$$

в силу выбора C_1, и

$$\Big(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k})^2\big)\widetilde{y}_\eta^{m,k} + 3\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2\big(V_1^{m,k}+$$
$$+w^{m,k}\big){V_1^{m,k}}_\eta\widetilde{y}^{m,k} - \frac{C^{m,k}}{\psi(V_1^{m,k})\psi(w^{m,k})}\widetilde{y}^{m,k}\Big)\Big|_{\eta=0} > 0,$$

$$\Big(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k})^2\big)(w^{m,k})^2+\varepsilon\Big)\widetilde{y}_{\eta\eta}^{m,k} - \frac{\widetilde{y}^{m,k}-\widetilde{y}^{m-1,k}}{h} -$$
$$-\eta khV^{m,k}\frac{\widetilde{y}^{m,k}-\widetilde{y}^{m,k-1}}{h} + A^{m,k}\widetilde{y}_\eta^{m,k} + B^{m,k}\widetilde{y}^{m,k} + D^{m,k}\widetilde{y}^{m,k} +$$
$$+6\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2\big({V_1^{m,k}}_\eta + w_\eta^{m,k}\big)(w^{m,k})^3(\widetilde{y}_\eta^{m,k})^2 > 0 \quad \text{при} \quad \eta < 1.$$

Далее, для $\widetilde{S}^{m,k} = \widetilde{y}^{m,k}e^{-\alpha mh}e^{-\beta kh}$, как и для $S^{m,k}$, получим, что $\widetilde{S}^{m,k} \le 0$ и $V_1^{m,k} \le \widetilde{w}^{m,k}$ при $0 \le \eta \le 1$, $kh \le X$. Следовательно, $w^{m,k}(0) \ge V^{m,k}(0) \ge C_3$, и поэтому $\psi(\widetilde{w}^{m,k}) = \widetilde{w}^{m,k}$. Таким образом, решение $\widetilde{w}^{m,k}(\eta)$ задачи (3.3.4), (3.3.7) является также решением задачи (3.3.5), (3.3.2), положительным при $\eta = 0$.

Доказательство существования решения задачи (3.3.5), (3.3.7) при $\varepsilon > 0$ проводится на основе теоремы Лере–Шаудера (см.[40, стр. 89-91]).

Оценим теперь решение задачи (3.3.5), (3.3.2) сверху равномерно относительно ε и h. Рассмотрим функцию

$$V_2^{m,k} = C_2(1-\eta)\sigma, \qquad \sigma = \sqrt{-\ln\mu(1-\eta)}, \quad 0<\mu<1.$$

При достаточно большой постоянной C_2 из (3.3.3) следует, что

$$C_2(1-\eta)\sigma \geq w^{0,k}(\eta).$$

Кроме того, получаем

$$\begin{gathered}L_\varepsilon^{m,k}(V_2^{m,k}) = \varepsilon C_2\Big(-\frac{1}{2\sigma(1-\eta)} - \frac{1}{4\sigma^3(1-\eta)}\Big)+ \\ +\Big(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^{m,k})^2C_2^2(1-\eta)^2\sigma^2\big)C_2^2(1-\eta)^2\sigma^2\Big)\times \\ \times\Big(-\frac{C_2}{2\sigma(1-\eta)} - \frac{C_2}{4\sigma^3(1-\eta)}\Big) - A^{m,k}C_2\Big(\frac{1}{2\sigma}-\sigma\Big) + B^{m,k}C_2(1-\eta)\sigma+ \\ +6\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2C_2^3(1-\eta)^3\sigma^3C_2^2\Big(\frac{1}{2\sigma}-\sigma\Big)^2 < 0\end{gathered} \tag{3.3.8}$$

при $0 \leq \eta < 1$, если $C_2 > 0$ достаточно велико; C_2 не зависит от ε и h. Далее,

$$\begin{gathered}\lambda_\varepsilon^{m,k}(V_2^{m,k}) = \Bigg(\nu\big(1+3d(kh)^2(V^{m,k})^2C_2^2(1-\eta)^2\sigma^2\big)C_2\Big(\frac{1}{2\sigma}-\sigma\Big)- \\ -v_0^{m,k} + \frac{C^{m,k}}{C_2(1-\eta)\sigma}\Bigg)\Bigg|_{\eta=0} < 0,\end{gathered} \tag{3.3.9}$$

если C_2 достаточно велико и $\sigma^2 > 1/2$ при $\eta = 0$, т.е. $\mu < e^{-1/2}$. Из неравенств (3.3.8), (3.3.9) и условия $(w^{m,k} - V_2^{m,k})|_{\eta=1} = 0$ по принципу максимума получаем, что

$$w^{m,k} - V_2^{m,k} \leq 0, \quad \text{при} \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq x \leq X.$$

Дальнейшие рассуждения повторяются точно так же, как в лемме 2.3.1. Лемма доказана.

□

3.3.3 Более точная оценка решения w^k

Для дальнейших оценок решений задачи (3.3.1), (3.3.2) рассмотрим краевую задачу для одного обыкновенного дифференциального уравнения и изучим решение этой задачи. Пусть $V(t,0) = a$, $v_0(0) = b$. Согласно сделанным ранее предположениям, $a > 0$.

$$L(Y) \equiv \nu Y^2 Y_{\eta\eta} + (\eta^2 - 1)aY_\eta - \eta a Y = 0, \quad 0 < \eta < 1 \tag{3.3.10}$$

с граничными условиями

$$l(Y) \equiv \Big(\nu Y Y_\eta - bY + a\Big)\Big|_{\eta=0} = 0, \qquad Y(1) = 0. \tag{3.3.11}$$

Лемма 3.3.2. *Предположим, что выполнены условия леммы* (3.3.1) *и* $v_{0x}(t,x)$ *ограничена при* $0 \le t \le \infty$ *и* $0 \le x \le X$. *Пусть, кроме того, выполнены неравенства*

$$Y(\eta)e^{-M_4\xi} \le w_0(\xi,\eta) \le Y(\eta)e^{M_5\xi}.$$

Тогда при $0 \le mh \le \infty$, $0 \le kh \le X$, *где* X *зависит от* V, v_0 *решения* $w^{m,k}(\eta)$ *задачи* (3.3.1), (3.3.2) *удовлетворяют неравенствам*

$$Y(\eta)e^{-C_3kh} \le w^{m,k}(\eta) \le Y(\eta)e^{C_4kh}.$$

Доказательство. Для функций $W^{m,k} = Ye^{-C_3kh}$ имеем

$$\begin{aligned}
L^{m,k}(W) = \big(\nu Y^2 Y_{\eta\eta} e^{-3C_3kh} + (\eta^2-1)aY_\eta e^{-C_3kh} + \eta a Y e^{-C_3kh}\big) + \\
+\nu(1+3d(kh)^2(V^{m,k})^2Y^2e^{-2C_1kh})Y^2Y_{\eta\eta}e^{-3C_3kh} - \nu Y^2Y_{\eta\eta}e^{-3C_3kh} - \\
-\eta khV^kY\frac{e^{-C_3kh} - e^{-C_3(k-1)h}}{h} + A^{m,k}Y_\eta e^{-C_3kh} - (\eta^2-1)aY_\eta e^{-C_3kh} + \\
+B^{m,k}Ye^{-C_3kh} - \eta a Y e^{-C_3kh} + 6\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2Y^3Y_\eta^2e^{-5C_3kh} = \\
= e^{-C_3kh}\Big[\nu Y^2Y_{\eta\eta}(e^{-2C_3kh} - 1) + 3\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2Y^4Y_{\eta\eta}e^{-4C_3kh} + \\
+\eta khV^{m,k}YC_3e^{C_3h''} + \big(A^{m,k} - (\eta^2-1)a\big)Y_\eta + (B^{m,k} + \eta a)Y + \\
+6\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2Y^3Y_\eta^2e^{-5C_3kh}\Big],
\end{aligned}$$

где $0 < h' < h$, $0 < h'' < h$. Кроме того, при $kh \le X$ и достаточно малом X

$$-C_3 e^{-2C_3 h'} \le -\frac{1}{2} khC_3, \qquad -C_3 e^{-C_3 h''} \le -khC_3$$

по теореме Лагранжа, а свойства функции $Y(\eta)$ таковы, что

$$\big|\big(A^{m,k} - (\eta^2 - 1)a\big)Y_\eta\big| \le M_6 khY,$$

так как

$$\big|\big(A^{m,k} - (\eta^2 - 1)a\big)Y_\eta\big| = \bigg|\bigg[(\eta+1)\big(V^{m,k} + khV_x^{m,k}\big) + \frac{V_t^{m,k}}{V^{m,k}} -$$

$$-(\eta+1)a\bigg](\eta-1)Y_\eta\bigg| \le \bigg|\bigg[(\eta+1)\big(V^{m,k} + khV_x^{m,k}\big) + \frac{V_t^{m,k}}{V^{m,k}} -$$

$$-(\eta+1)a\bigg](\eta-1)\bigg|M_4\sigma \le \bigg|\bigg[(\eta+1)\big(V^{m,k} + khV_x^{m,k}\big) +$$

$$+\frac{V_t^{m,k}}{V^{m,k}} - (\eta+1)a\bigg]\bigg|M_4\frac{Y}{M_2} \le M_6 khY,$$

где $V_x^{m,k}$ и $\left|\dfrac{V_t^{m,k}}{V^{m,k}}\right|$ ограничены в силу условия леммы 3.3.1, а в силу предположения $V(t,0) = a$, разность $|V^{m,k} - a| \le Nkh$, где N не зависит от h. Аналогичным образом доказывается верность следующих неравенств

$$\big|(B^{m,k} + \eta a)Y\big| \le M_7 khY, \quad \big|\big(C^{m,k} - a\big)\big| \le M_9 kh.$$

Поэтому, если C_3 достаточно велико, то имеем неравенство $L^{m,k}(W) > 0$ при $0 \le \eta < 1$ и $0 \le mh \le \infty$, $\ 0 \le kh \le X$.

Учитывая (3.3.11), находим, что

$$l^{m,k}(W) = \Big[\nu\big(1 + 3d(kh)^2(V^{m,k})^2 Y^2 e^{-2C_3 kh}\big)Ye^{-C_3 kh}Y_\eta e^{-C_3 kh} -$$

$$-v_0^{m,k} Ye^{-C_3 kh} + C^{m,k} - \nu YY_\eta + bY - a + v_0 Y - v_0 Y\Big]\Big|_{\eta=0} =$$

$$= \Big[\nu YY_\eta(e^{-2C_3 kh} - 1) - v_0^{m,k} Y(e^{-C_3 kh} - 1) +$$

$$+3\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2 Y^3 Y_\eta e^{-4C_3 kh} - (v_0 - b)Y + \big(C^{m,k} - a\big)\Big]\Big|_{\eta=0}.$$

По условию леммы

$$\left|v_0^k - b\right| \le M_8 kh, \quad \text{при} \quad kh \le X.$$

Поэтому при достаточно большой постоянной C_3 и X, зависящем от V, v_0, имеем $l^{m,k}(W) > 0$ при $0 \le mh \le \infty$, $0 \le kh \le X$. Так как $W^{m,k}(1) = 0$, то по принципу максимума из того, что ри $0 \le \eta < 1$ и $kh \le X$ получаем неравенства

$$L^{m,k}(W) - L^{m,k}(w) > 0, \qquad l^{m,k}(W) - l^{m,k}(w) > 0,$$

нетрудно установить

$$w^{m,k} \ge W^{m,k} = Ye^{-C_3 kh} \quad \text{при} \quad 0 \le \eta \le 1,\, 0 \le kh \le X,\, 0 \le mh \le \infty.$$

Аналогично получается оценка сверху, так как если $W_* = Ye^{C_4 kh}$ и C_4 достаточно велико, то $L^{m,k}(W_*) < 0$ и $l^{m,k}(W_*) < 0$ при $0 \le \eta < 1$, $0 \le kh \le X$, $0 \le mh \le \infty$. Лемма доказана. □

3.3.4 Оценка производных решения w^k

Лемма 3.3.3. *Пусть выполнены условия леммы 3.3.2 и, кроме того,*

$$|w_{0\xi}| \le M_6(1-\eta)\sigma \qquad Y_\eta e^{M_7\xi} \le w_{0\eta} \le Y_\eta e^{-M_8\xi},$$

$$-M_{10}(1-\eta) \le \nu\big(1 + 3d\xi^2V^2w_0^2\big)w_0^2 w_{0\eta\eta} + Aw_{0\eta} + Bw_0 + \\ +6\nu d\xi^2V^2w_0^3w_{0\eta}^2 \le M_{11}\xi(1-\eta),$$

$$\Big(\nu\big(1 + 3d\xi^2V^2w_0^2\big)w_0w_{0\eta} - v_0w_0 + C\Big)\Big|_{\eta=0,\tau=0} = 0, \tag{3.3.12}$$

где A_ξ, B_ξ, C_ξ ограничены, $|V_\tau| \le M_{12}\xi$, $|A_\tau| \le M_{13}\xi$, $|B_\tau| \le M_{14}\xi$, $|C_\tau| \le M_{15}\xi$, $|v_0| \le M_{16}$, $v_{0\tau} \le -M_{17}\xi$.

Тогда при $0 \le mh \le \infty$, $0 \le kh \le X$, где X зависит от V, v_0 решения $w^{m,k}(\eta)$ задачи (3.3.1), (3.3.2) *удовлетворяют неравенствам*

$$-C_5(1-\eta)\sigma \le \frac{w^{m,k} - w^{m-1,k}}{h} \le C_6 kh(1-\eta)\sigma, \tag{3.3.13}$$

$$\left|\frac{w^{m,k} - w^{m,k-1}}{h}\right| \le C_7 Y(\eta), \quad k \ge 1, \tag{3.3.14}$$

$$Y_\eta(\eta) e^{C_8 kh} \le w_\eta^{m,k}(\eta) \le Y_\eta(\eta) e^{-C_9 kh}, \tag{3.3.15}$$

$$\left|w^{m,k} w_{\eta\eta}^{m,k}\right| \le C_{10}, \qquad w^{m,k} w_{\eta\eta}^{m,k} \le -C_{11}, \tag{3.3.16}$$

где постоянные C_j не зависят от h.

Доказательство. Неравенства (3.3.13)–(3.3.16) докажем по индукции. По предположению леммы неравенства (3.3.13) и (3.3.14) выполняются при $m = 0$ с некоторыми постоянными M_6, M_7, M_8. Определим $w^{-1,k}$ с помощью равенства

$$\frac{w^{0,k} - w^{-1,k}}{h} = \nu\big(1 + 3d\xi^2 V^2 w_0^2\big) w_0^2 w_{0\eta\eta} - \eta kh V^{0,k} \frac{w^{0,k} - w^{0,k-1}}{h} + \\ + A w_{0\eta} + B w_0 + 6\nu d\xi^2 V^2 w_0^3 w_{0\eta}^2.$$

Из этого равенства и предположений леммы имеем, что неравенства (3.3.13) с некоторыми постоянными выполнены при $m = 0$, т.е.

$$-C_{12}(1-\eta)\sigma \le \frac{w^{0,k} - w^{-1,k}}{h} \le C_{13} kh(1-\eta)\sigma,$$

При $k = 0$ функция $h^{-1}(w^{m,k} - w^{m,k-1})$ не определена. Предположим, что неравенства (3.3.13)–(3.3.15) выполняются (с некоторыми постоянными, не зависящими от h) для всех $w^{m',k'}(\eta)$ при $m' \le m-1$ и $m' = m$, $k' \le k$, если $0 \le kh \le X$, где X определяется данными задачи (3.3.1), (3.3.2); $0 \le mh \le \infty$. Введем обозначения

$$r^{m,k} = \frac{w^{m,k} - w^{m,k-1}}{h}, \qquad z^{m,k} = w_\eta^{m,k}, \qquad \rho^{m,k} = \frac{w^{m,k} - w^{m-1,k}}{h}.$$

Для удобства обозначим

$$D^{m,k} \equiv 3\nu d(kh)^2 (V^{m,k})^2, \qquad E^{m,k} \equiv 6\nu d(kh)^2 (V^{m,k})^2.$$

Пусть

$$w_{\eta\eta}^{m,k} = \frac{\rho^{m,k} + \eta k h V^{m,k} r^{m,k} - A^{m,k} z^{m,k} - B^{m,k} w^{m,k} - E^{m,k} (z^{m,k})^2 (w^{m,k})^3}{(\nu + D^{m,k}(w^{m,k})^2)(w^{m,k})^2}.$$

Из уравнения (3.3.1) для $w^{m,k}$ вычтем уравнение (3.3.1) для $w^{m-1,k}$ и разделим полученное равенство на h. Находим

$$h^{-1}[\nu(w^{m,k})^2 w_{\eta\eta}^{m,k} - \nu(w^{m-1,k})^2 w_{\eta\eta}^{m-1,k}] = h^{-1}[\nu(w^{m,k})^2 w_{\eta\eta}^{m,k} -$$

$$- \nu(w^{m-1,k})^2 w_{\eta\eta}^{m-1,k} + \nu(w^{m,k})^2 w_{\eta\eta}^{m-1,k} - \nu(w^{m,k})^2 w_{\eta\eta}^{m-1,k}] =$$

$$= \nu(w^{m,k})^2 \rho_{\eta\eta}^{m,k} + \nu(w^{m,k} + w^{m-1,k}) w_{\eta\eta}^{m-1,k} \rho^{m,k}.$$

Для каждого слагаемого проделываем аналогичные действия. В итоге, используя вышеперечисленные выражения введем $T^{m,k}(\rho)$ при $m \geq 1$ следующим образом:

$$T^{m,k}(\rho) \equiv \nu(w^{m,k})^2 \rho_{\eta\eta}^{m,k} + 3\nu d(kh)^2 (V^{m,k})^2 (w^{m,k})^4 \rho_{\eta\eta}^{m,k} - \frac{\rho^{m,k} - \rho^{m-1,k}}{h} -$$
$$- \eta k h V^{m,k} \frac{\rho^{m,k} - \rho^{m,k-1}}{h} - \eta k h \frac{V^{m,k} - V^{m-1,k}}{h} r^{m-1,k} + A^{m,k} \rho_\eta^{m,k} +$$
$$+ B^{m,k} \rho^{m,k} + 6\nu d(kh)^2 (V^{m,k})^2 (w_\eta^{m,k} + w_\eta^{m-1,k})(w^{m,k})^3 \rho_\eta^{m,k} +$$
$$+ 6\nu d(kh)^2 (V^{m,k})^2 ((w^{m,k})^2 + w^{m,k} w^{m-1,k} + (w^{m-1,k})^2)(w_\eta^{m-1,k})^2 \rho^{m,k} +$$
$$+ \rho^{m,k} \left[\frac{\big(w^{m,k} + w^{m-1,k}\big)\big(\nu + D^{m-1,k}\big((w^{m,k})^2 + \big(w^{m-1,k})^2\big)\big)}{\big(\nu + D^{m-1,k}(w^{m-1,k})^2\big)(w^{m-1,k})^2} \times \right.$$
$$\times \Big(\rho^{m-1,k} + \eta k h V^{m-1,k} r^{m-1,k} - A^{m-1,k} z^{m-1,k} - B^{m-1,k} w^{m-1,k} -$$
$$\left. - E^{m-1,k} (w^{m-1,k})^3 (z^{m-1,k})^2\Big) \right] + 3\nu d(kh)^2 \frac{(V^{m,k})^2 - (V^{m-1,k})^2 (w^{m-1,k})^2}{h\big(\nu + D^{m-1,k}(w^{m-1,k})^2\big)} \times$$
$$\times \Big(\rho^{m-1,k} + \eta k h V^{m-1,k} r^{m-1,k} - A^{m-1,k} z^{m-1,k} - B^{m-1,k} w^{m-1,k} -$$
$$- E^{m-1,k} (w^{m-1,k})^3 (z^{m-1,k})^2\Big) + \frac{(E^{m,k})^2 - (E^{m-1,k})^2}{h} (w^{m-1,k})^3 (w_\eta^{m-1,k})^2 +$$

$$+ z^{m-1,k}\frac{A^{m,k}-A^{m-1,k}}{h} + w^{m-1,k}\frac{B^{m,k}-B^{m-1,k}}{h} = 0. \qquad (3.3.17)$$

Аналогично из условий (3.3.2) при $m \geq 1$ вытекает

$$\Gamma^{m,k}(\rho) \equiv \Big(\nu\rho_\eta^{m,k} + 3\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k})^2\rho_\eta^{m,k} - \frac{v_0^{m,k}-v_0^{m-1,k}}{h} +$$
$$+ 3\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k}+w^{m-1,k})w_\eta^{m-1,k}\rho^{m,k} + \frac{C^{m,k}-C^{m-1,k}}{hw^{m-1,k}(0)} +$$
$$+ 3\nu d(kh)^2\frac{(V^{m,k})^2-(V^{m-1,k})^2}{h}(w^{m-1,k})^2 w_\eta^{m-1,k} -$$
$$- \frac{C^{m,k}\rho^{m,k}}{w^{m,k}w^{m-1,k}}\Big)\Big|_{\eta=0} = 0, \qquad \rho^{m,k}(1) = 0. \qquad (3.3.18)$$

Здесь при $m = 1$ мы воспользовались условием согласования (3.3.12). При $k = 0$ четвертый и пятый члены в (3.3.17) отсутствуют.

По предположению леммы

$$\left|\frac{A^{m,k}-A^{m-1,k}}{h}\right| \leq M_{12}kh, \qquad \left|\frac{B^{m,k}-B^{m-1,k}}{h}\right| \leq M_{13}kh,$$

$$\left|\frac{V^{m,k}-V^{m-1,k}}{h}\right| \leq M_{12}kh.$$

Положим $\overline{\Phi} = C_{14}khw^{m,k}$. Тогда

$$T^{m,k}(\overline{\Phi}) = C_{14}kh\Bigg(\nu(w^{m,k})^2 w^{m,k}_{\eta\eta} + 3\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k})^4 w^{m,k}_{\eta\eta} -$$

$$- \frac{w^{m,k} - w^{m-1,k}}{h} - \eta kh V^{m,k}\frac{w^{m,k} - w^{m,k-1}}{h} + A^{m,k}w^{m,k}_{\eta} + B^{m,k}w^{m,k} +$$

$$+ 6\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k})^3(w^{m,k}_{\eta})^2\Bigg) +$$

$$+ C_{14}khw^{m,k}\left[\frac{\big(w^{m,k} + w^{m-1,k}\big)\big(\nu + D^{m-1,k}\big((w^{m,k})^2 + \big(w^{m-1,k})^2\big)\big)}{\big(\nu + D^{m-1,k}(w^{m-1,k})^2\big)(w^{m-1,k})^2}\times\right.$$

$$\times\Big(\rho^{m-1,k} + \eta kh V^{m-1,k} r^{m-1,k} - A^{m-1,k}z^{m-1,k} - B^{m-1,k}w^{m-1,k} -$$

$$\left. - E^{m-1,k}(w^{m-1,k})^3(z^{m-1,k})^2\Big)\right] +$$

$$+ C_{14}kh\Big(6\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k})^3 w^{m-1,k}_{\eta} w^{m,k}_{\eta} +$$

$$+ 6\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2((w^{m,k})^2 + w^{m,k}w^{m-1,k} + (w^{m-1,k})^2)(w^{m-1,k}_{\eta})^2 w^{m,k}\Big) +$$

$$- \eta kh\frac{V^{m,k} - V^{m-1,k}}{h} r^{m-1,k} + 3\nu d(kh)^2\frac{(V^{m,k})^2 - (V^{m-1,k})^2(w^{m-1,k})^2}{h\big(\nu + D^{m-1,k}(w^{m-1,k})^2\big)}\times$$

$$\times\Big(\rho^{m-1,k} + \eta kh V^{m-1,k} r^{m-1,k} - A^{m-1,k}z^{m-1,k} - B^{m-1,k}w^{m-1,k} -$$

$$- E^{m-1,k}(w^{m-1,k})^3(z^{m-1,k})^2\Big) + \frac{(E^{m,k})^2 - (E^{m-1,k})^2}{h}(w^{m-1,k})^3(w^{m-1,k}_{\eta})^2 +$$

$$+ z^{m-1,k}\frac{A^{m,k} - A^{m-1,k}}{h} + w^{m-1,k}\frac{B^{m,k} - B^{m-1,k}}{h}. \tag{3.3.19}$$

Первый член в правой части (3.3.19) равен нулю согласно уравнению (3.3.2). В силу предположения индукции, а также условий на функцию $U(t,x)$ и ее производные, имеем $T^{m,k}(\overline{\Phi}) < 0$ при достаточно большом M_{18}, зависящем только от данных задачи (3.2.2), (3.2.3), и при $kh \leq \xi_1$, где ξ_1 зависит от постоянных $C_5, \ldots, C_9$, входящих в предположение индукции. Для доказательства этого неравенства достаточно заметить, что выражение

$$\left|\eta\frac{V^{m,k}-V^{m-1,k}}{h}r^{m-1,k}\right|+\left|z^{m-1,k}\frac{A^{m,k}-A^{m-1,k}}{h}\right|+ \\ +\left|\frac{w^{m-1,k}}{h}\left(\frac{V_t^{m,k}}{V^{m,k}}-\frac{V_t^{m-1,k}}{V^{m-1,k}}\right)\right|$$

имеет порядок kh, и при малых kh оно меньше модуля последнего члена в (3.3.19), который отрицателен при малых kh.

Вычислим $\Gamma^{m,k}(\overline{\Phi})$.

$$\Gamma^{m,k}(\overline{\Phi})=\Bigg[\nu C_{14}khw_\eta^{m,k}+3\nu C_{14}d(kh)^3(V^{m,k})^2(w^{m,k})^2w_\eta^{m,k}+ \\ +3\nu C_{14}d(kh)^3(V^{m,k})^2(w^{m,k}+w^{m-1,k})w_\eta^{m-1,k}w^{m,k}+\frac{C^{m,k}-C^{m-1,k}}{hw^{m-1,k}(0)}+ \\ +3\nu d(kh)^2\frac{(V^{m,k})^2-(V^{m-1,k})^2}{h}(w^{m-1,k})^2w_\eta^{m-1,k}-\frac{v_0^{m,k}-v_0^{m-1,k}}{h}- \\ -\frac{C^{m,k}C_{14}w^{m,k}kh}{w^{m,k}w^{m-1,k}}\Bigg]\Bigg|_{\eta=0}=\Bigg[C_{14}\left(v_0-\frac{C^{m,k}}{w^{m,k}}-\frac{C^{m,k}}{w^{m-1,k}}\right)-\frac{v_0^{m,k}-v_0^{m-1,k}}{h}+ \\ +3\nu C_{14}d(kh)^3(V^{m,k})^2(w^{m,k}+w^{m-1,k})w_\eta^{m-1,k}w^{m,k}+\frac{C^{m,k}-C^{m-1,k}}{hw^{m-1,k}(0)}+ \\ +3\nu d(kh)^2\frac{(V^{m,k})^2-(V^{m-1,k})^2}{h}(w^{m-1,k})^2w_\eta^{m-1,k}\Bigg]\Bigg|_{\eta=0}<0,$$

если $|v_0|\le M_{16}$ и

$$-\frac{v_0^{m,k}-v_0^{m-1,k}}{h}\le M_{17}kh,\qquad \frac{C^{m,k}-C^{m-1,k}}{h}\le M_{15}kh;$$

C_{14} достаточно велико и $kh\le\xi_2$. Поэтому разность $S^{m,k}=\overline{\Phi}^{m,k}-\rho^{m,k}$ удовлетворяет следующим неравенствам при $kh\le\xi_1$ и $kh\le\xi_2$, вида

$$\nu(w^{m,k})^2 S^{m,k}_{\eta\eta} + 3\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k})^4 S^{m,k}_{\eta\eta} - \frac{S^{m,k} - S^{m-1,k}}{h} -$$
$$- \eta kh V^{m,k}\frac{S^{m,k} - S^{m,k-1}}{h} + A^{m,k}\rho^{m,k}_{\eta} + B^{m,k}\rho^{m,k} +$$
$$+ 6\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k}_{\eta} + w^{m-1,k}_{\eta})(w^{m,k})^3 S^{m,k}_{\eta} +$$
$$+ 6\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2((w^{m,k})^2 + w^{m,k}w^{m-1,k} + (w^{m-1,k})^2)(w^{m-1,k})^2 S^{m,k} +$$
$$+ S^{m,k}\left[\frac{\left(w^{m,k} + w^{m-1,k}\right)\left(\nu + D^{m-1,k}\left((w^{m,k})^2 + \left(w^{m-1,k}\right)^2\right)\right)}{\left(\nu + D^{m-1,k}(w^{m-1,k})^2\right)(w^{m-1,k})^2} \times\right.$$
$$\times \Big(\rho^{m-1,k} + \eta kh V^{m-1,k} r^{m-1,k} - A^{m-1,k} z^{m-1,k} - B^{m-1,k} w^{m-1,k} -$$
$$\left. - E^{m-1,k}(w^{m-1,k})^3 (z^{m-1,k})^2\Big)\right] < 0.$$

при $0 \leq \eta < 1$ и

$$S^{m,k}(1) = 0,$$
$$\left.\left(\nu S^{m,k}_{\eta} + 3\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k})^2 S^{m,k}_{\eta} - \frac{C^{m,k}S^{m,k}}{w^{m,k}w^{m-1,k}}\right)\right|_{\eta=0} < 0.$$

Из этих неравенств следует, что

$$S^{m,k} > 0, \qquad \rho^{m,k} \leq C_{14} kh w^{m,k} \leq C_{15} kh(1-\eta)\sigma$$

при $kh \leq \min(\xi_1, \xi_2)$, где C_{15} зависит от данных задачи, если $S^{m-1,k} \geq 0$ и $S^{m,k-1} \geq 0$. Полагаем $C_6 = C_{14}$, причем выбираем $C_{15} \geq C_{13}$.

Для $T^{m,k}(-C_{16}w)$, $C_{16}=const>0$, имеем

$$T^{m,k}(-C_{16}w)=$$

$$= -C_{16}w^{m,k}\left[\frac{\left(w^{m,k}+w^{m-1,k}\right)\left(\nu+D^{m-1,k}\left((w^{m,k})^2+\left(w^{m-1,k}\right)^2\right)\right)}{\left(\nu+D^{m-1,k}(w^{m-1,k})^2\right)(w^{m-1,k})^2}\times\right.$$

$$\times\left(\rho^{m-1,k}+\eta khV^{m-1,k}r^{m-1,k}-A^{m-1,k}z^{m-1,k}-B^{m-1,k}w^{m-1,k}-\right.$$

$$\left.\left.-E^{m-1,k}(w^{m-1,k})^3(z^{m-1,k})^2\right)\right]-C_{16}\Big(6\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k})^3w_\eta^{m-1,k}w_\eta^{m,k}+$$

$$+6\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2((w^{m,k})^2+w^{m,k}w^{m-1,k}+(w^{m-1,k})^2)(w_\eta^{m-1,k})^2w^{m,k}\Big)+$$

$$-\eta kh\frac{V^{m,k}-V^{m-1,k}}{h}r^{m-1,k}+3\nu d(kh)^2\frac{(V^{m,k})^2-(V^{m-1,k})^2}{h\left(\nu+D^{m-1,k}(w^{m-1,k})^2\right)}(w^{m-1,k})^2\times$$

$$\times\left(\rho^{m-1,k}+\eta khV^{m-1,k}r^{m-1,k}-A^{m-1,k}z^{m-1,k}-B^{m-1,k}w^{m-1,k}-\right.$$

$$\left.-E^{m-1,k}(w^{m-1,k})^3(z^{m-1,k})^2\right)+\frac{(E^{m,k})^2-(E^{m-1,k})^2}{h}(w^{m-1,k})^3(w_\eta^{m-1,k})^2+$$

$$+z^{m-1,k}\frac{A^{m,k}-A^{m-1,k}}{h}+w^{m-1,k}\frac{B^{m,k}-B^{m-1,k}}{h}.$$

Так как

$$\left|\frac{A^{m,k}-A^{m-1,k}}{h}\right|\le M_{13}kh,\qquad\left|\frac{B^{m,k}-B^{m-1,k}}{h}\right|\le M_{14}kh,$$

$$\left|\frac{V^{m,k}-V^{m-1,k}}{h}\right|\le M_{12}kh,$$

то $T^{m,k}(-C_{16}w)>0$ при $kh\le\xi_3$, если $C_{16}>1$. Далее

$$\Gamma^{m,k}(-C_{16}w)=\left[-C_{16}\left(v_0-\frac{C^{m,k}}{w^{m,k}}-\frac{C^{m,k}}{w^{m-1,k}}\right)-\frac{v_0^{m,k}-v_0^{m-1,k}}{h}+\right.$$

$$-3\nu C_{16}d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k}+w^{m-1,k})w_\eta^{m-1,k}w^{m,k}+\frac{C^{m,k}-C^{m-1,k}}{hw^{m-1,k}(0)}+$$

$$\left.\left.+3\nu d(kh)^2\frac{(V^{m,k})^2-(V^{m-1,k})^2}{h}(w^{m-1,k})^2w_\eta^{m-1,k}\right]\right|_{\eta=0}>0,$$

если C_{16} достаточно велико и $kh \le \xi_4$; здесь использовали неравенства $|v_0| \le M_{16}$, $U_x = \big(V + \xi V_x\big) > 0$. Из неравенств

$$T^{m,k}(-C_{16}w) - T^{m,k}(\rho) > 0 \quad \text{при} \quad 0 \le \eta < 1,$$

$$\Gamma^{m,k}(-C_{16}w) - \Gamma^{m,k}(\rho) > 0$$

вытекает, что

$$\rho^{m,k} \ge -C_{16}w^{m,k}, \qquad \rho^{m,k} \ge -C_{17}(1-\eta)\sigma$$

при $kh \le \min(\xi_3, \xi_4)$, где $C_{17} > C_{12}$ и зависит от данных задачи (3.2.2), (3.2.3). В неравенстве (3.3.13) возьмем $C_5 = C_{17}$. Оценка (3.3.13) доказана.

Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство леммы 2.4.4 главы 2.

$\square$

3.3.5 Доказательство теоремы

Доказательство теоремы 3.3.1. Доказательство существования решения задачи повторяет доказательство теоремы о существовании решения задачи в декартовых переменных 2 главы.

Установим единственность решений. Предположим противное: пусть w_1 и w_2 — два решения задачи (3.2.2), (3.2.3) с указанными свойствами. Тогда применим $\overline{w} = w_1 - w_2$ к каждому слагаемому уравнений (3.2.2), (3.2.3) и разделим результат на w_1 и получим уравнение

$$\begin{gathered}\nu w_1 \overline{w}_{\eta\eta} + 3\nu d\xi^2 V^2 w_1^3 \overline{w}_{\eta\eta} - \frac{\overline{w}_\tau}{w_1} - \eta\xi V \frac{\overline{w}_\xi}{w_1} + A\frac{\overline{w}_\eta}{w_1} + B\frac{\overline{w}}{w_1} + \\ +6\nu d\xi^2 V^2 w_1^2 \overline{w}_\eta + 3\nu d\xi^2 V^2 \frac{(w_1 + w_2)(w_1^2 + w_2^2)}{w_1} w_{2\eta\eta}\overline{w} \\ +\nu\frac{(w_1 + w_2)}{w_1} w_{2\eta\eta}\overline{w} + 6\nu d\xi^2 V^2 \frac{(w_1^2 + w_1 w_2 + w_2^2)}{w_1} w_{2\eta}^2 \overline{w},\end{gathered} \tag{3.3.20}$$

а также граничные условия

$$\left(\nu\overline{w}_\eta + 3\nu d\xi^2 V^2 w_1^2 \overline{w}_\eta + 3\nu d\xi^2 V^2 (w_1 + w_2) w_{2\eta} \overline{w} - \frac{C\overline{w}}{w_1 w_2}\right)\Big|_{\eta=0} = 0. \tag{3.3.21}$$

Умножим (3.3.20) на $\overline{w}e^{-\alpha\tau-\beta\eta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, и проинтегрируем по $\Delta_T = \{0 < \tau < T, 0 < \xi < X, 0 < \eta < 1\}$. Преобразуем некоторые члены интегрированием по частям. Имеем

$$\int\limits_{\Delta} \nu w_1 \overline{w}_{\eta\eta} \overline{w} e^{-\alpha\tau-\beta\eta} d\tau d\xi d\eta = -\int\limits_{\eta=0} \nu w_1 \overline{w}_{\eta\eta} \overline{w} e^{-\alpha\tau-\beta\eta} d\tau d\xi -$$

$$-\int\limits_{\Delta} \nu w_{1\eta} \overline{w}_\eta \overline{w} e^{-\alpha\tau-\beta\eta} d\tau d\xi d\eta - \int\limits_{\Delta} \nu w_1 \overline{w}_\eta^2 e^{-\alpha\tau-\beta\eta} d\tau d\xi d\eta +$$

$$+\int\limits_{\Delta} \nu\beta w_1 \overline{w}_\eta \overline{w} e^{-\alpha\tau-\beta\eta} d\tau d\xi d\eta = -\int\limits_{\eta=0} \nu w_1 \overline{w}_{\eta\eta} \overline{w} e^{-\alpha\tau-\beta\eta} d\tau d\xi +$$

$$+\frac{\nu}{2}\int\limits_{\eta=0} w_{1\eta} \overline{w}^2 e^{-\alpha\tau} d\tau d\xi + \frac{\nu}{2}\int_{\Delta} w_{1\eta\eta} \overline{w}^2 e^{-\alpha\tau-\beta\eta} d\tau d\xi d\eta -$$

$$-\frac{\nu}{2}\beta \int_{\eta=0} w_1 \overline{w}^2 e^{-\alpha\tau-\beta\eta} d\tau d\xi - \nu\beta \int\limits_{\Delta} w_{1\eta} \overline{w}^2 e^{-\alpha\tau-\beta\eta} d\tau d\xi d\eta +$$

$$+\frac{\nu}{2}\beta^2 \int\limits_{\Delta} w_1 \overline{w}^2 e^{-\alpha\tau-\beta\eta} d\tau d\xi d\eta - \int\limits_{\Delta} \nu w_1 \overline{w}_\eta^2 e^{-\alpha\tau-\beta\eta} d\tau d\xi d\eta.$$

Проинтегрировав оставшиеся слагаемые подобным образом, получаем

$$\int\limits_{\Delta_T} \Big[-\nu w_1(\overline{w}_\eta)^2 - 3\nu d\xi^2 w_1^3(\overline{w}_\eta)^2 + \Big(\frac{\nu}{2}w_{1\eta\eta} - \nu\beta w_{1\eta} + \frac{\nu}{2}\beta^2 w_1 -$$

$$-9\beta\nu d\xi^2 V^2 w_1^2 w_{1\eta} + \frac{3}{2}\beta^2\nu d\xi^2 V^2 w_1^3 + 9\nu d\xi^2 V^2 w_1 w_{1\eta}^2 + \frac{9}{2}\nu d\xi^2 V^2 w_1^2 w_{1\eta\eta} -$$

$$-3\beta\nu d\xi^2 V^2 w_1 w_{1\eta} + \frac{3}{2}\beta^2\nu d\xi^2 V^2 w_1^2\Big)(\overline{w})^2\Big] e^{-\alpha\tau-\beta\eta} d\tau d\xi d\eta +$$

$$+\int\limits_{\eta=0} \Big[-\nu w_1\overline{w}_\eta\overline{w} - 3\nu d\xi^2 V^2 w_1^3\overline{w}_\eta\overline{w} + \Big(\frac{\nu}{2}w_{1\eta} - \frac{\nu}{2}\beta w_1 - \frac{9}{2}\nu d\xi^2 V^2 w_1 w_{1\eta} -$$

$$-\frac{3}{2}\beta\nu d\xi^2 V^2 w_1^3 - \frac{3}{2}\beta\nu d\xi^2 V^2 w_1^2 - 3\nu d\xi^2 V^2 w_1^2\Big)(\overline{w})^2\Big] e^{-\alpha\tau} d\tau d\xi +$$

$$+\int\limits_{\Delta_T} \Big[\nu\frac{w_1+w_2}{w_1}w_{2\eta\eta} + 3\nu d\xi^2 V^2\frac{(w_1+w_2)(w_1^2+w_2^2)}{w_1}w_{2\eta\eta} - \frac{w_{\xi_\tau}}{2w_1^2} - \frac{\alpha}{2w_1} +$$

$$+\frac{\eta(\xi V)_\xi}{2w_1} - \eta\xi V\frac{w_{1\xi}}{2w_1^2} - \frac{A_\eta}{2w_1} + \frac{Aw_{1\eta}}{2w_1^2} + \frac{\beta A}{2w_1} + \frac{B}{w_1} +$$

$$+6\nu d\xi^2 V^2\frac{(w_1^2+w_1w_2+w_2^2)}{w_1}w_{2\eta}^2\Big](\overline{w})^2 e^{-\alpha\tau-\beta\eta} d\tau d\xi d\eta -$$

$$-\int\limits_{\tau=T} \frac{\overline{w}^2 e^{-\alpha\tau-\beta\eta}}{2w_1} d\xi d\eta - \int\limits_{\xi=X} \eta\xi V\frac{\overline{w}^2 e^{-\alpha\tau-\beta\eta}}{2w_1} d\tau d\eta - \int\limits_{\eta=0} A\frac{\overline{w}^2 e^{-\alpha\tau}}{2w_1} d\tau d\xi = 0.$$

Первые два слагаемых во втором интеграле по границе Δ_T можно записать, используя граничное условие (3.3.21) при $\eta = 0$, домножив его на $w_1\overline{w}e^{-\alpha\tau-\beta\eta}$. Тогда выбрав β достаточно большим, получаем, что сумма всех интегралов, взятых по границе Δ_T, неположительна. Поскольку $\Big|w_1 w_{1\eta}^2\Big| \le \dfrac{M_{24}}{w_1}$, $\quad \Big|w_1 w_{1\eta}\Big| \le M_{25}(1-\eta)\sigma$, то выбрав α достаточно большим, получим, что сумма всех интегралов, взятых по Δ_T, неположительна. Поэтому $\overline{w} = 0$ почти всюду. Так как $\overline{w}$ — непрерывная функция, то $\overline{w} \equiv 0$ и $w_1 = w_2$.

$\square$

§ 3.4. Теорема существования и единственности задачи в декартовых переменных

Обращая преобразование переменных (3.2.1), что возможно в силу свойств решения задачи (3.2.2), (3.2.3), получаем основной результат о существовании и единственности классического решения задачи (3.1.1), (3.1.2) в смысле данного нами определения.

Теорема 3.4.1. *Предположим, что*

$$U(t,x) = x\big(a + xa_1(t,x)\big), \qquad v_0(t,x) = b + xb_1(t,x),$$

где $a = const > 0$, $b = const$; $U(t,x) > 0$ *при* $x > 0$; $a_1(t,x)$, $a_{1x}(t,x)$, $a_{1xx}(t,x)$, $b_1(t,x)$, $b_{1x}(t,x)$ *ограничены при* $0 \le t < \infty$, $0 \le x \le X$. *Пусть* $u_1(x,y)$ *такова, что* $w_0(\xi,\eta) = \dfrac{u_{1y}}{U}$ *удовлетворяет следующим условиям:* $U_x > 0$ *при* $0 \le x \le X$; *функции* V, V_x, v_0 *ограничены,* $\dfrac{V_t}{V} \le M_1kh$ *и* $M_2(1-\eta) \le w_0(\xi,\eta) \le M_3(1-\eta)\sigma$, *где* $\sigma = \sqrt{-\ln\mu(1-\eta)}$, *и* $w_0(\xi,\eta)$ *имеет непрерывную производную по* $\eta \in [0,1)$.

Тогда при некотором X, *зависящем от функций* U, u_1, v_0, *задача* (3.1.1), (3.1.2) *в области* Q *имеет единственное решение* u, v, *которое обладает следующими свойствами:* $u > 0$ *при* $y > 0$ *и* $x > 0$; $\dfrac{u}{U}$, $\dfrac{u_y}{U}$ *ограничены и непрерывны в* $\overline{Q}$; $u_y > 0$ *при* $y \ge 0$; $u(t,x,y) \to U(t,x)$ *при* $y \to \infty$, $\dfrac{u_y(t,x,y)}{U(t,x)} \to 0$ *при* $y \to \infty$; u_x, u_y, u_{yy}, u_t, v_y, *ограничены и непрерывны в* Q *по* y; v *непрерывна в* $\overline{Q}$ *по* y *и ограничена при ограниченных* y; *уравнения* (3.1.1) *выполняются почти всюду в* Q; *имеют место оценки*

$$U(x)Y\left(\frac{u}{U}\right)e^{-C_1x} \le u_y \le U(x)Y\left(\frac{u}{U}\right)e^{C_2x},$$

$$Y_\eta\left(\frac{u}{U}\right)e^{C_4x} \le \frac{u_{yy}}{u_y} \le Y_\eta\left(\frac{u}{U}\right)e^{-C_5x},$$

$$\exp\Big[-\frac{M_1^2}{4}y^2e^{2C_2x}\Big] \le 1-\frac{u}{U} \le \exp\Big[-\frac{M_1^2}{4}y^2e^{-2C_1x}\Big].$$

где $Y(\eta)$ *— решение задачи* (2.3.12), (2.3.13).

Доказательство теоремы 3.4.1. Покажем, что если $w(\tau,\xi,\eta)$ имеет свойства, указанные в теореме (3.3.1), то можно с помощью замены (3.2.1) перейти от решения задачи (3.2.2), (3.2.3) к решению задачи (3.1.1), (3.1.2), существование которого утверждается в искомой теореме (3.4.1). Легко видеть, что при условиях теоремы (3.4.1) для $w(\xi,\eta)=\dfrac{u_y}{U}$ будут выполнены все предположения теоремы (3.3.1), и, следовательно, решение w задачи (3.2.2), (3.2.3) с требуемыми свойствами существует. Согласно (3.2.1) имеем

$$w(\tau,\xi,\eta)=w(t,x,\frac{u}{U})=\frac{u_y}{U}, \tag{3.4.1}$$

$$y=\int\limits_0^{\frac{u(t,x,y)}{U(t,x)}}\frac{ds}{w(t,x,s)}. \tag{3.4.2}$$

Отсюда, учитывая непрерывность $w(\tau,\xi,\eta)$ по τ, ξ, η, приходим к заключению, что $\dfrac{u(t,x,y)}{U(t,x)}$ непрерывна и ограничена в $\overline{Q}$, $u(t,x,0)=0$, $u(t,0,y)=0$, $u(t,x,y)\to U(t,x)$ при $y\to\infty$, u_y ограничена и непрерывна, $u_y>0$ при $y\ge 0$, $x\ge 0$.

Из (3.4.1), (3.4.2) находим, что

$$\begin{gathered} u_y=wU;\quad u_{yy}=w_\eta u_y;\quad u_{yyy}=w_{\eta\eta}\frac{u_y^2}{U}+w_\eta u_{yy};\\ u_{ty}=w_\tau U+wU_t+u_tw_\eta-uw_\eta\frac{U_t}{U};\\ u_{xy}=Uw_\xi+wU_x+u_xw_\eta-uw_\eta\frac{U_x}{U};\\ u_t=u\frac{U_t}{U}+wU\int\limits_0^{\frac{u(t,x,y)}{U(t,x)}}\frac{w_\tau}{w^2}ds,\quad u_x=u\frac{U_x}{U}+wU\int\limits_0^{\frac{u(t,x,y)}{U(t,x)}}\frac{w_\xi}{w^2}ds. \end{gathered} \tag{3.4.3}$$

Из свойств функции w и ее производных ввиду равенств (3.4.3) следует, что обобщенные производные u_t, u_x, $u_t x$, $u_x y$, u_{yy}, u_{yyy} ограничены в Q. Неравенства для u, утверждаемые теоремой (3.4.1), следуют из оценок функций w, w_τ, w_ξ, w_η и $ww_{\eta\eta}$. Непрерывность u_t, u_x и u_{yy} по y следует из (3.4.3). Функцию $v(t,x,y)$ определим равенством

$$v = \frac{1}{u_y}\Big(- u_t - uu_x + \nu u_{yy}\big(1 + 3du_y^2\big) + UU_x + U_t\Big). \tag{3.4.4}$$

Покажем, что u и v, определенные формулами (3.4.2), (3.4.4), удовлетворяют системе (3.1.1) и условиям (3.1.2).

Функция v имеет производную по y в Q. Дифференцируя (3.4.4) по y, получим

$$\begin{gathered} v_y u_y + vu_{yy} + u_{ty} + u_y u_x + uu_{xy} - \nu u_{yyy} - 6\nu du_y u_{yy}^2 - 3\nu du_y^2 u_{yyy} = 0, \\ v_y u_y + \frac{u_{yy}}{u_y}\Big(- u_t - uu_x + \nu u_{yy}\big(1 + 3du_y^2\big) + UU_x + U_t\Big) + u_{ty} + u_y u_x + \\ + uu_{xy} - \nu u_{yyy} - 6\nu du_y u_{yy}^2 - 3\nu du_y^2 u_{yyy} = 0. \end{gathered} \tag{3.4.5}$$

Функция $w(\xi,\eta) = \dfrac{u_y}{U}$ удовлетворяет уравнению (3.2.2). Заменяя в уравнении (3.2.2) производные w через производные от u, находим, что

$$\begin{gathered} \frac{1}{U}\Big\{\nu\big(1 + 3du_y^2\big)\frac{u_{yyy}u_y - u_{yy}^2}{u_y} - \frac{u_{ty}u_y - u_t u_{yy}}{u_y} - \frac{U_t(uu_y y - u_y^2)}{Uu_y} - \\ - \frac{u(u_{xy}u_y - u_x u_{yy})}{u_y} - \frac{uU_x(uu_{yy} - u_y^2)}{Uu_y} + \frac{(u^2 - U^2)U_x}{U}\frac{u_{yy}}{u_y} + \\ + \frac{(u - U)U_t}{U}\frac{u_{yy}}{u_y} + uu_y - \frac{u_y(uU_x + U_t)}{U} + 6\nu du_{yy}^2 u_y\Big\} = 0. \end{gathered} \tag{3.4.6}$$

Умножив (3.4.6) на U и складывая равенства (3.4.5) и (3.4.6), получим

$$u_x + v_y = 0. \tag{3.4.7}$$

Уравнения (3.4.4), (3.4.7) представляют систему (3.1.1). Покажем, что $v(t,x,y)$ удовлетворяет условию $v(t,x,0) = v_0(t,x)$.

Из (3.2.3) следует, что

$$v_0 = \left[\frac{1}{w}\left(\nu(1+3dU^2w^2)ww_\eta + U_x + \frac{U_t}{U}\right)\right]\Bigg|_{\eta=0}. \qquad (3.4.8)$$

Из равенств (3.4.4), (3.4.8) получаем $v(t,x,0) = \left[\frac{1}{u_y}\left(\nu(1+3du_y^2)u_{yy} + UU_x + U_t\right)\right]\Big|_{y=0} = \left[\frac{1}{w}\left(\nu(1+3dU^2w^2)ww_\eta + U_x + \frac{U_t}{U}\right)\right]\Big|_{\eta=0} = v_0$. Здесь мы использовали непрерывность функций u, u_t, u_x, u_y, u_{yy} по y при $y=0$, а также непрерывность w и ww_η по η. Как следует из (3.4.6), функция v, определенная равенством (3.4.4), непрерывна в $\overline{Q}$ по y и ограничена при ограниченных y; v_y ограничена в Q, так как $v_y = -u_x$, а $\dfrac{u}{U}$ и u ограничены.

Выведем асимптотическую формулу для отношения $\dfrac{u(x,y)}{U(x)}$ при $y \to \infty$. Используя оценки функций $w(\xi,\eta)$ из теоремы (3.3.1) и оценки $Y(\eta)$ из леммы 2.3.2, получаем при $\eta_0 \le \eta \le 1$ неравенства

$$M_1(1-\eta)(\sigma - C_4)e^{-C_1x} \le w(\tau,\xi,\eta) \le M_1(1-\eta)\sigma e^{C_2x}.$$

Это приводит к неравенствам

$$M_1\Big(1-\frac{u}{U}\Big)\Big(\sigma\Big(\frac{u}{U}\Big) - C_4\Big)e^{-C_1x} \le \frac{u_y}{U} \le M_1\Big(1-\frac{u}{U}\Big)\sigma\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{C_2x}.$$

Из того, что $\sigma_y = \dfrac{\frac{u_y}{U}}{2\Big(1-\frac{u}{U}\Big)\sigma}$, получаем

$$\frac{u_y}{U} \le M_1\Big(1-\frac{u}{U}\Big)\sigma\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{C_2x},\ \ \frac{2u_y}{2UM_1\Big(1-\frac{u}{U}\Big)\sigma e^{C_2x}} \le 1,\ \ \frac{2\sigma_y}{M_1e^{C_2x}} \le 1,$$

$$M_1\Big(1-\frac{u}{U}\Big)\Big(\sigma\Big(\frac{u}{U}\Big) - C_4\Big)e^{-C_1x} \le \frac{u_y}{U},\ \ 1 \le \frac{u_y}{UM_1\Big(1-\frac{u}{U}\Big)(\sigma - C_4)e^{-C_1x}},$$

$$1 \le \frac{2u_y\sigma}{2UM_1\Big(1-\frac{u}{U}\Big)(\sigma - C_4)e^{-C_1x}\sigma}, \qquad\qquad 1 \le \frac{2\sigma\sigma_y}{M_1(\sigma - C_4)e^{-C_1x}},$$

откуда $\dfrac{2\sigma_y}{M_1 e^{C_2 x}} \le 1 \le \dfrac{2\sigma\sigma_y}{M_1(\sigma - C_4)e^{-C_1 x}}$.

Интегрируя последние неравенства по y от y_0, соответствующего η_0, до произвольного $y \in (y_0, \infty)$, получаем

$$\frac{2(\sigma-\sigma_0)}{M_1 e^{C_2 x}} \le y - y_0 \le \frac{2(\sigma-\sigma_0)}{M_1 e^{-C_1 x}} + \frac{2C_4}{M_1 e^{-C_1 x}}[\ln(\sigma - C_4) - \ln(\sigma_0 - C_4)],$$

где $\sigma = \sqrt{-\ln \mu(1-\frac{u}{U})}$, $\sigma_0 = \sigma\big|_{y=y_0}$.

Из этих неравенств находим

$$\frac{(y-y_0)M_1 e^{-C_1 x}}{2} - C_4 \ln\left(1 + \frac{(y-y_0)M_1 e^{C_2 x}}{2(\sigma_0 - C_4)}\right) + \sigma_0 \le \sigma \le$$
$$\le \frac{(y-y_0)M_1 e^{C_2 x}}{2} + \sigma_0$$

и, следовательно,

$$-\frac{y^2 M_1^2 e^{2C_2 x}}{4} + \frac{y y_0 M_1^2 e^{2C_2 x}}{2} - \frac{y_0^2 M_1^2 e^{2C_2 x}}{4} + \ln\left(1 - \frac{u(x,y_0)}{U(x)}\right) -$$
$$-(y-y_0)M_1 e^{C_2 x}\sigma_0 \le \ln\left(1 - \frac{u}{U}\right) \le -\frac{y^2 M_1^2 e^{-2C_1 x}}{4} + \frac{y y_0 M_1^2 e^{-2C_1 x}}{2} -$$
$$-\frac{y_0^2 M_1^2 e^{-2C_1 x}}{4} + \ln\left(1 - \frac{u(x,y_0)}{U(x)}\right) - (y-y_0)M_1 e^{-2C_1 x}\sigma_0 -$$
$$-\left[M_1 C_4 (y-y_0)e^{-C_1 x} + C_4^2 \ln\left(1 + \frac{(y-y_0)M_1 e^{C_2 x}}{2(\sigma - C_4)}\right) + 2\sigma C_4\right] \times$$
$$\times \ln\left(1 + \frac{(y-y_0)M_1 e^{C_2 x}}{2(\sigma - C_4)}\right),$$

что приводит к соотношению

$$e^{\left[-\frac{U(0)}{2\nu} y^2 e^{2C_2 x} + O(y)\right]} \le 1 - \frac{u}{U} \le e^{\left[-\frac{U(0)}{2\nu} y^2 e^{-2C_1 x} + O(y \ln y)\right]} \quad \text{при} \quad y \to \infty,$$

где $M_1^2 = \dfrac{2a}{\nu}$, $a = U_x(0)$. Данные неравенства доказывают справедливость формулы $e^{\left[-\frac{M_1^2}{4} y^2 e^{2C_2 x}\right]} \le 1 - \dfrac{u}{U} \le e^{\left[-\frac{M_1^2}{4} y^2 e^{-2C_1 x}\right]}$.

С помощью теоремы 3.3.1 мы получим единственность решения задачи (3.1.1), (3.1.2) в том классе функций u и v, которые позволяют с помощью преобразования (3.2.1) перейти от u и v к функции w, удовлетворяющей уравнению (3.2.2) и условиям (3.2.3) и обладающей свойствами, указанными в теореме 3.3.1. Легко проверить, что решение u, v задачи (3.1.1), (3.1.2), обладающее свойствами, указанными в искомой теореме 3.3.1 принадлежит этому классу. Для этого мы дифференцируем первое уравнение системы (3.1.1) и переходим в этом уравнении к функции w. Последнее из условий (3.2.3) означает выполнение первого из уравнений системы (3.1.1) при $y = 0$ в силу непрерывности по y всех величин, входящих в это уравнение.

Теорема доказана. $\square$

§ 3.5. Устойчивость решений системы уравнений пограничного слоя

Нами получены условия, при которых решение системы уравнений пограничного слоя существует при $0 \leq t < \infty$. Для таких решений, существующих на бесконечном интервале времени, возникает вопрос об их устойчивости при определенных изменениях начальных данных и параметров рассматриваемой системы уравнений. Пусть $u(t,x,y)$, $v(t,x,y)$ — решения задачи (3.1.1), (3.1.2) в области $Q = \{0 < t < \infty, 0 < x < X, 0 < y < \infty$, соответствующее заданным функциям $U = xV$, v_0, u_1, и пусть $\widetilde{u}(t,x,y)$, $\widetilde{v}(t,x,y)$ — решение той же задачи, соответствующее функциям $x\widetilde{V}$, $\widetilde{v}_0$, $\widetilde{u}_0$. Будем предполагать, что эти решения обладают свойствами, указанными в теореме 3.1.2. Для исследования устойчивости решений системы Прандтля оценим разность $|u - \widetilde{u}|$ по абсолютной величине.

Сначала докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 3.5.1. *Пусть w и $\widetilde{w}$— два решения задачи (3.2.2), (3.2.3), соответствующие заданным функциям xV, v_0, u_1 и $x\widetilde{V}$, $\widetilde{v}_0$, $\widetilde{u}_0$. Предположим, что для этих данных выполнены условия теоремы суще-*

ствования 3.3.1. Тогда

$$|w - \widetilde{w}| \le N_1 + N_2 e^{\alpha\tau}, \tag{3.5.1}$$

где N_1, N_2 *— положительные постоянные,*

$$N_1 = \frac{c_0}{M_{26}} \max\Big(2|V - \widetilde{V}| + x|V_x - \widetilde{V}_x| + \left|\frac{V_t}{V} - \frac{\widetilde{V}_t}{\widetilde{V}}\right| + |B - \widetilde{B}| +$$
$$+ 3\nu d|V^2 - \widetilde{V}^2|\Big) + c_1 \max\big(x^2\Big|V^2 - \widetilde{V}^2\Big||\widetilde{w}|^2|\widetilde{w}_\eta|x^2 +$$
$$+ c_2 \max|v_0 - \widetilde{v}_0| + c_3 \max|C - \widetilde{C}| + 6\nu d|V^2 - \widetilde{V}^2|,$$

$$N_2 = \max|w - \widetilde{w}|\big|_{\tau=0},$$

$$c_1 = c_2 = \frac{\max|w\widetilde{w}|}{\min(3\nu d\xi^2 V^2(w + \widetilde{w})w\widetilde{w}\widetilde{w}_\eta - C)},$$
$$c_3 = \frac{\max w}{\min(3\nu d\xi^2 V^2(w + \widetilde{w})w\widetilde{w}\widetilde{w}_\eta - C)},$$

α, c_0 *— положительные постоянные, зависящие от* V, v_0, u_1, $\dfrac{V_t}{V}$, $\widetilde{V}$, $\widetilde{v}_0$, $\widetilde{u}_1$, $\dfrac{\widetilde{V}_t}{\widetilde{V}}$, *и их величина определяется лишь постоянной, ограничивающей эти функции и их производные первого порядка.*

Доказательство. Согласно теореме 3.3.1 функции w и $\widetilde{w}$ удовлетворяют уравнению (3.1.1) почти всюду в Δ, поэтому невозможно непосредственно воспользоваться принципом максимума для оценки $w - \widetilde{w}$. В силу теоремы единственности w и $\widetilde{w}$ можно получить как предел при $h \to 0$ равномерно сходящейся последовательности решений системы уравнений (3.3.1) с условиями (3.3.2). Оценим разность $S^{m,k} = w^{m,k} - \widetilde{w}^{m,k}$ соответствующих решений задачи (3.3.1), (3.3.2). Для $S^{m,k}$

получим уравнение

$$\nu(w^{m,k})^2 S^{m,k}_{\eta\eta} + 3\nu d(kh)^2 (V^{m,k})^2 (w^{m,k})^4 S^{m,k}_{\eta\eta} - \frac{S^{m,k} - S^{m-1,k}}{h} -$$
$$- \eta kh V^{m,k} \frac{S^{m,k} - S^{m,k-1}}{h} + A^{m,k} S^{m,k}_{\eta} + B^{m,k} S^{m,k} +$$
$$+ 6\nu d(kh)^2 (V^{m,k})^2 (w^{m,k})^3 \big(w^{m,k}_{\eta} + \widetilde{w}^{m,k}_{\eta}\big) S^{m,k}_{\eta} +$$
$$+ \nu\big(w^{m,k} + \widetilde{w}^{m,k}\big) \widetilde{w}^{m,k}_{\eta\eta} S^{m,k} +$$
$$+ 3d(kh)^2 (V^{m,k})^2 \big((w^{m,k})^2 + (\widetilde{w}^{m,k})^2\big)\big(w^{m,k} + \widetilde{w}^{m,k}\big) \widetilde{w}^{m,k}_{\eta\eta} S^{m,k} +$$
$$+ 6\nu d(kh)^2 (V^{m,k})^2 \big((w^{m,k})^2 + w^{m,k}\widetilde{w}^{m,k} + (\widetilde{w}^{m,k})^2\big)(\widetilde{w}^{m,k}_{\eta})^2 S^{m,k} +$$
$$+ F^{m,k} = 0,$$

где

$$F^{m,k} = -\eta kh(V^{m,k} - \widetilde{V}^{m,k})\widetilde{r}^{m,k} + \big(A^{m,k} - \widetilde{A}^{m,k}\big)\widetilde{w}^{m,k}_{\eta} +$$
$$+ \big(B^{m,k} - \widetilde{B}^{m,k}\big)\widetilde{w}^{m,k} + 3\nu d(kh)^2 \big((V^{m,k})^2 - (\widetilde{V}^{m,k})^2\big)(\widetilde{w}^{m,k})^4 \widetilde{w}^{m,k}_{\eta\eta} +$$
$$+ 6\nu d(kh)^2 \big((V^{m,k})^2 - (\widetilde{V}^{m,k})^2\big)(\widetilde{w}^{m,k})^3 \widetilde{w}^{m,k}_{\eta},$$

а граничные условия для $S^{m,k}$ будут иметь вид

$$S^{m,k}(1) = 0, \qquad S^{0,k} = w^{0,k} - \widetilde{w}^{0,k},$$

$$\Bigg(\nu S^{m,k}_{\eta} + 3\nu d(kh)^2 (V^{m,k})^2 (w^{m,k})^2 S^{m,k}_{\eta} + 3\nu d(kh)^2 (V^{m,k})^2 (w^{m,k} +$$
$$+ \widetilde{w}^{m,k})\widetilde{w}^{m,k}_{\eta} S^{m,k} - \frac{C^{m,k} S^{m,k}}{\widetilde{w}^{m,k} w^{m,k}} + 3\nu d(kh)^2 \big((V^{m,k})^2 -$$
$$-(\widetilde{V}^{m,k})^2\big)(\widetilde{w}^{m,k})^2 \widetilde{w}^{m,k}_{\eta} - \big(v^{m,k}_0 - \widetilde{v}^{m,k}_0\big) + \frac{C^{m,k} - \widetilde{C}^{m,k}}{\widetilde{w}^{m,k}}\Bigg)\Bigg|_{\eta=0} = 0.$$

Покажем, что $N_1 + N_2 e^{-\alpha\tau} \pm S^{m,k} \geq 0$ в Δ.

Введем обозначения:$H \equiv N_1 + N_2 e^{-\alpha\tau}$,

$$
\begin{aligned}
&J^{m,k}(\Phi^{m,k}) \equiv \nu (w^{m,k})^2 \Phi^{m,k}_{\eta\eta} + 3\nu d (kh)^2 (V^{m,k})^2 (w^{m,k})^4 \Phi^{m,k}_{\eta\eta} - \\
&- \frac{\Phi^{m,k} - \Phi^{m-1,k}}{h} - \eta kh V^{m,k} \frac{\Phi^{m,k} - \Phi^{m,k-1}}{h} + A^{m,k}\Phi^{m,k}_{\eta} + \\
&+ 6\nu d (kh)^2 (V^{m,k})^2 (w^{m,k})^3 \big(w^{m,k}_{\eta} + \widetilde{w}^{m,k}_{\eta}\big)\Phi^{m,k}_{\eta} + \\
&+ \nu \big(w^{m,k} + \widetilde{w}^{m,k}\big)\widetilde{w}^{m,k}_{\eta\eta}\Phi^{m,k} + B^{m,k}\Phi^{m,k} + \\
&+ 3d (kh)^2 (V^{m,k})^2 \big((w^{m,k})^2 + (\widetilde{w}^{m,k})^2\big)\big(w^{m,k} + \widetilde{w}^{m,k}\big)\widetilde{w}^{m,k}_{\eta\eta}\Phi^{m,k} + \\
&+ 6\nu d (kh)^2 (V^{m,k})^2 \big((w^{m,k})^2 + w^{m,k}\widetilde{w}^{m,k} + (\widetilde{w}^{m,k})^2\big)(\widetilde{w}^{m,k}_{\eta})^2\Phi^{m,k},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&j^{m,k}(\Phi^{m,k}) \equiv \Bigg(\nu\Phi^{m,k}_{\eta} + 3\nu d (kh)^2 (V^{m,k})^2 (w^{m,k})^2 \Phi^{m,k}_{\eta} + \\
&+ 3\nu d (kh)^2 (V^{m,k})^2 (w^{m,k} + \widetilde{w}^{m,k})\widetilde{w}^{m,k}_{\eta}\Phi^{m,k} - \frac{C^{m,k}\Phi^{m,k}}{\widetilde{w}^{m,k} w^{m,k}}\Bigg)\Bigg|_{\eta=0}.
\end{aligned}
$$

Легко видеть, что

$$
\begin{aligned}
J^{m,k}(H) + |F^{m,k}| = \big(N_1 + N_2 e^{-\alpha\tau}\big)\Big(B^{m,k} + \nu\big(w^{m,k} + \widetilde{w}^{m,k}\big)\widetilde{w}^{m,k}_{\eta\eta} + \\
+3d (kh)^2 (V^{m,k})^2 \big((w^{m,k})^2 + (\widetilde{w}^{m,k})^2\big)\big(w^{m,k} + \widetilde{w}^{m,k}\big)\widetilde{w}^{m,k}_{\eta\eta} + \\
+6\nu d (kh)^2 (V^{m,k})^2 \big((w^{m,k})^2 + w^{m,k}\widetilde{w}^{m,k} + (\widetilde{w}^{m,k})^2\big)(\widetilde{w}^{m,k}_{\eta})^2\Big) + \\
+\alpha N_2 e^{-\alpha m h} e^{\alpha h'} + |F^{m,k}| < 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N_1 = \frac{c_0}{M_{26}} \max\Big(2|V - \widetilde{V}| + x|V_x - \widetilde{V}_x| + \left|\frac{V_t}{V} - \frac{\widetilde{V}_t}{\widetilde{V}}\right| + \\
+|B - \widetilde{B}| + 3\nu d |V^2 - \widetilde{V}^2|\Big),
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
c_0 \geq \max\big\{&|\widetilde{w}^{m,k}_{\eta\eta}|, |\widetilde{w}^{m,k}_{\eta}|, w^{m,k}, kh\widetilde{r}^{m,k}, \\
&(kh)^2 (\widetilde{w}^{m,k})^4 |\widetilde{w}^{m,k}_{\eta\eta}|, (kh)^2 (\widetilde{w}^{m,k})^3 |\widetilde{w}^{m,k}_{\eta}|\big\},
\end{aligned}
$$

$$\Big(B^{m,k} + \nu\big(w^{m,k} + \widetilde{w}^{m,k}\big)\widetilde{w}^{m,k}_{\eta\eta} +$$
$$+ 3\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2\big((w^{m,k})^2 + (\widetilde{w}^{m,k})^2\big)\big(w^{m,k} + \widetilde{w}^{m,k}\big)\widetilde{w}^{m,k}_{\eta\eta} +$$
$$+ 6\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2\big((w^{m,k})^2 + w^{m,k}\widetilde{w}^{m,k} + (\widetilde{w}^{m,k})^2\big)(\widetilde{w}^{m,k}_{\eta})^2\Big) < -M_{26},$$

$\alpha < M_{26}$, $0 < h' < h$, h достаточно мало, а также из того, что по теореме (2.4.1) $U(t,x) = x\big(a + xa_1(t,x)\big)$.

Кроме того

$$j^{m,k}(H) = \bigg[3\nu d(kh)^2(V^{m,k})^2(w^{m,k} + \widetilde{w}^{m,k})\widetilde{w}^{m,k}_{\eta}(N_1 + N_2e^{-\alpha\tau}) -$$
$$- \frac{C^{m,k}(N_1 + N_2e^{-\alpha\tau})}{\widetilde{w}^{m,k}w^{m,k}}\bigg]\bigg|_{\eta=0},$$

$$j^{m,k}(H) + \bigg[3\nu d(kh)^2\big((V^{m,k})^2 - (\widetilde{V}^{m,k})^2\big)(\widetilde{w}^{m,k})^2\widetilde{w}^{m,k}_{\eta} -$$
$$-\big(v_0^{m,k} - \widetilde{v}_0^{m,k}\big) + \frac{C^{m,k} - \widetilde{C}^{m,k}}{\widetilde{w}^{m,k}}\bigg]\bigg|_{\eta=0} < 0,$$

если h достаточно мало по теореме 3.4.1 $v_0(t,x) = b + xb_1(t,x)$, и

$$N_1 \geq c_1 \max\big(x^2\big|V^2 - \widetilde{V}^2\big||\widetilde{w}|^2|\widetilde{w}_\eta|x^2\big) + c_2\max|v_0 - \widetilde{v}_0| + c_3\max|C - \widetilde{C}|.$$

Поскольку $|S^{0,k}| \leq N_2$, $S^{m,k}(1) = 0$, то из неравенств

$$J^{m,k}\big(N_1 + N_2e^{-\alpha\tau} \pm S\big) < 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \eta < 1,$$

$$j^{m,k}\big(N_1 + N_2e^{-\alpha\tau} \pm S\big) < 0$$

и принципа максимума следует, что $|S^{m,k}| \leq N_1 + N_2e^{-\alpha mh}$ при достаточно малых h. Из этой оценки, переходя к пределу при $h \to 0$, получаем (3.5.1). Лемма доказана. □

Лемма 3.5.2. *Оценка*

$$\left|\frac{u}{V} - \frac{\widetilde{u}}{\widetilde{V}}\right| \leq \frac{xm_3}{m_1}\max\big|V - \widetilde{V}\big| + \frac{xm_2}{m_1}\big(N_1 + N_2e^{-\alpha t}\big) \qquad (3.5.2)$$

имеет место при $0 \le y \le y_0 < \infty$, *где*

$$m_1 = \min\Big\{\frac{1}{w}\Big\}, \qquad m_2 = \max\Big\{\frac{\max(w, \widetilde{w})}{w\widetilde{w}}\Big\},$$

постоянные α, N_1, N_2 *определены в лемме 3.5.1.*

Доказательство. По лемме 3.5.1 $|w - \widetilde{w}| \le N_1 + N_2 e^{-\alpha\tau}$. В силу преобразования (2.2.1) имеем равенство $y = \int\limits_0^{\frac{u}{xV}} \frac{ds}{w(t,x,s)}$,

из которого следует, что

$$\int\limits_0^{\frac{u(t,x,y)}{xV(t,x)}} \frac{ds}{w}(t,x,s) - \int\limits_0^{\frac{\widetilde{u}(t,x,y)}{x\widetilde{V}(t,x)}} \frac{ds}{\widetilde{w}}(t,x,s) = \int\limits_0^{\frac{\widetilde{u}(t,x,y)}{x\widetilde{V}(t,x)}} \frac{ds}{w(t,x,s)} +$$

$$+ \int\limits_{\frac{\widetilde{u}(t,x,y)}{x\widetilde{V}(t,x)}}^{\frac{u(t,x,y)}{xV(t,x)}} \frac{ds}{w}(t,x,s) - \int\limits_0^{\frac{\widetilde{u}(t,x,y)}{x\widetilde{V}(t,x)}} \frac{ds}{\widetilde{w}(t,x,s)} = 0.$$

Отсюда получаем неравенства

$$\frac{m_1}{x}\Big|\frac{u}{V} - \frac{\widetilde{u}}{\widetilde{V}}\Big| \le m_2\big|w - \widetilde{w}\big| \le m_2\big(N_1 + N_2 e^{-\alpha t}\big), \qquad (3.5.3)$$

где постоянные m_1, m_2 из предположения леммы. Из (3.5.3) следует (3.5.2). Лемма доказана. □

Имеют место утверждения.

Теорема 3.5.1. *Предположим, что функции*

$$V - \widetilde{V}, \qquad V_x - \widetilde{V}_x, \qquad \frac{V_t}{V} - \frac{\widetilde{V}_t}{\widetilde{V}}, \qquad v_0 - \widetilde{v}_0 \qquad (3.5.4)$$

равны нулю при $t \ge t_0 = const > 0$. *Тогда*

$$\Big|\frac{u}{V} - \frac{\widetilde{u}}{\widetilde{V}}\Big| \le xN_3 e^{-\alpha\tau} \qquad \text{в} \quad Q$$

при $0 \le y \le y_0 < \infty$, *где* α, N_3 — *положительные постоянные.*

Теорема 3.5.2. *Если функции* (3.5.4) *по модулю не превосходят* ε, *а функции* V, $\widetilde{V}$, u_1, $\widetilde{u}_0$ *таковы, что* $\left|w-\widetilde{w}\right|\Big|_{\tau=0} < \varepsilon$, *где* w, *и* $\widetilde{w}$ *— решения задачи* (3.2.2), (3.2.3), *соответствующие* V, v_0, u_1 *и* $\widetilde{V}$, $\widetilde{v}_0$, $\widetilde{u}_0$, *то*

$$\left|\frac{u}{V}-\frac{\widetilde{u}}{\widetilde{V}}\right| \le xN_4\varepsilon \qquad \text{в} \quad Q$$

при $y \le y_0 < \infty$ *и всех* $t \ge 0$, *где* N_4 *— положительная постоянная.*

Заметим, что $\left|w-\widetilde{w}\right|\Big|_{\tau=0}$ можно оценить через u_1, $\widetilde{u}_0$ и их производные. Имеем

$$\left|w-\widetilde{w}\right|\Big|_{\tau} = \left|\frac{u_{1y}(x,y)}{xV(0,x)} - \frac{\widetilde{u}_{0y}(x,y)}{x\widetilde{V}(0,x)}\right| = \frac{1}{xV(0,x)}\bigg|\big(u_{1y}(x,y)-\widetilde{u}_{0y}(x,y)\big)-$$

$$-\frac{\widetilde{u}_{0y}(x,y)}{x\widetilde{V}(1,x)}\Big(V-\widetilde{V}\Big)\bigg| \le \frac{1}{xV(0,x)}\bigg[\max\left|u_{1y}(x,y)-\widetilde{u}_{0y}(x,y)\right|-$$

$$-\max\frac{\widetilde{u}_{0y}(x,y)}{x\widetilde{V}(0,x)}\max\Big|V-\widetilde{V}\Big|\bigg].$$

Из данного неравенства и теорем 3.3.1, 3.4.1 следует доказательство теорем.

Литература

[1] Amaziane B. and Pankratov L. and Piatnitski A. The existence of weak solutions to immiscible compressible two–phase flow in porous media: the case of fields with different rock–types // Discrete Continuous and Dynamical Systems. Ser. B. 2013. T. 15. № 5. P. 1217–1251

[2] Amirat Y., Chechkin G.A., Romanov M.S. On Multiscale Homogenization Problems in Boundary Layer Theory // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, Birkhäuser Verlag (Switzerland). T. 63. P. 475-502

[3] Bulatova R.R., Samokhin V.N., Chechkin G.A. Equations of Magnetohydrodynamic Boundary Layer for a Modified Incompressible Viscous Medium. Boundary Layer Separation // Journal of Mathematical Sciences. Plenum Publishers (United States). 2018. T. 232. № 3. P. 299-321 (Перевод статьи: Булатова Р.Р., Самохин В.Н.,Чечкин Г.А. Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя для модифицированной несжимаемой вязкой среды. Отрыв пограничного слоя // Проблемы математического анализа.- 2018.- Т. 92. С. 83–100.)

[4] Bulatova R.R., Chechkin G.A., Chechkina T.P., Samokhin V.N. On the influence of a magnetic field on the separation of the boundary layer of a non–Newtonian MHD medium // Comptes Rendus - Mécanique, Elsevier BV (Netherlands). 2018. T. 346. № 9. P. 807-814

[5] Bulatova R.R., Samokhin V.N., Chechkin G.A. Equations of Symmetric Boundary Layer for the Ladyzhenskaya Model of a Viscous Medium in the Crocco Variables// Journal of Mathematical Sciences, Plenum Publishers (United States). 2019. T. 242. № 1. C. 85-118 (Перевод статьи: Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А. Уравнения симметричного пограничного слоя для модели вязкой среды О.А.Ладыженской в переменных Крокко// Проблемы математического анализа. 2019. Т. 98. С. 73-100.)

[6] Chechkin G.A., Samokhin V.N., Fadeeva G.M. Equations of the Boundary Layer for a Modified Navier—Stokes System // Journal of Mathematical Sciences. 2011. Vol. 179, no. 4. P. 557–577.

[7] Chechkin G.A., Ratiu T.S., Samokhin V.N., Romanov M.S. On unique solvability of the full three-dimensional Ericksen–Leslie system // Comptes Rendus - Mécanique. 2016. Vol. 344, no. 7. P. 459–463.

[8] Chechkin G.A., Ratiu T.S., Romanov Maxim S., Samokhin V.N. Existence and Uniqueness Theorems for the Full Three-Dimensional Ericksen–Leslie System // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2017. Vol. 27, no. 5. P. 807–843.

[9] E W. Boundary layer theory and the zero-viscosity limit of the Navier-Stokes equetion.// Acta Math. Sin. (Engl.Ser.).2000. V. 16, N 2. P. 207-218.

[10] Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. (AMS, Providence RI). 1968.

[11] Leray J. Étude des diverses équation intégrales nonlinéares et de quelques problèmes que pose l'Hydrodinamique // J. Math. Pure. Appl. 1933. № 12. P. 1-82.

[12] Leray J. Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'esoace // Acta Math. 1934. № 63. P. 331-418.

[13] Leray J. Essai sur les mouvements plans d'un liquide viscue que limitent des parois // J. Math. Pures. Appl. 1934. № 13. P. 331-418.

[14] Lopez Filho M. C. Boundary layers and the vanishing viscosity limit for incompressible 2D flow. Lectures om the analysis of nonlinear partial differential equations. Pt. 1. P. 1-29. Somerville: Int. Press, 2012. (Morningside Lect. Math., V.1).

[15] Prandtl L. Über Flüssigkeitsbewegungen bei sehr kleiner Reibund // Verh. Int. Math. Kongr. Heidelberg, 1904. Teubner, 1905. P. 484 - 494.

[16] Rŭžička M. Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory. Springer, Berlin. 2000. Lecture Notes in Mathematics. 1748.

[17] Samko S. On a progress in the theory of Lebesgue spaces with variable exponent: Maximal and singular operators// Integral Transfoms Spec. Funct. 2005. P. 461-482.

[18] Schlichting H., Gersten K. Boundary-Layer Theory. Berlin: Springer, 2000.

[19] Schlichting H. A survey some recent research investigations on boundary layers and heat transfer // J. Appl. Mech. 1997. V.47, № 6. P. 289-300.

[20] Temam R., Wang X. Remarks on the Prandtl equation for a permeable wall. // Z. Angew. Math. Mech. 2000. V. 80, N 11-12. P. 835-834.

[21] Антонцев, С. Н. and Кажихов, А. В. and Монахов, В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука. 1983. 316 с.

[22] Афанасьев А.А. Оптимальный вдув инородной жидкости в пограничный слой. // Тр. КАИ. Казань. 1972. Вып. 147. С. 38-44.

[23] Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А. Система уравнений пограничного слоя реологически сложной среды. Переменные Крокко // Доклады Академии наук, М.: Наука. 2019. Т. 487. № 2. С. 119-125

[24] Булатова Р.Р. Нестационарный МГД-пограничный слой неньютоновской среды // «Наука XXI века: новый подход»: Материалы XXIII молодёжной международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных. г. Санкт-Петербург. 2019. С. 7-9

[25] Булатова Р.Р. Влияние магнитного поля на положение точки отрыва пограничного слоя электропроводной жидкости // Известия высших учебных заведений. Проблемы полиграфии и издательского дела. 2018. № 1. С. 14-22

[26] Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А. Уравнения симметрического МГД-пограничного слоя вязкой жидкости с реологическим законом О.А. Ладыженской.// Труды семинара им. И.Г. Петровского, МГУ им. М.В.Ломоносова. Москва. 2019. Т. 32. С. 72-90

[27] Джураев Т.Д. О системе уравнений теории пограничного слоя для стационарного течения несжимаемой жидкости. // Дифференц. уравнения. 1968. Т.4. № 11. С. 2068-2083.

[28] Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука. Физмалит. 1970.

[29] Ладыженская О. А. О модификациях уравнений Навье–Стокса для больших градиентов скоростей// Тр.МИАН СССР. 1967. Т.102. С.85-104.

[30] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука. Физмалит. 1986.

[31] Линкевич А.Ю., Спиридонов С.В., Чечкин Г.А. О пограничном слое ньютоновской жидкости, обтекающей шероховатую поверхность и проходящей через перфорированную преграду Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3. № 3. С. 93-104.

[32] Линкевич А.Ю., Спиридонов С.В., Ратью Т.С., Чечкин Г.А. О тонком слое неньютоновской жидкости на шероховатой поверхности, протекающей через перфорированную преграду // Проблемы математического анализа. 2013. Т. 68. С. 173–182.

[33] Линкевич А.Ю., Спиридонов С.В., Чечкин Г.А. Усреднение стратифицированной дилатантной жидкости// Современная математика. Фундаментальные направления. 2013. Т. 48. С. 75–83.

[34] Линкевич А.Ю., Самохин В.Н., Спиридонов С.В., Чечкин Г.А. Усреднение модифицированной жидкости О.А. Ладыженской, протекающей через пористую преграду// Известия высших учебных заведений. Проблемы полиграфии и издательского дела. 2016. Т. 2. С. 25–35.

[35] Литвинов В.Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости. М.: Наука. 1982.

[36] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука. 1973.

[37] Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз. 1962.

[38] Олейник О.А. О системе уравнений Прандтля в теории пограничного слоя// ДАН СССР. 1963. Т.150. № 1. С. 28-32.

[39] Олейник О.А. К математической теории пограничного слоя для нестационарного течения несжимаемой жидкости// ПММ. 1966. Т.30. № 5. С. 801-821.

[40] Олейник О. А., Самохин В.Н. Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука. Физмалит. 1997.

[41] Олейник О. А. Об отрыве пограничного слоя для плоскопараллельного стационарного течения несжимаемой жидкости. Механика сплошной среды и родственные вопросы анализа: Сб.к 80-летию Н.И. Мусхелишвили. М: Наука, 1970. С. 390-406.

[42] Олейник О. А. Математические задачи теории пограничного слоя. УМН. 1968. Т. 23. № 3. С. 3-65

[43] Олейник О. А. О системе уравнений теории пограничного слоя. Ж. выч.мат. и мат.физ. 3 № 3. 1963. С. 489-506.

[44] Рейнер М. Реология. М.: Наука, 1965.

[45] Романов М.С. Об усреднении пограничного слоя псевдопластической жидкости а присутствии быстроосциллирующих внешних сил // Труды семинара им. И.Г.Петровского, МГУ им. М.В. Ломоносова. Москва. 2011. Т. 28. С. 300-328.

[46] Самохин В.Н. О системе уравнений ламинарного пограничного слоя при вдуве неньютоновской жидкости. // Сиб.мат.ж. 1993. Т.34. № 1. С.157-168.

[47] Самохин В.Н. Математические вопросы магнитной гидродинамики неньютоновских сред. М.: МГУП, 2004.

[48] Самохин В.Н., Романов М.С., Чечкин Г.А. О скорости сходимости решений уравнений Прандтля в быстро осциллирующем магнитном поле// Доклады Академии наук. 2009. Т. 426. № 4. С. 450–456.

[49] Самохин В.Н., Фадеева Г.М., Чечкин Г.А. Модификация О.А. Ладыженской уравнений Навье–Строкса и теория пограничного слоя. Вестник. МГУП. 2009. № 5. С. 127-143.

[50] Самохин В.Н., Фадеева Г.М., Чечкин Г.А. О непрерывной зависимости решения уравнений пограничного слоя от профиля начальных скоростей// Вестник. МГУП. 2010. № 4. С. 64-71.

[51] Самохин В.Н., Фадеева Г.М., Чечкин Г.А. Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье–Строкса. Труды семинара им. И.Г. Петровского, МГУ им. М.В.Ломоносова. Москва. Т. 28. 2011. С. 329-361.

[52] Самохин В. Н., Чечкин Г.А. Уравнения пограничного слоя обобщенно ньютоновской среды в окрестности критической точки. Труды семинара им. И.Г. Петровского, МГУ им. М.В.Ломоносова. Москва. Т.31. 2016. С. 158-176.

[53] Спиридонов С.В. О теореме усреднения для стратифицированной магнитной жидкости с микронеоднородным магнитнвм полем и граничным условием // Проблемы математического анализа. 2010. Т. 44. С. 133–143.

[54] Спиридонов С.В., Чечкин Г.А. Просачивание пограничного слоя ньютоновской жидкости через перфорированную преграду // Проблемы математического анализа. 2010. Т. 45. С. 93–102.

[55] Суслов А.И. О системе уравнений магнитогидродинамического пограничного слоя. М.: Вестн. МГУ. Сер.мат., мех. 1974. № 2. С. 62-70.

[56] Суслов А.И. Об отрыве пограничного слоя при вдуве. // ПММ. 1974. Т.38. № 1. С. 166-169.

[57] Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир. 1981.

[58] Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости. М.: Мир, 1964.

[59] Хуснутдинова Н.В. Об условиях существования безотрывного пограничного слоя при возрастающем давлении. // ДАН СССР. 1980. Т. 253. № 5. С. 1095-1099.

[60] Хуснутдинова Н.В. Математические вопросы управления пограничным слоем с помощью отсосов. // Сиб.мат.ж. 1972. Т.13. № 2. С. 485-489.

[61] Чечкин Г.А., Ратью Т.С., Романов М.С., Самохин В.Н. Existence and Uniqueness Theorems for the Two-Dimensional Ericksen–Leslie System// Journal of Mathematical Fluid Mechanics. 2016. Vol. 18. P. 571–589.

[62] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М: Мир. 1969.

[63] Шульман З.П. Пограничный слой неньютоновских жидкостей. Минск: Наука и техника. 1966.

[64] Шульман З.П., Берковский Б.М. Пограничный слой неньютоновских жидкостей. Минск: Наука и техника, 1966.