Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина

На правах рукописи

Елецких
Константин Сергеевич

В-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ ПО ВРЕМЕНИ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Ляхов Л.Н.

Владимир — 2019

Оглавление

Введение

Актуальность темы диссертации. В 1923 г. французский математик и механик Ж. Адамар вывел простой критерий отсутствия диффузии волн или, что то же самое, критерий справедливости принципа Гюйгенса (ПГ) [1]. Однако критерий Адамара не срабатывал в теории общих гиперболических уравнений. Соответствующие примеры приведены в работах Гюнтера [56] (1965) и Ибрагимова—Мамонтова [57] (1970).

Но ранее существование уравнений с нечетным числом пространственных переменных, не удовлетворяющих ПГ, обнаружил К. Штельмахер [63] (1955), построивший уравнение с волновым оператором в главной части и с сингулярными коэффициентами при младших производных. Д. Фокс [55] (1959) привел более простые примеры сингулярных дифференциальных уравнений второго порядка, для которых принцип Адамара не выполнен. Простой пример. Два уравнения

$$u_{tt} = u_{rr} + \frac{1}{r}\ u_r + u_{zz,}\,, \quad u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\,, \tag{0.0.1}$$

первое из которых содержит четное число пространственных переменных и одновременно является следствием (цилиндрической симметрии) второго уравнения, содержащего нечетное число пространственных переменных. Более того, и К. Штельмахер, и Д. Фокс выяснили, что и зависящие от переменной, по которой ставятся начальные условия (т.е. от времени), коэффициенты сингулярных B-гиперболических уравнений типа уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу (ЭПД) также влияют на гюйгенсовость решения соответствующей задачи Коши. Более четко это проявилось в совместных работах И.А. Киприянова и Л.А. Иванова [28], [29] (1970-1980-е годы), установивших соответствующий «сингулярный принцип Гюйгенса» для уравнения типа ЭПД, содержащего особенность только по временной переменной или только по пространственным переменным. Полученный ими результат уточнил и сократил формулировку гюйгенсовости решений, открытую Д. Фоксом.

В работе И.А. Киприянова и Ю.В. Засорина [26] (1991) построенные решения задачи Коши для уравнения $u_{tt} = \sum\limits_{1}^{n} \left(u_{x_i x_i} + \frac{\gamma_i}{x_i}\, u_{x_i} \right)$, $\gamma_i > 0$ позволили уточнить формулировку гюйгенсовости Киприянова—Иванова.

Еще отметим работы Г.М. Кагана [18], [20], выполненные под руководством И.А. Киприянова. В одной из них исследовалось модельное сингулярное уравнение типа уравнения Ибрагимова—Мамонтова, которое по одной из пространственных переменных включало сингулярный дифференциальный оператор Бесселя. Полученное решение позволило обобщить результат Ибрагимова—Мамонтова о гюйгенсовости решения соответствующей задачи Коши, но только для одной особой переменной. В другой на основе киприяновских весовых распределений определено решение задачи Коши для уравнений ЭПД с дробными (в общем случае) размерностями операторов Бесселя, входящих в уравнение. Установлено, что принцип Гюйгенса выполнялся только при целой (нечетной или четной) размерности оператора Бесселя по времени и с четными (как и в предшествующих работах) размерностями операторов Бесселя по пространственным переменным, что, как видно из приведенного выше примера (0.0.1), лишь подтвердило классическую теорему Адамара о возможности выполнения ПГ решений задачи Коши для уравнения ЭПД с целыми размерностями операторов Бесселя. Осталась не выяснена возможность выполнения ПГ решения задачи Коши для дробных размерностей операторов Бесселя по пространственным переменным.

Таким образом, задача о возможности выполнения ПГ решения задачи Коши для уравнения ЭПД с дробными размерностями операторов Бесселя по пространственным переменным остается не исследованной. Такие задачи исследуются на основе формул решения соответствующей задачи Коши. Поэтому исследования диссертации актуальны для теории сингулярных дифференциальных уравнений.

Актуальность темы диссертации вытекает также из некоторых проблем фундаментальной физики, из-за необходимости привлекать дополнительные размерности пространства для объяснения физических явлений микромира и макромира. Новые переменные связаны симметриями. Но если симметрия воображаемых переменных сферическая, а аргумент исследуемой функции приходится считать дробным, то отличать диффузионные процессы от гюйгенсовых требует соответствующего критерия.

В диссертации построены решения сингулярного гиперболического уравнения в общем случае, включающего и целые, и дробные размерности операторов Бесселя, действующего и по времени, и по пространственным переменным. Получены формулы решения, обобщающие ранее известные из работ И.А. Киприянова и его учеников. Как следствие полученных формул, исследован вопрос о диффузии и гюйгенсовости решения задачи Коши для уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу с дробными размерностями операторов Бесселя.

Таким образом, тема исследований актуальна для проблем сингулярных дифференциальных уравнений и фундаментальных проблем физики.

Цель работы. Целью работы является изучение B-гиперболических уравнений с оператором Бесселя по времени.

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи:

1. Построение полного сингулярного аналога уравнения Ибрагимова—Мамонтова и исследование области зависимости решения (диффузионность или гюйгенсовость решения).

2. Нахождение весовых распределений Киприянова и получение

на их основе решения задачи Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу для дробных и целых индексов размерности операторов Бесселя, входящих в уравнение.

3. Исследование для каких из полученных решений выполняется принцип Гюйгенса и сравнение условий его выполнения с уже известными из работ Д.Фокса, И.А. Киприянова и его учеников.

4. Построение решения начально-граничной (краевой) задачи первого, второго и третьего рода для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу с разными индексами размерности операторов Бесселя, в том числе для B-гиперболического уравнения с оператором Бесселя по времени с отрицательной размерностью. Получение представления решений в виде соответствующей формулы Пуассона, порожденной специального рода сдвигом, возникающем от произведения цилиндрических функций разных порядков.

Научная новизна и значимость полученных результатов. Следующие результаты работы являются новыми.

1. Новым является полный сингулярный аналог уравнения Ибрагимова—Мамонтова. Найдены области зависимости решения соответствующей задачи Коши этого уравнения.

2. На основе весовых распределений, названных в работе «функционалами Киприянова», получены формулы смешанного F_{B_γ}-преобразования радиальной j-функции Бесселя порядка $\mu = \frac{\beta-1}{2} \geq -\frac{1}{2}$. Полученные формулы позволили найти обобщенные весовые решения соответствующей задачи Коши. Эти решения являются новыми.

3. Сформулированный в работе «обобщенный сингулярный принцип Гюйгенса» обобщает известные и является новым.

4. Получены формулы решения краевой задачи (первого, второго, и третьего рода) для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу с различными размерностями операторов Бесселя (в том числе с отрицательной размерностью оператора Бесселя по времени).

Методы исследования. В работе используются интегральные преобразования Фурье и Бесселя (Левитана, Киприянова—Катрахова), а также методы теории функций, функционального анализа, дифференциальных уравнений и методы, развитые в работах научной школы И. А. Киприянова при исследовании сингулярных дифференциальных уравнений.

Практическая значимость и теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы при исследовании решений и других классов дифференциальных уравнений. Кроме того, возможно использование результатов диссертационного исследования при чтении курсов по выбору в университетах для магистрантов и аспирантов физико-математических специальностей

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на Международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения"в г. Ростове-на-Дону в 2017, 2018 и 2019 гг., на Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы"в г. Самаре в 2017 г., в Воронежской зимней математической школе в 2018 г., на Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы"в г. Стерлитамаке в 2018 г., на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам в г. Суздале в 2018 г., на Международном семинаре AMADE в г. Минске в 2018 г., на Международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В. А. Садовничего г. Москве в 2019г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [37], [38], [39], [59], [60], [61], [64], [65], [66]. В совместных работах [37], [38], [39], [59], [60], [61] Л. Н. Ляхову принадлежит постановка задач. В работе [61] Е. Л. Саниной принадлежат доказательства ортогональности систем B-цилиндрических функций и сходимости рядов Фурье—Бесселя и Дини по j-функциям Бесселя. Доказательства основных результатов по построению и исследованию решений получены лично диссертантом.

Работы [59], [60], [61] опубликованы в журналах из перечня ВАК Министерства науки и высшего образования РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка цитируемой литературы, включающего 66 наименований. Общий объем диссертации 137 стр.

Краткое содержание диссертации.

Во **введении** дается обоснование актуальности выбранной темы, приводится методика исследования, дан краткий обзор содержания диссертации и приведены основные научные результаты.

Нумерация изложенных ниже утверждений совпадает с нумерацией в диссертации.

В **главе 1** вводятся основные определения, известные соотношения и формулы, используемые во второй и третьей главах.

Положим $x = (x', x'') \in \mathbb{R}_N^+ = \mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_{N-n}$, где $x' \in \mathbb{R}_n^+ = \{x' : \ x_1 > 0, ..., x_n > 0\}$, $x'' = (x_{n-1}, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}_{N-n}$. Считаем, что натуральные числа n и N фиксированы и связаны условием $n \leq N$.

Двойственное пространство, порождаемое весовой линейной формой

$$(u\,,\,v)_\gamma = \int_{\mathbb{R}_N} u(x)\,v(x)\ (x')^\gamma\,dx\,,\quad (x')^\gamma = \prod_{i=1}^{n} (x_i^2)^{\frac{\gamma_i}{2}}$$

будем обозначать $S'_{ev} = S'_{ev}(\mathbb{R}_N^+)$ и называть пространством умеренных весовых распределений (весовых обобщенных функций). К регулярным весовым распределениям относим локально интегрируемые с весом $(x')^\gamma$ функции, не более чем степенного роста.

Рассматриваются интегральные преобразования Фурье и два вида преобразований Бесселя, введенные Б.М. Левитаном (далее F_B-преобразование) и И.А. Киприяновым, В.В. Катраховым (далее $\mathcal{F}_B$-преобразование). Вводится смешанное преобразование Фурье—Левитана—Киприянова—Катрахова. Ядром этого смешанного преобразования являются функции

$$e_\gamma(x,\xi)=\prod_{k=1}^{n}\left[j_{\frac{\gamma_k-1}{2}}(x_k\xi_k)-i\frac{x_k\xi_k}{\gamma+1}j_{\frac{\gamma_k+1}{2}}(x_k\xi_k)\right]\ e^{-i\langle x'',\xi''\rangle},$$

где $\gamma=(\gamma_1,\,\dots\,,\gamma_n)$ — фиксированный мультииндекс из положительных чисел; j_ν — четная j-функция Бесселя порядка ν, связанная с функцией Бесселя первого рода (и того же порядка) равенством $j_\nu(s)\,=\,C(\nu)\frac{J_\nu(s)}{s^\nu}$, $\nu\,>\,-\frac{1}{2}$; $\frac{s}{\gamma+1}j_\nu(s)$ — нечетная j-функция Бесселя; $\langle x'',\xi''\rangle$ — скалярное произведение векторов из $\mathbb{R}_{N-n}$. Смешанное прямое и обратное преобразования Фурье—Левитана—Киприянова—Катрахова (смешанное $\mathcal{F}_B$-преобразования) определяются выражениями

$$\mathcal{F}_B[f](\xi)=\int_{\mathbb{R}_N}f(x)\,e_\gamma(x,\xi)\,(x')^\gamma\,dx\,,\quad \mathcal{F}_B^{-1}[f](x)=\frac{C(\gamma)}{(2\pi)^{\frac{N-n}{2}}}\ \mathcal{F}_B[f](-x). \tag{1.1.1}$$

Известно (Киприянов, Катрахов), что эти преобразования обратимы на классе основных функций S_{ev+}, состоящем из функций S_{ev} и их первых производных по направлениям x_i, $i=1,\,\dots\,,n$ от этих функций. При $\gamma\to 0$ это преобразование стремится к классическому преобразованию Фурье. Многомерное преобразование Левитана и преобразование Киприянова—Катрахова определяется по формулам (1.1.1) с ядрами $\prod_1^n j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}$ и $\prod_1^n \frac{x_i\xi_i}{\gamma_i+1}\,j_{\frac{\gamma_i+1}{2}}$ соответственно.

В первой главе также приведены сведения о рядах Фурье—Бесселя и Дини по четным и нечетным j-функциям Бесселя. B-цилиндрические функции — это решения сингулярного уравнения Бесселя

$$B_\gamma u(\lambda x)+\lambda^2u(\lambda x)=0\,,\quad B_\gamma=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\gamma}{x}\,\frac{d}{dx}\,,\quad \gamma\in\mathbb{R}_1. \tag{1.2.2}$$

Пусть $\gamma>0$. Тогда фундаментальный набор решений этого уравнения состоит из B-цилиндрических функций j_ν, и Y_ν, $\nu\,=\,\frac{\gamma-1}{2}$. Первая из них называется j-функцией Бесселя, вторая — j-функцией Неймана. В качестве спектральной функции рассматривается первая из них.

Спектральный параметр $\lambda=\lambda_k$ является корнем одного из уравнений

$$\begin{array}{lll} i) & j_\nu(\lambda_n)=0, & n=1,2,\,\dots\,; \\ ii) & j\,'_\nu(\lambda_n){=}0\ (j_{\nu+1}(\lambda_n){=}0), & n=1,2,\,\dots\,; \\ iii) & \lambda_n\, j'_\nu(\lambda_n)+Hj_\nu(\lambda_n)=0, & n=1,2,\,\dots\,, \end{array}$$

где H — некоторая данная постоянная. Следуя классическим канонам, системы функций i) и ii) будем называть системами Фурье—Бесселя, а iii) — системой Дини.

При $\gamma=-\beta$, $0<\beta<1$ для разложения функций в ряды Фурье по решениям уравнения (1.2.2) мы используем ограниченное решение $j_{-\mu}$, получающееся формальной заменой индекса порядка j-функции Бесселя j_ν на индекс $-\mu=-\frac{\beta+1}{2}$.

При $\gamma=-\beta$ и $\beta>1$ для разложения функций в ряды Фурье по решениям уравнения (1.2.2) мы используем неограниченное (при $t\to\infty$) решение $\mathbb{J}^*_\mu$ положительного порядка $\mu=\frac{\beta+1}{2}$ следующего вида

$$\mathbb{J}^*_\mu(t)=t^\mu\ J_\mu(t)=t^\mu\ \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma\left(\mu+m+1\right)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m+\mu}\quad,\quad \mu{=}\frac{\beta{+}1}{2}\,.$$

В **главе 2** изучается действие на j-функцию Бесселя вещественного порядка $\mu=\frac{\beta-1}{2}\geq-\frac{1}{2}$ смешанного F_B-преобразования (Левитана). Находятся явные представления таких преобразований (в зависимости от значений порядка μ), которые используются при изучении задачи Коши для уравнений B-гиперболического типа с операторами Бесселя по временной и пространственным переменным. Формулы решений строятся с помощью интегральных преобразований Левитана и Левитана—Киприянова—Катрахова. Исследуются области зависимости решений, а также выделяются условия справедливости принципа Гюйгенса.

Теорема 2.1.1 *Пусть $N\geq 2$, $n\geq 1$ — фиксированные натуральные числа и $\gamma=(\gamma_1,\,\dots\,,\gamma_n)$ — мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел. F_{B_γ}-преобразование определено на* *основе j-функций Бесселя* j_ν *, порядков* $\nu_i = \frac{\gamma_i - 1}{2}$ *, а* j_μ *—j-функция Бесселя порядка* $\mu = \frac{\beta-1}{2}$ *и индексы* $\beta \geq 0$ *и* $\gamma_i \geq 0$ *являются размерностью соответствующих операторов Бесселя.*

При $\mu > \frac{N+|\gamma|-1}{2}$, $(\beta > N + |\gamma|)$ *обратное* F_B *-преобразование от финитной радиальной функции*

$$\psi_{a,\mu}(|\xi|) = \begin{cases} (a^2 - |\xi|^2)^{\mu - \frac{N+|\gamma|}{2}}, & \xi \in \{|\xi| < a\}^+ , \\ 0, & \xi \notin \{|\xi| < a\}^+ . \end{cases}$$

выражается формулой

$$F_B^{-1}[\psi_{a,\mu}](x) = A(N, n, \mu, \gamma) \ \ a^{2\mu} \, j_\mu(a|x|). \tag{2.1.5}$$

Следствие 2.1.1 *Пусть* $N \geq 2$, $n \geq 1$ *— фиксированные натуральные числа и* γ *— мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел,* $\{|\xi| < a\}^+ = \{\xi : \ |\xi| < a, \ \xi_1 > 0, \dots, \xi_n > 0\}$ *—* n *-полушар в* $\mathbb{R}^+_{n,N}$ *.*

При $\mu > \frac{N+|\gamma|-1}{2}$ $(\beta > N + |\gamma|)$ *справедливо равенство*

$$F_B[j_\mu(a\,|x|)](\xi) = F_B[j_\mu(a\,|x|)](|\xi|) =$$

$$= \begin{cases} \frac{(a^2-|\xi|^2)^{\mu - \frac{N+|\gamma|}{2}}}{a^{2\mu} \ A(\mu,N,n,\gamma)} & , \ \ \xi \in \{|\xi| < a\}^+ , \\ \\ 0 & , \ \ \xi \notin \{|\xi| < a\}^+ , \end{cases} \tag{2.1.9}$$

где

$$A(N, n, \mu, \gamma) = \frac{\pi^{\frac{n-N}{2}}}{2^{N-n+|\gamma|}} \ \frac{\Gamma\left(\mu + 1 - \frac{N+|\gamma|}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1) \ \prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} .$$

При $-\frac{1}{2} \leq \mu \leq \frac{N+|\gamma|-1}{2}$ F_B -преобразование функции $j_\mu(a\,|x|)$ в классическом смысле не существует, однако, оно может быть вычислено в рамках теории обобщенных весовых функций.

Предположим, что размерности γ_i таковы, что $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ — натуральное число. Введем распределения Киприянова I_a^α на сфере , которые определим при четных и нечетных $N+|\gamma|$ в виде сингулярных обобщенных функций из S', носители которых сосредоточены на N-полусфере в $\mathbb{R}^+_N$, и которые действуют на основные функции $\varphi\in S_{ev}$ по формулам

a) при четном $N+|\gamma|$

$$\left(I_a^k,\varphi\right)_\gamma=\frac{1}{a^{2k}}\left(\frac{1}{a}\frac{d}{da}\right)^{\frac{N+|\gamma|}{2}-k-1}\left[a^{N+|\gamma|-2}\int\limits_{S_1^+(N)}\varphi(a\xi)\,(\xi')^\gamma\;dS(\xi)\right], \tag{2.1.10}$$

b) при нечетном $N+|\gamma|$

$$\left(I_a^{k-\frac{1}{2}},\,\varphi\right)_\gamma=\frac{1}{a^{2k-1}}\left(\frac{1}{a}\frac{d}{da}\right)^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}-k}\left[a^{N+|\gamma|-2}\int\limits_{S_1^+(N)}\varphi(a\xi)\,(\xi')^\gamma\,dS(\xi)\right]. \tag{2.1.11}$$

Теорема 2.1.3 *Пусть* $|\gamma|$ *— натуральное число.* F_{B_γ} *- Преобразование функции* $j_\mu(a\,|x|)$ *, понимаемое в смысле пространства* S'_{ev} *, при* $\mu=k$ *или* $\mu=k-\frac{1}{2}$ *, где* k *целое,* $0\le k\le\frac{N+|\gamma|-1}{2}$ $(0\le\beta\le N+|\gamma|)$ *, имеет вид*

a) при четном $N+|\gamma|\ge 2$ *и* $\mu=\frac{\beta-1}{2}=k$ *(т.е.* $\beta=2k+1$ *— нечетное число)*

$$F_{B_\gamma}[j_k(a|x|)](\xi)=A_k(N,n,\gamma)\cdot I_a^k, \tag{2.1.12}$$

где

$$A_k(N,n,\gamma)=2^{k+\frac{N+|\gamma|}{2}-n}\Gamma(k+1)\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right);$$

b) при нечетном $N+|\gamma|\ge 3$ *и* $\mu=\frac{\beta-1}{2}=k-1/2$ *(т.е.* $\beta=2k$ *— четное число)*

$$F_{B_\gamma}[j_{k-\frac{1}{2}}(a|x|)](\xi)=A_{k-\frac{1}{2}}(N,n,\gamma)\cdot I_a^{k-\frac{1}{2}}. \tag{2.1.13}$$

где

$$A_{k-\frac{1}{2}}(N,n,\gamma)=2^{k-\frac{1}{2}+\frac{N+|\gamma|}{2}-n}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right).$$

Введем обобщенные функции вида $I_a^{k-\frac{1}{2}-\delta}$ в случае нечетного $N+|\gamma|\geq 3$ и $I_a^{k-\delta}$, $I_a^{-\delta_1}$ в случае четного $N+|\gamma|\geq 2$. Их действие на основные функции $\varphi\in S_{ev}$ определим по правилам

$$(I_a^{k-\delta},\varphi)=\frac{2}{\Gamma(1-\delta)}\int\limits_0^1 z^{2k-1}(1-z^2)^{-\delta}\times$$

$$\times\ \frac{1}{a^{2k-2}}\left(\frac{1}{a}\frac{d}{da}\right)^{\frac{N+|\gamma|}{2}-k}\left[a^{N+|\gamma|-2}\int\limits_{S_1^+(N)}\varphi(az\xi)\,(\xi')^\gamma\ dS(\xi)\right]dz\,; \quad (2.1.17)$$

$$(I_a^{-\delta_1},\varphi)=\frac{2}{\Gamma(1-\delta_1)}\int\limits_0^1 z(1-z^2)^{-\delta_1}\times$$

$$\times\ (a\frac{d}{da}+2-2\delta_1)\left(\frac{1}{a}\frac{d}{da}\right)^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}\left[a^{N+|\gamma|-2}\int\limits_{S_1^+(N)}\varphi(az\xi)\,(\xi')^\gamma\ dS(\xi)\right]dz\,;$$

(2.1.18)

$$(I_a^{k-\frac{1}{2}-\delta},\varphi)=\frac{2}{\Gamma(1-\delta)}\int\limits_0^1 z^{2k-2}(1-z^2)^{-\delta}\ \times$$

$$\times\ \frac{1}{a^{2k-3}}\left(\frac{1}{a}\frac{d}{da}\right)^{\frac{N+|\gamma|+1}{2}-k}\left[a^{N+|\gamma|-2}\int\limits_{S_1^+(N)}\varphi(az\xi)\,(\xi')^\gamma\,dS(\xi)\right]dz\,.$$

(2.1.19)

В отличие от обобщенных функций (2.1.10) и (2.1.11), носители которых расположены на сфере $|x|{=}a$, эти обобщенные функции имеют носители в шаре $|x|<a$.

Теорема 2.1.4 *Пусть $|\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$ — натуральное число и k — натуральное число, удовлетворяющее условию $1\leq k\leq\frac{N+|\gamma|+1}{2}$ и пусть правильные дроби δ и δ_1 $(\delta\in[0,1),\delta_1\in[0,\frac{1}{2}])$ определены так, чтобы для числа μ, $-\frac{1}{2}<\mu\leq\frac{N+|\gamma|}{2}$ имело место одно из представлений (2.1.17)—(2.1.19). F_B-Преобразование функции $j_\mu(a\,|x|)$, понимаемое в смысле пространства обобщенных функций S'_{ev}, имеет вид*

1) при четном $N+|\gamma|\geq 2$, $-\frac{1}{2}<k-\delta\leq\frac{N+|\gamma|}{2}$, $k\in\mathbb{N}$

$$F_B[j_{k-\delta}(a|x|)](|\xi|)=A_{k-\delta}(N,n,\gamma)\cdot I_a^{k-\delta}\,, \tag{2.1.20}$$

где

$$A_{k-\delta}(N,n,\gamma)=2^{k-1+\frac{N+|\gamma|}{2}-n}\Gamma(k+1-\delta)\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right),$$

$$\mu=-\delta_1\,,\quad F_B[j_\mu(a|x|)](|\xi|)=A_{-\delta_1}(N,n,\gamma)\cdot I_a^{-\delta_1}, \tag{2.1.21}$$

где

$$A_{-\delta_1}(N,n,\gamma)=2^{\frac{N+|\gamma|}{2}-n-1}\Gamma(1-\delta_1)\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right);$$

2) при нечетном $N+|\gamma|\geq 3$

$$\mu=k-\frac{1}{2}-\delta\,,\quad F_B[j_\mu(a|x|)](\xi)=A_{k-\frac{1}{2}-\delta}(N,n,\gamma)\cdot I_a^{k-\frac{1}{2}-\delta}, \tag{2.1.22}$$

где

$$A_{k-\frac{1}{2}-\delta}(N,n,\gamma)=2^{k-\frac{3}{2}+\frac{N+|\gamma|}{2}-n}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-\delta\right)\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right).$$

В пункте 2.2 рассмотрен полный сингулярный аналог уравнения Ибрагимова—Мамонтова, а именно

$$u_{tt}-u_{xx}-\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{i,j}(x-t)\ (D_B)_{ij}u=0,\quad (D_B)_{ij}=\begin{cases}\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial y_j}, & i\neq j,\\ \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+\frac{\gamma_i}{y_i}\frac{\partial}{\partial y_i}, & i=j\end{cases} \tag{2.2.3}$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=f(x,y). \tag{2.2.5}$$

т.е это точная копия уравнения Ибрагимова—Мамонтова, лишь роль вторых производных выполняют различные операторы Бесселя. Решение этого уравнения находится по схеме Ибрагимова—Мамонтова применением смешанного $\mathcal{F}_B$-преобразования (Фурье—Левитана—Киприянова—Катрахова). В результате получим

$$u(t,x,y)=\frac{1}{2c_\gamma}\int\limits_{x-t}^{x+t}\Big(F_{B_{\bar\lambda\to\zeta}}[j_0(k|\bar\lambda|)](\zeta)\,,\,T^y_{P\zeta}f(\xi,P\zeta)\Big)_\gamma\,d\xi\,, \qquad (2.2.9)$$

где T^y_x — обобщенный сдвиг Пуассона. Формулы F_B-преобразования радиальной функции Бесселя произвольного порядка $\mu>-\frac{1}{2}$ получены в теоремах 2.1.3 и 2.1.4.

a) В случае нечетного $n+|\gamma|$ решение задачи Коши (2.2.3), (2.2.5) имеет вид

$$u(t,x,y)=\frac{2^{n-3}}{\prod_{i=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\int\limits_{x-t}^{x+t}d\xi\times$$

$$\times\left(\frac{d}{ds}\right)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}\left[s^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}\int\limits_{S_1^+(n-1)}T^y_{\sqrt{s}\,P\,\zeta}f(\xi,\sqrt{s}\,P\,\zeta)\,\zeta^\gamma dS(\zeta)\,\right]\Bigg|_{s=x+t-\xi}.$$

b) В случае четного $n+|\gamma|$

$$u(t,x,y)=\frac{2^{n-2}}{\sqrt{\pi}\,\prod_{i=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\int\limits_{x-t}^{x+t}d\xi\int\limits_0^1(1-z^2)^{-1/2}\sqrt{s}\,\times$$

$$\times\left(\frac{d}{ds}\right)^{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}\left[s^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}\int\limits_{S_1^+(n-1)}T_y^{\sqrt{s}\,zP\zeta}f(\xi,\sqrt{s}\,zP\zeta)\,\zeta^\gamma\,dS(\zeta)\right]\Bigg|_{s=x+t-\xi}dz.$$

Как видим, в случае нечетного $n+|\gamma|$ носитель обобщенной функции $F_B[j_0(b|\bar\lambda|)]$ принадлежит сфере $|y|=1$. В случае четного $n+|\gamma|$ в представлении функционала $F_B[j_0(b|\bar\lambda|)]$ появился интеграл по радиальной переменной z, т.е. носитель $F_B[j_0(b|\bar\lambda|)]$ принадлежит шару $|y|<1$. Следовательно, в первом случае для решений задачи Коши (2.2.3), (2.2.5) принцип Гюйгенса выполняется, а во втором нет.

В пункте 2.3 рассматривается более общий случай, когда по времени действует оператор Бесселя с размерностью $\beta \geq 0$, а по пространственным переменным действуют сингулярные операторы Бесселя с размерностью $\gamma_i \geq 0$. Итак, в полупространстве $\mathbb{R}^+_{N+1} = \{(t,x) : t > 0, x \in \mathbb{R}_N, N \geq 1\}$ рассмотрим следующую задачу Коши

$$B_{\beta,t}u = \Delta_{\gamma,x}u, \quad u|_{t=0} = f(x), \quad u_t|_{t=0} = 0. \tag{2.3.1}$$

Для получения представления решения задачи (2.3.1) используем прямое и обратное смешанное F_B-преобразование с порядками j-функций Бесселя равными $\nu_i = \frac{\gamma_i - 1}{2}$ $(i{=}1, 2, \ldots, n)$.

В результате получим

$$u(x,t) = c(N,n,\gamma)\left(F_{B_\gamma}[j_{\frac{\beta-1}{2}}(t|\xi|)],\, T^x_y f\right)_\gamma . \tag{2.3.4}$$

По следствию 2.1.1 при больших значениях $\beta > N + |\gamma|$

$$F^{-1}_{B_\gamma}\left[j_{\frac{\beta-1}{2}}(t|\cdot|)\right] = \psi_{t,\frac{\beta-1}{2}}(x)$$

и представляет собой финитную функцию с носителем в области $|x| < t$:

$$\psi_{t,\frac{\beta-1}{2}}(|x|) = \begin{cases} (t^2 - |x|^2)^{\frac{\beta-1}{2} - \frac{N+|\gamma|}{2}}, & x \in \{|x| < t\}^+, \\ 0, & x \notin \{|x| < t\}^+. \end{cases}$$

Решение задачи Коши (2.3.1) в этом случае имеет вид

$$u(x,t) = c(N,n,\gamma)\left(F_{B_\gamma}[j_{\frac{\beta-1}{2}}(t|\cdot|)](y),\, T^x_y f\right)_\gamma =$$

$$= \frac{c(N,n,\gamma)}{A(N,n,\beta,\gamma)} \int\limits_{\{|y|<t\}^+_N} \frac{(t^2 - |y|^2)^{\frac{\beta-1-N-|\gamma|}{2}}}{t^{\beta-1}}\, T^x_y f(y)\, y^\gamma\, dy,$$

где

$$A(N,n,\beta,\gamma) = \frac{1}{\pi^{\frac{N-n}{2}}\, 2^{N+|\gamma|-n}}\ \frac{\Gamma\left(\frac{\beta-N-|\gamma|+1}{2}\right)}{\Gamma(\frac{\beta+1}{2})\ \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}$$

А при значениях размерности $\beta \leq N+|\gamma|$ выражение $F^{-1}_{B_\gamma}\left[j_{\frac{\beta-1}{2}}(t|\cdot|)\right]=I_t^{\frac{\beta-1}{2}}$ представляет собой распределение Киприянова из S'_{ev}, которое определяется по формулам, полученным в теоремах 2.1.3 и 2.1.4,

В обоих из этих случаев можем выписать явный вид решения $u(t,x)$. При этом отдельно рассматриваются случаи четной $N+|\gamma|$ и нечетной $N+|\gamma|$ размерности пространства.

Среди найденных решений этой задачи Коши только в двух случаях решение представляется сферическим интегралом — это решения описанные в пункте 2.3.2.

Случай **A1**: $\beta=2k+1$ — нечетное число и $1\leq\beta\leq N+|\gamma|$ ($0\leq k\leq\frac{N+|\gamma|-1}{2}$), $N+|\gamma|\geq 2$ — четное число. Решение в этом случае имеет вид:

$$u(t,x)=\frac{2^{k-\frac{N+|\gamma|}{2}+n}\Gamma(k+1)}{\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\right)}\times$$

$$\times\frac{1}{t^{2k}}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{N+|\gamma|}{2}-k-1}\left[t^{-1}\int\limits_{S_{x,t}(N)}T_x^y f(x)\,(y')^\gamma\;dS(y)\right].$$

Случай **A3**: $\beta=2k$ — четное число, $N+|\gamma|\geq 3$ — нечетное число. При этом $0\leq\beta\leq N+|\gamma|-1$ $\left(0\leq k\leq\frac{N+|\gamma|-1}{2}\right)$.

$$u(t,x)=\frac{2^{k-\frac{N+|\gamma|+1}{2}+n}\;\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\right)}\times$$

$$\times\frac{1}{t^{2k-1}}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}-k}\left[t^{-1}\int\limits_{S_{x,t}(N)}T_x^y f(x)\,(y')^\gamma\;dS(y)\right].$$

В остальных случаях решение представляется в виде интеграла по шару.

Случай **A2**: $\beta=2k$ и $N+|\gamma|\geq 2$ — четные числа. При этом число $\mu=\frac{\beta-1}{2}$ — дробное (полуцелое). Этот случай изучен при условии дробного μ. Это случай B1.

Случай **B1**: $N+|\gamma|\geq 2$ — четное число, $\frac{\beta-1}{2}=k-\delta$, $k\in\mathbb{N}$, $\delta\in[0,1)$, $1\leq k<\frac{N+|\gamma|+1}{2}$, $1<\beta\leq N+|\gamma|$.

$$u(t,x)=\frac{2^{k-\frac{N+|\gamma|}{2}+n}\Gamma(k+1-\delta)}{\pi^{\frac{N-n}{2}}\,\Gamma(1-\delta)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\times$$

$$\times\frac{1}{t^{2k-2}}\left(\frac{d}{tdt}\right)^{\frac{N+|\gamma|}{2}-k}\frac{1}{t^{2k-N-|\gamma|-2\delta+2}}\int\limits_{|y|<t}|y|^{2k-N-|\gamma|}(t^2-|y|^2)^{-\delta}\times$$

$$\times\, T_y^x f(y)\,(y')^{\gamma}\,dy.$$

Случай **B2**: Пусть $(N+|g|\geq 2)$ — четное $\frac{\beta-1}{2}=-\delta_1$, где $\delta_1\in[0,\frac{1}{2}]$, $0\leq\beta\leq 1$.

$$u(t,x)=\frac{2^{n-\frac{N+|\gamma|}{2}}}{\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}(t\frac{d}{dt}+2-2\delta_1)\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}t^{N+|\gamma|+2\delta_1-4}\times$$

$$\times\int\limits_{|y|<t}|y|^{2-N-|\gamma|}(t^2-|y|^2)^{-\delta_1}T_y^x f(y)\,(y')^{\gamma}\,dy\,.$$

Случай **B3**: Пусть $N+|\gamma|\geq 3$ — нечетное и $0\leq\beta\leq N+|\gamma|$,

$$k\in\mathbb{N},\ \ 1\leq k<\frac{N+|\gamma|+1}{2},\ \ \frac{\beta-1}{2}=k-\delta-\frac{1}{2},\ \ \delta\in[0,1).$$

$$u(t,x)=\frac{2^{k-\frac{N+|\gamma|+1}{2}+n}\Gamma(k+\frac{1}{2}-\delta)}{\pi^{\frac{N-n}{2}}\,\Gamma(1-\delta)\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\right)}\times$$

$$\times\frac{1}{t^{2k-3}}\left(\frac{d}{tdt}\right)^{\frac{N+|\gamma|+1}{2}-k}\frac{1}{t^{2k-N-|\gamma|-2\delta+1}}\int\limits_{|y|<t}|y|^{2k-1-N-|\gamma|}(t^2-|y|^2)^{-\delta}\times$$

$$\times\, T_y^x f(y)\,(y')^{\gamma}\,dy.$$

А также в случае дробного $N+|\gamma|$ решение представляется в виде интеграла по шару.

Поэтому можем утверждать следующий достаточный принцип Гюйгенса для решения В-гиперболического уравнения с оператором Бесселя по времени.

Обобщенный сингулярный принцип Гюйгенса *Решение задачи (2.3.1) удовлетворяет «обобщенному принципу Гюйгенса», если числа* β *и* $|\gamma|$ *целые, а числа* $1+\beta$ *и* $N+|\gamma|$ *обладают одинаковой четностью и удовлетворяют неравенству* $\beta+1 \leq N+|\gamma|$ *.*

Глава 3 посвящена нахождению решения задачи Коши с граничными условиями для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу с оператором Бесселя по времени. Рассматриваемые операторы Бесселя в уравнении могут иметь различные параметры.

Пусть $\alpha=(\alpha_1,...,a_n)$ — фиксированные положительные числа. Рассматривается уравнение

$$B_{\beta,t}u(x,t)=\Delta_{B_{\alpha,x}}u(x,t),\ \text{где}\ \Delta_{B_{\alpha,x}}=\sum_{i=1}^{n}B_{\alpha_i}+\sum_{k=n+1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

с начальными условиями

$$u(x,0)=\varphi(r),\ \ u_t(x,0)=\psi(r),\ \ r=|x|$$

и одним из граничных условий:

i) граничное условие первого рода $u(x,t)|_{|x|=1}=f_1(t)$;

ii) граничное условие второго рода $\frac{\partial u}{\partial\vec{\omega}}\Big|_{|x|=1}=f_2(t)$, $\vec{\omega}$ — вектор внешней нормали к сфере $|x|=1$;

iii) граничное условие третьего рода $\left(\frac{\partial u}{\partial\vec{\omega}}+Hu\right)\Big|_{|x|=1}=0$, H — заданная постоянная.

Начально-граничные условия позволяют считать решение уравнения радиальным. Тогда сферическая замена переменных $x=r\theta$, $|\theta|=1$ приводит к следующим задачам

$$B_{\beta,t}u=B_{N+|\alpha|-1,r}u,\ \ u(r,0)=\varphi(r),\ \ u_t(r,0)=\psi(r),$$

$$i)\, u|_{r=1} = 0; \;\; ii)\, u_r|_{r=1} = 0; \;\; iii)\, (u_r + Hu)|_{r=1} = 0.$$

Далее полагаем $N + |\alpha| - 1 = \gamma$.

Получены решения краевых задач для уравнения ЭПД с оператором Бесселя по времени для различных случаев размерности оператора $B_{\beta,t}$, а именно $\beta > 0$, $-1 < \beta < 0$ и $\beta < -1$. Доказаны существование и единственность полученных решений. Записаны их представления в виде формулы, аналогичной формуле Пуассона, определяемой специальным « $\binom{\mu}{\nu}$– сдвигом», порожденным произведением j-функций Бесселя первого рода разных порядков μ и ν

$$\overset{\nu,\mu}{V_x^t} f(x) = \frac{2^{\nu+\mu}\,\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)}{\pi\;\Gamma(\nu+\mu)} \times$$

$$\times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\theta(\mu-\nu)} \cos^{\nu+\mu}\theta\, f(\sqrt{2\cos\theta(x^2 e^{i\theta} + t^2 e^{-i\theta})})\, d\theta\,.$$

В заключение автор выражает благодарность профессору Л. Н. Ляхову за постановку задачи и помощь, оказанную при работе над диссертацией.

Глава 1

Интегральные преобразования Левитана и Киприянова—Катрахова. В-цилиндрические функции. Ряды Левитана

В настоящей главе вводятся пространства Л. Шварца основных и обобщенных функций, на которые накладывается условия четности по нескольким переменным. Рассматривается интегральные преобразования обобщенных функций, такие как преобразования Левитана и Левитана—Киприянова—Катрахова. Приводятся теоремы о сферическом уплотнении.

Даются определения В-цилиндрических функций, как решений сингулярного уравнения Бесселя с различными размерностями оператора Бесселя. Даны теоремы ортогональности систем таких функций, оценки норм. Приведены ряды (Фуре—Бесселя и Дини) по системам В-цилиндрических функций и теоремы о равномерной сходимости таких рядов и рядов из В-производных их членов.

1.1 Интегральные преобразования Бесселя

Обозначим евклидово пространство

$$\mathbb{R}_N = \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_{N-n}, \quad \mathbb{R}_N^+ = \mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_{N-n}.$$

Считаем, что натуральные числа n и N фиксированы и связаны условием $n \leq N$. Положим

$$x = (x', x'') \in \mathbb{R}_N^+ = \mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_{N-n},$$

где

$$x' \in \mathbb{R}_n^+ = \{x' : \; x_1 > 0, ..., x_n > 0\}, \; x'' = (x_{n-1}, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}_{N-n}.$$

Следуя [25], с. 30, введем основные функции S и D. Через $S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_N^+)$ обозначим подпространство пространства Шварца бесконечно дифференцируемых функций φ, x'-четных для которых

$$\underline{\sup}_{x \in \mathbb{R}_{n,N-n}^+} \left| |x|^\beta \; B_{x'}^{\alpha'} D^{\alpha''} \varphi(x) \right| < \infty \,,$$

где α' и α'' — целочисленные мультииндексы размерности n, и $N - n$ соответственно, β — целочисленный мультиндекс размерности N, четный по первым n координатам.

Двойственное пространство, порождаемое весовой линейной формой

$$(u \,, \, v)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} u(x) \, v(x) \; (x')^\gamma \, dx \,,$$

будем обозначать $S'_{ev} = S'_{ev}(\mathbb{R}^+_N)$ и называть пространством умеренных весовых обобщенных функций (распределений). К регулярным весовым распределениям относим все весовые распределения, порожденные локально интегрируемыми с весом $(x')^\gamma$ функциями, не более чем степенного роста (*функции умеренного роста*).

Подпространство пространства основных функций $D = D(\mathbb{R}_n)$, состоящее из x'-четных функций, будем обозначать $D_{ev} = D_{ev}(\mathbb{R}^+_{n,\,N-n})$. Соответствующее двойственное пространство, порожденное указанной выше весовой линейной формой, обозначим D'.

В [33] Б.М.Левитан предложил использовать новое (тогда) преобразование Бесселя, ядром которого является B-цилиндрическая функция j_ν. Это преобразование он назвал «преобразованием Фурье—Ханкеля». Разумеется, это одно из преобразований Бесселя, которое естественно называть преобразованием Левитана.

Рассмотрим смешанное преобразование Фурье—Левитана—Киприянова—Катрахова. Ядром этого смешанного преобразования являются функции

$$e_\gamma(x,\xi) = \prod_{k=1}^{n}\left[j_{\frac{\gamma_k-1}{2}}(x_k\xi_k) - i\frac{x_k\xi_k}{\gamma+1}j_{\frac{\gamma_k+1}{2}}(x_k\xi_k)\right]\; e^{-i\langle x'',\xi''\rangle},$$

где $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ — фиксированный мультииндекс из положительных чисел; j_ν — четная j-функция Бесселя порядка ν, связанная с функцией Бесселя первого рода (и того же порядка) равенством $j_\nu(s) = C(\nu)\frac{J_\nu(s)}{s^\nu}$, $\nu > -\frac{1}{2}$; $\frac{s}{\gamma+1}j_\nu(s)$ — нечетная j-функция Бесселя; $\langle x'',\xi''\rangle$ — скалярное произведение векторов из $\mathbb{R}_{N-n}$. Смешанное прямое и обратное преобразования Фурье—Левитана—Киприянова—Катрахова (смешанное $\mathcal{F}_B$-преобразования) определяются выражениями

$$\mathcal{F}_B[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}_N} f(x)\, e_\gamma(x,\xi)\, (x')^\gamma\, dx\,, \quad \mathcal{F}_B^{-1}[f](x) = \frac{C(\gamma)}{(2\pi)^{\frac{N-n}{2}}}\ \mathcal{F}_B[f](-x), \tag{1.1.1}$$

где $C(\gamma)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{\gamma_i-1}\,\Gamma^2\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}$ — нормирующая константа.

Известно [27], что эти преобразования обратимы на классе основных функций S_{ev+}, состоящем из функций S_{ev} и их первых производных по направлениям x_i, $i=1,\ldots,n$ от этих функций. При $\gamma\to 0$ это преобразование стремится к классическому преобразованию Фурье. Многомерное преобразование Левитана и преобразование Киприянова—Катрахова определяется по формулам (1.1.1) с ядрами $\prod_1^n j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}$ и $\prod_1^n \frac{x_i\xi_i}{\gamma_i+1}\,j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}$ соответственно.

Многомерное смешанное F_B-преобразование (Левитана) определяется по формуле

$$F_B[f](\xi)=\hat f(\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}^+_{n,N-n}} f(x)\mathbf{j}_\gamma(x',\xi')e^{-i\langle x'',\xi''\rangle}(x')^\gamma dx,$$

где $\mathbf{j}_\gamma(x',\xi')=\prod\limits_{i=1}^{n} j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i,\xi_i),\quad \langle x'',\xi''\rangle=\sum\limits_{i=n+1}^{N}x_i\xi_i\,.$

Известно ([33], [25]), что многомерное смешанное преобразование Левитана обратимо в весовом классе функций $L_2^\gamma(\mathbb{R}^+_{n,N-n})$ и обратное преобразование имеет вид

$$F_B^{-1}[f](\xi)=\frac{C(\gamma)}{(2\pi)^{\frac{N-n}{2}}}\int\limits_{R^+_{n,N-n}} f(x)\mathbf{j}_\gamma(x',\xi')e^{i\langle x'',\xi''\rangle}(x')^\gamma dx.$$

Как видим, ядром смешанного F_B-преобразования является функция

$$\Lambda_\gamma(x,\xi)=\mathbf{j}_\gamma(x',\xi')e^{-i\langle x'',\xi''\rangle}.$$

Хорошо известно представление j-функций Бесселя интегралом Пуассона (см. [33])

$$j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi e^{-it\cos\alpha}\,\sin^{\gamma_i-1}\alpha\,d\alpha\,,\qquad \gamma>0\,. \tag{1.1.2}$$

Известно (см. [33]), что действие смешанного обобщенного сдвига (сдвига Пуассона)

$$f(x)\to(T^yf)(x)=(T^{y'}_{x'}f)(x',x''-y'')=\prod_{i=1}^{n}(T^{y_i}_{x_i}f)(x',x''-y'')\,,$$

определяется равенством

$$(T^y f)(x) = c(\gamma) \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi f(x' \to_\alpha y', x'' - y'')\, sin^{\gamma - 1}\alpha' d\alpha',$$

где через

$$x' \to_\alpha y' = \sqrt{x'^2 + y'^2 - 2x'y' \cos\alpha'}$$

обозначен n-мерный вектор с координатами, порожденными евклидовыми расстояниями $\sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos\alpha_i}$, $1 \le i \le n \le N$, а также

$$c(\gamma) = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}, \quad sin^{\gamma-1}\alpha' = \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i - 1}\alpha_i, \quad d\alpha' = d\alpha_1 \ldots d\alpha_n.$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1.1.1. *Для любой интегрируемой по* $\mathbb{R}_1$ *функции имеют место равенства*

$$\lim_{\gamma \to 0} \mathcal{F}_B[f] = F[f], \quad \lim_{\gamma \to 0} \mathcal{F}_B^{-1}[f] = F^{-1}[f].$$

Если к тому же f *четная функция, то*

$$\lim_{\gamma \to 0} \mathcal{F}_B[u] = \lim_{\gamma \to 0} F_B[u] = F_{\cos}[u] \;\; и \;\; \lim_{\gamma \to 0} \mathcal{F}_B^{-1}[u] = \lim_{\gamma \to 0} F_B^{-1}[u] = F_{\cos}^{-1}[u].$$

Теорема 1.1.2. *Если* u *четная функция, для которой имеет место формула обращения* F_B*-преобразования, то*

$$\lim_{\gamma \to 0} T_x^y u(x) = \frac{u(x+y) + u(x-y)}{2}.$$

Теорема 1.1.3. ***(Первая теорема о сферическом уплотнении [36])*** *Пусть* ${}^\gamma T^y$ *— смешанный сдвиг, отвечающий мультииндексу* γ*. Для произвольных абсолютно суммируемых с весом* $\prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}$ *радиальных функций* $f = f(|x|)$ *и* $g(|x|)$ *имеет место равенство*

$$(f * g)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} f(|y|)\, {}^\gamma T^y g(x) \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}\, dy =$$

$$= |S_1^+(N)| \int\limits_0^\infty f(r)^\mu T^\rho g(r)\; r^\mu dr, \quad \mu = N + |\gamma| - 1,$$

где $S_1^+(N)$ *— поверхность части единичной сферы* $|x| = 1$ *, определенной неравенствами* $x_1 > 0, ..., x_N > 0$ *, а*

$$|S_1(N)|_\gamma = \int\limits_{S_1^+(N)} \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}\; dS = \frac{\pi^{\frac{N-n}{2}} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\,\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}\right)}.$$

Теорема 1.1.4. ***(Вторая теорема о сферическом уплотнении [36])*** *Для произвольных абсолютно суммируемых с весом* $\prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}$ *радиальной функции* $f = f(|x|)$ *имеет место равенство*

$$F_B[f] = \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} f(|x|) \prod_{i=1}^n j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i)\, e^{-i\langle x'',\xi''\rangle} \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}\; dx =$$

$$= |S_1^+(N)| \int\limits_0^\infty f(r)\, j_{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}(r\rho)\; r^{N+|\gamma|-1} dr\,.$$

1.2 B-цилиндрические функции

Классические цилиндрические функции первого рода. Цилиндрические функции возникают при исследовании дифференциальных уравнений порядка ≥ 2 в цилиндрических координатах. Наиболее употребляемыми являются цилиндрические функции Бесселя первого рода

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma\,(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu},$$

и

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma\,(m-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu}.$$

Эти функции линейно независимы при дробном $\nu = \frac{\gamma-1}{2}$ и представляют ф.с. функций уравнения Бесселя (классического)

$$xv'' + v' - \left(x + \frac{\nu^2}{x}\right) v = 0 \qquad (1.2.1)$$

В случае целого порядка ν цилиндрические функции J_ν и $J_{-\nu}$ линейно зависимы: $J_\nu = C\,J_{-\nu}$. Для произвольных ν роль фундаментальной системы функции для уравнения (1.2.1) выполняет пара решений (1.2.1) $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$, где $Y_\nu(x)$ — цилиндрическая функция второго рода (функция Неймана)

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi)\ J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}\,.$$

B цилиндрические функции — это решения сингулярного уравнения Бесселя

$$B_{\pm\gamma}u(\lambda x) + \lambda^2 u(\lambda x) = 0\,, \quad B_{\pm\gamma} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\pm\gamma}{x}\,\frac{d}{dx}\,, \quad \gamma > 0. \qquad (1.2.2)$$

Связь цилиндрических и B-цилиндрических функций дана в следующем утверждении.

Лемма 1.2.1. *Решения дифференциального уравнения Бесселя* (1.2.1) *(цилиндрические функции) и сингулярного уравнения Бесселя (B-цилиндрические функции) в области $x > 0$ связаны равенствами*

$$\text{\textit{Для оператора} } B_\gamma: \ v(x) = x^\nu\, u(x)\,, \ \text{\textit{где} } \nu = \frac{\gamma - 1}{2} > -\frac{1}{2}. \qquad (1.2.3)$$

$$\text{\textit{Для оператора} } B_{-\gamma}: \ v(x) = x^{-\mu}\, u(x)\,, \ \text{\textit{где} } \mu = \frac{\gamma + 1}{2} > \frac{1}{2}. \qquad (1.2.4)$$

Утверждение (1.2.3) хорошо известно (см. например [53], с. 75-76). Утверждение (1.2.3) приведено в работе [39]

1.3 B-цилиндрические функции, отвечающие положительной размерности оператора Бесселя $+\gamma$

Собственные функции оператора B_γ, $\gamma > 0$ достаточно просто найти исходя из связи (1.2.3) решений уравнений (1.2.1) и (1.2.2). Имеем

$$\mathbb{J}_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma\,(m{+}\nu{+}1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\,, \ \ \mathbb{J}_\nu(0) = \frac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)},$$

$$j_\nu(x) = 2^\nu\,\Gamma(1+\nu)\,\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\,\Gamma(\nu+1)}{m!\,\Gamma\,(m{+}\nu{+}1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}, \;\; j_\nu(0) = 1. \tag{1.3.1}$$

Эти решения отличаются лишь константой, но второе удобно тем, что оно нормировано условием $j_\nu(0) = 1$.

Линейно независимое к (1.3.1) есть решение

$$\mathbb{J}_{-\nu}(x) = \frac{J_{-\nu}(x)}{x^\nu} = \frac{1}{x^\nu}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma\,(m{-}\nu{+}1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu}, \tag{1.3.2}$$

или

$$j_{-\nu}(x) = \Gamma(1-\nu)\,\frac{J_{-\nu}(x)}{x^\nu}\,2^\nu = \frac{1}{x^\nu}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\,\Gamma(1-\nu)}{m!\,\Gamma\,(m{-}\nu{+}1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu},$$

$$\nu > -\frac{1}{2} \text{ дробное}: \;\; j_{-\nu}(x) = O\left(\frac{1}{x^{2\nu}}\right) = O\left(\frac{1}{x^{\gamma-1}}\right), \;\; x \to 0\,.$$

Решение $j_{-\nu}$ не ограничено в нуле ($=\infty$), поэтому нет смысла нормировать его коэффициентом $2^\nu\,\Gamma(\nu+1)$ и более удобно использовать решение $\mathbb{J}_{-\nu}$. Если порядок ν дробный, то решения j_ν и $\mathbb{J}_{-\nu}$ представляют фундаментальную пару решений сингулярного уравнения Бесселя с положительной размерностью. В общем случае (т.е. для произвольного $\nu > -1/2$) вторым линейно независимым решением является В-цилиндрическая функция второго рода (j=функция Неймана)

$$\mathbb{Y}_\nu(x) = \frac{Y_\nu(x)}{x^\nu} = \frac{\cos(\nu\pi)\ \mathbb{J}_\nu(x) - \mathbb{J}_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}, \quad \nu = \frac{\gamma-1}{2}\,. \tag{1.3.3}$$

Таким образом, общее решение сингулярного уравнения Бесселя с положительной размерностью $+\gamma$ есть функция

$$X(x) = C_1\,j_\gamma(x) + C_2\mathbb{Y}_\nu(x)\,.$$

Нечетная j-функция Бесселя. Будем называть производную от четной j-функции Бесселя $j\,'_\nu(x) = -\frac{x}{\gamma+1}\,j_{\nu+1}(x)$. Разумеется, эта функция не удовлетворяет сингулярному уравнению Бесселя. Будем называть ее B'-цилиндрической функцией.

В [33] показано, что теорема сложения для j-функций Бесселя может быть сформулирована на основе сдвига Пуассона:

$$\text{если } \gamma>0, \text{ то } j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\lambda x)\, j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\lambda y)=T_x^y j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\lambda x). \tag{1.3.4}$$

Функции j_ν, $j_{-\nu}(x)$ и $\mathbb{Y}_\nu$ являются B-цилиндрическими функциями, поскольку они удовлетворяют сингулярному уравнению Бесселя. Нечетная j-функция Бесселя не является B-цилиндрической. Ее использование в задачах теории функций начато в работах [27], [22]. Ряды по системам j-функций Бесселя (в том числе и по нечетным j-функциям Бесселя) изучались в диссертации [49]. Далее покажем, что асимптотические свойства четных и нечетных j-функций Бесселя совпадают. Поэтому ряды Фурье—Бесселя и Дини по этим функциям естественно изучать одновременно.

1.3.1 Ортогональность системы четных-нечетных $B_{+\gamma}$-цилиндрических функций первого рода

Пусть λ_n расположенные в порядке возрастания различные фиксированные положительные числа, $\gamma{>}0$ и $\nu{=}\frac{\gamma-1}{2}$.

Наборы функций

$$\Lambda^{(n)}_{\gamma,\,ev}(x)=j_\nu(x\lambda_n),\quad \Lambda^{(n)}_{\gamma,\,od}(x)=\frac{\lambda_n x}{\gamma+1}\,j_{\nu+1}(x\lambda_n),\quad \Lambda^{(n)}_{\gamma}(x),$$

$n=1,2,3,\ldots,$ отличающиеся способом определения чисел λ_n, будем называть системами Λ-функций: $\Lambda^{(n)}_{\gamma,\,ev}$ и $\Lambda^{(n)}_{\gamma,\,od}$ являются, соответственно, четной и нечетной Λ-функциями; $\Lambda^{(n)}_{\gamma}$ — общее обозначение, т.е. эта функция может быть четной $\Lambda^{(n)}_{\gamma,\,ev}$ или нечетной $\Lambda^{(n)}_{\gamma,\,od}$. Рассмотрим следующие системы Λ-функций, определенные одним из трех способов определения чисел λ_n:

$$\begin{array}{llll} i) & j_\nu(\lambda_n)=0, & \{\Lambda^{(n)}_\gamma(x)\}, & n=1,2,\ldots; \\ ii) & j\,'_\nu(\lambda_n){=}0\ (j_{\nu+1}(\lambda_n){=}0), & \{1,\ \Lambda^{(n)}_\gamma(x)\}, & n=1,2,\ldots; \\ iii) & \lambda_n\, j'_\nu(\lambda_n)+Hj_\nu(\lambda_n)=0, & \{\Lambda^{(n)}_\gamma(x)\}, & n=1,2,\ldots, \end{array}$$

где H — некоторая данная постоянная. Следуя классическим канонам, системы функций i) и ii) будем называть системами Фурье—Бесселя—Левитана, а iii) — системой Дини-Левитана.

Так как системы Λ-функций включают четные и нечетные функции, то соотношения ортогональности рассматриваются на отрезке $[-1,1]$ при этом весовые множители в соответствующих интегральных выражениях полагаются четными:

$$x^\gamma = (x^2)^{\gamma/2}\,.$$

Это позволяет рассматривать ряды только по четным или только по нечетным Λ-системам на отрезке $[0,1]$.

Теорема 1.3.1. *(Санина [49]) Каждая из систем Λ-функций i)—iii), где $\gamma=2\nu+1>-1$, ортогональна на отрезке $[0,1]$ с весом $x^\gamma = (x^2)^{\gamma/2}$:*

$$\int\limits_{-1}^{1} \Lambda_\nu^k(x)\ \Lambda_\nu^m(\,x)\ x^\gamma\ dx = \begin{cases} 0\,, & k\neq m \\ M^2\,, & k=m \end{cases}\ .$$

В зависимости от определения чисел λ_n в i)-iii) нормы Λ-функций вычисляются по формулам

в случае i) $\quad M^2 = \|\Lambda_\nu^{(n)}\|^2_{L_2^\gamma(-1,1)} = [j\,'_\nu(\lambda_n)]^2;$

в случае ii) $\quad M^2 = \|\Lambda_\nu^{(n)}\|^2_{L_2^\gamma(-1,1)} = [j_\nu(\lambda_n)]^2;$

в случае iii), $\quad M^2 = \|\Lambda_\nu^{(n)}\|^2_{L_2^\gamma(-1,1)} = \frac{j_\nu^2(\lambda_n)}{\lambda_n^2}\,[\lambda_n^2-\nu^2+(\nu+H)^2].$

1.3.2 Оценка L_2^γ — нормы Λ-цилиндрических функций, отвечающих положительной размерности оператора Бесселя $+\gamma$

Обозначим

$$L_2^\gamma(-1,1) = \{f:\ x^{\frac{\gamma}{2}}\,f(x)\in L_2(-1,1)\}\,,\ \gamma=2\nu+1>-1,$$

$$\|f\|_{L_2^\gamma(-1,1)} = \left[\int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^2\ x^\gamma\ dx\right]^{1/2}, \quad x^\gamma = (x^{\gamma/2})^2\,.$$

Выше были установлены три системы Λ-функций Бесселя, которые отличаются способом определения чисел λ_n. Таблица L_2^γ-норм этих функций приведена в теореме 1.3.1 (равенства i), ii), iii)). Нам понадобятся оценки сверху и снизу L_2^γ-нормы этих функций. Из асимптотического представления функций Бесселя первого рода (см. [52], с. 259, формула (9.17)) при больших значениях аргумента получим асимптотическое представление функций $\Lambda_\nu^{(n)}$:

$$j_\nu(x) = \frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{x^\nu}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi\,x}}\ \sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{r_\nu(x)}{x^{3/2}}\right], \quad x\to\infty\,.$$

$$|j_\nu(\lambda_n)| = O(\lambda_n^{-\nu-1/2})\,, \quad n\to\infty$$

$$j\,'_\nu(x) = \frac{-x}{2(\nu+1)}\ j_{\nu+1}(x) =$$

$$= -\frac{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+2)}{x^\nu}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi\,x}}\ \sin\left(x-\frac{(\nu+1)\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{r_{\nu+1}(x)}{x^{3/2}}\right], \quad x\to\infty.$$

$$|j\,'_\nu(\lambda_n)| = |\frac{\lambda_n}{2(\nu+1)}\ j_{\nu+1}(\lambda_n)| = O(\lambda_n^{-\nu-1/2})\,, \quad n\to\infty\,.$$

Отсюда, для больших значений λ_n имеем оценки:

для случая i)

$$\|\Lambda_\nu^{(n)}(x)\|_{L_2^\gamma(-1,1)}=|j\,'_\nu(\lambda_n)|=\frac{\lambda_n}{\gamma+1}\ |j_{\nu+1}|=O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\nu+1/2}}\right);$$

для случая ii)

$$\|\Lambda_\nu^{(n)}(x)\|_{L_2^\gamma(-1,1)}=|j_\nu(\lambda_n)| = O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\nu+1/2}}\right);$$

для случая iii)

$$\|\Lambda_\gamma^{(n)}(x)\|_{L_2^\gamma(-1,1)} = \sqrt{\frac{j_\nu^2(\lambda_n)}{\lambda_n^2}\,[\lambda_n^2-\nu^2+(\nu-H)^2]} = O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\nu+1/2}}\right).$$

Итак, при всех способах i), ii) и iii) определения чисел λ_n имеет место одна и та же оценка, справедливая для четных и нечетных Λ-функций:

$$\|\Lambda_\gamma^{(n)}(x)\|_{L_2^\gamma(-1,1)} = O(\lambda^{-\nu-1/2}), \quad \lambda_n >> 1\,.$$

(см. [52], с. 268).

На самом деле справедливо более общее утверждение ([49]).

Теорема 1.3.2. *Пусть* $\gamma{=}2\nu{+}1 > 0$. *Для всех случаев определения чисел* λ_n *в i) —iii) справедливо неравенство* $\|\Lambda_\nu^{(n)}\|_{L_2^\gamma(-1,1)} \asymp \frac{1}{\lambda_n^{\nu+1/2}}$, *т.е. существуют положительные константы* K_ν *и* M_ν, *зависящие только от* ν, *такие, что*

$$K_\nu\, \frac{1}{\lambda_n^{\nu+1/2}} \le \|\Lambda_\nu^{(n)}\|_{L_2^\gamma(-1,1)} \le M_\nu\, \frac{1}{\lambda_n^{\nu+1/2}}\,, \quad \lambda_n >> 1\,.$$

1.4 B-цилиндрические функции, отвечающие отрицательной размерности оператора Бесселя $-\beta$

Оператор Бесселя с отрицательной размерностью $-\beta$ имеет вид

$$B_{-\beta} = \frac{d^2}{dt^2} - \frac{\beta}{t}\,\frac{d}{dt} = t^\beta \frac{d}{dt}\left(t^{-\beta}\,\frac{d}{dt}\right)\,, \quad \beta > 0.$$

Классическое уравнение Бесселя

$$t^2\frac{d^2u(t)}{dt^2} + t\frac{du(t)}{dt} + (t^2 - \mu^2)u(t) = 0 \tag{1.4.1}$$

содержит параметр μ^2 при этом число μ является порядком функции Бесселя J_μ — решения этого уравнения. Это приводит к тому, что решениями классического уравнения Бесселя одновременно являются две функции — J_μ и $J_{-\mu}$ причем вторая получается из первой формальной заменой символа μ на символ $-\mu$. Несовпадение решений сингулярного уравнения Бесселя с положительным и отрицательным параметром β очевидно, поскольку равенство функций $B_{-\beta}u$ и $B_\beta u$ возможно только в редком и неинтересном случае $u = const$. Решения сингулярного уравнения Бесселя $B_{-\beta}u + \lambda u = 0$ будем называть $B_{-\beta}$ *-цилиндрическими функциями*, сокращенно *j^*-функции Бесселя.* Они окажутся связанными с j-функциями Бесселя, порядок которых μ зависит от параметра оператора Бесселя (β) по формуле

$$\mu = \frac{\beta - 1}{2} + 1 = \frac{\beta + 1}{2}.$$

Рассмотрим уравнение Бесселя с отрицательной размерностью

$$B_{-\beta}u(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} - \frac{\beta}{t}\,\frac{du(t)}{dt} = -u(t)\,, \quad \beta = 2\mu - 1 > 0\,. \qquad (1.4.2)$$

Непосредственными вычислениями доказано следующее утверждение.

Согласно лемме 1.2.1 (утверждение (1.2.4)), *ограниченное решение сингулярного уравнения Бесселя* (1.4.2), нормированное условием равенства единице при $t = 0$, имеет вид

$$j^*_{-\mu}(t) = j_{-\mu}(t) = \Gamma(1-\mu)\left(\frac{t}{2}\right)^{\mu} J_{-\mu}(t) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\,\Gamma(1-\mu)}{m!\,\Gamma\,(m+1-\mu))}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m},$$

$$\mu{\neq}1,2,3,\ldots \quad j_{-\mu}(0){=}1\,. \quad (1.4.3)$$

Но это решение неопределено при $\mu = 1, 2, \ldots$. Для произвольного $\mu > 0$ более приспособленным для дальнейших исследований окажется решение (1.4.2), заданное функцией

$$\mathbb{J}^*_{-\mu}(t) = t^{\mu}\,J_{-\mu} = \frac{2^{\mu}\,j_{-\mu}(t)}{\Gamma(1-\mu)} = 2^{\mu}\,\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma\,(m+1-\mu)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m}. \quad (1.4.4)$$

При этом, если p — натуральное число, то $J_{-p}(t) = (-1)^p J_p$ (см. [2], с. 14, формула(24)), поэтому

$$\mathbb{J}^*_{-p}(t){=}\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu}\,J_{-\mu}(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^{\mu}\,(-1)^p\,J_p(t)$$

По лемме 1.2.1 решения классического и сингулярного уравнений Бесселя связаны равенством $t^p\, J_p(t) = \mathbb{J}_p(t)$. Т.е. мы получили равенство $\mathbb{J}^*_{-p}(t){=}C\ \mathbb{J}_p(t)$, подтверждающее линейную зависимость этих функций.

Неограниченное (при $t \to \infty$ *) решение уравнения* (1.4.2) *имеет вид*

$$\mathbb{J}^*_\mu(t) = t^\mu\ J_\mu(t) = \frac{j^*_\mu(t)}{2^\mu\,\Gamma(\mu+1)} = t^\mu\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma\,(\mu+m+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+\mu}, \qquad (1.4.5)$$

$$\mu{=}\frac{\beta{+}1}{2}\,.$$

или

$$j^*_\mu(t) = t^{2\mu}\ j_\mu(t) = t^{2\mu}\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\,\Gamma\,(\mu+1)}{m!\,\Gamma\,(\mu+m+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m} = 2^\mu\,\Gamma(\mu+1)\,t^\mu\ J_\mu(t).$$

Соответствующую j^* -функцию Неймана введем следующим образом

$$\mathbb{Y}^*_\mu(t) = \mathbb{Y}^*_{\frac{\beta+1}{2}}(t) = t^\mu\, Y_{\frac{\beta+1}{2}}(t) = \frac{\cos(\nu\pi)\,\mathbb{J}^*_\mu(t) - \mathbb{J}^*_{-\mu}(t)}{\sin\nu\pi}\,. \qquad (1.4.6)$$

При этом $\mathbb{J}^*_{-\mu}(t) = t^\mu\, J_{-\mu}$, а Y_μ классическая функция Неймана.

Итак, фундаментальная система функций уравнения (1.4.1) представлена набором функций $\mathbb{J}^*_\mu$ и $\mathbb{Y}^*_\mu$ или $j^*_{-\mu}(= j_{-\mu}(t))$ и $\mathbb{Y}^*_\mu$. Поэтому общее решение уравнения (1.4.2) може быть представлено в двумя функциями с неопределенными коэффициентами

$$T(t) = C_1\,\mathbb{J}^*_\mu(t) + C_2\,\mathbb{Y}^*_\mu(t)\,.$$

или

$$T(t) = C_1\,j_{-\mu}(t) + C_2\,\mathbb{Y}^*_\mu(t)\,.$$

Выбор одного из этих решений зависит от условия на поведения решения в точке $t=0$, поскольку $\mathbb{J}^*_\mu(0) = 0$, а $j_{-\mu}(0) = 1$.

1.4.1 Ортогональность $B_{-\beta}$-цилиндрических функций при $\beta \geq 1$

Учитывая, что $\mathbb{J}^*_\mu(t) = \frac{t^{2\mu}\, j_\mu(t)}{2^\mu\, \Gamma(\mu+1)}$ и что $j_\mu(0) = 1$, получим

$$\mathbb{J}^*_\mu(t) = O(t^{2\mu}) = O(t^{\beta+1}),\ \ t \to 0\,.$$

Это дает возможность ввести набор ортогональных функций, удовлетворяющих сингулярному уравнению Бесселя с отрицательным индексом размерности.

При $-\beta \leq -1$ для разложения функций в ряды Фурье по решениям этого уравнения мы используем неограниченное решение $\mathbb{J}^*_\mu$ положительного порядка $\mu = \frac{\beta+1}{2}$:

$$B_{-\beta}\ \mathbb{J}^*_\mu(\lambda t) = -\lambda^2 \mathbb{J}^*_\mu(\lambda t).$$

Это приводит к следующим системам ортогональных (с весом $t^{-\beta}$) функций

$$\mathbb{J}^*_\mu(\lambda_n) = 0, \quad \{\Lambda^{(n)}_{-\beta}(t)\}, \quad n = 1, 2, \ldots\,; \tag{1.4.7}$$

$$\mathbb{J}^{*\prime}_\mu(\lambda_n) = 0, \quad \{\Lambda^{(n)}_{-\beta}(t)\}, \quad n = 1, 2, \ldots\,; \tag{1.4.8}$$

$$\lambda_n\, \mathbb{J}^{*\prime}_\mu(\lambda_n) + H\mathbb{J}^*_\mu(\lambda_n) = 0, \quad \{\Lambda^{(n)}_{-\beta}(t)\}, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{1.4.9}$$

где H — некоторая данная вещественная постоянная, а $\Lambda^{(n)}_{-\beta}(t) = \mathbb{J}^*_\mu(\lambda_n t)$ — B-цилиндрическая функция (1.4.5), отвечающая отрицательной размерности оператора Бесселя $-\beta \leq -1$, а число λ_n одному из условий (1.4.7) – (1.4.9).

1.4.2 Нормы $B_{-\beta}$-цилиндрических функций при $\beta \geq 1$

Будем использовать следующий весовой лебеговский класс функций

$$L_2^{-\beta}(-1,1) = \{f:\ (t^2)^{-\frac{\beta}{4}}\, f(t) \in L_2(-1,1)\}\,,\ \beta = 2\mu - 1 \geq 0,$$

$$\|f\|_{L_2^{-\beta}(-1,1)} = \left[\int\limits_{-1}^{1} |f(t)|^2 \ (t^2)^{-\beta/2} \ dt\right]^{1/2} .$$

Теорема 1.4.1. *Любая из систем функций* (1.4.7) – (1.4.9), *где* $-\beta{=}1{-}2\mu{\le}{-}1$, *ортогональна в весовом лебеговском классе функций* $L_2^{-\beta}(-1,1)$ *:*

$$\int\limits_{-1}^{1} \Lambda_{-\beta}^{(k)}(t) \ \Lambda_{-\beta}^{(m)}(\,t) \ t^{-\beta} \ dt = \begin{cases} 0\,, & k \neq m \\ M^2\,, & k = m \end{cases} .$$

где, в зависимости от определения чисел λ_n, *нормы* $\Lambda_{-\beta}$ *-функций вычисляются по формулам*

$$\begin{aligned}
&\text{в случае} \quad (1.4.7): \quad M^2 = \|\Lambda_{-\beta}^{(n)}\|^2_{L_2^{-\beta}(-1,1)} = [\mathbb{J}^{*}{}'_{\mu}(\lambda_n)]^2;\\
&\text{в случае} \quad (1.4.8): \quad M^2 = \|\Lambda_{-\beta}^{(n)}\|^2_{L_2^{-\beta}(-1,1)} = [\mathbb{J}^{*}_{\mu}(\lambda_n)]^2;\\
&\text{в случае} \quad (1.4.9): \quad M^2 = \|\Lambda_{-\beta}^{(n)}\|^2_{L_2^{-\beta}(-1,1)} =\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = \tfrac{|\mathbb{J}^{*}_{\mu}(\lambda_n)|^2}{\lambda^2}[\lambda^2 - \mu^2 + (\mu + H)^2].
\end{aligned}$$

Выше были установлены три системы $\Lambda_{-\beta}$ -функций, которые отличаются способом определения чисел λ_n . Далее нам понадобятся оценки сверху и снизу $L_2^{-\beta}$ — норм этих функций при больших значениях λ_n . Воспользуемся равенством (1.4.5) и асимптотическим представлением (см. книгу [52], с. 259, формула (9.17)) J-функций Бесселя (положительного порядка) при больших значениях аргумента,

$$\mathbb{J}^{*}_{\mu}(t) = t^{\mu}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi\, t}}\ \sin\left(t - \frac{\mu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{r_\mu(t)}{t^{3/2}}\right] , \quad t \to \infty \,.$$

Отсюда следует асимптотическое равенство

$$|\mathbb{J}^{*}_{\mu}(t)| = O(t^{\mu - 1/2})\,, \quad t \to \infty, \quad |\mathbb{J}^{*}_{\mu}(t)| = O(t^{2\mu - 1/2})\,, \quad t \to 0\,.$$

Из (1.4.5)

$$\mathbb{J}^{*}_{\mu}{}'(t) = \frac{1}{2^{\mu}\,\Gamma(\mu+1)}\ \left(2\mu\, t^{2\mu-1}\, j_\mu(t) - t^{2\mu}\, \frac{t}{\beta+1} j_{\mu+1}(t)\right) ,$$

$$|\mathbb{J}^{*\prime}_\mu(t)| = O(t^{\mu-1/2})\,, \quad t\to\infty\,; \quad \mathbb{J}^{*\prime}_\mu(t) = O(t^{2\mu-1})\,, \quad t\to 0\,.$$

Отсюда, для всех трех случаев (1.4.7), (1.4.8) и (1.4.9) определения чисел λ_n и для больших значений n имеем оценки:

$$\|\Lambda^{(n)}_{-\beta}(t)\|_{L_2^{-\beta}(-1,1)} = O\left(\lambda_n^{\mu-1/2}\right)\,, \quad n\to\infty\,.$$

На самом деле справедливо более общее утверждение.

Теорема 1.4.2. *Пусть* $-\beta{=}1{-}2\mu \geq -1$ *и числа* λ_n *удовлетворяют одному из условий* (1.4.7) – (1.4.9). *Для достаточно больших* λ_n *справедливо неравенство*

$$K_\mu\ \lambda_n^{\mu-1/2} \leq \|\Lambda^{(n)}_{-\beta}\|_{L_2^{\beta}(-1,1)} \leq M_\mu\ \lambda_n^{\mu-1/2}\,,$$

где K_μ *и* M_μ *— положительные константы, зависящие только от* μ *.*

1.4.3 Ортогональность $B_{-\beta}$-цилиндрических функций при $0<\beta<1$

Вначале отметим, что решение задач Штурма—Лиувилля для уравнения (1.4.2) может потребовать противоположных свойств собственных функций оператора $B_{-\beta}$. Например равенство нулю в точке $t=0$ или не равенства нулю. В первом случае придется использовать функции $\mathbb{J}^*_\mu$, а в противоположной $j_{-\mu}$. Но последние можно использовать только при малы значениях μ : $0<\mu<1$, что связано с мерой ортогональности $x^{-\beta}dt$ (она же мера самосопряженности оператора $B_{-\gamma}$).

При $0<\beta<1$ для разложения функций в ряды Фурье по решениям уравнения (1.4.2) мы используем ограниченное решение $j_{-\mu}$:

$$B_{-\beta}\ j_{-\mu}(\lambda t) = -\lambda^2 j_{-\mu}(\lambda t).$$

Это приводит к следующим системам ортогональных (с весом $t^{-\beta}$) функций

$$j_{-\mu}(\lambda_n)=0, \quad \{\Lambda^{(n)}_{-\beta}(t)\}, n=1,2,\,\ldots\,; \tag{1.4.10}$$

$$j'_{-\mu}(\lambda_n)=0, \quad \{\Lambda_{-\beta}^{(n)}(t)\}, \quad n=1,2,\dots; \tag{1.4.11}$$

$$\lambda_n\, j\,'_{-\mu}(\lambda_n)+Hj_{-\mu}(\lambda_n)=0, \quad \{\Lambda_{-\beta}^{(n)}(t)\}, \quad n=1,2,\dots. \tag{1.4.12}$$

где H — некоторая данная вещественная постоянная, а $\Lambda_{-\beta}^{(n)}(t) = j_{-\mu}(\lambda_n t)$ — B-цилиндрическая функция (1.4.3), отвечающая отрицательной размерности оператора Бесселя $0<\beta<1$, а число λ_n одному из условий (1.4.10) – (1.4.12).

1.4.4 Нормы $B_{-\beta}$-цилиндрических функций при $0<\beta<1$

Будем использовать следующий весовой лебеговский класс функций

$$L_2^{-\beta}(-1,1)=\{f:\ (t^2)^{-\frac{\beta}{4}}\, f(t)\in L_2(-1,1)\}\,,\ 0<\beta=2\mu-1<1,$$

$$\|f\|_{L_2^{-\beta}(-1,1)}=\left[\int\limits_{-1}^{1}|f(t)|^2\ (t^2)^{-\beta/2}\ dt\right]^{1/2}.$$

Теорема 1.4.3. *Любая из систем функций* (1.4.10) – (1.4.12)*, где* $0<\beta<1$*, ортогональна в весовом лебеговском классе функций* $L_2^{-\beta}(-1,1)$*:*

$$\int\limits_{-1}^{1}\Lambda_{-\beta}^{(k)}(t)\ \Lambda_{-\beta}^{(m)}(\,t)\ t^{-\beta}\ dt=\begin{cases}0\,, & k\neq m\\ M^2\,, & k=m\end{cases}.$$

где, в зависимости от определения чисел λ_n*, нормы* $\Lambda_{-\beta}$*-функций вычисляются по формулам*

$$\begin{aligned}
&\textit{в случае}\quad (1.4.10): && M^2=\|\Lambda_{-\beta}^{(n)}\|^2_{L_2^{-\beta}(-1,1)}=[j\,'_{-\mu}(\lambda_n)]^2;\\
&\textit{в случае}\quad (1.4.11): && M^2=\|\Lambda_{-\beta}^{(n)}\|^2_{L_2^{-\beta}(-1,1)}=[j_{-\mu}(\lambda_n)]^2;\\
&\textit{в случае}\quad (1.4.12): && M^2=\|\Lambda_{-\beta}^{(n)}\|^2_{L_2^{-\beta}(-1,1)}=\\
& && =\tfrac{|j_{-\mu}(\lambda_n)|^2}{\lambda^2}\left[\lambda^2-\mu^2+(-\mu+H)^2\right].
\end{aligned} \tag{1.4.13}$$

Оценка L_2^β — нормы $\Lambda_{-\beta}$ -цилиндрической функции Бесселя при $0<\beta<1$

Для функций Бесселя первого рода при $p>-1$ справедливо неравенство $|J_p(t)|\le\frac{2A}{\sqrt{t}}$, $t>>1$ (например см. [52], с.277) Согласно (1.4.3) имеем

$$|j_{-\mu}(t)|=O(t^{\mu-1/2})\,,\quad t\to\infty\,;\quad |j'_{-\mu}(t)|=O(t^{\mu-1/2})\,,\quad t\to\infty.$$

Из равенств (1.4.13) имеем оценки:

$$\|\Lambda_{-\beta}^{(n)}(t)\|_{L_2^{-\beta}(-1,1)}=O\left(\lambda_n^{\mu-1/2}\right)\,,\quad n\to\infty\,,$$

и справедлива следующая теорема:

Теорема 1.4.4. *Пусть* $-1<-\beta{=}1{-}2\mu<0$ *и числа* λ_n *удовлетворяют одному из условий* (1.4.10) – (1.4.12). *Для достаточно больших* λ_n *справедливо неравенство*

$$K_\mu\ \lambda_n^{\mu-1/2}\le\|\Lambda_{-\beta}^{(n)}\|_{L_2^\beta(-1,1)}\le M_\mu\ \lambda_n^{\mu-1/2}\,,$$

где K_μ *и* M_μ *— положительные константы, зависящие только от* μ .

1.5 Ряды Левитана

Здесь мы рассматриваем функции (непрерывные или из $L_2^\gamma(-1,1)$) представленные рядами на $[-1,1]$ следующего вида $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\ \Lambda_\nu^{(n)}(x)$. Общее название рассматриваемых рядов — *ряды Левитана*. Среди них выделим ряды типа Фурье—Бесселя и типа ряда Дини. Необходимо изучать отдельно ряды по $\Lambda_{\nu,\,ev}^{(n)}$, и $\Lambda_{\nu,\,od}^{(n)}$. Для разложения произвольной (по отношению к четности-нечетности) функции используются ряды изученные Б.М. Левитаном в [33] по j-функциям Бесселя следующего вида:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\ j_\nu(\lambda_n\,x)+b_n\ \frac{x\,\lambda_n}{(\nu+1)}\ j_{\nu+1}(\lambda_n\,x)\right).\qquad(1.5.1)$$

Определение 1.5.1. *Пусть числа* λ_n *удовлетворяют одному из условий i) — iii). Ряд* (1.5.1), *где*

$$a_0=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\; x^{2(\nu+1/2)}dx,\quad a_n=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\; j_\nu(\lambda_n x)\; x^{2(\nu+1/2)}\; dx\,,$$

$$b_n=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\; \frac{x\,\lambda_n}{2(\nu+1)}\, j_{\nu+1}(\lambda_n x)\; x^{2(\nu+1/2)}\; dx\,.$$

будем называть рядом Фурье—Бесселя—Левитана типа i) или ii) по $B_{+\gamma}$ *-цилиндрическим функциям, если числа* λ_n *удовлетворяют условиям i) или ii) соответственно, и рядом Дини—Левитана, если числа* λ_n *удовлетворяют условию iii).*

Без учета четности-нечетности рассматриваемых функций все три $L_2^\gamma(-1,1)$-нормы функций $\Lambda_\gamma^{(n)}$ будем обозначать одним символом — $\|\Lambda_\gamma^{(n)}(x)\|_\gamma$.

Отметим, что ортогональность систем $\{\Lambda_\gamma^{(n)}\}$– функций в весовом классе Лебега $L_2^\gamma(-1,1)$ равносильна ортогональности систем $\{x^{\gamma/2}\Lambda_\gamma^{(n)}\}$– функций в классе Лебега $L_2(-1,1)$. Это позволяет считать справедливыми для систем $\{\Lambda_\gamma^{(n)}\}$– функций утверждения об ортогональных системах функций в $L_2(-1,1)$.

Теорема Рисса—Фишера ([15], с. 207), справедлива для любой ортонормированной в $L_2(a,b)$ системы функций, поэтому справедлива для систем функций i), ii), iii), рассматриваемых в весовом пространстве L_2^γ . В частности, справедливо *равенство Парсеваля для систем B-цилиндрических функций* i) — iii).

В случае i) и iii)

$$\int\limits_0^1 f^2(x)\,x^\gamma\; dx=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\,\|\Lambda_\nu^{(n)}\|_\gamma^2\,,$$

а в случае ii)

$$\int\limits_0^1 f^2(x)\, x^\gamma\, dx = \frac{1}{2}\, a_0^2 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\, \|\Lambda_\nu^{(n)}\|_\gamma^2\,, \quad \nu = \frac{\gamma-1}{2}\,.$$

Выполнение равенства Парсеваля для произвольной системы ортонормированных функций есть критерий полноты и замкнутости самой этой системы в весовом лебеговом классе. Справедлива

Теорема 1.5.1. *Нормированные системы весовых ортогональных функций i), ii) и iii) являются полными (замкнутыми) в* $L_2^\gamma(-1,1)$.

Поскольку система Λ-функций $\{\Lambda_\nu^{(n)}(x)\}|_{n=0}^{\infty}$ полная, то всякая функция $f(x) \in L_2^\gamma(-1,1)$ вполне определена своим рядом Фурье-Бесселя или Дини независимо от того сходятся соответствующие ряды или нет.

1.5.1 О равномерной сходимости $\Lambda_{+\gamma}$-бесселевых разложений Левитана

Б.М. Левитан в работе [33] заметил, что асимптотическое поведение функций Бесселя при больших значениях аргумента может служить причиной равномерной сходимости соответствующих рядов.

Множество

$$H_\gamma^{2m+1}(0,1) = \left\{ f:\ \|f\|^2_{H_\gamma^2} = \sum_{k=0}^{m} \|B_\gamma^k f\|^2_{L_2^\gamma(0,1)} + \left\| \frac{d}{dx} B_\gamma^m f \right\|^2_{L_2^\gamma(0,1)} < \infty \right\}$$

будем называть пространством Соболева—Киприянова нечетной B-гладкости.

Функции

$$X_n(x) = \frac{\Lambda_\gamma^{(n)}(x)}{\|\Lambda_\gamma^{(n)}\|_{L_2^\gamma(0,1)}}$$

будем называть нормированными $\Lambda_\gamma^{(n)}$-функциями. Здесь, по-прежнему, под символом $\Lambda_\gamma^{(n)}$ понимаем одну из цилиндрических

Λ-функций Бесселя, когда λ_n удовлетворяет одному из трех условий в i)-iii). Если функция $f \in H_\gamma^2(0,1)$, то в смысле сходимости в весовом среднем для нее справедливо представление

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x), \quad a_n = 2\int_0^1 f(x)\ X_n(x)\ x^\gamma dx\,.$$

Теорема 1.5.2. *Пусть* $\gamma = 2\nu + 1 > 0$, *числа* λ_n *удовлетворяют одному из условий i) — iii) и функция* $f(x) \in C^{2m} \cap H_\gamma^{2m+1}(0,1)$ *при этом*

в случае i) и iii) требуется, чтобы $B_\gamma^k f(1) = 0\ \ k = 0, 1, \ldots, m.$

Тогда ряды Фурье—Бесселя—Левитана сходятся к $f(x)$ *абсолютно и равномерно на* $[0,1]$.

Из теоремы Вейерштрасса вытекает

Следствие 1.5.1. *Ряды типа i) — iii) для четной функции* f, *удовлетворяющей условиям теоремы 1.5.2 для* $m \geq 0$, *сходятся абсолютно и равномерно.*

1.5.2 О производной и $B_{+\gamma}$-производной ряда по четным $\Lambda_\gamma^{(n)}$-функциям

Ряд из производных ряда по четным функциям $\Lambda_{\gamma,\,ev}^{(n)} = j_n u$ приведет к ряду по нечетным функциям $\Lambda_{\gamma,\,od}^{(n)} = \frac{x\lambda_n^2}{2} j_{\nu+1}$. При этом коэффициенты связаны соотношением $a'_n = -\lambda_n\, a_n$, из которого видно, что полученный ряд не обязан сходиться.

Формально почленная B_γ-производная четных рядов типа i), ii) и ряда типа iii) $f(x) = \sum_0^\infty a_n\ X_n(x)$ приведет вновь к тем же рядам Левитана типа Фурье—Бесселя или Дини, которые, вообще говоря, не обязаны быть сходящимися:

$$B_\gamma^m f \sim \sum_1^\infty a'_n\ \Lambda_\gamma^{(n)}(x)\ x^\gamma dx\,, \quad a'_n = \int_{-1}^1 (B_\gamma^m f)(x) \Lambda_\gamma^{(n)}(x)\ x^\gamma dx\,.$$

При этом $a'_n = (-\lambda_n^2)^m\, a_n$. Но если ряд для $B_\gamma^m f$ оказывается сходящимся, то имеет место равенство[1]

$$B_\gamma^m f = \sum_1^\infty a'_n\ \Lambda_\gamma^{(n)}(x)\ x^\gamma dx\,.$$

Из теоремы 1.5.2 и теоремы Вейерштрасса вытекает

Следствие 1.5.2. *Ряд из B_γ^m -производных членов ряда типа i)—iii) для четной функции f , удовлетворяющей условиям теоремы 1.5.2 для $m \geq 1$, равен B_γ^m -производной суммы ряда и сходится абсолютно и равномерно.*

1.6 Ряды Левитана по ограниченным $\Lambda_{-\beta}^{(n)}$-цилиндрическим функциям при $0 < \beta < 1$

Ортогональность функций $\Lambda_{-\beta}^{(n)}$ в весовом классе функций $L_2^{-\beta}(-1,1)$ равносильна ортогональности функций $x^{-\beta/2}\,\Lambda_{-\beta}^{(n)}$ в обычном пространстве Лебега $L_2(-1,1)$. Поэтому для систем функций (1.4.10) – (1.4.12) справедливы утверждения относительно рядов Фурье по произвольной системе ортогональных функций в $L_2(-1,1)$. Дадим формулировки этих утверждении в терминах $\Lambda_{-\beta}$ -функций. Отметим, что функции $\Lambda_{-\beta}^{(n)} = j_{-\mu}(\lambda_n t) = \left(\frac{t}{2}\right)^\mu \Gamma(1-\mu) J_{-\mu}(\lambda_n t)$ предполагаются четными, поэтому далее интегральные операции достаточно рассмотреть на отрезке $[0,1]$.

Ряд по B-цилиндрическим функциям (1.4.10) – (1.4.12)

$$f(t) = \sum_{n=1}^\infty a_n\ j_{-\mu}(\lambda_n\, t)\,, \quad a_n = 2\int_0^1 f(t)\ j_{-\mu}(\lambda_n t)\ t^{-\gamma}\ dt$$

---

[1] Для тригонометрических рядов Фурье см. книгу [45], с. 534-541

будем называть рядом Фурье-Бесселя, если числа λ_n удовлетворяют условиям (1.4.10) или (1.4.11), соответственно, и *рядом Дини*, если числа λ_n удовлетворяют условию (1.4.12).

1.6.1 О равномерной сходимости $\Lambda_{-\beta}$-бесселевых рядов Фурье—Бесселя при $0<\beta<1$

. Введем нормированные $B_{-\beta}$-цилиндрические функции

$$T_n(t)=\frac{\Lambda^{(n)}_{-\beta}(t)}{\|\Lambda^{(n)}_{-\beta}\|_{L_2^{-\beta}(0,1)}}$$

Из теоремы Рисса—Фишера, справедливой для произвольной ортонормированной системы функций, вытекает

Теорема 1.6.1. *Системы функций* $\{T_n(t)\}$ *являются полными (замкнутыми) в* $L_2^{-\beta}(0,1)$.

Множество

$$H^{2m+1}_{-\beta}(0,1)=$$

$$=\left\{f:\ \|f\|^2_{H^2_{-\beta}}=\sum_{k=0}^{m}\|B^k_{-\beta}f\|^2_{L_2^{-\beta}(0,1)}+\left\|\frac{d}{dx}B^m_{-\beta}f\right\|^2_{L_2^{-\beta}(0,1)}<\infty\right\}$$

будем называть пространством Соболева—Киприянова нечетной $B_{-\beta}$-гладкости.

Теорема 1.6.2. *Пусть* $0<\beta<1$, *числа* λ_n *удовлетворяют одному из условий* (1.4.10) – (1.4.12) *и функция* $f(t)\in H^{2m+1}_{-\beta}(0,1)$, m=0, 1, 2, ... *при этом*

$$\lim_{t\to0}t^{-\beta}D^{\alpha}_{B_{-\beta}}f(t)=0,\ \ D^{\alpha}_{B_{-\beta}}f(1)=0;$$

где $\alpha\le 2m$. *Тогда для коэффициентов рядов Фурье—Бесселя* (1.4.10), (1.4.11) *и Дини* (1.4.12) *справедлива оценка*

$$a_n=O(\lambda_n^{-2m})\quad n\to\infty$$

В качестве следствия из этой теоремы справедливо утверждение о равномерной и абсолютной сходимости ряда Фурье-Бесселя для производной функции.

Следствие 1.6.1. *Пусть для функции* $f \in H^3_{-\beta}(0,1)$ *выполнены условия теоремы. Тогда для коэффициентов ряда Фурье-Бесселя* (1.4.11) *справедлива оценка*

$$|a_n| = O(\lambda_n^{-4})$$

и ряд Фурье—Бесселя $f'(t = \sum_1^\infty a_n T_n(t)$ *сходится абсолютно и равномерно.*

1.6.2 О $B_{-\beta}$ - производных рядов по нормированным $\Lambda_{-\beta}^{(n)}$-функциям при $0 < \beta < 1$

Формальная почленная $B_{-\beta}$-производная ряда Фурье—Бесселя (1.4.10), (1.4.11) или Дини (1.4.12)

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n \; \Lambda_{-\beta}^{(n)}(t)$$

приведет вновь к тем же рядам Фурье—Бесселя или Дини, которые, вообще говоря, не обязаны быть сходящимися:

$$B^m_{-\beta} f \sim \sum_1^\infty a'_n \; \Lambda_{-\beta}^{(n)}(t)\,, \quad a'_n = \int_{-1}^1 (B^m_{-\beta} f)(t) \Lambda_{-\beta}^{(n)}(t) \; t^{-\beta} dt\,.$$

При этом $a'_n = (-\lambda_n^2)^m \; a_n$. Но если ряд для $B^m_{-\beta} f$ оказывается сходящимся, то имеет место равенство

$$B^m_{-\beta} f = \sum_1^\infty a'_n \; \Lambda_{-\beta}^{(n)}(t) \; t^{-\beta} dt\,. \tag{1.6.1}$$

Сходимость рядов из B-производных ряда (1.6.1) можно получить в качестве следствия из теоремы 1.6.2.

Теорема 1.6.3. *Пусть* $f_1 = (D^m_{B_{-\beta}} f)(t) \in C(0,1)$, $m = 0, 2, 4, \ldots$. *Ряды Фурье-Бесселя* (1.4.10), (1.4.11) *или Дини* (1.4.12) *для функции* $f_1(t) \in H^{2m+1}_{-\beta}$ *такой, что*

в случае (1.4.10) *и* (1.4.12) *требуется, чтобы* $f_1(0) = f_1(1) = 0$;

в случае (1.4.11) *требуется, только чтобы* $f_1(0) = 0$

сходятся абсолютно и равномерно

1.7 Ряды Фурье-Бесселя и Дини при $\beta \geq 1$

Ортогональность функций $\Lambda^{(n)}_{-\beta}$ в весовом классе функций $L_2^{-\beta}(-1,1)$ равносильна ортогональности функций $x^{-\beta/2}\,\Lambda^{(n)}_{-\beta}$ в обычном пространстве Лебега $L_2(-1,1)$. Поэтому для систем функций (1.4.7) – (1.4.9) справедливы утверждения относительно рядов Фурье по произвольной системе ортогональных функций в $L_2(-1,1)$. Дадим формулировки этих утверждении в терминах $\Lambda_{-\beta}$ -функций. Отметим, что функции $\Lambda^{(n)}_{-\beta} = \mathbb{J}^*_\mu(\lambda_n t) = t^\mu J_\mu(\lambda_n t)$ предполагаются четными, поэтому далее интегральные операции достаточно рассмотреть на отрезке $[0,1]$.

Ряд по B-цилиндрическим функциям (1.4.7) – (1.4.9)

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ \mathbb{J}^*_\mu(\lambda_n t)\,, \quad a_n = 2\int_0^1 f(t)\ \mathbb{J}^*_\mu(\lambda_n t)\ t^{-\beta}\ dt$$

будем называть рядом Фурье-Бесселя, если числа λ_n удовлетворяют условиям (1.4.7) или (1.4.8), соответственно, и *рядом Дини*, если числа λ_n удовлетворяют условию (1.4.9).

Функции

$$T_n(t) = \frac{\Lambda^{(n)}_{-\beta}(t)}{\|\Lambda^{(n)}_{-\beta}\|_{L_2^{-\gamma}(0,1)}}$$

будем называть нормированными $\Lambda^{(n)}_{-\beta}$ -функциями. Здесь, по прежнему, под символом $\Lambda^{(n)}_{-\beta}$ понимаем одну из функций $\mathbb{J}^*_\mu(\lambda_n t)$,

$\mu = \frac{\beta+1}{2} \geq 1$, когда числа λ_n удовлетворяет одному из трех уравнений (1.4.7), (1.4.8), (1.4.9). Если функция $f \in H^2_{-\beta}(0,1)$, то в смысле сходимости в весовом среднем для нее справедливо представление

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n(t), \quad a_n = 2\int_0^1 f(t)\; T_n(t)\; t^{-\beta} dt\,.$$

Согласно теореме Рисса—Фишера для ортонормированной в $L_2^{-\beta}(0,1)$ последовательности функций $\{\Lambda^{(n)}_{-\beta}\}_{n=1}^{\infty}$ и последовательности чисел $c_1, c_2, \ldots$, такой что $\sum_{i=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$, найдется функция $f \in L_2^{-\beta}(0,1)$ такая, что ее коэффициенты Фурье по системе $\{\Lambda^{(n)}_{-\beta}\}$ равны c_n и выполняется равенство Парсеваля

$$\int\limits_a^b |f|^2\, t^{-\beta} dt = \sum_{i=1}^{\infty} a_n^2\,,$$

а для частичной суммы s_n ряда Фурье функции f имеет место «сходимость в среднем»

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 |f - s_n|^2\, t^{-\beta} dt = 0\,.$$

Это утверждение приводит к выводу, что достаточным условием полноты и замкнутости систем $\{\Lambda^{(n)}_{-\beta}\}_{n=1}^{\infty}$ является выполнение *равенства Парсеваля.*

Это приводит к следующему утверждению в весовом лебеговом классе.

Теорема 1.7.1. *Системы функций* $\{T_n(t)\}$ *являются полными (замкнутыми) в* $L_2^{-\beta}(0,1)$.

Отметим, что всякая функция $f(t) \in L_2^{-\beta}(-1,1)$ вполне определена своим рядом Фурье-Бесселя или Дини независимо от того сходятся соответствующие ряды или нет.

1.7.1 О равномерной сходимости $\Lambda_{-\beta}$-бесселевых рядов Фурье при $\beta \geq 1$

Теорема 1.7.2. *Пусть* $-\beta{=}1{-}2\mu{\leq}{-}1$, *числа* λ_n *удовлетворяют одному из условий* (1.4.7) – (1.4.9) *и функция* $f(t) \in H_{-\beta}^{2m+1}(0,1)$, $m{=}0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ *при этом*

в случае (1.4.7) *и* (1.4.9)

$$\text{требуется, чтобы } D^{\alpha}_{B_{-\beta}} f(0) = D^{\alpha}_{B_{-\beta}} f(1) = 0; \quad (1.7.1)$$

$$\text{в случае (1.4.8) требуется только, чтобы } D^{\alpha}_{B} f(0) = 0\,, \quad (1.7.2)$$

где в обоих случаях α *четное число* $\alpha = 0,\ 2,\ \ldots,\ 2m$. *Тогда для коэффициентов рядов Фурье—Бесселя* (1.4.7), (1.4.8) *и Дини* (1.4.9) *справедлива оценка*

$$a_n = O(\lambda_n^{-2m}), \quad n \to \infty.$$

В качестве следствия из этой теоремы справедливо утверждение о равномерной и абсолютной сходимости ряда Фурье-Бесселя для производной функции.

Следствие 1.7.1. *Пусть* $f_1 = f'(t) \in C^1(0,1)$, $B_{-\beta} f_1 \in L_2^{-\beta}(0,1)$ *и пусть*

$$f_1(0) = f_1(1) = 0;$$

Тогда для коэффициентов ряда Фурье-Бесселя (1.4.8) *справедлива оценка*

$$|a_n| = O(\lambda_n^{-4})$$

и ряд Фурье—Бесселя $f'(t) = \sum_1^{\infty} a_n T_n(t)$ *сходится абсолютно и равномерно.*

1.7.2 О $B_{-\beta}$- прозводных рядов по нормированным $\Lambda_{-\beta}^{(n)}$-функциям при $\beta \geq 1$

Формальная почленная $B_{-\beta}$ -производная ряда Фурье—Бесселя (1.4.7), (1.4.8) или Дини (1.4.9)

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n \ \Lambda_{-\beta}^{(n)}(t)$$

приведет вновь к тем же рядам Фурье—Бесселя или Дини, которые, вообще говоря, не обязаны быть сходящимися:

$$B_{-\beta}^{m} f \sim \sum_{1}^{\infty} a'_n \ \Lambda_{-\beta}^{(n)}(t)\,, \quad a'_n = \int_{-1}^{1} (B_{-\beta}^{m} f)(t) \Lambda_{-\beta}^{(n)}(t) \ t^{-\beta} dt\,.$$

При этом $a'_n = (-\lambda_n^2)^m \ a_n$. Но если ряд для $B_{-\beta}^{m} f$ оказывается сходящимся, то имеет место равенство

$$B_{-\beta}^{m} f = \sum_{1}^{\infty} a'_n \ \Lambda_{-\beta}^{(n)}(t) \ t^{-\beta} dt\,. \tag{1.7.3}$$

Сходимость рядов из B-производных ряда (1.7.3) можно получить в качестве следствия из теоремы 1.7.2.

Теорема 1.7.3. *Пусть* $f_1 = (D_{B_{-\beta}}^{m} f)(t) \in C(0,1)$, $m = 0, 2, 4, \ldots$. *Ряды Фурье-Бесселя* (1.4.7), (1.4.8) *или Дини* (1.4.9) *для функции* $f_1(t) \in H_{-\beta}^{2m+1}$ *такой, что*

в случае (1.4.7) *и* (1.4.9) *требуется, чтобы* $f_1(0) = f_1(1) = 0$;

в случае (1.4.8) *требуется, только чтобы* $f_1(0) = 0$

сходятся абсолютно и равномерно

Глава 2

Задача Коши для В-гиперболических уравнений и принцип Гюйгенса

В настоящей главе изучается действие на j-функцию Бесселя вещественного порядка $\mu = \frac{\beta-1}{2} \geq -\frac{1}{2}$ смешанного F_B-преобразования (Левитана). Находятся явные представления таких преобразований (в зависимости от значений порядка μ), которые используются при изучении задачи Коши для уравнений В-гиперболического типа с операторами Бесселя по временной и пространственным переменным. Формулы решений строятся с помощью интегральных преобразований Левитана и Левитана—Киприянова—Катрахова. Исследуются области зависимости решений, а также выделяются условия справедливости принципа Гюйгенса.

2.1 Смешанное F_B-преобразование (Левитана) радиальной j-функции Бесселя

Введем многомерный оператор Пуассона

$$\mathcal{P}^{\gamma}_{x'} f = \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^{\pi} \dots \int\limits_0^{\pi} f(x_1\cos\alpha_1,\,\dots,x_n\cos\alpha_n, x'') \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} \sin^{\gamma_i-1}\alpha_i \;\, d\alpha_1\,\dots\, d\alpha_n.$$

Тогда

$$\Lambda(x,\xi) = \mathbf{j}_\gamma(x',\xi')\, e^{-i\langle x'',\xi''\rangle} = \mathcal{P}^{\gamma}_{x'} e^{-i\langle x\,,\,\xi\rangle}\,, \quad x,\xi\in\mathbb{R}^{+}_{n,N-n}. \qquad (2.1.1)$$

Правая часть формулы (2.1.1) называется плоской весовой волной. Общий вид: $\mathcal{P}^{\gamma}_{x'} f(\langle x\,,\,\xi\rangle)$. Некоторые интегральные операции от плоских весовых волн рассмотрены в [40].

2.1.1 Сферический весовой интеграл от ядра смешанного преобразования Левитана

Пусть $S^+_1(N)$=$\{x\,:\,|x|$=$1,\; x\in\mathbb{R}^{+}_{n,N-n}\}$ — поверхность единичной n-полусферы в $\mathbb{R}^{+}_{n,N-n}$. Площадь взвешенной N-полусферы вычисляется по формуле ([34], стр.21)

$$|S^+_1(N)|_\gamma = \int\limits_{S^+_1(N)} (\xi')^\gamma\, dS = \frac{\pi^{\frac{N-n}{2}}}{2^{n-1}}\, \frac{\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}\right)}\,. \qquad (2.1.2)$$

В [40] получена формула

$$\int\limits_{S^+_1(N)} \mathcal{P}^{\gamma}_{x'} f\left(\langle x\,,\,\xi\rangle\right)(x')^\gamma\, dS = |S^+_1(N-1)|_\gamma \int\limits_{-1}^{1} (l-p^2)^{\frac{N+|\gamma|-3}{2}} f(p|x|)\, dp\,. \qquad (2.1.3)$$

Лемма 2.1.1.

$$\int\limits_{S_1^+(N)} \Lambda_\gamma(x,\xi)(\xi')^\gamma dS(\xi) = |S_1(N)|\; j_{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}(\rho), \quad \rho = |x|\,, \tag{2.1.4}$$

Доказательство. Из (2.1.1) и (2.1.3), имеем

$$\int\limits_{S_1^+(N)} \Lambda_\gamma(x,\xi)(\xi')^\gamma dS(\xi) = \int\limits_{S_1^+(N)} \mathcal{P}^\gamma_{x'} e^{-i\langle\, x,\, \xi\rangle}(\xi')^\gamma dS(\xi)=$$

$$= |S_1^+(N{-}1)|_\gamma \int\limits_{-1}^{1} e^{-i\,t\,|x|}\;(1{-}t^2)^{\frac{N+|\gamma|-3}{2}}\,dt$$

или, если слева взять среднее значение по сфере, то

$$\frac{1}{|S_1^+(N)|}\int\limits_{S_1^+(N)} \Lambda_\gamma(x,\xi)(\xi')^\gamma dS(\xi) =$$

$$= \frac{|S_1^+(N{-}1)|_\gamma}{|S_1^+(N)|}\int\limits_{-1}^{1} e^{-i\,t\,|x|}\;(1-t^2)^{\frac{N+|\gamma|-3}{2}}\,dt\,.$$

Учитывая формулу для площади взвешенной N-полусферы (2.1.2) получаем

$$\frac{|S_1^+(N{-}1)|_\gamma}{|S_1^+(N)|_\gamma} = \frac{\pi^{\frac{N-n-1}{2}}\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|-1}{2}\right)}\;\frac{2^{n-1}\,\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}\right)}{\pi^{\frac{N-n}{2}}\;\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|-1}{2}\right)\;\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,.$$

Следовательно

$$\frac{1}{|S_1^+(N)|}\int\limits_{\{|\xi|=1\}^+} \Lambda_\gamma(x,\xi)(\xi')^\gamma dS(\xi) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|-1}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_{-1}^{1} e^{-i\,t\,|x|}\,\left(1-t^2\right)^{\frac{N+|\gamma|-3}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|-1}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_{0}^{\pi} e^{-i\,|x|\cos\alpha}\,\sin^{N+|\gamma|-2}\alpha\,d\alpha\,.$$

Здесь полученное выражение справа представляет интеграл Пуассона (1.1.2) для j-функции Бесселя $j_{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}$. Отсюда следует (2.1.4).

Доказательство закончено.

Отметим, что полученная выше формула справедлива и в случае отсутствия весовых переменных. А именно, пусть $x,\ \xi\in\mathbb{R}_n$, тогда

$$\int\limits_{S_1(n)} e^{-i\langle x\,\xi\rangle}dS(\xi) = |S_1(n)|\; j_{\frac{n-2}{2}}(\rho), \quad \rho=|x|\,,$$

Эта формула известна из [17] с.94, где она записана через посредство функций Бесселя первого рода J_ν и имеет более громоздкий вид.

2.1.2 Смешанное F_B-преобразование финитной радиальной функции

Множество

$$\{|\xi|<a\}^+ = \{\xi:\ |\xi|<a,\ \xi_1>0,\,\dots\,,\xi_n>0\}$$

будем называть n *-полушаром в* $\mathbb{R}^+_{n,\,N}$.

Теорема 2.1.1. *Пусть* $N\geq 2$, $n\geq 1$ *— фиксированные натуральные числа и* $\gamma=(\gamma_1,\,\dots\,,\gamma_n)$ *— мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел.* F_{B_γ} *-преобразование определено на основе j-функций Бесселя* j_ν *, порядков* $\nu_i=\frac{\gamma_i-1}{2}$ *, а* j_μ *—j-функция Бесселя порядка* $\mu=\frac{\beta-1}{2}$ *и индексы* $\beta\geq 0$ *и* $\gamma_i\geq 0$ *являются размерностью соответствующих операторов Бесселя.*

При $\mu > \frac{N+|\gamma|-1}{2}$, $(\beta > N+|\gamma|)$ *обратное* F_B *-преобразование от финитной радиальной функции*

$$\psi_{a,\mu}(|\xi|) = \begin{cases} (a^2-|\xi|^2)^{\mu-\frac{N+|\gamma|}{2}}, & \xi \in \{|\xi|<a\}^+\,, \\ 0, & \xi \notin \{|\xi|<a\}^+\,. \end{cases}$$

выражается формулой

$$F_B^{-1}[\psi_{a,\mu}](x) = A(N,n,\mu,\gamma)\ a^{2\mu}\, j_\mu(a|x|), \tag{2.1.5}$$

где

$$A(N,n,\mu,\gamma) = \frac{\pi^{\frac{n-N}{2}}}{2^{N-n+|\gamma|}}\ \frac{\Gamma\left(\mu+1-\frac{N+|\gamma|}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)\ \prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\,.$$

Доказательство. Константу, нормирующую обратное смешанное F_B -преобразование , обозначим $C(N,n,\gamma)$:

$$C(N,n,\gamma) = \left[(2\pi)^{N-n}\, 2^{|\gamma|-n}\ \prod_{i=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\right]^{-1}. \tag{2.1.6}$$

Имеем

$$F_B^{-1}[\psi_{a,\mu}](x) = C(N,n,\gamma) \int\limits_{\mathbb{R}^+_{n,N-n}} \psi_{a,\mu}(\xi)\,\Lambda_\gamma(x,\,-\xi)\,(\xi')^\gamma\,d\xi =$$

$$= C(N,n,\gamma) \int\limits_{\{|\xi|<a\}^+} (a^2-|\xi|^2)^{\mu-\frac{N+|\gamma|}{2}}\,\Lambda_\gamma(x,\,-\xi)\ (\xi')^\gamma\,d\xi\,,$$

где $\Lambda_\gamma(x,-\xi)=\prod_{i=1}^{n} j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i)\ e^{\langle x'',\,\xi''\rangle}$. Теперь можем воспользоваться второй теоремой о сферическом уплотнении (теорема 1.1.4)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^+_N} f(|x|)\ \prod_{i=1}^{n} j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i)\ e^{i\langle x'',\,\xi''\rangle}\,(x')^\gamma\,dx =$$

$$|S_1^+(N)| \int\limits_{\mathbb{R}^+_1} f(r)\ j_{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}(r\rho)\,r^{N+|\gamma|-1}\,dr.$$

Применяя это равенство, имеем

$$F_B^{-1}[\psi_{a,\mu}](x) = C(N,n,\gamma)\,|S_1^+(N)|_\gamma \times$$

$$\times \int\limits_0^a j_{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}(r|x|)\,(a^2-r^2)^{\mu-\frac{N+|\gamma|}{2}}\,r^{N+|\gamma|-1}\,dr\,.$$

Здесь положим $t = r/a$, тогда

$$F_B^{-1}[\psi_{a,\mu}](x) = C(N,n,\gamma)\,|S_1^+(N)|_\gamma\,a^{2\mu} \times$$

$$\times \int\limits_0^1 j_{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}(at|x|)\,(1-t^2)^{\mu-\frac{N+|\gamma|}{2}}\,t^{N+|\gamma|-1}\,dt\,. \tag{2.1.7}$$

Известна формула (см. [5], с.702, 6.567б формула 1.)

$$\int_0^1 x^{\nu+1}\,(1-x^2)^\mu\,J_\nu(bx)\;dx=\frac{2^\mu\,\Gamma(\mu+1)}{b^{\mu+1}}\,J_{\mu+\nu+1}(b)\,,\quad \beta>0,\;\; \mu,\,\nu>-1\,,$$

где J_ν — функция Бесселя первого рода порядка ν. Воспользовавшись формулой (1.3.1), запишем

$$\int_0^1 x^{2\mu+1}\,(1-x^2)^\nu\,j_\mu(bx)\;dx = \frac{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\mu+1)}{2\,\Gamma(\nu+\mu+2)}\,j_{\nu+\mu+1}(b)\,,\quad \nu,\,\mu>-1\,. \tag{2.1.8}$$

Теперь, продолжая равенство (2.1.7), имеем

$$F_B^{-1}[\psi_{a,\mu}](x) = A(\mu,N,n,\gamma)\;a^{2\mu}\;j_\mu(a|x|)\,.$$

Остается вычислить константу. Из (2.1.2) и (2.1.6) следует

$$A(\mu,N,n,\gamma) =$$

$$= C(N,n,\gamma)\,|S_1^+(N)|_\gamma\;\frac{\Gamma\left(\mu-\frac{N+|\gamma|}{2}+1\right)\,\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|-2}{2}+1\right)}{2\,\Gamma\left(\mu-\frac{N+|\gamma|}{2}+\frac{N+|\gamma|-2}{2}+2\right)} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N-n}\,2^{|\gamma|-n}\,\prod_{i=1}^n\Gamma^2\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\;\frac{\pi^{\frac{N-n}{2}}}{2^{n-1}}\;\frac{\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}\right)}\;\times$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\mu - \frac{N+|\gamma|-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}\right)}{2\,\Gamma(\mu+1)} = \frac{\pi^{\frac{n-N}{2}}}{2^{N-n+|\gamma|}}\;\frac{\Gamma\left(\mu+1-\frac{N+|\gamma|}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)\;\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\,.$$

Отсюда вытекает равенство (2.1.5).

Доказательство закончено.

Следствие 2.1.1. *Пусть* $N \geq 2$, $n \geq 1$ *— фиксированные натуральные числа и* γ *— мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел,* $\{|\xi| < a\}^+ = \{\xi :\ |\xi|<a,\ \xi_1 > 0, \dots, \xi_n > 0\}$ *—* n *-полушар в* $\mathbb{R}^+_{n,\,N}$.

При $\mu > \frac{N+|\gamma|-1}{2}$ $(\beta > N + |\gamma|)$ *справедливо равенство*

$$F_B[j_\mu(a\,|x|)](\xi) = F_B[j_\mu(a\,|x|)](|\xi|) =$$

$$= \begin{cases} \frac{(a^2-|\xi|^2)^{\mu-\frac{N+|\gamma|}{2}}}{a^{2\mu}\;A(\mu,N,n,\gamma)} & ,\quad \xi \in \{|\xi| < a\}^+\,, \\ \\ 0 & ,\quad \xi \notin \{|\xi| < a\}^+\,, \end{cases} \tag{2.1.9}$$

где

$$A(N,n,\mu,\gamma) = \frac{\pi^{\frac{n-N}{2}}}{2^{N-n+|\gamma|}}\;\frac{\Gamma\left(\mu+1-\frac{N+|\gamma|}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)\;\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала, что при $\mu > \frac{N+|\gamma|-1}{2}$ функция $j_\mu(a\,|x|) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}^+_N)$. Из асимптотического представления функции Бесселя первого рода ([3] стр. 222) имеем

$$J_\mu(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi\, s}}cos(s - \frac{\pi\mu}{2-\frac{\pi}{4}}) + O(s^{-\frac{3}{2}})\,.$$

Тогда

$$|j_\mu(s)| = C(\mu)\left|\frac{J_\mu(s)}{s^\mu}\right| = O(1/s^{\mu+\frac{1}{2}})\,,\quad s\to\infty\,.$$

при $\mu > \frac{N+|\gamma|-1}{2}$ и $s\to\infty$ следует, что функция $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\gamma_i}\; j_\mu^{\,2}(a\,|x|)$ при больших $|x|$ убывает быстрее $|x|^{-N}$ и следовательно, функция $j_\mu(a|x|) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}^+_N)$. Но тогда ее F_B -преобразование $F_B[j_\mu(a|x|)](\xi)$ существует и обратимо, причем обратное смешанное F_B -преобразование можно найти как прямое преобразование образа обратного. Найдем его опираясь на теорему 2.1.1. Применяя к правой и левой части формулы (2.1.5) смешанное F_B-преобразование и учитывая, что оно обратимо на функциях из L_2^γ, получим

$$\psi_{a,\mu}(\xi)=A(\mu,N,n,\gamma)\;a^{2\mu}\;F_B[j_\mu(a|x|)],$$

откуда

$$F_B[j_\mu(a|x|)](\xi)=\frac{\psi_{a,\mu}(\xi)}{A(\mu,N,n,\gamma)\;a^{2\mu}}=\begin{cases}\frac{(a^2-|\xi|^2)^{\mu-\frac{N+|\gamma|}{2}}}{A(\mu,N,n,\gamma)\;a^{2\mu}}, & \xi\in\{|\xi|<a\}^+,\\ 0, & \xi\notin\{|\xi|<a\}^+.\end{cases}$$

Константа $A(\mu,N,n,\gamma)$ определена в формулировке теоремы 2.1.1. В итоге мы получим равенство (2.1.9).

Доказательство закончено.

Обратим внимание на то, что условие $N\geq 2$ теоремы 2.1.1 связано лишь с тем же условием леммы 2.1.1 и с интегрированием по поверхности, размерность которой не может быть меньше двух. Но в случае $N=1$ (разумеется, что при этом $n=N=1$) справедлив полный аналог этой теоремы, который доказывается несколько проще.

Теорема 2.1.2. *Пусть* $N=n=1$, $\gamma>0$, $a>0$ *и число* $\mu>\frac{\gamma-1}{2}$. *Тогда обратное* F_B *-преобразование от функции*

$$\psi_{a,\mu}(|\xi|)=\begin{cases}(a^2-\xi^2)^{\mu-\frac{|\gamma|-1}{2}}, & |\xi|\in(0,a)\,,\\ 0, & |\xi|\notin(0,a)\,.\end{cases}$$

выражается формулой

$$F_B^{-1}[\psi_{a,\mu}](x)=A(\mu,\gamma)\;\;a^{2\mu}\,j_\mu(ax),$$

где

$$A(\mu,\gamma)=\frac{1}{2^\gamma}\;\frac{\Gamma\left(\mu+1-\frac{1+\gamma}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)\;\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\,.$$

Доказательство. Имеем

$$F_B^{-1}[\psi_{a,\mu}](x) = C(\gamma) \int\limits_0^a j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x,\xi)\,(a^2-\xi^2)^{\mu-\frac{1+\gamma}{2}}\,\xi^\gamma\,d\xi\,.$$

Здесь положим $t=\xi/a$, тогда

$$F_B^{-1}[\psi_{a,\mu}](x) = C(\gamma)\,a^{2\mu} \int\limits_0^a j_{\frac{\gamma-1}{2}}(atx)\,(1-t^2)^{\mu-\frac{1+\gamma}{2}}\,t^\gamma\,d\xi\,.$$

Используя формулу (2.1.8), получим

$$F_B^{-1}[\psi_{a,\mu}](x) = C(\gamma)\,\frac{\Gamma\left(\mu-\frac{1+\gamma}{2}+1\right)\,\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2}+1\right)}{2\,\Gamma\,(\mu+1)}\,a^{2\mu}\,j_\mu(ax) =$$

$$= A(\mu,\gamma)\,a^{2\mu}\,j_\mu(ax),$$

где

$$A(\mu,\gamma) = \frac{1}{2^\gamma}\,\frac{\Gamma\left(\mu+1-\frac{1+\gamma}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\,.$$

Доказательство закончено.

Следствие 2.1.2. *Пусть* $N{=}n{=}1$ *и* γ *— мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел,* $0<|\xi|<a$ *.*

При $\mu>\frac{\gamma}{2}$ *справедливо равенство*

$$F_B[j_\mu(a\,|\cdot|)](\xi) = F_B[j_\mu(a\,|\cdot|)](|\xi|) = \begin{cases} \frac{(a^2-\xi^2)^{\mu-\frac{1+\gamma}{2}}}{a^{2\mu}\,A(\mu,\gamma)} & , \quad |\xi|{\in}\{|\xi|{<}a\}^+\,, \\ 0 & , \quad |\xi|{\notin}\{|\xi|{<}a\}^+\,, \end{cases}$$

где

$$A(\mu,\gamma) = \frac{1}{2^\gamma}\,\frac{\Gamma\left(\mu+1-\frac{1+\gamma}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\,.$$

Доказательство аналогично доказательству следствия 2.1.1.

Отметим, что формула преобразования Фурье функции $\psi_{a,\mu}(|x|)$ при $\mu > \frac{n}{2}$ получена в [50] (с. 194) в терминах функций Бесселя первого рода. А для $\mu > \frac{n-1}{2}$ и в терминах j-функций Бесселя эта же формула приведена в [19].

2.1.3 Смешанное F_B-преобразование обобщенной радиальной j-функции Бесселя целого, полуцелого порядка

F_B-Преобразование обобщенных функций $f \in \mathcal{D}'$ с компактным носителем вычисляется по формуле (([25] стр. 31)):

$$F_B[f](\xi) = \int\limits_{R^+_{n,N-n}} \eta(x)\, f(x)\; \Lambda_\gamma(x,\xi)(x')^\gamma\; dx,$$

где η — любая функция из пространства D_{ev} основных функций, равная 1 в окрестности носителя f.

Доказательство теоремы 2.1.1 осуществлено при условии, что $\mu > \frac{N+|\gamma|-1}{2}$. В частности из теоремы 2.1.1 следует, что в случае $\mu = \frac{N+|\gamma|}{2}$ формула преобразования Левитана радиальной j-функции Бесселя имеет вид

$$F_B[j_{\frac{N+|\gamma|}{2}}(a|x|)](\xi) = \begin{cases} \frac{1}{A(N,n,\gamma)\; a^{N+|\gamma|}} & , \quad \xi \in \{|\xi| < a\}^+, \\ \\ 0 & , \quad \xi \notin \{|\xi| < a\}^+, \end{cases}$$

где

$$A(N,n,\gamma) = \frac{\pi^{\frac{n-N}{2}}}{2^{N-n+|\gamma|-1}\,\Gamma(\frac{N+|\gamma|}{2}+1)\;\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\;.$$

Это весьма интересная формула. Главное ее достоинство заключается в постоянстве функции $F_B[j_{\frac{N+|\gamma|}{2}}(a|x|)](\xi)$ в шаре $|\xi| \leq a$ и вне шара.

При $-\frac{1}{2} \leq \mu \leq \frac{N+|\gamma|-1}{2}$ F_B-преобразование функции $j_\mu(a\,|x|)$ в классическом смысле не существует, однако, оно может быть вычислено в рамках теории обобщенных весовых функций.

Функция $j_\mu(a\,|x|)$, $\mu = \frac{\beta-1}{2}$ определяет регулярный функционал в пространстве S'_{ev}. Действительно функция $j_{\frac{\beta-1}{2}}(a|x|)$ четная и при $|x| \to \infty$ убывает как $|x|^{-\frac{\beta}{2}}$. Ее производные по x порядков q $(q = 1, 2, ...)$ убывают при $|x| \to \infty$ как $a^{2q}|x|^{-\frac{\beta}{2}}$. Вследствие этого при каждом $a > 0$ функция $j_{\frac{\beta-1}{2}}(a|x|)$ является мультипликатором в пространстве $S_{ev}(\mathbb{R}_N)$. Поэтому его преобразование Левитана (понимаемое, как смешанное F_B-преобразование в S'_{ev} является свертывателем над пространством $S_{ev}(\mathbb{R}_N)$ (см. [35]).

Предположим, что размерности γ_i таковы, что $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ — натуральное число. Как в [19], введем распределения Киприянова I_a^α на сфере, которые определим при четных и нечетных $N + |\gamma|$ в виде сингулярных обобщенных функций из S', носители которых сосредоточены на поверхности N-полусферы в $\mathbb{R}_N^+$, и которые действуют на основные функции $\varphi \in S_{ev}$ по формулам

a) при четном $N + |\gamma|$

$$\left(I_a^k, \varphi\right)_\gamma = \frac{1}{a^{2k}} \left(\frac{1}{a}\frac{d}{da}\right)^{\frac{N+|\gamma|}{2}-k-1} \left[a^{N+|\gamma|-2} \int\limits_{S_1^+(N)} \varphi(a\xi)\,(\xi')^\gamma\ dS(\xi)\right], \tag{2.1.10}$$

b) при нечетном $N + |\gamma|$

$$\left(I_a^{k-\frac{1}{2}}, \varphi\right)_\gamma = \frac{1}{a^{2k-1}} \left(\frac{1}{a}\frac{d}{da}\right)^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}-k} \left[a^{N+|\gamma|-2} \int\limits_{S_1^+(N)} \varphi(a\xi)\,(\xi')^\gamma\, dS(\xi)\right]. \tag{2.1.11}$$

Теорема 2.1.3. *Пусть $|\gamma|$ — натуральное число. F_{B_γ}-Преобразование функции $j_\mu(a\,|x|)$, понимаемое в смысле пространства S'_{ev}, при $\mu = k$ или $\mu = k - \frac{1}{2}$, где k целое, $0 \leq k \leq \frac{N+|\gamma|-1}{2}$ $(0 \leq \beta \leq N + |\gamma|)$, имеет вид* *a) при четном* $N+|\gamma|\geq 2$ *и* $\mu=\frac{\beta-1}{2}=k$ *(т.е.* $\beta=2k+1$ *— нечетное число)*

$$F_{B_\gamma}[j_k(a|x|)](\xi)=A_k(N,n,\gamma)\cdot I_a^k, \tag{2.1.12}$$

где

$$A_k(N,n,\gamma)=2^{k+\frac{N+|\gamma|}{2}-n}\Gamma(k+1)\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right);$$

b) при нечетном $N+|\gamma|\geq 3$ *и* $\mu=\frac{\beta-1}{2}=k-1/2$ *(т.е.* $\beta=2k$ *— четное число)*

$$F_{B_\gamma}[j_{k-\frac{1}{2}}(a|x|)](\xi)=A_{k-\frac{1}{2}}(N,n,\gamma)\cdot I_a^{k-\frac{1}{2}}. \tag{2.1.13}$$

где

$$A_{k-\frac{1}{2}}(N,n,\gamma)=2^{k-\frac{1}{2}+\frac{N+|\gamma|}{2}-n}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем случай a).

Вычислим F_{B_γ}-преобразование от обобщенной функции I_a^k, имеющей носитель на сфере $|\xi|=a$. Известно, что F_{B_γ}-преобразование (Фурье-Бесселя, см [25]) обобщенной функции с компактным носителем, есть функционал вида $F_{B_\gamma}[f](\xi)=(f(x),\Lambda_\gamma(x,\xi))_\gamma$. Вследствие этого обратное F_{B_γ}-преобразование от сингулярной обобщенной функции I_a^k представляется в виде

$$F_B^{-1}[I_a^k](|x|)=(I_a^k,\Lambda_\gamma(x,\xi))_\gamma=C(N,n,\gamma)\times$$

$$\times\left(\frac{d}{a\,da}\right)^{\frac{N+|\gamma|}{2}-k-1}\left[a^{N+|\gamma|-2}\int\limits_{S_1^+(N)}\prod_{i=1}^{n}j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i)\,e^{i\langle x'',\xi''\rangle}\,(\xi')^\gamma dS(\xi)\right].$$

Применяя теорему 1.1.4 получим

$$F_B^{-1}[I_a^k](|x|)=C(N,n,\gamma)|S_1^+(N)|_\gamma\frac{1}{a^{2k}}\times$$

$$\times\ \left(\frac{d}{a\,da}\right)^{\frac{N+|\gamma|}{2}-k-1}\left[a^{N+|\gamma|-2}j_{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}(a|x|)\right]. \qquad (2.1.14)$$

Известно ([3] на с. 57, формула (5))

$$\left(\frac{d}{s\,ds}\right)^{m}[J_\mu(s)s^\mu]=s^{\mu-m}J_{\mu-m}(s)\,.$$

По формуле (1.3.1), имеем

$$\left(\frac{d}{s\,ds}\right)^{m}\left[s^{2\mu}\ j_\mu(s)\right]=\frac{2^m\,\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu{+}1{-}m)}\ s^{2(\mu-m)}j_{\mu-m}(s)\,.$$

Отсюда получаем

$$\left(\frac{d}{a\,da}\right)^{m}\left[a^{2\mu}\,j_\mu(ta)\right]=\frac{2^m\,\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu{-}m{+}1)}\ a^{2(\mu-m)}\,j_{\mu-m}(ta)\,. \qquad (2.1.15)$$

Теперь вернемся к (2.1.14) . Применяя соотношение (2.1.15) с параметрами

$$m=\frac{N+|\gamma|}{2}-k-1,\quad \mu=\frac{N+|\gamma|}{2}-1,\quad t=|x|,$$

получим

$$F_B^{-1}[I_a^k](|x|)=C(N,n,\gamma)|S_1^+(N)|_\gamma\ \ \frac{2^{\frac{N+|\gamma|}{2}-1-k}\,\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}\right)}{\Gamma(k+1)}\,j_k(|x|a).$$

Применив сюда F_{B_γ} -преобразование, получим

$$F_{B_\gamma}[j_k(a|x|)](\xi)=\frac{2^{k-\frac{N+|\gamma|}{2}+1}\,\Gamma(k+1)I_a^k}{C(N,n,\gamma)\,|S_1^+(N)|_\gamma\,\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}\right)}=$$

$$=2^{k+\frac{N+|\gamma|}{2}-n}\Gamma(k+1)\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\,I_a^k\,.$$

Случай a) доказан. Случай b) доказывается аналогично, поэтому мы его доказательство не приводим.

Доказательство закончено.

2.1.4 Смешанное F_B-преобразование обобщенной радиальной j-функции Бесселя дробного порядка

Предположим, что γ_i таковы, что $|\gamma|$ — натуральное число. Определим целые числа $k = 1,...,\left[\frac{N+|\gamma|+1}{2}\right]$ и дробные числа $\delta \in [0,1)$ и $\delta_1 \in [0,\frac{1}{2}]$ так, чтобы любое вещественное число $\mu = \frac{\beta-1}{2}$ меняющиеся в пределах $-\frac{1}{2} \leq \mu \leq \frac{N+|\gamma|}{2}$ ($0 \leq \beta \leq N+|\gamma|+1$) представлялось в виде:

$$\text{при нечетном } N+|\gamma| \geq 3\,, \quad \mu = k-\tfrac{1}{2}-\delta\,, \quad -\tfrac{1}{2} \leq \mu \leq \tfrac{N+|\gamma|}{2}\,;$$

$$\text{при четном } N+|\gamma| \geq 2\,, \qquad \begin{cases} \mu = -\delta_1, & \text{когда} \quad -\frac{1}{2} \leq \mu \leq 0\,, \\ \mu = k-\delta\,, & \text{когда} \quad 0 < \mu \leq \frac{N+|\gamma|}{2} \end{cases} \tag{2.1.16}$$

или для β

$$\text{при нечетном } N+|\gamma| \geq 3\,, \quad \beta = 2k-2\delta\,, \quad 0 \leq \beta \leq N+|\gamma|+1\,;$$

$$\text{при четном } N+|\gamma| \geq 2\,, \begin{cases} \beta = 1-2\delta_1, & \text{когда} \quad 0 \leq \beta \leq 1\,, \\ \beta = 2k-2\delta+1\,, & \text{когда} \quad 1 < \beta \leq N+|\gamma|+1. \end{cases}$$

Введем обобщенные функции вида $I_a^{k-\frac{1}{2}-\delta}$ в случае нечетного $N+|\gamma| \geq 3$ и $I_a^{k-\delta}$, $I_a^{-\delta_1}$ в случае четного $N+|\gamma| \geq 2$. Их действие на основные функции $\varphi \in S_{ev}$ определим по правилам

$$(I_a^{k-\delta},\varphi) = \frac{2}{\Gamma(1-\delta)} \int\limits_0^1 z^{2k-1}(1-z^2)^{-\delta} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{a^{2k-2}} \left(\frac{1}{a} \frac{d}{da} \right)^{\frac{N+|\gamma|}{2}-k} \left[a^{N+|\gamma|-2} \int\limits_{S_1^+(N)} \varphi(az\xi)\, (\xi')^\gamma \, dS(\xi) \right] \right\} dz\,; \tag{2.1.17}$$

$$(I_a^{-\delta_1},\varphi) = \frac{2}{\Gamma(1-\delta_1)} \int\limits_0^1 z(1-z^2)^{-\delta_1} \times$$

$$\times\ (a\frac{d}{da}+2-2\delta_1)\left(\frac{1}{a}\frac{d}{da}\right)^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}\left[a^{N+|\gamma|-2}\int\limits_{S_1^+(N)}\varphi(az\xi)\,(\xi')^\gamma\ dS(\xi)\right]dz\,; \tag{2.1.18}$$

$$(I_a^{k-\frac{1}{2}-\delta},\varphi)=\frac{2}{\Gamma(1-\delta)}\int\limits_0^1 z^{2k-2}(1-z^2)^{-\delta}\ \times$$

$$\times\ \left\{\frac{1}{a^{2k-3}}\left(\frac{1}{a}\frac{d}{da}\right)^{\frac{N+|\gamma|+1}{2}-k}\left[a^{N+|\gamma|-2}\int\limits_{S_1^+(N)}\varphi(az\xi)\,(\xi')^\gamma\,dS(\xi)\right]\right\}dz\,. \tag{2.1.19}$$

В отличие от обобщенных функций (2.1.10) и (2.1.11), носители которых расположены на сфере $|x|{=}a$, эти обобщенные функции имеют носители в шаре $|x|<a$.

Распределения (2.1.10), (2.1.11) и (2.1.17), (2.1.18), (2.1.19) в несколько упрощенном виде использовались в работах [19] для определения преобразования Фурье от обобщенной j-функций Бесселя $j_\mu(a|x|)$. Вид F_B-преобразования от той же функции при произвольном $-\frac{1}{2}<\mu\leq\frac{N+|\gamma|}{2}$ дает следующая теорема.

Теорема 2.1.4. *Пусть* $|\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$ *— натуральное число и* k *— натуральное число, удовлетворяющее условию* $1\leq k\leq\frac{N+|\gamma|+1}{2}$ *и пусть правильные дроби* δ *и* δ_1 $(\delta\in[0,1),\delta_1\in[0,\frac{1}{2}])$ *определены так, чтобы для числа* μ, $-\frac{1}{2}<\mu\leq\frac{N+|\gamma|}{2}$, *имело место одно из представлений* (2.1.16). F_B*-Преобразование функции* $j_\mu(a\,|x|)$, *понимаемое в смысле пространства обобщенных функций* S'_{ev}, *имеет вид*

1) при четном $N+|\gamma|\geq 2$, $-\frac{1}{2}<k{-}\delta\leq\frac{N+|\gamma|}{2}$, $k{\in}\mathbb{N}$

$$F_B[j_{k-\delta}(a|x|)](|\xi|)=A_{k-\delta}(N,n.\gamma)\cdot I_a^{k-\delta}\,, \tag{2.1.20}$$

где

$$A_{k-\delta}(N,n,\gamma)=2^{k-1+\frac{N+|\gamma|}{2}-n}\Gamma(k+1-\delta)\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right),$$

$$\mu = -\delta_1\,, \quad F_B[j_\mu(a|x|)](|\xi|) = A_{-\delta_1}(N, n.\gamma)\cdot I_a^{-\delta_1}, \qquad (2.1.21)$$

где

$$A_{-\delta_1}(N, n, \gamma) = 2^{\frac{N+|\gamma|}{2}-n-1}\Gamma(1-\delta_1)\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right);$$

2) при нечетном $N+|\gamma|\geq 3$

$$\mu = k-\frac{1}{2}-\delta\,, \quad F_B[j_\mu(a|x|)](\xi) = A_{k-\frac{1}{2}-\delta}(N, n.\gamma)\cdot I_a^{k-\frac{1}{2}-\delta}, \qquad (2.1.22)$$

где

$$A_{k-\frac{1}{2}-\delta}(N, n, \gamma) = 2^{k-\frac{3}{2}+\frac{N+|\gamma|}{2}-n}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-\delta\right)\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right).$$

Доказательство. Докажем случай 1). Из формулы (см. [5], с.702, формула 6.567.1)

$$\int_0^1 x^{\mu+1}\,(1-x^2)^m\,J_\mu(bx)\,dx = \frac{2^m\,\Gamma(m+1)}{b^{m+1}}\,J_{\mu+m+1}(b)\,, \quad m,\,\mu > -1$$

отсюда и из связи функции Бесселя первого рода J_μ с j-функцией Бесселя

$$j_\mu(x) = 2^\mu\,\Gamma(\mu+1)\,\frac{J_\mu(x)}{x^\mu}\,.$$

вытекает формула

$$\int_0^1 x^{2\mu+1}\,(1-x^2)^m\,j_\mu(bx)\,dx = \frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(\mu+1)}{2\,\Gamma(m+\mu+2)}\,j_{m+\mu+1}(b),\;\; m,\,\mu>-1\,.$$

Пологая $m=-\delta$, $\mu+1=k$, $b=a|x|$, получаем

$$j_{\,k-\delta}(a|x|) = \frac{2\Gamma(k+1-\delta)}{\Gamma(1-\delta)\Gamma(k)}\int_0^1 j_{k-1}(az|x|)\;z^{2k-1}(1-z^2)^{-\delta}dz. \qquad (2.1.23)$$

Воспользуемся этой формулой. Нам известно, что F_B-преобразование от j-функции Бесселя есть финитный функционал (см. равенство (2.1.12)), поэтому

$$\int\limits_0^1 z^{2k-1}(1-z^2)^{-\delta}\Big|F_B[j_\mu(az|x|)](\xi)\Big|\,dz<\infty$$

Это означает, что F_B-преобразование равенства (2.1.23) существует в смысле S'_{ev} и в правой части можно воспользоваться теоремой Фубини-Тонели о перестановки пределов интегрирования. В результате

$$F_B[j_{k-\delta}(a|x|)](|\xi|)=\frac{2\Gamma(k+1-\delta)}{\Gamma(1-\delta)\Gamma(k)}\int\limits_0^1 z^{2k-1}(1-z^2)^{-\delta}F_B[j_{k-1}(az|x|)](|\xi|)dz\,.$$

Согласно (2.1.12), имеем

$$F_B[j_{k-1}(a|x|)](\xi)=2^{k-1+\frac{N+|\gamma|}{2}-n}\Gamma(k)\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\cdot I_a^{k-1},$$

где I_a^{k-1} сингулярная обобщенная функция (2.1.2) из пространства S'_{ev}, носитель которой сосредоточен на поверхности n-полусферы $S_1^+(N)$ в $\mathbb{R}_N^+$. Таким образом

$$(F_B[j_{k-\delta}(a|x|)]\,,\varphi)_\gamma=\frac{2\Gamma(k+1-\delta)}{\Gamma(1-\delta)\Gamma(k)}\;2^{k-1+\frac{N+|\gamma|}{2}-n}\Gamma(k)\pi^{\frac{N-n}{2}}\;\times$$

$$\times\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\;\int\limits_0^1 z^{2k-1}(1-z^2)^{-\delta}\;(I_{az}^{k-1}\,,\varphi)_\gamma\;dz\,.$$

Здесь $k-1$ — целое число, поэтому функционал I_{az}^{k-1} определен по формуле (2.1.10):

$$\left(I_{az}^{k-1},\varphi\right)_\gamma=$$

$$=\frac{1}{(az)^{2k-2}}\left(\frac{1}{(az)}\frac{d}{d(az)}\right)^{\frac{N+|\gamma|}{2}-k}\left[(az)^{N+|\gamma|-2}\int\limits_{S_1^+(N)}\varphi(az\xi)dS(\xi)\right]$$

$$= \frac{z^{2-N-|\gamma|}}{(a)^{2k-2}} \left(\frac{1}{(a)}\frac{d}{d(a)}\right)^{\frac{N+|\gamma|}{2}-k} \left[(az)^{N+|\gamma|-2} \int\limits_{S_1^+(N)} \varphi(az\xi)dS(\xi)\right].$$

Следовательно

$$(F_B[j_{k-\delta}(a|x|)]\,,\,\varphi)_\gamma = \frac{2\Gamma(k+1-\delta)}{\Gamma(1-\delta)\Gamma(k)}\; 2^{k-1+\frac{N+|\gamma|}{2}-n}\Gamma(k)\pi^{\frac{N-n}{2}} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right) \int\limits_0^1 z^{2k-1}(1-z^2)^{-\delta} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{a^{2k-2}}\left(\frac{1}{a}\frac{d}{da}\right)^{\frac{N+|\gamma|}{2}-k}\left[a^{N+|\gamma|-2}\int\limits_{S_1^+(N)} \varphi(az\xi)dS(\xi)\right]\,,\,\varphi\right)_\gamma \quad dz\,.$$

По определению функционала $I_a^{k-\delta}$ (2.1.17), получим

$$F_B[j_{k-\delta}(a|x|)] = 2^{k-1+\frac{N+|\gamma|}{2}-n}\Gamma(k+1-\delta)\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\; I_a^{k-\delta}.$$

Формула (2.1.20) доказана. Аналогично доказывается формула (2.1.21).

Для доказательства (2.1.22) воспользуемся рекуррентным соотношением ([3], стр.56)

$$s\frac{d}{ds}J_\mu(s) + \mu J_\mu(s) = sJ_{\mu-1}(s),$$

из которого следует, что

$$\left(a\frac{d}{da}+2\mu\right)j_\mu(a|x|) = 2\mu\, j_{\mu-1}(a|x|), \tag{2.1.24}$$

в частности при $\delta_1 \in [0,\frac{1}{2}]$ и $\mu = 1-\delta_1$

$$j_{-\delta_1}(a|x|) = 2(1-\delta_1)\left(a\frac{d}{da}+2-2\delta_1\right)j_{1-\delta_1}(a|x|).$$

Применим F_B -преобразование по переменным x к этому равенству (с учетом того, что оператор $\left(a\frac{d}{da}+2-2\delta_1\right)$ действует по параметру a, независимому от x). Зная преобразование $F_B[j_{1-\delta_1}(a|x|)](|\xi|)$ — это формула (2.1.20) при $k=1$, $\delta=\delta_1$ получим

$$F_B[j_{1-\delta_1}(a|x|)](|\xi|)=\frac{\Gamma(1-\delta_1)}{2\Gamma(2-\delta_1)}2^{\frac{N+|\gamma|}{2}-n}\Gamma(2-\delta_1)\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\times$$

$$\times\left(a\frac{d}{da}+2-2\delta_1\right)I_a^{1-\delta_1}.$$

Очевидно, что

$$\left(a\frac{d}{da}+2-2\delta_1\right)I_a^{1-\delta_1}=I_a^{-\delta_1}.$$

Из формул (2.1.20) и (2.1.21) при $k=1$, $\delta=\delta_1$ следует

$$F_B[j_{-\delta_1}(a|x|)](|\xi|)=2^{\frac{N+|\gamma|}{2}-n-1}\Gamma(1-\delta_1)\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\cdot I_a^{-\delta_1}.$$

Доказательство закончено.

Отметим, что F_{B_γ} -преобразование функций $F_B[j_\mu(a|x|)](|\xi|)$, $F_B[j_{\mu-1}(a|x|)](|\xi|)$ также, как и сами функции j_μ и $j_{\mu-1}$ должны удовлетворять соотношению (2.1.24). Можно доказать, что все полученные нами представления $F_B[j_\mu(a|x|)](|\xi|)$ — формулы теорем 2.1.1, 2.1.2 и 2.1.3 — удовлетворяют этому требованию. Введение обобщенных функций $I_a^{k-\delta}$, $I_a^{-\delta_1}$, $I_a^{k-\frac{1}{2}-\delta}$ не противоречит ранее введёным функциям I_a^k, $I_a^{k-\frac{1}{2}}$. Это вытекает из следующего утверждения.

Теорема 2.1.5. *Для распределения Киприянова* $I_a^{k-\delta}$ *имеют место следующие соотношения:*

1) $\lim\limits_{\delta\to 0} I_a^{k-\delta}=I_a^{k-\delta}|_{\delta=0}=I_a^k$,

2) $\lim\limits_{\delta\to 1} I_a^{k-\delta}=I_a^{k-1}$,

3) При $k=\frac{N+|\gamma|}{2}$, $\delta\in[0,\frac{1}{2}]$ *теорема 2.1.4 и следствие 2.1.1 к теореме 2.1.1 совпадают.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Докажем первое соотношение.

Применим F_B -преобразование к левой и правой частям (2.1.24). Получим следующее равенство

$$\left(a\frac{d}{da}+2\mu\right) I_a^{\mu}=I_a^{\mu-1}.$$

По определению

$$\left(I_{az}^{k-1},\varphi\right)_{\gamma}=\frac{1}{a^{2k-2}}\left(\frac{1}{a}\frac{d}{da}\right)^{\frac{N+|\gamma|}{2}-k}\left[a^{N+|\gamma|-2}\int\limits_{S_1^+(N)}\varphi(az\xi)\,(\xi')^{\gamma}\,dS(\xi)\right],$$

$$(I_a^{k-\delta},\varphi)=\frac{2}{\Gamma(1-\delta)}\int\limits_0^1 z^{2k-1}(1-z^2)^{-\delta}\,(I_{az}^{k-1},\varphi)_{\gamma}dz,$$

При $\delta=0$

$$(I_a^{k-\delta},\varphi)_{\gamma}|_{\delta=0}=$$

$$=\frac{2}{\Gamma(1-\delta)}\int\limits_0^1 z^{2k-1}(1-z^2)^{-\delta}\left(I_{az}^{k-1},\varphi\right)_{\gamma}dz\Big|_{\delta=0}=$$

$$=\frac{2}{\Gamma(1)}\int\limits_0^1 z^{2k-1}\left(I_{az}^{k-1},\varphi\right)_{\gamma}dz=$$

$$=\frac{2}{\Gamma(1)}\int\limits_0^1 z^{2k-1}\left(a\frac{d}{da}(I_{az}^{k},\varphi)_{\gamma}+2k(I_{az}^{k},\varphi)_{\gamma}\right)dz=2(Y_1+Y_2)\,.$$

В выражении

$$Y_1=\int\limits_0^1 z^{2k-1}a\frac{d}{da}(I_{az}^{k},\varphi)_{\gamma}dz$$

сделаем замену $t=az$. Имеем

$$Y_1=\int\limits_0^a\frac{t^{2k}}{a^{2k}}\frac{d}{dt}(I_t^k,\varphi)_{\gamma}dt=\frac{t^{2k}}{a^{2k}}(I_t^k,\varphi)_{\gamma}\Big|_{t=0}^{t=a}-\frac{2k}{a^{2k}}\int\limits_0^a t^{2k-1}(I_t^k,\varphi)_{\gamma}dt=$$

$$= (I_t^k, \varphi)_\gamma - \frac{2k}{a^{2k}} \int\limits_0^a t^{2k-1} (I_t^k, \varphi)_\gamma dt$$

Аналогично, полагая $t = az$, получим

$$Y_2 = 2k \int\limits_0^1 z^{2k-1} (I_{az}^k, \varphi)_\gamma dz = \frac{2k}{a^{2k-1+1}} \int\limits_0^a t^{2k-1} (I_t^k, \varphi)_\gamma dt.$$

В результате

$$(I_a^{k-\delta}, \varphi)_\gamma|_{\delta=0} = 2(Y_1 + Y_2) = (I_t^k, \varphi)_\gamma.$$

Тем самым равенство 1) доказано.

Докажем справедливость 2).

В силу равномерной сходимости рассматриваемых интегралов с учетом того, что, $\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)$, $\Gamma(1) = 1$, соотношение 2) представляется в виде

$$(\lim_{\delta\to 1} I_a^{k-\delta}, \varphi) = \lim_{\delta\to 1} \frac{2}{\Gamma(1-\delta)} \int\limits_0^1 z^{N+|\gamma|+2k-3} (1-z^2)^{-\delta} (I_{az}^{k-1}, \varphi) dz =$$

$$= -\lim_{\delta\to 1} \frac{1}{(1-\delta)\Gamma(1-\delta)} \int\limits_0^1 z^{N+|\gamma|+2k-4} (I_{az}^{k-1}, \varphi) d(1-z^2)^{1-\delta} =$$

$$= -\lim_{\delta\to 1} \frac{1}{\Gamma(2-\delta)} z^{N+|\gamma|+2k-4} (1-z^2)^{1-\delta} (I_{az}^{k-1}, \varphi)|_{z=0}^{z=1} +$$

$$+ \lim_{\delta\to 1} \frac{1}{\Gamma(2-\delta)} \int\limits_0^1 (1-z^2)^{1-\delta} \frac{\partial}{\partial z} [z^{N+|\gamma|+2k-4} (I_{az}^{k-1}, \varphi)] dz =$$

$$= z^{N+|\gamma|+2k-4} (I_{az}^{k-1}, \varphi)|_{z=0}^{z=1} = (I_a^{k-1}, \varphi).$$

Докажем справедливость третьего соотношения 3). Согласно теореме 2.1.4

$$(F_B[j_{\frac{N+|\gamma|}{2}-\delta}(a|x|)](|\xi||), \varphi(\xi)) =$$

$$= A'(N,n,\delta,\gamma)\int\limits_0^1 z^{N+|\gamma|-1}(1-z^2)^{-\delta}\int\limits_{S_1^+(N)}\varphi(az\xi)\,(\xi')^\gamma\,dS(\xi)dz =$$

$$= A'(N,n,\delta,\gamma)\frac{1}{a^{N+|\gamma|}}\int\limits_0^a(1-z^2)^{-\delta}\int\limits_{|\xi|=az}\varphi(\xi)\,(\xi')^\gamma\,d\xi d(az) =$$

$$= A'(N,n,\delta,\gamma)\frac{1}{a^{N+|\gamma|-2\delta}}\int\limits_0^1(a^2-a^2z^2)^{-\delta}\int\limits_{|\xi|=az}\varphi(\xi)\,(\xi')^\gamma\,d\xi d(az) =$$

$$= A'(N,n,\delta,\gamma)\frac{1}{a^{N+|\gamma|-2\delta}}\int\limits_{|\xi|\le a}(a^2-|\xi|^2)^{-\delta}\varphi(\xi)\,(\xi')^\gamma\,d\xi,$$

где

$$A'(N,n,\delta,\gamma) = \frac{2^{N+|\gamma|-n}\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}+1-\delta\right)\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma(1-\delta)},$$

$A'(N,n,\delta,\gamma) = A^{-1}(N,n,\mu,\gamma)$. При $\delta = \frac{N+|\gamma|}{2}-\mu$, и последнее выражение совпадает с результатом следствия теоремы 2.1.1.

Доказательство закончено.

2.2 Задача Коши для сингулярного уравнения типа уравнения Ибрагимова—Мамонтова

2.2.1 Постановка задачи

В работе [16] для исследования справедливости принципа Гюйгенса в евклидовых пространствах разной размерности введено уравнение

$$u_{tt} = u_{xx} + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{i,j}(x-t)\,u_{y_iy_j}. \tag{2.2.1}$$

Результаты [16] позволили принципиально уточнить результаты М. Матиссоном [62] и К.Л. Штельмахера [63], где приводились примеры (не волновых) уравнений в декартовых пространствах размерностей разной четности, удовлетворяющих принципу Гюйгенса. Ранее Ж. Адамар доказал, что для регулярного волнового уравнения в четномерном пространстве всегда имеет место диффузия волн (т.е. отсутствует принцип Гюйгенса). Приведем цитату из [16] — «...уравнения с тремя пространственными переменными, не эквивалентные волновому уравнению, для которых отсутствует диффузия волн, должны быть уравнениями с переменными коэффициентами при вторых производных».

Однако для сингулярных дифференциальных уравнений это не так. Например, решение задачи Коши для уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + (B_\gamma)_y u\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}_2, \quad (B_\gamma)_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\gamma}{y}\,\frac{\partial}{\partial y}$$

при γ нечетном удовлетворяет принципу Гюйгенса, а при γ четном — нет (несмотря на четное число переменных в обоих случаях). Единственное отличие от уравнений приведенных в работах М. Матиссона и К.Л. Штельмахера состоит в том, что рассмотренное выше уравнение имеет особенность при младшей производной.

В связи с этим интерес вызывают уравнения типа волновых, в которых роль второй производной играет сингулярный дифференциальный оператор Бесселя B_γ. Впервые уравнение с оператором Бесселя по одной из пространственных переменных рассмотрено в [18], где приведены решения уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{i,j}(x-t)\; u_{y_i y_j} + (B_\gamma)_{y_n} u, \qquad (B_\gamma)_{y_n} = \frac{\partial^2}{\partial y_n^2} + \frac{\gamma}{y_n}\,\frac{\partial}{\partial y_n} \tag{2.2.2}$$

для произвольного $\gamma > 0$ и теорема о принципе Гюйгенса.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка более общего вида, по сравнению с изучаемыми в работах [16], [18] и [63], а именно, полагая $u=u(x,y,t)$, $x\in\mathbb{R}_1$, $y\in\mathbb{R}^+_{N-1}$, требуем, чтобы

$$u_{tt}-u_{xx}-\sum_{i,j=1}^{N-1} a_{i,j}(x-t)\ (D_B)_{ij}u=0, \quad (D_B)_{ij}=\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial y_j}, & i\neq j,\\ \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+\frac{\gamma_i}{y_i}\ \frac{\partial}{\partial y_i}, & i=j, \end{cases} \tag{2.2.3}$$

где $\gamma_i \geq 0$, $N \geq 2$ — число пространственных переменных (x,y), $y=(y_1,y_2,\ldots,y_{N-1})$. Как видим, если все $\gamma_i=0$, то это уравнение (2.2.1); если только $\gamma_{N-1}\neq 0$, то получим (2.2.2) (но более общее, т.к. в него входит не только оператор Бесселя, но и первые производные по y_{N-1}).

Как в работах [16] и [18], коэффициенты уравнения (2.2.3) считаем симметричными $a_{ij}=a_{ji}$ и бесконечно дифференцируемыми функциями от одной переменной $x-t$. Также считаем, что квадратичная форма $\sum\limits_1^{N-1} a_{ij}\xi_i\xi_j$ положительно определена, поэтому уравнение (2.2.3) является B-гиперболическим.

В области $t>0$ для рассматриваемого уравнения ищем решение задачи Коши

$$u|_{t=0}=\varphi(x,y), \quad u_t|_{t=0}=\psi(x,y). \tag{2.2.4}$$

Функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ предполагаем финитными и бесконечно дифференцируемыми.

Согласно сделанными предположениям задача Коши (2.2.3) имеет, и притом единственное, бесконечно дифференцируемое решение, финитное по пространственным переменным. Найдем формулу представления этого решения и проверим справедливость принципа Гюйгенса для уравнения (2.2.3).

Также как в [16] и [18], решение уравнения (2.2.3) с ненулевыми начальными условиями (2.2.4) можно свести ([16] лемма 1.1) к решению задачи Коши следующего вида:

$$u|_{t=0}=0, \quad u_t|_{t=0}=f(x,y). \tag{2.2.5}$$

Функцию $f(x,y)$ положим четной по каждой координате вектора y, финитной и бесконечно дифференцируемой.

Вместо преобразования Фурье, применяемого в [16], и преобразования Левитана F_B (смешанного преобразования Фурье-Бесселя), применяемого в [18], мы пользуемся интегральным преобразованием Киприянова—Катрахова $\mathcal{F}_B$, которое в одномерном случае введено в [27], в многомерном случае — в [22]; некоторые особенности $\mathcal{F}_B$-преобразования, связанные с применением к классам основных функций, используемых здесь, исследованы в [41], [58].

2.2.2 Решение $\mathcal{F}_B$-преобразованной задачи Коши

Используем обозначение $\widehat{u} = \mathcal{F}_B[u]$. Решение задачи (2.2.3), (2.2.5) ищем в классе функций $u = u(x, y, t)$, четных по каждой координате вектора $y = (y_1, \ldots, y_{n-1})$. К задаче (2.2.3), (2.2.5) применим $\mathcal{F}_B$-преобразование по переменным $y{=}(y_1, \ldots, y_{n-1})$. Если в (2.2.3) некоторые из $\gamma_i{=}0$, то согласно теореме 1.1.1 по этим направлениям y_i действует $\cos$-преобразование Фурье. В результате получим следующую задачу Коши

$$\widehat{u}_{tt} = \widehat{u}_{xx} + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{i,j}(x-t)\ \lambda_i\lambda_j\,\widehat{u}, \quad \widehat{u}|_{t=0} = 0, \quad \widehat{u}_t|_{t=0} = \widehat{f}(x,\lambda) \quad (2.2.6)$$

с двумя независимыми переменными x, t и параметрами $\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}$, где $\widehat{f} = \mathcal{F}_B[f]$, которая не отличатся от задачи Коши, рассмотренной в [16] (п. 1), полученной применением преобразования Фурье к уравнению (2.2.1) и начальным условиям типа (2.2.5). Поэтому в этой части исследований мы просто воспользуемся результатами [16].

Сделаем замену переменных

$$\bar{t} = \frac{1}{2}(x+t), \quad \bar{x} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n-1} A_{ij}(x-t)\lambda_i\lambda_j,$$

где $A_{ij}(\sigma) = \int a_{ij}(\sigma)\,d\sigma$, $i,j = 1, \ldots, n-1$. В результате уравнение (2.2.6) примет вид

$$\hat{u}_{\bar{x}\bar{t}} + \hat{u} = 0,$$

Полученное уравнение эквивалентно телеграфному уравнению. Функция Римана этого уравнения известна (см. например [31])

$$R(\bar{\tau},\bar{\xi},\bar{t},\bar{x},)=J_0\left(\sqrt{4(\bar{t}-\bar{\tau})(\bar{x}-\bar{\xi})}\right),$$

где $\bar{\tau}=\frac{1}{2}(\xi+\tau)$, $\bar{\xi}=-\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n-1}A_{ij}(\xi-\tau)\lambda_i\lambda_j$. Функция Римана в старых переменных, для уравнения (2.2.6) примет вид

$$R(\tau,\xi;t,x)=j_0\left(\sqrt{(t-\tau+x-\xi)\sum_{i,j=1}^{n-1}\left[A_{ij}(\xi-\tau)-A_{ij}(x-t)\right]\lambda_i\lambda_j}\right). \tag{2.2.7}$$

В общую формулу решения задачи Коши (2.2.6)

$$\widehat{u}(t,x,\lambda)=\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}R(0,\xi;t,x)\,\widehat{f}(\xi,\lambda)\,d\xi$$

подставим значение функции Римана (2.2.7). Получим

$$\widehat{u}(t,x,\lambda)=\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}j_0\left(b\sqrt{Q(\lambda)}\right)\,\widehat{f}(\xi,\lambda)\,d\lambda\,, \tag{2.2.8}$$

где $b^2=t+x-\xi$, $Q(\lambda)=\sum_{i,j=1}^{n-1}[A_{ij}(\xi)-A_{ij}(x-t)]\lambda_i\lambda_j$.

Перепишем это решение в следующем виде

$$\widehat{u}(t,x,y)=\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}j_0\left(b\sqrt{Q(\lambda)}\right)\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}f(\xi,\eta)\mathbf{j}_\gamma(\eta,\lambda)\,\eta^\gamma\,d\eta\,d\xi\,,$$

а $\mathbf{j}_\gamma(p,q)=\prod_{i=1}^{n-1}j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(p_i\,q_i)$.

2.2.3 Интегральное представление решения задачи (2.2.3), (2.2.5)

К равенству (2.2.8) применим обратное $\mathcal{F}_B$ -преобразование. Учитывая четность функций по каждой координате вектора λ, получим

$$u(t,x,y)=\frac{1}{2c_\gamma}\int\limits_{x-t}^{x+t}d\xi\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}j_0\left(b\sqrt{Q(\lambda)}\right)\prod_{i=1}^{n-1}j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(y_i\lambda_i)\,\lambda^\gamma d\lambda\,\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}f(\xi,\eta)\prod_{i=1}^{n-1}j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(\lambda_i\eta_i)\,\eta^\gamma d\eta,$$

где $c_\gamma=\prod_{i=1}^{n-1}2^{\gamma_i-1}\,\Gamma^2\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)$. Из теоремы сложения j-функций Бесселя (1.3.4) вытекает

$$u(t,x,y)=\frac{1}{2c_\gamma}\int\limits_{x-t}^{x+t}d\xi\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}j_0\left(b\sqrt{Q(\lambda)}\right)\,\lambda^\gamma d\lambda\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}f(\xi,\eta)\,T_\eta^y\left(\prod_{i=1}^{n-1}j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(\lambda_i\eta_i)\right)\,\eta^\gamma d\eta\,.$$

Самосопряженность обобщенного сдвига T_η^y (см. [33]) приведет к следующей формуле решения задачи (2.2.3), (2.2.5):

$$u(t,x,y)=\frac{1}{2c_\gamma}\int\limits_{x-t}^{x+t}d\xi\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}j_0\left(b\sqrt{Q(\lambda)}\right)\,\lambda^\gamma d\lambda\,\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}}T_\eta^y f(\xi,\eta)\,\left(\prod_{i=1}^{n-1}j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(\lambda_i\eta_i)\right)\,\eta^\gamma d\eta\,.$$

Квадратичная форма $Q(\lambda)$ положительно определена при $\xi>x-t$, т.к. форму $Q(\lambda)$ можно записать как интеграл $Q(\lambda)=\int\limits_{x-t}^{\xi}q(\sigma;\lambda)d\sigma$ от квадратичной формы $q(\sigma;\lambda)=\sum\limits_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}(\sigma)\lambda_i\lambda_j$, положительно определенной при каждом значении σ (см. [16]). Поэтому существует вещественное невырожденное преобразование координат

$$\bar{\lambda} = P\lambda,$$

где P — матрица преобразования, приводящее $Q(\lambda)$ к сумме квадратов.

Для новых переменных введем следующие обозначения $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_{n-1})$. Решение задачи Коши (2.2.3), (2.2.5) в новых переменных $\bar{\lambda}$ примет вид:

$$u(t,x,y) = \frac{1}{2c_\gamma} \int\limits_{x-t}^{x+t} d\xi \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} j_0\left(b\,|\bar{\lambda}|\right)\,(P^{-1}\bar{\lambda})^\gamma P^{-1} d\bar{\lambda}\times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} T^y_\eta f(\xi,\eta) \prod_{i=1}^{n-1} j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(\bar{\lambda}P^{-1}\eta)\,\eta^\gamma d\eta\,.$$

Сделаем теперь замену переменных $\zeta = P^{-1}\eta$, тогда $\eta = P\zeta$. Получим

$$u(t,x,y) = \frac{1}{2c_\gamma} \int\limits_{x-t}^{x+t} d\xi \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} j_0\left(b\,|\bar{\lambda}|\right)\,(P^{-1}\bar{\lambda})^\gamma P^{-1} d\bar{\lambda}\times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} T^y_{P\zeta} f(\xi,P\zeta) \prod_{i=1}^{n-1} j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(\bar{\lambda}\zeta)\,(P\zeta)^\gamma P\, d\zeta\,,$$

$$u(t,x,y) = \frac{1}{2c_\gamma} \int\limits_{x-t}^{x+t} d\xi \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} j_0\left(b\,|\bar{\lambda}|\right)\,\bar{\lambda}^\gamma d\bar{\lambda}\times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}_{n-1}} T^y_{P\zeta} f(\xi,P\zeta) \prod_{i=1}^{n-1} j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(\bar{\lambda}\zeta)\,\zeta^\gamma\, d\zeta\,,$$

В рамках весовых обобщенных функций имеем

$$u(t,x,y)=\frac{1}{2c_\gamma}\int\limits_{x-t}^{x+t}\Big(j_0(b|\bar\lambda|)\,,\,F_{B_{\zeta\to\bar\lambda}}[T^y_{P\zeta}f(\xi,P\zeta)](\lambda)\Big)_\gamma\,d\xi\,,$$

отсюда, меняя порядок интегрирования по $\bar\lambda$ и ζ, получим

$$u(t,x,y)=\frac{1}{2c_\gamma}\int\limits_{x-t}^{x+t}\Big(F_{B_{\bar\lambda\to\zeta}}[j_0(b|\bar\lambda|)](\zeta)\,,\,T^y_{P\zeta}f(\xi,P\zeta)\Big)_\gamma\,d\xi\,. \tag{2.2.9}$$

Формулы F_B-преобразования радиальной функции Бесселя произвольного порядка $\mu>-\frac12$ получены в пункте 2.1. Нам понадобятся две формулы для $\mu=0$ в случае четного и нечетного числа $n+|\gamma|-1$.

Вначале отметим, что при $-\frac12<\mu\le\frac{n+|\gamma|-2}{2}$ преобразование Левитана функции $j_\mu(b\,|\bar\lambda|)$ в классическом смысле не существует, однако, оно может быть вычислено в рамках весовых обобщенных функций. Функция $j_\mu(b\,|\bar\lambda|)$ определяет регулярный функционал в пространстве S'_{ev}. Действительно, поскольку эта функция непрерывна, то она локально интегрируема (с любым степенным весом), а из неравенства $|j_\mu(b|x|)|\le 1\ \ \forall\ \ |x|\in[0,\infty)$ следует ее не более чем степенной рост.

Предположим, что $|\gamma|$ — натуральное число. Используем обобщенные функции Киприянова I^α_b, носители которых сосредоточены на сфере и в шаре в $\mathbb{R}_{n-1}$, которые определим при четных и нечетных $n+|\gamma|-1$. Случай $\mu=0$ содержится в пункте 2.1 в теоремах 2.1.3 и 2.1.4.

а) При четном $n+|\gamma|-1$ (в теореме 2.1.3 это случай а), n — всего пространственных переменных в уравнении, т.е. $x,y_1,....,y_{n-1}$), $\mu=k$ целом, $0\le k\le\frac{n+|\gamma|-2}{2}$ ($n-1$ — число весовых переменных, $n-1$ — число переменных, по которым применяется F_B-преобразование).

Обобщенная функция Киприянова действует на основную функцию $\varphi\in S_{ev}$ по правилу

$$\left(I^k_b,\varphi\right)_\gamma=\frac{1}{b^{2k}}\left(\frac{d}{b\,db}\right)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}-k}\left[b^{n+|\gamma|-3}\int\limits_{S^+_1(n-1)}\varphi(b\zeta)\,\zeta^\gamma\,dS(\zeta)\right].$$

Тогда преобразование Левитана $j_k(b\,|\bar{\lambda}|)$ запишется в виде

$$F_B[j_k(b|\bar{\lambda}|)](\zeta)=A'_k(n-1,n-1,\gamma)\ I_b^k,$$

где

$$A'_k(n-1,n-1,\gamma)=2^{k+\frac{n+|\gamma|-1}{2}-n+1}\,\Gamma(k+1)\,\pi^{\frac{n-1-n+1}{2}}\prod_{i=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)=$$

$$2^{k+\frac{-n+|\gamma|+1}{2}}\,\Gamma(k+1)\prod_{i=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)=A'_k(n-1,\gamma)$$

ограниченная константа, независящая от b и ζ.

Далее введем обозначение $I_b^k|_{k=0}=I_{ev}$.

$$(I_{ev},\varphi)_\gamma=\left(I_b^k|_{k=0},\varphi\right)_\gamma=$$

$$=\left(\frac{d}{b\,db}\right)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}\left[b^{n+|\gamma|-3}\int\limits_{S_1^+(n-1)}\varphi(b\zeta)\,\zeta^\gamma\,dS(\zeta)\right].$$

Сделаем замену $b=\sqrt{s}$. Получим функционал вида

$$(I_{ev},\,\varphi)_\gamma=\left(I^k_{\sqrt{s}}|_{k=0}\,,\,\varphi\right)_\gamma=$$

$$=2^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}\left(\frac{d}{ds}\right)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}\left[s^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}\int\limits_{S_1^+(n-1)}\varphi(\sqrt{s}\zeta)\,\zeta^\gamma\,dS(\zeta)\right].$$

Из (2.2.9) получаем следующее представление решения задачи (2.2.3), (2.2.5) в случае четного $n+|\gamma|-1$:

$$u(t,x,y)=$$

$$=\frac{A'_0(n-1,\gamma)}{2c_\gamma}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left(I_{ev}\,,\,T^y_{P\zeta}f(\xi,P\zeta)\right)_\gamma d\xi=\frac{2^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}\,A'_0(n-1,\gamma)}{2c_\gamma}\int\limits_{x-t}^{x+t}d\xi\times$$

$$\times \left(\frac{d}{ds}\right)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}} \left[s^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}} \int\limits_{S_1^+(n-1)} T^y_{\sqrt{s}\,P\,\zeta} f(\xi,\sqrt{s}\,P\,\zeta)\,\zeta^\gamma dS(\zeta)\right]\Bigg|_{s=x+t-\xi},$$

где

$$A'_0(n-1,\gamma)=2^{-\frac{n-|\gamma|-1}{2}}\prod_{i=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right).$$

В результате при четном $n+|\gamma|-1$

$$u(t,x,y)=\frac{2^{n-3}}{\prod_{i=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\int\limits_{x-t}^{x+t} d\xi\times$$

$$\times \left(\frac{d}{ds}\right)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}} \left[s^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}} \int\limits_{S_1^+(n-1)} T^y_{\sqrt{s}\,P\,\zeta} f(\xi,\sqrt{s}\,P\,\zeta)\,\zeta^\gamma dS(\zeta)\right]\Bigg|_{s=x+t-\xi}. \tag{2.2.10}$$

b) При нечетном $n+|\gamma|-1$ (в теореме 2.1.4 это случай 2) , n — всего пространственных переменных в уравнении) $\mu=k-\frac{1}{2}-\delta$, где k натуральное, $1\le k\le\frac{n+|\gamma|}{2}$, ($n-1$ — число весовых переменных, $n-1$ — число переменных, по которым применяется F_B -преобразование).

Обобщенная функция Киприянова действует на основную функцию $\varphi\in S_{ev}$ по правилу

$$(I_b^{k-\frac{1}{2}-\delta},\varphi)_\gamma=\tfrac{2}{\Gamma(1-\delta)}\int\limits_0^1 z^{2k-2}(1-z^2)^{-\delta}\times$$

$$\times\tfrac{1}{b^{2k-3}}\left(\tfrac{d}{bdb}\right)^{\frac{n+|\gamma|}{2}-k}\left[b^{n+|\gamma|-3}\int\limits_{S_1^+(n-1)}\varphi(bz\zeta)\,\zeta^\gamma\,dS(\zeta)\right]dz\,.$$

Тогда преобразование Левитана $j_{k-\frac{1}{2}-\delta}(b\,|\bar\lambda|)$ запишется в виде

$$F_B[j_{k-\frac{1}{2}-\delta}(b|\bar\lambda|)](\zeta)=A''_{k-\frac{1}{2}-\delta}(n-1,n,\gamma)\ I_b^{k-\frac{1}{2}-\delta},$$

где

$$A''_{k-\frac{1}{2}-\delta}(n-1,n-1,\gamma)=2^{k+\frac{n+|\gamma|-4}{2}-n+1}\,\pi^{\frac{n-1-n+1}{2}}\,\Gamma(k+\frac{1}{2}-\delta)\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)$$

$$= 2^{k-\frac{n-|\gamma|+2}{2}}\,\Gamma(k+\frac{1}{2}-\delta)\prod_{i=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right) = A''_{k-\frac{1}{2}-\delta}(n-1,\gamma)$$

ограниченная константа, независящая от b и ζ.

В этих формулах положим $I_b^{k-\frac{1}{2}-\delta}|_{k=1,\delta=\frac{1}{2}} = I_{od}$. Тогда $\mu=0$ и

$$F_B[j_0(b|\bar{\lambda}|)](\zeta) = A''_0(n-1,\gamma)\ I_{od},$$

а функционал I_{od} действует на основные функции $\varphi\in S_{ev}$ по правилу

$$(I_{od},\varphi)_\gamma = \tfrac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^1 (1-z^2)^{-1/2}\times$$

$$\times\tfrac{1}{b^{-1}}\left(\tfrac{d}{bdb}\right)^{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}\left[b^{n+|\gamma|-3}\int\limits_{S_1^+(n-1)}\varphi(bz\zeta)\,\zeta^\gamma\,dS(\zeta)\right]dz\,.$$

Сделаем замену $b=\sqrt{s}$. Получим функционал вида

$$(I_{od},\varphi)_\gamma = \tfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^1 (1-z^2)^{-1/2}\times$$

$$\times\, 2^{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}\sqrt{s}\left(\tfrac{d}{ds}\right)^{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}\left[s^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}\int\limits_{S_1^+(n-1)}\varphi(\sqrt{s}z\zeta)\,\zeta^\gamma\,dS(\zeta)\right]dz\,.$$

Из (2.2.9) получим следующее представление решения задачи (2.2.3), (2.2.5) в случае нечетного $n+|\gamma|-1$:

$$u(t,x,y) = 2^{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}\,\frac{A''_0(n-1,\gamma)}{\sqrt{\pi}c_\gamma}\int\limits_{x-t}^{x+t}d\xi\int\limits_0^1(1-z^2)^{-1/2}\sqrt{s}\times$$

$$\times\left(\frac{d}{ds}\right)^{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}\left[s^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}\int\limits_{S_1^+(n-1)} T_y^{\sqrt{s}\,zP\zeta} f(\xi,\sqrt{s}\,zP\zeta)\,\zeta^\gamma\,dS(\zeta)\right]\Bigg|_{s=x+t-\xi}dz,$$

где

$$A''_0(n-1,\gamma) = 2^{-\frac{n-|\gamma|}{2}}\prod_{i=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right).$$

В результате при нечетном $n+|\gamma|-1$

$$u(t,x,y) = \frac{2^{n-2}}{\sqrt{\pi}\prod_{i=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\int\limits_{x-t}^{x+t}d\xi\int\limits_0^1(1-z^2)^{-1/2}\sqrt{s}\ \times$$

$$\times\left(\frac{d}{ds}\right)^{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}\left[s^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}\int\limits_{S_1^+(n-1)} T_y^{\sqrt{s}\,zP\zeta} f(\xi,\sqrt{s}\,zP\zeta)\,\zeta^\gamma\,dS(\zeta)\right]\Bigg|_{s=x+t-\xi} dz. \tag{2.2.11}$$

Как видим, в случае четного $n+|\gamma|-1$ носитель обобщенной функции $F_B[j_0(b|\bar{\lambda}|)]$ принадлежит сфере $|y|=1$. В случае нечетного $n+|\gamma|-1$ в представлении функционала $F_B[j_0(b|\bar{\lambda}|)]$ появился интеграл по радиальной переменной z, следовательно, носитель $F_B[j_0(b|\bar{\lambda}|)]$ принадлежит шару $|y|<1$.

В уравнении (2.2.3) число пространственных переменных n. Поэтому из (2.2.10) и (2.2.11) следует, что при нечетном $n+|\gamma|$ функционал $F_B[j_0(b|\bar{\lambda}|)]$ имеет носитель расположенный на поверхности сферы, в случае же когда $n+|\gamma|$ — четное, носитель $F_B[j_0(b|\bar{\lambda}|)]$ расположен в шаре. Следовательно, в первом случае для решений задачи (2.2.3), (2.2.5) принцип Гюйгенса выполняется, а во втором не выполняется.

Интересно отметить, что если $|\gamma|=0$ (т.е. все $\gamma_i=0$, $i=1,...,n-1$), то результат имеет вид

$$u(t,x,y)=$$

$$=\frac{1}{4\,\pi^{\frac{n-1}{2}}}\int\limits_{x-t}^{x+t} d\xi\left(\frac{d}{ds}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left[s^{\frac{n-3}{2}}\int\limits_{S_1^+(n-1)} f(\xi,y+\sqrt{s}\,P\,\zeta)\,dS(\zeta)\right]\Bigg|_{s=x+t-\xi}$$

при четных $n-1$,

$$u(t,x,y)=\frac{1}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{x-t}^{x+t} d\xi\int\limits_0^1 (1-z^2)^{-1/2}\times$$

$$\times\sqrt{s}\left(\frac{d}{ds}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left[s^{\frac{n-3}{2}}\int\limits_{S_1^+(n-1)} f(\xi,\,y+\sqrt{s}\,z\,P\zeta)\;dS(\zeta)\right]\Bigg|_{s=x+t-\xi} dz, =$$

$$= \frac{1}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{x-t}^{x+t} d\xi \int\limits_{\{|\zeta|<1\}_{n-1}} (1-\zeta^2)^{-1/2} \times$$

$$\times \left(\frac{d}{ds}\right)^{\frac{n-2}{2}} \left[s^{\frac{n-2}{2}} f(\xi, y + \sqrt{s}\, P\zeta)\; d\zeta \right]\Bigg|_{s=x+t-\xi}$$

при нечетных $n-1$, что совпадает в обоих случаях с решением в [16].

2.2.4 Пример сингулярного уравнения Ибрагимова—Мамонтова

В качестве примера, рассмотрим уравнение

$$u_{tt} = u_{xx} + \sum_{i,j=1}^{2} a_{i,j}(x-t)\; (D_B)_{ij} u, \quad (D_B)_{ij} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_j}, & i \neq j, \\ \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\gamma_i}{y_i} \frac{\partial}{\partial y_i}, & i = j, \end{cases}$$

при $a_{12}(x-t) = a_{21}(x-t) = 0$, $a_{22} = 1$, $a_{11}(x-t) = a(x-t)$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 2$. А именно уравнение

$$u_{tt} = u_{xx} + a(x-t) u_{y_1 y_1} + u_{y_1 y_2} + \frac{2}{y_2} u_{y_2} \tag{2.2.12}$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = f(x, y_1, y_2). \tag{2.2.13}$$

После применения преобразования Левитана (Фурье—Бесселя) по переменным (x_2, x_3) приходим к следующей задаче

$$\widehat{u}_{tt} = \widehat{u}_{xx} + [a_(x-t)\lambda_1^2 + \lambda_2^2]\widehat{u} \tag{2.2.14}$$

$$\widehat{u}|_{t=0} = 0, \quad \widehat{u}_t|_{t=0} = \widehat{f}(x, \lambda_1, \lambda_2),$$

Функция Римана для (2.2.14) имеет вид

$$R(\tau, \xi; t, x) = j_0 \left(\sqrt{(t-\tau)^2 + (x-\xi)^2} \sqrt{\frac{A(\xi-\tau) - A(x-t)}{t - \tau - x + \xi} \lambda_1^2 + \lambda_2^2,} \right),$$

где $A(\xi-\tau)-A(x-t)=\int_{x-t}^{\xi-\tau} a(\sigma)\,d\sigma$

Выражая через функцию Римана решение $\widehat{u}(t,x,\lambda_1,\lambda_2)$ и применяя обратное преобразование Левитана (Фурье—Бесселя) в рамках весовых обобщенных функций (т.к. γ_1=0, то по y_1 действует cos-преобразование Фурье) получаем

$$u(t,x,y_1,y_2)=\frac{1}{2c}\int\limits_{x-t}^{x+t}\Big(F^{-1}_{B_y\to\eta}[R(0,\xi;t,x)](\eta_1,\eta_2),\,T^y_\eta f(\xi,\eta_1,\eta_2)\Big)_2\,d\xi,$$

где $c=2^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{3}{2}}$ константа.

Сделаем замену переменных. Вместо (λ_1,λ_2) введем $(\bar\lambda_1,\bar\lambda_2)$ следующим образом

$$\lambda_1=\sqrt{\frac{A(\xi)-A(x-t)}{t-x+\xi}\bar\lambda_1},\quad \lambda_2=\bar\lambda_2,$$

а вместо (η_1,η_2) введем переменные z_1,z_2 по формулам

$$z_1=\sqrt{\frac{t-x+\xi}{A(\xi)-A(x-t)}(\eta_1-y_1)},\quad z_2=\eta_2.$$

В новых переменных функция Римана $R(0,\xi;t,x)$ будет иметь вид

$$R(0,\xi;t,x)=j_0\left(\sqrt{t^2-(x-\xi)^2}\,\sqrt{\bar\lambda_1^2+\bar\lambda_2^2}\right),$$

а решение $u(t,x,y)$ приобретает следующую форму:

$$u(t,x,y_1,y_2)=\frac{1}{2c}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left(F^{-1}_{B_y\to z}[j_0\left(\sqrt{t^2-(x-\xi)^2}\,\sqrt{\bar\lambda_1^2+\bar\lambda_2^2}\right)(z),\right.$$

$$\left.,\,T^{y_2}_{z_2}f(\xi,y_1+\sqrt{\frac{A(\xi)-A(x-t)}{t-x+\xi}z_1},z_2)\right)_2 d\xi.$$

С помощью преобразования $F_B[j_0]$ решение задачи Коши (2.2.12)—(2.2.13) может быть записано в виде

$$u(t,x,y_1,y_2)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left\{\left(\frac{1}{y_2}\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\int\limits_0^{2\pi}f(\xi,y_1+B\cos\theta,y_2+C\sin\theta)\times\right.$$

$$\times(y_2 + C\sin\theta)^2\, d\theta - \int\limits_0^{2\pi} \left(1 + (y_2 C\sin\theta)\frac{\partial}{\partial y_2}\right) f(\xi, y_1 + B\cos\theta, y_2 +$$

$$+ C\sin\theta)\, d\theta - C\left(\frac{1}{y_2}\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\int\limits_0^{2\pi} \sin\theta\,(y_2 + C\sin\theta)\times$$

$$\left.\times f(\xi, y_1 + B\cos\theta, y_2 + C\sin\theta)\, d\theta\right\} d\xi\,,$$

где

$$B = \sqrt{(t + x - \xi)(A(\xi) - A(x - t))},$$

$$C = \sqrt{t^2 - (x - \xi)^2}.$$

Произведя дифференцирование по x_3, приходим к представлению решения

$$u(t, x, y_1, y_2) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{y_2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\int\limits_0^{2\pi} (y_2 + C\sin\theta)\, f(\xi, y_1 + B\cos\theta, y_2 + C\sin\theta)\, d\theta\, d\xi. \tag{2.2.15}$$

Построим характеристический коноид для уравнения (2.2.12). Особенность стоит при первой производной и на вид коноида не влияет. Поэтому характеристический коноид для уравнения (2.2.12) имеет тот же вид, что и для уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + a(x - t)u_{y_1 y_1} + u_{y_1 y_2}.$$

Данное уравнение входит в класс задач, исследованных Н.Х. Ибрагимовым и Е.В. Мамонтовым [16]. Применяя результаты этой работы к нашему случаю, получим, что характеристический коноид для уравнения (2.2.12) с вершиной в точке (t^0, x^0, y_1^0, y_2^0) будет иметь вид

$$(t - t^0)^2 = (x - x^0)^2 + \frac{(x - t) - (x^0 - t^0)}{A(x - t) - A(x^0 - t^0)}(y_1 - y_1^0)^2 + (y_2 - y_2^0)^2. \tag{2.2.16}$$

Формула (2.2.15) показывает, что решение $u(t, x, y_1, y_2)$ задачи Коши (2.2.12)—(2.2.13) зависит от значений начальной функции

$f(x, y_1, y_2)$ на пересечении плоскости $t = 0$ и коноида (2.2.16). Это означает, что решение (2.2.15) задачи Коши (2.2.12)—(2.2.13) удовлетворяет принципу Гюйгенса.

2.3 Задача Коши для B-гиперболического уравнения с особенностями по многим переменным

Фундаментальное решение B-гиперболического оператора

$$\square_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_B, \quad \Delta_B = \sum_{i=1}^{n} B_{\gamma_i}, \quad \gamma_i \geq 0$$

построено в работе [26]. В этой же работе исследован вопрос о выполнении принципа Гюйгенса решения задачи Коши

$$\square_\gamma u = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x)\,.$$

Получен следующий результат

Теорема (Киприянов, Засорин) *Если носители функций φ и ψ сосредоточены в шаре $|x| < R$, то в каждый момент времени $t > 2R$ носитель решения задачи Коши сосредоточен*

1) в шаре радиуса $t + R$ при $\{N + |\gamma|\} \neq 2k + 1$;

2) в сферическом слое между сферами $S^+_{t-R}(N)$ и $S^+_{t+R}(N)$ при $N + |\gamma| = 2k + 1$.

Число k в обоих случаях натуральное.

Как видим, принцип Гюйгенса выполняется лишь во втором случае, присутствует передний и задний фронты волны.

В работе [18] рассматривался B-гиперболический оператор $\square_\gamma$, когда все $\gamma_i > 0$ и построены функционалы Киприянова I^α для этого случая.

В работах [28] и [29], напротив, изучался случай действия сингулярного оператора Бесселя по времени (т.е. по той переменной, по которой ставятся начальные условия). Разумеется, по отношению к принципу Гюйгенса получен соответствующий обобщающий [16] результат.

Отметим также две работы [42] и [43]. Получены соотношения Айсгерссона—Киприянова, которые позволили в [43] выписать решения задачи Коши для уравнения

$$\square_{\beta,\gamma_i} u{=}0,\ \text{где}\ \square_{\beta,\gamma_i}{=}B_{\beta,t}{-}\Delta_{B_{\gamma,x}},\ \Delta_{B_{\gamma,x}}{=}\sum_{i=1}^{n} B_{\gamma_i}{+}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2},\ \gamma_i>0$$

в виде дробных интегродифференциальных конструкций Киприянова [24] (названа в [43] «производной типа Эрдейи—Кобера», на самом деле конструкция Эрдейи—Кобера не подходит по одному из параметров).

2.3.1 Общий вид решения задачи Коши для B-гиперболического уравнения с оператором Бесселя по времени

В отличие от указанных выше здесь рассмотрим более общий случай, когда по времени действует оператор Бесселя с размерностью $\beta\geq 0$, а по пространственным переменным действуют сингулярные операторы Бесселя с размерностью $\gamma_i\geq 0$. В случае, когда все параметры размерностей оператора Бесселя одновременно равны нулю мы оказываемся в рамках классического волнового уравнения $u_{tt}=a^2\Delta u$, решения которого находятся в классе четных по Киприянову функций. Переход к классическому волновому уравнению обеспечивают возможности предельного перехода при $\beta\to 0$ и $\gamma_i\to 0$ открытые в п. 1.1

Итак, в полупространстве $\mathbb{R}^+_{N+1}=\{(t,x):\, t>0,\, x\in\mathbb{R}_N,\, N\geq 1\}$ рассмотрим следующую задачу Коши

$$B_{\beta,t}u=\Delta_{\gamma,x}u,\quad u|_{t=0}=f(x),\quad u_t|_{t=0}=0. \tag{2.3.1}$$

К задаче (2.3.1) по пространственным переменным применим смешанное F_B-преобразование с порядками j-функций Бесселя равными $\nu_i = \frac{\gamma_i - 1}{2}$ $(i{=}1,\, 2,\, \dots,\, n)$. В результате приходим к следующей задаче Коши:

$$B_{\beta,t}\widehat{u} + |\xi|^2 \widehat{u} = 0, \quad \widehat{u}|_{t=0} = \widehat{f}(x), \quad \widehat{u}_t|_{t=0} = 0\,. \tag{2.3.2}$$

Ограниченным решением обыкновенного дифференциального уравнения (2.3.2) является j-функция Бесселя $j_\mu(|\xi|t)$ порядка $\mu = \frac{\beta-1}{2}$. Легко проверяется, что решение, удовлетворяющее начальным условиям в задаче (2.3.1), представляется функцией

$$\widehat{u}(t,\xi) = j_{\frac{\beta-1}{2}}(t|\xi|)\widehat{f}(\xi). \tag{2.3.3}$$

Отметим, что функция $j_{\frac{\beta-1}{2}}(t|\xi|)$ четная и при $|\xi| \to \infty$ убывает как $|\xi|^{-\frac{\beta}{2}}$. Ее производные по ξ порядков q $(q = 1, 2, ...)$ убывают при $|\xi| \to \infty$ как $t^{2q}|\xi|^{-\frac{\beta}{2}}$. Вследствие этого при каждом $t > 0$ функция $j_{\frac{\beta-1}{2}}(t|\xi|)$ является мультипликатором в пространстве $S_{ev}(\mathbb{R}_N)$. Поэтому его преобразование Левитана (понимаемое, как смешанное F_B-преобразование в S'_{ev} является свертывателем над пространством $S_{ev}(\mathbb{R}_N)$ (см. [35]).

Решение (2.3.3), как функция $\xi{=}(\xi',\xi''){=}(\xi_1,...,\xi_n,\xi_{n+1},...,\xi_N)$, принадлежит пространству $S_{ev}(\mathbb{R}_N)$. Поэтому к ней применимо обратное смешанное F_B-преобразование. В результате

$$u(t,x) = F^{-1}_{B_\gamma}\left[j_{\frac{\beta-1}{2}}(t|\cdot|)\ \widehat{f}\ \right](x) = \left(F^{-1}_{B_\gamma}\left[j_{\frac{\beta-1}{2}}(t|\cdot|)\right]\ *\ f\right)_\gamma(x) =$$

$$= c(N,n,\gamma)\int\limits_{\mathbb{R}_n}\int\limits_{\mathbb{R}_N} j_{\frac{\beta-1}{2}}(t|\xi|)\prod_{i=1}^{n} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(\xi_i\, y_i)\, e^{-i\langle y'',\xi''\rangle}\ (\xi')^\gamma d\xi\ T^x_y f(y)\, y^\gamma\, dy.$$

Т.е.,

$$u(x,t) = c(N,n,\gamma)\left(F_{B_\gamma}[j_{\frac{\beta-1}{2}}(t|\xi|)],\, T^x_y\, f\right)_\gamma. \tag{2.3.4}$$

По следствию 2.1.1 при больших значениях $\beta > N + |\gamma|$

$$F^{-1}_{B_\gamma}\left[j_{\frac{\beta-1}{2}}(t|\cdot|)\right] = \psi_{t,\frac{\beta-1}{2}}(x)$$

и представляет собой финитную функцию с носителем в области $|x| < t$:

$$\psi_{t, \frac{\beta-1}{2}}(|x|) = \begin{cases} (t^2 - |x|^2)^{\frac{\beta-1}{2} - \frac{N+|\gamma|}{2}}, & x \in \{|x| < t\}^+ , \\ 0, & x \notin \{|x| < t\}^+ . \end{cases}$$

А при значениях размерности $\beta \leq N + |\gamma|$ выражение $F^{-1}_{B_\gamma}\left[j_{\frac{\beta-1}{2}}(t|\cdot|)\right] = I_t^{\frac{\beta-1}{2}}$ представляет собой распределение Киприянова из S'_{ev}, которое определяется по формулам, полученным в теоремах 2.1.3 и 2.1.4,

В обоих из этих случаев можем выписать явный вид решения $u(t,x)$. При этом отдельно рассматриваются случаи четной $N + |\gamma|$ и нечетной $N + |\gamma|$ размерности пространства.

2.3.2 А. Формулы решения при целом $\beta \leq N + |\gamma|$

Случай А1: $\beta = 2k + 1$ — **нечетное число и** $1 \leq \beta \leq N + |\gamma|$ **(** $0 \leq k \leq \frac{N+|\gamma|-1}{2}$ **),** $N + |\gamma| \geq 2$ — **четное число** По теореме 2.1.3, утверждение а), имеем

$$F_B[j_k(t|\xi|)] = A_k(N, n, \gamma) \cdot I_t^k,$$

где

$$A_k(N, n, \gamma) = 2^{k + \frac{N+|\gamma|}{2} - n}\Gamma(k+1)\pi^{\frac{N-n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(\frac{\gamma_i + 1}{2}\right);$$

А решение (2.3.4) задачи Коши (2.3.1) запишется в виде:

$$u(t,x) = c(N,n,\gamma)\, A_k(N,n,\gamma) \left(I_t^k,\, T_\eta^x\, f\right)_\gamma = \frac{2^{k - \frac{N+|\gamma|}{2} + n}\Gamma(k+1)}{\pi^{\frac{N-n}{2}} \prod\limits_{i=1}^{n} \left(\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\right)} \times$$

$$\times\ \frac{1}{t^{2k}} \left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{N+|\gamma|}{2} - k - 1} \left[t^{N+|\gamma|-2} \int\limits_{S_1^+(N)} T_x^{t\xi} f(x)\, (\xi')^\gamma\, dS(\xi)\right].$$

Это выражение можно записать в виде интеграла по сфере $y \in S_{x,t}$ с центром в точке x, радиуса t:

$$u(t,x) = \frac{2^{k-\frac{N+|\gamma|}{2}+n}\Gamma(k+1)}{\pi^{\frac{N-n}{2}} \prod\limits_{i=1}^{n} \left(\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\right)}, \times$$

$$\times \frac{1}{t^{2k}} \left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{N+|\gamma|}{2}-k-1} \left[t^{-1} \int\limits_{S_{x,t}(N)} T_x^y f(x)\,(y')^{\gamma}\, dS(y)\right]. \qquad (2.3.5)$$

Вывод 1. *Если* $N+|\gamma|$ *число четное, а* $\beta = 2k+1$ *— нечетное и* $\beta \le N+|\gamma|$, *то решение задачи Коши* (2.3.1) *удовлетворяет принципу Гюйгенса.*

Пример 2.3.1. *Рассмотрим случай, когда число весовых переменных* $n=0$ *и при* $\beta = 2k+1 = N-1 < N$ *(*N *— четное* β *— нечетное) получим уравнение Дарбу. Его решение согласно формуле* (2.3.5) *будет иметь вид*

$$u(t,x) = \frac{2^{-1}\Gamma(\frac{N}{2})}{\pi^{\frac{N}{2}}}\, \frac{1}{t^{N-1}} \int\limits_{|y|=t} f(x+y)\, dS(y)\,,$$

что совпадает с известной формулой решения данного уравнения (см. напр. [44] стр. 19).

Случай А2: $\beta = 2k$ **и** $N+|\gamma| \ge 2$ **— четные числа**. При этом число $\mu = \frac{\beta-1}{2}$ — дробное (полуцелое). Этот случай изучен при условии дробного μ (см.далее п. 3.4.3, B1).

Случай А3: $\beta = 2k$ **— четное число,** $N+|\gamma| \ge 3$ **— нечетное число**. При этом $0 \le \beta \le N+|\gamma|-1$ $\left(0 \le k \le \frac{N+|\gamma|-1}{2}\right)$. Порядок j-функции Бесселя, входящего в решение (2.3.4) равен $\mu = \frac{\beta-1}{2} = \frac{2k-1}{2} = k - \frac{1}{2}$.

По теореме 2.1.3 б), имеем

$$F_B[j_k(t|\xi|)] = A_{k-\frac{1}{2}}(N,n,\gamma) \cdot I_t^{k-\frac{1}{2}},$$

где

$$A_{k-\frac{1}{2}}(N,n,\gamma)=2^{k-\frac{1}{2}+\frac{N+|\gamma|}{2}-n}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right).$$

А решение задачи Коши (2.3.1) запишется в виде:

$$u(t,x)=c(N,n,\gamma)\,A_{k-\frac{1}{2}}(N,n,\gamma)\left(I_t^{k-\frac{1}{2}},\,T_\eta^x\,f\right)_\gamma=\frac{2^{k-\frac{N+|\gamma|+1}{2}+n}\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\right)}\times$$

$$\times\frac{1}{t^{2k-1}}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}-k}\left[t^{N+|\gamma|-2}\int\limits_{S_1^+(N)}T_x^{t\xi}f(x)\,(\xi')^\gamma\,dS(\xi)\right].$$

Это выражение также можно записать в виде интеграла по сфере $y\in S_{x,t}$ с центром в точке x, радиуса t:

$$u(t,x)=\frac{2^{k-\frac{N+|\gamma|+1}{2}+n}\;\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\right)}\times$$

$$\times\frac{1}{t^{2k-1}}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{N+|\gamma|-1}{2}-k}\left[t^{-1}\int\limits_{S_{x,t}(N)}T_x^{y}f(x)\,(y')^\gamma\,dS(y)\right].\qquad(2.3.6)$$

Здесь $S_{x,t}(N)=\{y:\ |x-y|=t\}$.

Вывод 2. *Как видим, в этом случае (т.е. при* $\beta=2k$ *и* $0\le\beta\le N+|\gamma|-1$ *и нечетном* $N+|\gamma|\ge3$, *решение задачи Коши* (2.3.1) *удовлетворяет принципу Гюйгенса.*

Пример 2.3.2. *Рассмотрим случай, когда число весовых переменных* $n=0$ *и когда* $\beta=0$ $(k{=}0)$, $N=3$, *получим задачу Коши для однородного волнового уравнения в* $\mathbb{R}^3$. *Решение которой согласно формуле* (2.3.6) *запишется в виде*

$$u(t,x)=\frac{1}{4\pi}\;\frac{d}{dt}\left[t^{-1}\int\limits_{S_{x,t}(3)}f(x+y)\;dS(y)\right],$$

что совпадает с известной формулой Кирхгофа (см. [4], с. 226, формула (19)) решения однородного волнового уравнения с нулевой начальной скоростью.

Пример 2.3.3. *Рассмотрим также случай, когда число весовых переменных* $n = 0$, *число пространственных переменных* N *нечетное* $N \geq 3$ *и* $\beta = 2k$, k *— целое,* $0 \leq k \leq \frac{N-1}{2}$, *мы приходим к сингулярной задаче Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу. Его решение* $u(t,x)$ *согласно формуле* (2.3.6) *имеет вид*

$$u(t,x) = \frac{2^{k-\frac{1}{2}}\,\Gamma(k+\frac{1}{2})}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\frac{1}{t^{2k-1}}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{N-1}{2}-k}\left[t^{-1}\int\limits_{S_{x,t}(N)} f(y+x)\,dS(\xi)\right].$$

В частности, при $\beta = 0$ *получаем классическую формулу для решения волнового уравнения в нечетномерных пространствах*

$$u(t,x) = \frac{t}{2^{\frac{N-1}{2}}\pi^{\frac{N-2}{2}}}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left[t^{-1}\int\limits_{S_{x,t}(N)} f(y+x)\,dS(\xi)\right].$$

Это выражение совпадает с решением, получаемым с помощью сферических средних (см. напр. [32], с. 698).

2.3.3 B. Формулы решения при $\beta \leq n + |\gamma|$ и дробном $\frac{\beta-1}{2}$

Случай B1). Пусть $N + |\gamma| \geq 2$ **— четное число,** $\frac{\beta-1}{2} = k - \delta$ **,** $k \in \mathbb{N}$ **,** $\delta \in [0,1)$ **,** $1 \leq k < \frac{N+|\gamma|+1}{2}$, $1 < \beta \leq N + |\gamma|$.

Воспользуемся теоремой 2.1.4, 1) (формула (2.1.20)). Имеем

$$F_B[j_{k-\delta}(t|x|)](|\xi|) = A_{k-\delta}(N,n,\gamma)\cdot I_t^{k-\delta}\,,$$

где

$$A_{k-\delta}(N,n,\gamma) = 2^{k-1+\frac{N+|\gamma|}{2}-n}\Gamma(k+1-\delta)\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right).$$

Решение задачи Коши (2.3.1) запишется в виде:

$$u(t,x)=c(N,n,\gamma)\,A_{k-\delta}(N,n,\gamma)\left(I_t^{k-\delta},\,T_\eta^x\,f\right)_\gamma=$$

$$=\frac{2^{k-\frac{N+|\gamma|}{2}+n}\Gamma(k+1-\delta)}{\pi^{\frac{N-n}{2}}\,\Gamma(1-\delta)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\int\limits_0^1 z^{2k-1}(1-z^2)^{-\delta}\times$$

$$\times\;\frac{1}{t^{2k-2}}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{N+|\gamma|}{2}-k}\left[t^{N+|\gamma|-2}\int\limits_{S_1^+(N)}T^x_{tz\xi}f(tz\xi)\,(\xi')^\gamma\;dS(\xi)\right]dz=$$

$$=\frac{2^{k-\frac{N+|\gamma|}{2}+n}\Gamma(k+1-\delta)}{\pi^{\frac{N-n}{2}}\,\Gamma(1-\delta)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\int\limits_0^1 z^{2k-N-|\gamma|}(1-z^2)^{-\delta}\times$$

$$\times\;\frac{1}{t^{2k-2}}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{N+|\gamma|}{2}-k}\left[(tz)^{N+|\gamma|-1}\;\frac{1}{t}\int\limits_{S_1^+(N)}T^x_{tz\xi}f(tz\xi)\,(\xi')^\gamma\;dS(\xi)\right]dz\,.$$

Сделаем замену $tz\xi=y$, $tz=|y|$, $z=\frac{|y|}{t}$ и запишем решение в виде интеграла по шару:

$$u(t,x)=\frac{2^{k-\frac{N+|\gamma|}{2}+n}\Gamma(k+1-\delta)}{\pi^{\frac{N-n}{2}}\,\Gamma(1-\delta)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\times$$

$$\times\frac{1}{t^{2k-2}}\left(\frac{d}{tdt}\right)^{\frac{N+|\gamma|}{2}-k}\frac{1}{t^{2k-N-|\gamma|-2\delta+2}}\int\limits_{|y|<t}|y|^{2k-N-|\gamma|}(t^2-|y|^2)^{-\delta}\times$$

$$\times\;T^x_y f(y)\,(y')^\gamma\,dy. \tag{2.3.7}$$

Случай B2). Пусть $(N+|g|\geq 2)$ — **четное** $\frac{\beta-1}{2}=-\delta_1$ **, где** $\delta_1\in[0,\frac{1}{2}]$ **,** $0\leq\beta\leq 1$ **.** Воспользуемся теоремой 2.1.4, 1) (формула (2.1.21)). Имеем

$$F_B[j_{\frac{\beta-1}{2}}(t|x|)](|\xi|)=A_{-\delta_1}(N,n,\gamma)\cdot I_t^{-\delta_1},$$

где

$$A_{-\delta_1}(N,n.\gamma)=2^{\frac{N+|\gamma|}{2}-n-1}\Gamma(1-\delta_1)\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right).$$

Решение задачи Коши (2.3.1) запишется в виде:

$$u(t,x)=c(N,n,\gamma)\,A_{-\delta_1}(N,n,\gamma)\left(I_t^{-\delta_1},\,T_\eta^x\,f\right)_\gamma=$$

$$=\frac{2^{n-\frac{N+|\gamma|}{2}}}{\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\int\limits_0^1 z(1-z^2)^{-\delta_1}\times$$

$$\times\;(t\frac{d}{dt}+2-2\delta_1)\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}\left[t^{N+|\gamma|-2}\int\limits_{S_1^+(N)}T^x_{tz\xi}f(tz\xi)\,(\xi')^\gamma\;dS(\xi)\right]dz$$

или в виде интеграла по шару радиуса t:

$$u(t,x)=\frac{2^{n-\frac{N+|\gamma|}{2}}}{\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}(t\frac{d}{dt}+2-2\delta_1)\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}t^{N+|\gamma|+2\delta_1-4}\times$$

$$\times\int\limits_{|y|<t}|y|^{2-N-|\gamma|}(t^2-|y|^2)^{-\delta_1}T^x_y f(y)\,(y')^\gamma\;dy\,. \qquad (2.3.8)$$

Вывод 3. *При условии* $\frac{\beta-1}{2}$ *— дробное число,* $\beta<N+|\gamma|$ *и четном* $N+|\gamma|\geq 2$ *решение задачи Коши* (2.3.1) *не удовлетворяет принципу Гюйгенса.*

Пример 2.3.4. *Рассмотрим случай, когда число весовых переменных* $n=0$ *и при при* $\beta=0$ *,* $N=2$ *получим задачу Коши для однородного волнового уравнения в* $\mathbb{R}^2$ *. Решение которой согласно формуле* (2.3.8) *запишется в виде*

$$u(t,x)=\frac{1}{2\,\pi}\left(t\frac{d}{dt}+1\right)\frac{1}{t}\int\limits_{|y|\leq t}(t^2-|y|^2)^{-\frac{1}{2}}\,f(x+y)\;dy\;=$$

$$= \frac{1}{2\,\pi}\left(\frac{d}{dt}\right)\int\limits_{|y|\leq t}(t^2-|y|^2)^{-\frac{1}{2}}\,f(x+y)\,dy\,,$$

что совпадает с известной формулой Пуассона.

Случай B3). Пусть $N{+}|\gamma|\geq 3$ **— нечетное и** $0\leq\beta\leq N{+}|\gamma|$ **,**

$$k{\in}\mathbb{N},\;\; 1\leq k<\frac{N+|\gamma|+1}{2},\;\; \frac{\beta-1}{2}=k-\delta-\frac{1}{2},\;\; \delta\in[0,1).$$

Воспользуемся теоремой 2.1.4, 2) (формула (2.1.22)). Имеем

$$F_B[j_{k-\delta-\frac{1}{2}}(t|x|)](|\xi|)=A_{k-\delta-\frac{1}{2}}(N,n,\gamma)\cdot I_t^{k-\delta-\frac{1}{2}}\,,$$

где

$$A_{k-\frac{1}{2}-\delta}(N,n,\gamma)=2^{k-\frac{3}{2}+\frac{N+|\gamma|}{2}-n}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-\delta\right)\pi^{\frac{N-n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right).$$

Решение задачи Коши (2.3.1) запишется в виде:

$$u(t,x)=c(N,n,\gamma)\,A_{k-\delta-\frac{1}{2}}(N,n,\gamma)\left(I_t^{k-\delta-\frac{1}{2}},\,T_\eta^x\,f\right)_\gamma=$$

$$=\frac{2^{k-\frac{N+|\gamma|+1}{2}+n}\Gamma(k+\frac{1}{2}-\delta)}{\pi^{\frac{N-n}{2}}\,\Gamma(1-\delta)\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\right)}\int\limits_0^1 z^{2k-2}(1-z^2)^{-\delta}\times$$

$$\times\,\frac{1}{t^{2k-3}}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{N+|\gamma|+1}{2}-k}\left[t^{N+|\gamma|-2}\int\limits_{S_1^+(N)}T_{tz\xi}^x f(tz\xi)\,(\xi')^\gamma\;dS(\xi)\right]dz\,.$$

Это решение также можно записать в виде интеграла по шару:

$$u(t,x)=\frac{2^{k-\frac{N+|\gamma|+1}{2}+n}\Gamma(k+\frac{1}{2}-\delta)}{\pi^{\frac{N-n}{2}}\,\Gamma(1-\delta)\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\right)}\times$$

$$\times \frac{1}{t^{2k-3}} \left(\frac{d}{tdt}\right)^{\frac{N+|\gamma|+1}{2}-k} \frac{1}{t^{2k-N-|\gamma|-2\delta+1}} \int\limits_{|y|<t} |y|^{2k-1-N-|\gamma|}(t^2-|y|^2)^{-\delta}\times$$

$$\times\, T_y^x f(y)\,(y')^\gamma\, dy. \tag{2.3.9}$$

Вывод 4. *При условии* $\frac{\beta-1}{2}$ *— дробное число,* $\beta < N+|\gamma|$ *и нечетном* $N+|\gamma|\geq 3$ *решение задачи Коши* (2.3.1) *не удовлетворяет принципу Гюйгенса.*

Пример 2.3.5. *Рассмотрим случай, когда число весовых переменных* $n=0$, *число пространственных переменных* N *нечетное* $N\geq 3$ *и при* $\beta=2k-2\delta$, k *— целое,* $0\leq k\leq \frac{N-1}{2}$, $\delta\in[0,1)$, *мы приходим к сингулярной задаче Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу. Его решение* $u(t,x)$ *в этом случае согласно формуле* (2.3.9) *имеет вид*

$$u(t,x)=\frac{2^{k-\frac{N+1}{2}}\Gamma(k+\frac{1}{2}-\delta)}{\pi^{\frac{N}{2}}\,\Gamma(1-\delta)}\times$$

$$\times \frac{1}{t^{2k-3}} \left(\frac{d}{tdt}\right)^{\frac{N+1}{2}-k} \frac{1}{t^{2k-N-2\delta+1}} \int\limits_{|y|<t} |y|^{2k-N-1}(t^2-|y|^2)^{-\delta}\, f(y+x)\, dy.$$

2.3.4 Число $N+|\gamma|$ дробное

Пусть $N+|\gamma|=[N+|g|]+\{N+|\gamma|\}=m+\alpha$, m — целая часть, а α — дробная часть числа $N+|\gamma|$, при этом $\alpha\neq 0$. Обозначим $\bar{\alpha}=1-\alpha$. И пусть функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\Box_\gamma u=0, \quad \Box_\gamma=B_{\beta,t}-\Delta_{\gamma,x}, \quad x\in\mathbb{R}_N \tag{2.3.10}$$

и начальным условиям

$$u(x,0)=f(x), \quad u_t(x,0)=0. \tag{2.3.11}$$

Применим метод спуска, чтобы исследовать решение этого уравнения по решению уравнения с целым значением суммы размерности евклидова пространства с размерностью операторов Бесселя.

Для этого заметим, что функция $\bar{u}(x,\bar{y},t)$, полученная продолжением решения $u(x,t)$ уравнения (2.3.10) по дополнительному направлению $\bar{y}$ константой, удовлетворяет уравнению

$$\Box_\gamma u - B_{\bar{y},\bar{\alpha}} = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}_N \times \mathbb{R}_1 \tag{2.3.12}$$

и начальным условиям

$$\bar{u}(x,\bar{y},0) = \bar{f}(x,\bar{y}), \quad \bar{u}_t(x,\bar{y},0) = 0, \tag{2.3.13}$$

где $\bar{f}(x,\bar{y})$ продолжение в качестве константы функции $f(x)$ по переменной $\bar{y}$. Но теперь новое уравнение (2.3.12) рассматривается в евклидовом $N+1$-полупространстве точек $(x,\bar{y}) \in \mathbb{R}_{N+1}$ при этом $N+1+|\gamma|+\bar{\alpha}$ — целое число. Поэтому для решения задачи Коши (2.3.12)—(2.3.13) выполнены все условия при которых выполняется гюйгенсовость полученных решений, изложенных в п. 2.3.2 и 2.3.3 этой главы. Как мы уже заметили, гюйгенсовость решений возможна лишь в случае, когда числа β и $N+|\gamma|+\bar{\alpha}$ одновременно целые (т.е. когда решение представлено соответствующим сферическим интегралом). Применим метод спуска по переменной $\bar{y}$ (на примере формулы (2.3.5))

$$\lim_{m\to\infty}(I_t^k, T_x^y f(x)\eta_m(\bar{y}))_{\gamma+\bar{\alpha}} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{t^{2k}}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{N+1+|\gamma|+\bar{\alpha}}{2}-k-1}\Bigg[t^{-1} \times$$

$$\times \int\limits_{S_{x,t}(N+1)} T_x^y f(x)\eta_m(\bar{y})\,(y')^{\gamma+\bar{\alpha}}\,dS(y)\Bigg] =$$

$$= \frac{1}{t^{2k}}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{N+1+|\gamma|+\bar{\alpha}}{2}-k-1}\Bigg[t^{-1}\int\limits_{S_t(N+1)} T_x^y f(x)\,(y')^{\gamma+\bar{\alpha}}\,dS(y)\Bigg].$$

Так как f не зависит от $\bar{y}$, то заменяя поверхностный интеграл по полусфере $S_t^+(N+1) = |y|^2+\bar{y}^2 = t^2$ на удвоенный интеграл по N-мерному шару $|y|<t$, получим

$$(I_t^k, T_x^y f(x)1(\bar{y}))_{\gamma+\bar{\alpha}} = \frac{2}{t^{2k}}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{N-1+|\gamma|+\bar{\alpha}}{2}-k}\Bigg[t^{-1} \times$$

$$\times \int\limits_{|y|<t} (t^2-|y|^2)^{-\frac{1}{2}} T_x^y f(x)\,(y')^{\gamma+\bar{\alpha}}\,dy\Bigg].$$

Таким образом мы получили решения выраженные через интегралы по проекции сферы в $\mathbb{R}_{N+1}$ на плоскость $\bar{y}=0$, которая является шаром в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_N$. интегралы. Поэтому для этих решений (2.3.10)—(2.3.11) принцип Гюйгенса отсутствует.

Вывод 5. *Принцип Гюйгенса для решения задачи Коши для уравнения* (2.3.1) *при дробном значении* $N+|\gamma|$ *не справедлив.*

2.3.5 C. Формула решения при $\beta > N+|\gamma|$

В этом случае формула решения упрощается, поскольку, согласно формуле (2.1.9), $F_B[j_{\frac{\beta-1}{2}}(t|\cdot|)](x)=\psi_{t,\frac{\beta-1}{2}}(x)$ — гладкая финитная функция с носителем в N-полушаре $\{|x|<t\}_N^+$: при $\mu=\frac{\beta-1}{2}>\frac{N+|\gamma|-1}{2}$ $(\beta>N+|\gamma|)$ справедливо равенство

$$F_B[j_\mu(a\,|x|)](\xi)=F_B[j_\mu(a\,|x|)](|\xi|)=$$

$$=\begin{cases} \dfrac{(a^2-|\xi|^2)^{\mu-\frac{N+|\gamma|}{2}}}{a^{2\mu}\;A(\mu,N,n,\gamma)} & ,\quad \xi\in\{|\xi|<a\}^+\,, \\ \\ 0 & ,\quad \xi\notin\{|\xi|<a\}^+\,, \end{cases}$$

где

$$A(N,n,\mu,\gamma)=\frac{\pi^{\frac{n-N}{2}}}{2^{N-n+|\gamma|}}\;\frac{\Gamma\left(\mu+1-\frac{N+|\gamma|}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)\;\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\,.$$

Решение(2.3.4) задачи Коши (2.3.1) примет вид

$$u(x,t)=c(N,n,\gamma)\left(F_{B_\gamma}[j_{\frac{\beta-1}{2}}(t|\cdot|)](y),\,T_y^x f\right)_\gamma=$$

$$=\frac{c(N,n,\gamma)}{A(N,n,\beta,\gamma)}\int\limits_{\{|y|<t\}_N^+}\frac{(t^2-|y|^2)^{\frac{\beta-1-N-|\gamma|}{2}}}{t^{\beta-1}}\;T_y^x f(y)\,y^\gamma\,dy\,, \qquad (2.3.14)$$

где

$$A(N,n,\beta,\gamma)=\frac{1}{\pi^{\frac{N-n}{2}}\,2^{N+|\gamma|-n}}\;\frac{\Gamma\left(\frac{\beta-N-|\gamma|+1}{2}\right)}{\Gamma(\frac{\beta+1}{2})\,\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}.$$

Из полученной формулы следует

Вывод 6. *Если размерность оператора Бесселя по времени в уравнении* (2.3.1) *достаточно большая (точнее $\beta>N+|\gamma|$), то для решения задачи Коши* (2.3.1) *может выполняться лишь слабый принцип Гюйгенса, т.е. существует передний фронт волны и отсутствует задний.*

Пример 2.3.6. *Рассмотрим случай, когда число весовых переменных $n=0$ и при $\beta>N$, мы приходим к сингулярной задаче Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу. Его решение $u(t,x)$ в этом случае согласно формуле* (2.3.14) *имеет вид*

$$u(t,x)=\frac{\Gamma(\frac{\beta+1}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{\beta-n+1}{2})}\int\limits_{\{|y|<t\}_N^+}\frac{(t^2-|y|^2)^{\frac{\beta-N-1}{2}}}{t^{\beta-1}}\,f(y+x)\,dy.$$

Последняя формула совпадает с известным решением уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу (см.напр. [54]).

2.4 Обобщенный сингулярный принцип Гюйгенса

Нашей следующей задачей является формулировка «обобщенного сингулярного принципа Гюйгенса»[1] для решения сингулярной задачи Коши

$$u_{tt}+\frac{\beta}{t}\,u_t-\Delta_{B_\gamma}\,u=0\,,\quad \beta>0, \tag{2.4.1}$$

$$\Delta_{B_\gamma}=\sum_{i=1}^{n}B_{\gamma_i}+\sum_{i=n+1}^{N}u_{x_ix_i},\;\; B_{\gamma_i}=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma_i}{x_i}\,\frac{\partial^2}{\partial x_i^2},\quad \gamma_i>0\,,$$

[1]Термин «сингулярный принцип Гюйгенса» (СПГ) введен в работах И.А. Киприянова, Г.М. Кагана и Л.А. Иванова и отличается от классического ПГ.

$$u|_{t=0} = f(x), \quad u_t|_{t=0} = 0. \tag{2.4.2}$$

Среди найденных решений этой задачи Коши только в двух случаях решение представляется сферическим интегралом — это решения описанные в пункте 2.3.2, для случаев **A1** и **A3**. Поэтому можем утверждать следующий достаточный принцип Гюйгенса для решения B-гиперболического уравнения с оператором Бесселя по времени.

Обобщенный сингулярный принцип Гюйгенса (ОСПГ) *Решение задачи* (2.4.1) *и* (2.4.2) *удовлетворяет «обобщенному принципу Гюйгенса», если числа* β *и* $|\gamma|$ *целые, а числа* $1+\beta$ *и* $N+|\gamma|$ *обладают одинаковой четностью и удовлетворяют неравенству* $\beta + 1 \leq N + |\gamma|$ *.*

Очевидно, что этому принципу удовлетворяют решения соответствующей задачи Коши классического волнового уравнения $u_{tt} - \Delta u = 0$. Но сформулированному выше сингулярному принципу Гюйгенса (СПГ) удовлетворяют решения задач Коши для сингулярных гиперболических задач.

Например, в диссертационной работе [20], выполненной по руководством И.А. Киприянова, СПГ сформулирован в виде следующих двух утверждений (используются обозначения диссертации)

СПГ Киприянова—Кагана. *I. Пусть размерность евклидова пространства в* (2.4.1) *является четным числом* N *, и пусть размерность оператора Бесселя по времени число* $\beta = 2k+1$ *— нечетное, а размерности операторов Бесселя по пространственным переменным входящих в уравнение* (2.4.1) *— четные числа:* $\gamma_i = 2p_i,\ i = 1, \ldots, n$ *.* Если $k + |p| \leq \frac{N-1}{2}$, то решение удовлетворяет принципу Гюйгенса.

II. Пусть размерность евклидова пространства в (2.4.1) *является нечетным числом* N *, и пусть размерность оператора Бесселя по времени число* $\beta = 2k$ *— четное и размерности операторов Бесселя по пространственным переменным входящих в уравнение* (2.4.1) *— четные числа. Тогда решение задачи Коши* (2.4.1), (2.4.2) *удовлетворяет принципу Гюйгенса.*

Комментарий. Как видим, и в случае I и в случаях II целые числа $\beta+1$ и $N+|\gamma|$ обладают одинаковой четностью, что совпадает с ОСПГ сформулированного выше. Неравенство же $k+|p| \leq \frac{N-1}{2}$, сопровождает некоторые из предшествующих работ, посвященных СПГ (см. например, работы [55], [63], [28]), порождено применяемой методикой исследования и является лишним, что ясно вытекает из следующего примера. Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} = \Delta_x + \Delta_y, \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad y \in \mathbb{R}_m$$

Его решения удовлетворяют принципу Гюйгенса, только в случае если число $n+m$ нечетное. Предположим теперь, что по условию задачи решение ищется в классе функций радиальных по направлению y. Тогда оно одновременно удовлетворяет сингулярному уравнению

$$u_{tt} = \Delta_x + u_{rr} + \frac{m-1}{r}\, u_r\,, \quad r = |y|$$

и, поэтому, решение $u = u(x,|y|,t)$ удовлетворяет обоим уравнениям и, следовательно, принципу Гюйгенса лишь в случае, если $n+m$ — нечетное. Но выполнение неравенства $\beta+\gamma \leq n+1$ (т.е. в терминах уравнения (2.4.1)неравенства $0+m-1 \leq n+1$) необязательно. Для того, чтобы число $n+m$ было нечетным необходимо лишь чтобы числа n и m имели разную четность!

В качестве следующего примера рассмотрим работу [26], где рассматривалось уравнение (2.4.1) с параметрами $\beta = 0$ и $N = n$. Формулировка принципа Гюйгенса следующая.

(СПГ Киприянова—Засорина). *Пусть* $\alpha = n+|\gamma|-1$. *Принцип Гюйгенса для задачи* (2.4.1), (2.4.2) *справедлив лишь в случае четного* $\alpha = 2k$.

Коментарий. Как видим, здесь удовлетворяются условия сформулированного выше Сингулярного Принципа Гюйгенса: числа $1+\beta = 1$ и $n+|\gamma| = 2k+1$ одновременно нечетные. Отметим также, что в работе [26] нет неравенства между N и $|\gamma|$, как в работах [55], [63]. Случай же четного $n+|\gamma|$ требовал введения нового функционала

Киприянова, что в [26] не сделано. Таким образом принцип СПГ является наиболее общим для всех рассмотренных работ по исследованию гюйгенсовости сингулярных гиперболических уравнений.

В качестве следующего примера рассмотрим работу [28], где рассматривалась задача Коши (2.4.2) уравнение (2.4.1) с эллиптическим оператром по пространственным переменным с параметрами $\beta > 0$, $\gamma_i = 0$, (т.е. весовые пространственные переменные отсутствуют: $n = 0.$) формулировка принципа Гюйгенса следующая.

(СПГ Киприянова—Иванова). *Пусть* $\beta \geq 0$, $\gamma_i = 0$, *т.е.* $n = 0$. *Принцип Гюйгенса для задачи* (2.4.1), (2.4.2) *справедлив лишь в случае нечетного* $N - \beta$, $\beta \leq N - 1$.

Комментарий. Проверим, здесь также удовлетворяются условия сформулированного выше Сингулярного Принципа Гюйгенса. В самом деле, если числа $N + |\gamma| = N$, $\beta + 1$ одинаковой четности, например, оба четные, то β — нечетное, следовательно $N - \beta$ нечетное; а если числа $N + |\gamma| = N$, $\beta + 1$ оба нечетные, то β — четное, следовательно $N - \beta$ нечетное. Т.е. нечетнолсть числа $N - \beta$ есть следствие условия «одинаковой четности» чисел $N + |\gamma|$ и β. Неравенство же $\beta \leq N - 1$ — это неравенство $\beta + 1 < N + |\gamma|$. Таким образом, СПГ Киприянова—Иванова тоже есть следствие ОСПГ, сформулированного вначале пункта.

Это еще раз подтверждает, что введенный в диссертации принцип СПГ является наиболее общим для всех рассмотренных работ, исследовавших гюйгенсовость сингулярных гиперболических уравнений второго порядка.

Глава 3

Уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу

Данная глава посвящена нахождению решения задачи Коши с граничными условиями для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу (ЭПД). Подобная краевая задача, но для B-гиперболического уравнения рассматривалась в работе [48]. Нами же ставится задача для B-гиперболического уравнения с оператором Бесселя по времени. Рассматриваемые операторы Бесселя в уравнении могут иметь различные параметры. Решение существует, единственно и может быть представлено в виде формулы Пуассона, определяемой специальным сдвигом, который порожден произведением цилиндрических функций первого рода разных порядков.

3.1 Краевые задачи для уравнения ЭПД с оператором Бесселя по времени

Пусть $\alpha = (\alpha_1, ..., a_n)$ — фиксированные положительные числа. Рассмотрим уравнение

$$B_{\beta,t}u(x,t) = \Delta_{B_{\alpha,x}}u(x,t), \text{ где } \Delta_{B_{\alpha,x}} = \sum_{i=1}^{n} B_{\alpha_i} + \sum_{k=n+1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(r), \;\; u_t(x,0) = \psi(r), \;\; r = |x|$$

и одним из граничных условий:

i) граничное условие первого рода

$$u(x,t)|_{|x|=1} = f_1(t);$$

ii) граничное условие второго рода

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{\omega}}\right|_{|x|=1} = f_2(t),$$

$\vec{\omega}$ — вектор внешней нормали к сфере $|x| = 1$;

iii) граничное условие третьего рода

$$\left.\left(u + H\frac{\partial u}{\partial \vec{\omega}}\right)\right|_{|x|=1} = 0,$$

H — заданная постоянная.

Начально-граничные условия позволяют считать решение уравнения радиальным. Тогда сферическая замена переменных $x = r\theta$, $|\theta| = 1$ приводит к следующим задачам

$$B_{\beta,t}u = B_{N+|\alpha|-1,r}u, \;\; u(r,0) = \varphi(r), \;\; u_t(r,0) = \psi(r),$$

$$i)\, u|_{r=1} = 0; \;\; ii)\, u_r|_{r=1} = 0; \;\; iii)\, (u + Hu_r)|_{r=1} = 0.$$

Здесь размерность β — действительное число, размерности α_i — фиксированные положительные числа. Далее положим $N + |\alpha| - 1 = \gamma$.

3.2 Краевая задача для уравнения ЭПД с положительными размерностями операторов Бесселя

Введем специальный « $\binom{\mu}{\nu}$– сдвиг»[1], порожденный произведением j-функций Бесселя первого рода разных порядков μ и ν:

$$\overset{\nu,\mu}{V^t} f(x) = \frac{2^{\nu+\mu}\,\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)}{\pi\,\Gamma(\nu+\mu)} \times$$

$$\times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\theta(\mu-\nu)} \cos^{\nu+\mu}\theta\, f(\sqrt{2\cos\theta(x^2e^{i\theta}+t^2e^{-i\theta})})\, d\theta\,.$$

Рассмотрим уравнение

$$B_{\beta,\,t}u(r,t) = B_{\gamma,\,r}u(r,t) \quad \gamma{>}0,\ \beta{>}0 \quad (r,t)\in D=\{(0,1)\times(0,T)\},\ \ T{>}0\,. \tag{3.2.1}$$

Требуется найти решение этого уравнения

$$u(r,t)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(D)\cap H^3_\gamma(0,1;\,C(0,T)), \tag{3.2.2}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(r,0)=\varphi(r), \quad 0\leqslant r\leqslant 1, \tag{3.2.3}$$

и одному из следующих граничных условий первого, второго и третьего рода соответственно:

$$|u(0,t)|<\infty, \qquad u(1,t)=0, \quad 0\leqslant t\leqslant T; \tag{3.2.4}$$

$$u_r(0,t)=0, \quad 0\leqslant t\leqslant T; \qquad u_r(1,t)=0, \quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{3.2.5}$$

[1] Подобные конструкции, называемые (μ,ν)-свертками, встречались в работах [21], [30]

$$u_r(0,t) - Hu(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \qquad u_r(1,t) + Hu(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.2.6}$$

Здесь (в отличие от [33]) изучается начальная задача в купе с граничными условиями второго рода (3.2.5).

Замечание 3.2.1. *Отсутствие второго начального условия в* (3.2.3) *связано с тем, что оно является следствием первого. Это отметил М.В. Келдыш в работе [23] (см. также [51], с. 642). Оно выглядит просто:* $u_t(o,r) = o$ *. И подтверждает тот факт, что ограниченные решения уравнения* (3.2.1) *— четные по Киприянову функции (см. определение четной функции в [25], с. 21).*

Нами рассматривается уравнение ЭПД с разными (вообще говоря) показателями размерности операторов Бесселя в левой и правой частях уравнения. Частные решения уравнения (3.2.1) , тождественно не равные нулю в области D и удовлетворяющие условиям (3.2.3) и (3.2.5) , будем искать в виде

$$u(r,t) = X(r)T(t).$$

Подставляя данную функцию в уравнение (3.2.1), после разделения переменных получим относительно функции $X(r)$ спектральную задачу

$$B_\gamma X(r) \pm \lambda^2 X(r) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$|X(0)| < \infty, \qquad X'(1) = 0, \tag{3.2.7}$$

где λ^2 — постоянная разделения (случай $\lambda = 0$ приводит к тривиальному решению). Согласно лемме 1.2.1 решением может служить функция $j_\nu(\lambda r)$ (при $\nu = \frac{\gamma-1}{2}$) или $j_\nu(i\lambda r)$. Второе из этих решений приводит к B-цилиндрическим функциям третьего рода, для которых дальнейшие рассуждения похожи. Поэтому рассматриваем далее только уравнение

$$B_\gamma X(r) + \lambda^2 X(r) = 0, \quad 0 < r < 1,$$

и решение $X(r) = j_\nu(\lambda r)$.

Общее решение этого уравнения определяется по формуле

$$X(r) = P_1 j_\nu(\lambda r) + P_2 \mathbb{Y}_\nu(\lambda r), \tag{3.2.8}$$

где функции j_ν и $\mathbb{Y}_\mu$ определены равенствами (1.3.1) и (1.3.3). Вторая из них не ограничена в начале координат и не удовлетворяет первому из условий (3.2.7) . Поэтому необходимо потребовать $P_2 = 0$. Тогда решение (3.2.8) с произвольной константой P_1 примет вид

$$\widetilde{X}(r) = P_1 j_\nu(\lambda r), \quad \nu = \frac{\gamma+1}{2}.$$

Учитывая второе условие в (3.2.7), имеем уравнение для определения λ:

$$j_\nu{}'(\lambda) = 0,$$

Решениями этого уравнения является счетный набор чисел λ_n, определяющий систему ортогональных в L_2^γ функций ii). Выбором константы P_1 систему функций ii) ортонормируем:

$$X_n(r) = \sqrt{2}\ \frac{j_\nu(\lambda_n r)}{|j_\nu(\lambda_n)|}.$$

Здесь мы учли, что в случае системы ii) норма $\|\Lambda_\gamma^{(n)}\|_{L_2^\gamma(0,1)}$ вычисляется по формуле ii) из 1.3.1.

Далее, следуя [47], рассмотрим функции

$$u_n(t) = \int\limits_0^1 u(r,t)\ X_n(r)\ r^\gamma dr, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{3.2.9}$$

Введем вспомогательные функции вида

$$u_{n,\varepsilon}(t) = \int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(r,t)\ X_n(r)\, r^\gamma dr, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{3.2.10}$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. С учетом уравнения (3.2.1) получим

$$B_\beta u_{n,\varepsilon}(t) = \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} (B_{\beta,\,t})u(r,t)\ X_n(r)\, r^\gamma dr = \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} B_{\gamma,r} u(r,t)\, X_n(r)\, r^\gamma dr =$$

$$= \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r}(r^\gamma u_r)\ X_n(r) dr = r^\gamma u_r X_n(r)\big|_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} - \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_r\ X_n'(r)\, r^\gamma dr. \quad (3.2.11)$$

С другой стороны, внутри отрезка $[0,1]$ функция X_n удовлетворяет (3.2.1) , что позволит выражение (3.2.10) преобразовать следующим образом

$$u_{n,\varepsilon}(t) {=} {-}\frac{1}{\lambda_n^2} \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(r,t)\ B_\gamma X_n(r)\ r^\gamma dr {=} {-}\frac{1}{\lambda_n^2} \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(r,t) \frac{d}{dr}(r^\gamma X_n'(r)) dr =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2} \left[u(r,t) r^\gamma X_n'(r) \Big|_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} - \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_r(r,t)\ X_n'(r)\, r^\gamma dr \right].$$

Отсюда

$$\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_r\ X_n'(r)\, r^\gamma dr = \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(t) + u(r,t)\ X_n'(r)\, r^\gamma \mid {}_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}. \quad (3.2.12)$$

Подставляя (3.2.12) в (3.2.11), будем иметь

$$B_\beta u_{n,\varepsilon}(t) = u_r(r,t)\ X_n(r)\, r^\gamma \big| {}_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} - \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(t) - u(r,t)\ X_n'(r)\, r^\gamma \big| {}_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}.$$

В силу условия (3.2.5) и (3.2.2) получим для определения функций $u_n(t)$ сингулярное дифференциальное уравнение Бесселя:

$$B_\beta u_n(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = 0, \quad t \in (0,T).$$

Ограниченным решением этого уравнения является j-функция Бесселя

$$u_n(t) = a_n\ j_{\frac{\beta-1}{2}}(\lambda_n t).$$

Поскольку функции $u_n(t)$ определены через решение задачи $u(r,t)$, то можем воспользоваться начальным условием (3.2.3) . В результате получим

$$u_n(0) = a_n = \int\limits_0^1 u(r,0)\ X_n(r)\, r^{-\gamma} dr = \int\limits_0^1 \varphi(r)\ X_n(r)\, r^{\gamma} dr = \varphi_n, \quad (3.2.13)$$

$$u_n(t) = \varphi_n\ j_{\frac{\beta-1}{2}}(\lambda_n t), \quad \varphi_n = \int\limits_0^1 \varphi(r)\ X_n(r)\, r^{\gamma} dr \qquad (3.2.14)$$

3.2.1 Единственность решения задачи (3.2.1) — (3.2.3), (3.2.5)

Пусть

$$\varphi(r) \equiv 0,$$

тогда из (3.2.13) при всех $n \in N$ следует, что $\varphi_n \equiv 0$. Из (3.2.14) получим, что $u_n(t) = 0$ при всех $n \in N$. Тогда из (3.2.9) при любом $t \in [0,T]$ имеем

$$\int\limits_0^l u(r,t)\ X_n(r)\, r^{\gamma} dr = 0.$$

Отсюда, в силу полноты системы ii) в весовом пространстве Лебега $L_2^{\gamma}(0,1)$ следует, что $u(r,t) = 0$ почти всюду на промежутке $[0,1]$ при любом $t \in [0,T]$. Поскольку, согласно (3.2.2) функция $u(r,t) \in C(\overline{D})$, то $u(r,t) = 0$ в D.

Таким образом, доказана

Теорема 3.2.1. *Если существует решение задачи* (3.2.1) – (3.2.3), (3.2.5), *то оно единственно.*

3.2.2 Существование решения задачи (3.2.1)–(3.2.3), (3.2.5)

На основании найденных частных решений (3.2.8) и (3.2.14) решение задачи (3.2.1) — (3.2.3), (3.2.5) определяется в виде ряда Фурье-Бесселя

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(r)\,. \tag{3.2.15}$$

Это ряд типа ii).

Рассмотрим два ряда, полученные формально из ряда (3.2.15) почленным взятием $B-$ производных по t и по r:

$$B_{\beta,t} u(r,t) \ \sim \ \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \ (-\lambda_n^2) j_{\frac{\beta-1}{2}}(\lambda_n t) \ X_n(r)\,.$$

$$B_{\gamma,\,r} u(r,t) \ \sim \ \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \ j_{\frac{\beta-1}{2}}(\lambda_n t)\,(-\lambda_n^2)\,X_n(r)\,.$$

Как видим эти ряды сходятся, если $|\varphi_n| = O(\lambda_n^{-k}), \ k > 3$. Из следствия 1.5.2 теоремы 1.5.2 следует, что для этого достаточно потребовать, чтобы $\varphi \in H_\gamma^3(0,1)$. При этом ряды из B-производных равны B-производной этого ряда и сходятся абсолютно и равномерно. Тем самым доказана

Теорема 3.2.2. *Если функция* $\varphi \in C^2(0,1)$, *а* $D_{B_\gamma}\varphi \in L_2^\gamma(0,1)$, *то существует единственное решение* $u(r,t)$ *задачи* (3.2.1) — (3.2.3), (3.2.5), *определяемое рядом Фурье—Бесселя* (3.2.15), *типа ii).*

3.2.3 Аналог формулы Пуассона

Неравенство индексов β и γ приводят к решениям, представленным рядами от произведения j-функций Бесселя разных порядков. Произведение функций Бесселя первого рода определяется формулой ([46], формула 2.12.27.10)

$$\pi\ \frac{J_\mu(\lambda r)}{(2\lambda r)^\mu}\ \frac{J_\nu(\lambda t)}{(2\lambda t)^{-\nu}} = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\theta\mu-\nu}\,(\cos\theta)^{\mu+\nu}\ \frac{J_{\mu+\nu}(\lambda s)}{(sr)^{\mu+\nu}}\,d\theta$$

$$s=\sqrt{2\cos\theta\,(r^2\,e^{i\theta}+t^2e^{-i\theta})}.$$

Отсюда, согласно (1.3.1), получим

$$j_\nu(\lambda r)\ j_\mu(\lambda t)=\frac{2^{\nu+\mu}\,\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)}{\pi\ \Gamma(\nu+\mu)}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{i\theta(\mu-\nu)}\cos^{\nu+\mu}\theta\,j_{\nu+\mu}(s\lambda)\,d\theta,$$

Если положить здесь $\lambda=0$, то учитывая, что $j_\nu(0)=1$ $(\forall\ \nu>-1/2)$, получим равенство

$$1=\frac{2^{\nu+\mu}\,\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)}{\pi\ \Gamma(\nu+\mu)}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{i\theta(\mu-\nu)}\cos^{\nu+\mu}\theta\ d\theta\,,$$

которое показывает, что оператор

$$\overset{\nu,\mu}{V^t}\,f(r)=\frac{2^{\nu+\mu}\,\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)}{\pi\ \Gamma(\nu+\mu)}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{i\theta(\mu-\nu)}\cos^{\nu+\mu}\theta\,f(s)\,d\theta\,,$$

является усредняющим оператором: $\overset{\nu,\mu}{V^t}\,1=1$ (поэтому обладает некоторыми свойствами обобщенного сдвига (1.5.1), полученными в [33]). Имеем

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)X_n(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n j_\beta(\lambda_n t)j_\gamma(\lambda_n r)}{\|\Lambda_\gamma^{(n)}\|_{L_2^\gamma(0,1)}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}C'(n,\gamma)\int_{\pi/2}^{\pi/2}e^{i\theta(\mu-\nu)}\cos^{\nu+\mu}\theta\,j_{\nu+\mu}(s\lambda_n)\,d\theta\,.$$

$$s=\sqrt{2\cos\theta(r^2e^{i\theta}+t^2e^{-i\theta})}$$

Таким образом решение задачи (3.2.1) — (3.2.3), (3.2.5) приняло вид

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\ \overset{\nu,\mu}{V_r^t}\ j_{\frac{\beta+\gamma-2}{2}}(\lambda_n r),\quad \varphi_n=\int_0^1\varphi(r)\,X_n(r)r^\gamma dr\,,\quad (3.2.16)$$

$$X_n(r) = \frac{j_\nu(\lambda_n r)}{|j_\nu(\lambda_n)|}.$$

Следуя Б.М. Левитану ([33]), эту формулу будем называть *формулой Пуассона решения второй краевой задачи для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу.*

Если предположить, что $\beta = \gamma$, то уравнение (3.2.1) окажется классическим уравнением ЭПД. В этом случае можно воспользоваться теоремой сложения Левитана для j-функций Бесселя (1.3.4). Тогда решение (3.2.15) задачи (3.2.1) — (3.2.3), (3.2.5) находится по формуле

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n T_r^t X_n(r) = T_r^t \varphi(r)\,,$$

что совпадает с формулой Пуассона решения задачи Коши для классического уравнения ЭПД (см. в [33] решение уравнения (5.18) с условием (5.14)).

Из полученных в этом пункте формул вытекает **основной результат**.

Теорема 3.2.3. *Пусть в* (3.2.1) *параметры* β *и* γ *положительны, фиксированны и* j_ν *— ограниченное решение сингулярного уравнения Бесселя (см. в [33]) и спектральный параметр* λ_n *— корень одного из уравнений i) — iii). Решение краевой задачи* (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3) *с одним из граничных условий* (3.2.4), (3.2.5), (3.2.6) *существует и единственно. Решение в виде ряда Левитана* (3.2.16) *(типа Фурье—Бесселя (если параметр* λ_n *удовлетворяет условиям i) или ii)) или ряда Дини, если параметр* λ_n *удовлетворяет условиям iii)) имеет вид*

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \overset{\nu,\mu}{V}{}_r^t\, j_{\mu+\nu}(\lambda_n r), \quad \varphi_n = \int\limits_0^1 \varphi(r)\, X_n(r) r^\gamma dr\,,$$

где $\mu{=}\frac{\beta-1}{2}$, $\nu{=}\frac{\gamma-1}{2}$, X_n *— нормированная j-функция Бесселя, опре-*

деленная формулой

$$X_n(r)=\begin{cases}\frac{j_\nu(\lambda_n r)}{|j\,'_\nu(\lambda_n)|} & \textit{в случае i),}\\ \frac{j_\nu(\lambda_n r)}{|j_\nu(\lambda_n)|} & \textit{в случае ii),}\\ \frac{j_\nu(\lambda_n r)}{\frac{|j_\nu(\lambda_n)|}{\lambda_n}\sqrt{[\lambda^2-\nu^2+(\nu+H)^2]|}} & \textit{в случае iii).}\end{cases}$$

3.3 Краевая задача для уравнения ЭПД с $-1<-\beta<0$, $\gamma>0$

В случае малого параметра размерности $-\beta$ ($0<\beta<1$) в качестве собственных функций оператора Бесселя $B_{-\beta}$ можно использовать B-цилиндрические функции (1.4.3) $j_{-\frac{\beta+1}{2}}$, главным преимуществом которых является равенство $j_{-\frac{\beta+1}{2}}(0)=1$. Это позволит решать граничные задачи с условием $\neq 0$ решения в начале координат. Для больших значений отрицательного параметра $-\beta$ такие задачи можно рассматривать только с собственными функциями вида (1.4.5).

Рассмотрим уравнение

$$B_{-\beta,\,t}u(r,t)=B_{\gamma,\,r}u(r,t)\quad \gamma{\geq}0,\ \ 0<\beta{<}1$$
$$(r,t)\in D=\{(0,1)\times(0,T)\},\quad T{>}0\,. \qquad (3.3.1)$$

Требуется найти решение этого уравнения (3.2.2)

$$u(r,t)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(D)\cap H^3_\gamma(0,1;\,C(0,T)), \qquad (3.3.2)$$

удовлетворяющее начальному условию (3.2.3)

$$u(r,0)=\varphi(r),\quad 0\leqslant r\leqslant 1, \qquad (3.3.3)$$

и одному из следующих граничных условий первого, второго и третьего рода соответственно:

$$u(0,t)=const\neq 0\quad 0\leqslant t\leqslant T;\qquad u(1,t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T. \qquad (3.3.4)$$

$$u_r(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \qquad u_r(1,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.3.5}$$

$$u_r(0,t) - Hu(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \qquad u_r(1,t) + Hu(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.3.6}$$

Частные решения уравнения (3.3.1), тождественно не равные нулю в области D и удовлетворяющие условиям (3.3.2), (3.3.3) и граничным условиям (3.3.5), будем искать в виде

$$u(r,t) = X(r)T(t).$$

Подставляя данную функцию в уравнение (3.3.1), после разделения переменных получим относительно функции $X(r)$ спектральную задачу

$$B_\gamma X(r) + \lambda^2 X(r) = 0, \quad 0 < r < 1,$$

$$X(r) \in H_\gamma^2(0,1), \qquad X'(1) = 0,$$

где λ^2 — постоянная разделения.

Т.к. здесь размерность $+\gamma$ оператора Бесселя положительная, то общее решение этого уравнения определяется по формуле

$$X(r) = P_1 j_\nu(\lambda r) + P_2 \mathbb{Y}_\nu(\lambda r), \tag{3.3.7}$$

где функции $\mathbb{Y}_\nu$ — j-функция Неймана. Вторая из них не ограничена в начале координат, поэтому не удовлетворяет первому из условий (3.3.2). Поэтому необходимо потребовать $P_2 = 0$. Тогда решение (3.3.7) с произвольной константой P_1 примет вид

$$\widetilde{X}(r) = P_1 j_\nu(\lambda r)\,, \quad \nu = \frac{\gamma - 1}{2}.$$

Из условия $X'(r) = 0$ получаем уравнение для определения спектрального параметра λ:

$$j_\nu{}'(\lambda) = 0.$$

Его решениями является счетный набор чисел λ_n , определяющий систему ii) (см. п. 1.3.1) ортогональных в L_2^γ функций. Выбором константы P_1 ортонормируем систему функций ii):

$$X_n(r) = \sqrt{2}\ \frac{j_\nu(\lambda_n r)}{|j_\nu(\lambda_n)|}\,.$$

Здесь мы учли, что в случае ii) норма $\|\Lambda_\gamma^{(n)}\|_{L_2^\gamma(0,1)}$ вычисляется по формуле

$$\|\Lambda_\nu^{(n)}\|^2_{L_2^\gamma(0,1)} = [j_\nu(\lambda_n)]^2\,.$$

Функцию $T(t)$, зависящую от λ_n , обозначим $T_n(t)$. Следуя [47], ее будем искать в виде

$$T_n(t) = u_n(t) = \int\limits_0^1 u(r,t)\ X_n(r)\ r^\gamma dr, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{3.3.8}$$

Введем вспомогательные функции вида

$$u_{n,\varepsilon}(t) = \int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(r,t)\ X_n(r)\, r^\gamma dr, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Так как функция $u = u(r,t)$ является решением уравнения (3.3.1), то

$$B_{-\beta} u_{n,\varepsilon}(t) = \int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon} (B_{-\beta,\,t}) u(r,t)\ X_n(r)\, r^\gamma dr = \int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon} B_{\gamma,r} u(r,t)\, X_n(r)\, r^\gamma dr =$$
$$= \int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r}(r^\gamma u_r)\ X_n(r) dr = r^\gamma u_r X_n(r)\big|_\varepsilon^{1-\varepsilon} - \int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_r\ X_n'(r)\, r^\gamma dr. \tag{3.3.9}$$

С другой стороны

$$u_{n,\varepsilon}(t) {=} -\frac{1}{\lambda_n^2} \int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(r,t)\ B_\gamma X_n(r)\ r^\gamma dr {=} -\frac{1}{\lambda_n^2} \int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(r,t) \frac{d}{dr}(r^\gamma X_n'(r)) dr =$$

$$
= -\frac{1}{\lambda_n^2}\left[u(r,t) r^\gamma X_n'(r)\Big|_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} - \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_r(r,t)\ X_n'(r)\, r^\gamma dr \right],
$$

откуда

$$
\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_r\ X_n'(r)\, r^\gamma dr = \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(t) + u(r,t)\ X_n'(r)\, r^\gamma \mid {}_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}. \qquad (3.3.10)
$$

Из (3.3.9) и (3.3.10) получим

$$
B_{-\beta} u_{n,\varepsilon}(t) = u_r(r,t)\ X_n(r)\, r^\gamma| {}_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} - \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(t) - u(r,t)\ X_n'(r)\, r^\gamma| {}_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}
$$

В силу граничных условий для $u_n(t)$ получим сингулярное дифференциальное уравнение с отрицательной размерностью оператора Бесселя:

$$
B_{-\beta} u_n(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = 0, \quad t \in (0,T).
$$

Т.к. число β может быть только дробным, то фундаментальная система функций для этого уравнения состоит из функций $j^*_{-\mu}$ (1.4.3) и $\mathbb{J}^*_\mu$ Его решениями являются j-функции Бесселя (1.4.3) или (1.4.4). Положим

$$
u_n(t) = a_n'\ j^*_{-\mu}(\lambda_n t) + a_n''\, \mathbb{J}^*_\mu(\lambda_n r), \quad \mu = \frac{\beta+1}{2}.
$$

Поскольку функции $u_n(t)$ определены через решение задачи $u(r,t)$, то можем воспользоваться начальным условием (3.3.3). В результате получим

$$
u_n(0) = a_n = \int\limits_0^1 u(r,0)\ X_n(r)\, r^\gamma dr = \int\limits_0^1 \varphi(r)\ X_n(r)\, r^\gamma dr = \varphi_n, \quad (3.3.11)
$$

$$
u_n(t) = \varphi_n\ \left(a_n'\ j^*_{-\mu}(\lambda_n t) + a_n''\, \mathbb{J}^*_\mu(\lambda_n t) \right), \quad \varphi_n = \int\limits_0^1 \varphi(r)\ X_n(r)\, r^\gamma dr. \qquad (3.3.12)
$$

Отметим, что обе функции $j^*_{-\mu}$ и $\mathbb{J}^*_\mu$, четные по Киприянову, отличающиеся лишь поведением в нуле. Поэтому можем положить, что $a'_n = 1$, а $a''_n = 0$. Таким образом решение задачи (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3) с граничным условием (3.3.5) может существовать в виде следующего ряда Фурье—Бесселя

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \, T_n(t) \, X_n(r), \tag{3.3.13}$$

где $T_n(t)$ и $X_n(r)$ нормированные B-цилиндрические функции

$$T_n(t) = \frac{j_{-\mu}(\lambda_n t)}{|j_{-\mu}(\lambda_n)|}, \quad X_n(r) = \frac{j_\nu(\lambda_n r)}{|j_\nu(\lambda_n)|}, \quad \mu = \frac{\beta+1}{2}, \quad \nu = \frac{\gamma-1}{2}.$$

3.3.1 Единственность решения задачи (3.3.1) — (3.3.3) с граничным условием (3.3.5)

Пусть $\varphi(r) \equiv 0$, тогда из (3.3.11) при всех $n \in N$ следует, что $\varphi_n \equiv 0$. Из (3.3.12) получим, что $u_n(t) = 0$ при всех $n \in N$. Тогда из (3.3.8) при любом $t \in [0,T]$ имеем $\int\limits_0^1 u(r,t) \, X_n(r) \, r^\gamma dr = 0$. Отсюда, в силу полноты систем Λ-функций в весовом пространстве Лебега $L_2^\gamma(0,1)$ следует, что $u(r,t) = 0$ почти всюду на промежутке $[0,1]$ при любом $t \in [0,T]$.

3.3.2 Существование решения задачи (3.3.1) — (3.3.3) с граничным условием (3.3.5)

Решение определяется в виде ряда Фурье-Бесселя (3.3.13).

Почленные $B_{-\beta,\,t}$ и $B_{\gamma,\,r}$ производные ряда (3.3.13) есть опять ряды Фурье—Бесселя

$$B_{-\beta,\,t} u(r,t) \;\sim\; \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \, (-\lambda_n^2) T_n(t) \; X_n(r). \tag{3.3.14}$$

$$B_{\gamma,\,r} u(r,t) \;\sim\; \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \, T_n(t) \, (-\lambda_n^2) \, X_n(r). \tag{3.3.15}$$

Если $B_{-\beta}\varphi \in L_2^{-\beta}(0,1)$, то, согласно следствию 1.6.1 теоремы 1.6.2, (при $m = 1$) $|\varphi_n| \le c(\beta,\varphi)\ \lambda_n^{-4}$ и ряд (3.3.14) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{D}$. Сходимость ряда (3.3.15) доказана в пункте 3.2. Сходимости этих рядов достаточно, чтобы $\varphi \in H_\gamma^3(0,1)$. Следовательно решение существует в виде (3.3.13).

3.3.3 Аналог формулы Пуассона

Решение (3.3.13) запишем в виде

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n}{|j_{-\mu}(\lambda_n)|\ |j_\nu(\lambda_n)|}\ j_{-\mu}(\lambda_n t)\ j_\nu(\lambda_n r)\,. \tag{3.3.16}$$

Учитывая (1.4.3), имеем равенства

$$j_{-\mu}(t) = \Gamma(1-\mu)\frac{J_{-\mu}(t)}{(2t)^{-\mu}}$$

$$j_\nu(r) = 2^{2\nu}\Gamma(1+\nu)\frac{J_\nu(r)}{(2r)^\nu}$$

Произведение функций Бесселя первого рода порядков p и q при условии $p+q > -1$ определяется формулой ([46], формула 2.12.27.10)

$$\frac{J_p(\lambda t)}{(2\lambda t)^p}\ \frac{J_q(\lambda r)}{(2\lambda r)^q} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\theta(p-q)}\,(\cos\theta)^{p+q}\ \frac{J_{p+q}(\lambda s)}{(\lambda s r)^{p+q}}\,d\theta\,,$$

$$s = \sqrt{2\cos\theta\,(t^2\,e^{i\theta} + r^2 e^{-i\theta})}\,.$$

Здесь $p = -\mu > -1$, $q = \nu > -\frac{1}{2}$. Полагая $p+q > -1$ запишем

$$j_{-\mu}(\lambda_n t)\ j_\nu(\lambda_n r) =$$

$$= \Gamma(1-\mu)\,2^{2\nu}\Gamma(1+\nu)\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\theta(-\mu-\nu)}\,(\cos\theta)^{\nu-\mu}\ \frac{J_{\nu-\mu}(\lambda s)}{(\lambda s)^{\nu-\mu}}\,d\theta =$$

$$
= \frac{\Gamma(1-\mu)\, 2^{2\nu}\Gamma(1+\nu)}{\pi\, 2^{\nu-\mu}\Gamma(\nu-\mu+1)} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\theta(-\mu-\nu)} (\cos\theta)^{\nu-\mu}\; j_{\nu-\mu}(\lambda s)\, d\theta\,.
$$

Если положить здесь $\lambda = 0$, то учитывая, что $j_{-\mu}(0) = 1$ и $j_\nu(0) = 1$, получим равенство

$$
1 = \frac{\Gamma(1-\mu)\, 2^{2\nu}\Gamma(1+\nu)}{\pi\, 2^{\nu-\mu}\Gamma(\nu-\mu+1)} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\theta(-\mu-\nu)} (\cos\theta)^{\nu-\mu}\; d\theta
$$

которое показывает, что оператор

$$
\overset{\nu,-\mu}{V^t}\; f(r) = \frac{\Gamma(1-\mu)\, 2^{2\nu}\Gamma(1+\nu)}{\pi\, 2^{\nu-\mu}\Gamma(\nu-\mu+1)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\theta(\mu-\nu)} \cos^{\nu+\mu}\theta\, f(s)\, d\theta\,,
$$

является усредняющим оператором: $\overset{\nu,\mu}{V^t}\, 1 = 1$ (поэтому обладает некоторыми свойствами обобщенного сдвига, но не принадлежит классу обобщенных сдвигов Левитана). Таким образом

$$
j_{-\mu}(\lambda_n t)\; j_\nu(\lambda_n r) = \overset{\nu,-\mu}{V_r^t}\; j_{\nu-\mu}(\lambda r)\,.
$$

Из (3.3.16) получаем следующий аналог формулы Пуассона.

Теорема 3.3.1. *Пусть в* (3.3.1) *параметры* $0<\beta<1$ *и* $\gamma > 0$. *Решение краевой задачи* (3.3.1) – (3.3.3) *с одним из граничных условий* (3.3.4), (3.3.5), (3.3.6) *существует и единственно. Решение в виде ряда Левитана* (3.3.16) *(типа Фурье—Бесселя (если параметр* λ_n *удовлетворяет условиям i) или ii)) или ряда Дини, если параметр* λ_n *удовлетворяет условиям iii)) имеет вид*

$$
u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n}{|j_{-\mu}(\lambda_n)|}\; \overset{\nu,-\mu}{V_r^t}\; j_{\nu-\mu}(\lambda r), \quad \varphi_n = \int\limits_0^1 \varphi(r)\, X_n(r) r^\gamma dr\,,
$$

где $\mu=\frac{\beta+1}{2}$, $\nu=\frac{\gamma-1}{2}$, X_n *— нормированная j-функция Бесселя, опре-*

деленная формулой

$$X_n(r) = \begin{cases} \frac{j_\nu(\lambda_n r)}{|j\,'_\nu(\lambda_n)|} & \text{в случае i),} \\ \frac{j_\nu(\lambda_n r)}{|j_\nu(\lambda_n)|} & \text{в случае ii),} \\ \frac{j_\nu(\lambda_n r)}{\frac{|j_\nu(\lambda_n)|}{\lambda_n}\sqrt{[\lambda^2-\nu^2+(\nu+H)^2]}|} & \text{в случае iii).} \end{cases}$$

3.4 Краевая задача для уравнения ЭПД с оператором $B_{-\beta,t}$ при $\beta \geq 1$, $\gamma > 0$

Для произвольной отрицательной размерности оператора Бесселя $-\beta$ возможно использовать в качестве собственных функций только функции типа J^*_μ, которые обладают необходимым свойством $J^*_\mu(t) = O(t^{2\mu})$, $t \to 0$ $\left(\mu = \frac{\beta+1}{2}\right)$. Это связано с мерой ортоганальности, равной $\frac{dt}{t^\beta}$ (одновременно это и мера самосопряженности оператора $B_{-\beta}$).

Рассмотрим уравнение

$$B_{-\beta,\,t}u(r,t) = B_{\gamma,\,r}u(r,t) \quad \gamma{>}0,\;\; \beta{\geq}1\;\; (r,t) \in D = \{(0,1)\times(0,T)\},\; T{>}0\,. \tag{3.4.1}$$

Требуется найти решение этого уравнения

$$u(r,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D) \cap H^3_\gamma(0,1;\, C(0,T)), \tag{3.4.2}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(r,0) = \varphi(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant 1, \tag{3.4.3}$$

и одному из следующих граничных условий первого, второго и третьего рода соответственно:

$$u(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \qquad u(1,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.4.4}$$

$$u_r(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \qquad u_r(1,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.4.5}$$

$$u_r(0,t){-}Hu(0,t)=0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \qquad u_r(1,t){+}Hu(0,t)=0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.4.6}$$

Рассматривается уравнение ЭПД с разными (вообще говоря) показателями размерности операторов Бесселя в левой и правой частях уравнения ЭПД (3.4.1). Частные решения уравнения (3.4.1), тождественно не равные нулю в области D и удовлетворяющие условиям (3.4.2), (3.4.3) и граничным условиям (3.4.5), будем искать в виде

$$u(r,t)=X(r)T(t).$$

Подставляя данную функцию в уравнение (3.4.1), после разделения переменных получим относительно функции $X(r)$ спектральную задачу

$$B_\gamma X(r)+\lambda^2 X(r)=0, \quad 0<r<1,$$

$$X(r)\in H^2_\gamma(0,1), \qquad X'(1)=0,$$

где λ^2 — постоянная разделения (как и раньше, случай $\lambda=0$ приводит к тривиальному решению, а $-\lambda^2$ — к цилиндрическим функциям третьего рода).

Общее решение этого уравнения определяется по формуле

$$X(r)=P_1 j_\nu(\lambda r)+P_2\mathbb{Y}_\nu(\lambda r), \tag{3.4.7}$$

где функции $\mathbb{Y}_\nu$ — j-функция Неймана

$$\mathbb{Y}^*_\mu(t)=\mathbb{Y}^*_{\frac{\beta+1}{2}}(t)=t^\mu\, Y_{\frac{\beta+1}{2}}(t)=\frac{\cos(\nu\pi)\,\mathbb{J}^*_\mu(t)-\mathbb{J}^*_{-\mu}(t)}{\sin\nu\pi}\,.$$

Вторая из них не равна нулю в начале координат, поэтому не удовлетворяет условию (3.4.2). Поэтому необходимо потребовать $P_2=0$. Тогда решение (3.4.7) с произвольной константой P_1 примет вид

$$\widetilde{X}(r)=P_1 j_\nu(\lambda r)\,, \quad \nu=\frac{\gamma+1}{2}.$$

Из условия $X'(r) = 0$ получаем уравнение ${j_\nu}'(\lambda) = 0$. Его решениями является счетный набор чисел λ_n, определяющий систему ii) ортогональных в L_2^γ функций. Выбором константы P_1 ортонормируем систему функций ii):

$$X_n(r) = \sqrt{2}\ \frac{j_\nu(\lambda_n r)}{|j_\nu(\lambda_n)|}\,.$$

Здесь мы учли, что в случае ii) норма $\|\Lambda_\gamma^{(n)}\|_{L_2^\gamma(0,1)}$ вычисляется по формуле

$$\|\Lambda_\nu^{(n)}\|^2_{L_2^\gamma(0,1)} = [j_\nu(\lambda_n)]^2\,.$$

Функцию $T(t)$, зависящую от λ_n, обозначим $T_n(t)$. Следуя [47], ее будем искать в виде

$$T_n(t) = u_n(t) = \int\limits_0^1 u(r,t)\ X_n(r)\ r^\gamma dr, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.4.8}$$

Введем вспомогательные функции вида

$$u_{n,\varepsilon}(t) = \int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(r,t)\ X_n(r)\, r^\gamma dr, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Так как функция $u = u(r,t)$ является решением уравнения (3.4.1), то

$$B_{-\beta} u_{n,\varepsilon}(t) = \int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon} (B_{-\beta,\,t}) u(r,t)\ X_n(r)\, r^\gamma dr = \int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon} B_{\gamma,r} u(r,t)\, X_n(r)\, r^\gamma dr =$$

$$= \int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r}(r^\gamma u_r)\ X_n(r) dr = r^\gamma u_r X_n(r)|_\varepsilon^{1-\varepsilon} - \int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_r\ X_n'(r)\, r^\gamma dr. \tag{3.4.9}$$

С другой стороны

$$u_{n,\varepsilon}(t) = -\frac{1}{\lambda_n^2} \int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(r,t)\ B_\gamma X_n(r)\ r^\gamma dr = -\frac{1}{\lambda_n^2} \int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(r,t) \frac{d}{dr}(r^\gamma X_n'(r)) dr =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\left[u(r,t)r^\gamma X_n'(r)\Big|_\varepsilon^{1-\varepsilon} - \int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_r(r,t)\; X_n'(r)\, r^\gamma dr\right],$$

откуда

$$\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_r\; X_n'(r)\, r^\gamma dr = \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(t) + u(r,t)\; X_n'(r)\, r^\gamma \mid {}_\varepsilon^{1-\varepsilon}. \qquad (3.4.10)$$

Из (3.4.10) и (3.4.9) получим

$$B_{-\beta} u_{n,\varepsilon}(t) = u_r(r,t)\; X_n(r)\, r^\gamma \mid {}_\varepsilon^{1-\varepsilon} - \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(t) - u(r,t)\; X_n'(r)\, r^\gamma \mid {}_\varepsilon^{1-\varepsilon}$$

В силу граничных условий для $u_n(t)$ получим сингулярное дифференциальное уравнение с отрицательной размерностью оператора Бесселя:

$$B_{-\beta} u_n(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = 0, \quad t \in (0,T).$$

Его решениями являются B-цилиндрические функции $\mathbb{J}_\mu$ (1.4.5) и $\mathbb{Y}_\mu$ (1.4.6), образующие фундаментальную систему функций. Функция $\mathbb{Y}_\mu(0) \neq 0$, поэтому положим

$$u_n(t) = a_n\; \mathbb{J}_\mu^*(\lambda_n t)\,, \quad \mu = \frac{\beta+1}{2}.$$

Поскольку функции $u_n(t)$ определены через решение задачи $u(r,t)$, то можем воспользоваться начальным условием (3.4.3). В результате получим

$$u_n(0) = a_n = \int\limits_0^1 u(r,0)\; X_n(r)\, r^\gamma dr = \int\limits_0^1 \varphi(r)\; X_n(r)\, r^\gamma dr = \varphi_n, \quad (3.4.11)$$

$$u_n(t) = \varphi_n\; \mathbb{J}_{\frac{\beta+1}{2}}^*(\lambda_n t), \quad \varphi_n = \int\limits_0^1 \varphi(r)\; X_n(r)\, r^\gamma dr. \qquad (3.4.12)$$

Таким образом решение задачи (3.4.1), (3.4.2), (3.4.3) с граничным условием (3.4.5) может существовать в виде следующего ряда Фурье—Бесселя

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^\infty \varphi_n\; T_n(t)\, X_k(r) \qquad (3.4.13)$$

где $T_n(t)$ и $X_n(r)$ нормированные B-цилиндрические функции

$$T_n(t)=\frac{\mathbb{J}^*_\mu(\lambda_n t)}{|\mathbb{J}^*_\mu(\lambda_n)|}, \quad X_n(r)=\frac{j_\nu(\lambda_n r)}{|j_\nu(\lambda_n)|}, \quad \mu=\frac{\beta+1}{2}, \quad \nu=\frac{\gamma-1}{2}.$$

3.4.1 Единственность решения задачи (3.4.1) — (3.4.3) с граничным условием (3.4.5)

Пусть $\varphi(r)\equiv 0$, тогда из (3.4.11) при всех $n\in N$ следует, что $\varphi_n\equiv 0$. Из (3.4.12) получим, что $u_n(t)=0$ при всех $n\in N$. Тогда из (3.4.8) при любом $t\in[0,T]$ имеем $\int\limits_0^l u(r,t)\ X_n(r)\,r^\gamma dr=0.$ Отсюда, в силу полноты систем Λ-функций в весовом пространстве Лебега $L_2^\gamma(0,l)$ следует, что $u(r,t)=0$ почти всюду на промежутке $[0,l]$ при любом $t\in[0,T]$.

3.4.2 Существование решения задачи (3.4.1) — (3.4.3) с граничным условием (3.4.5)

Решение определяется в виде ряда Фурье-Бесселя (3.4.13).

Почленные $B_{-\beta,\,t}$ и $B_{\gamma,\,r}$ производные ряда (3.4.13) есть опять ряды Фурье—Бесселя

$$B_{-\beta,\,t}u(r,t)\ \sim\ \sum_{n=1}^\infty \varphi_n\ (-\lambda_n^2)T_n(t)\ X_n(r)\,. \tag{3.4.14}$$

$$B_{\gamma,\,r}u(r,t)\ \sim\ \sum_{n=1}^\infty \varphi_n\ T_n(t)\,(-\lambda_n^2)\,X_n(r)\,. \tag{3.4.15}$$

Если $B_{-\beta}\varphi\in L_2^{-\beta}(0,1)$, то, согласно теореме 1.7.3 (при $m=1$) $|\varphi_n|\le c(\beta,\varphi)\ \lambda_n^{-4}$ и ряд (3.4.14) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{D}$. Сходимость ряда (3.4.15) доказана в пункте 3.2. Сходимости этих рядов достаточно, чтобы $\varphi\in H_\gamma^3(0,1)$. Следовательно решение существует в виде (3.4.13).

3.4.3 Аналог формулы Пуассона

Решение (3.4.13) запишем в виде

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n}{|\mathbb{J}^*_\mu(\lambda_n)|\;|j_\nu(\lambda_n)|}\;\mathbb{J}^*_\mu(\lambda_n t)\;j_\nu(\lambda_n r)\,. \tag{3.4.16}$$

Учитывая (1.4.5), имеем равенства

$$\mathbb{J}^*_\mu(t)=t^\mu\;J_\mu(t)=\frac{t^{2\mu}j_\mu(t)}{2^\mu\,\Gamma(\mu+1)},$$

$$j_\nu(r)=2^{2\nu}\Gamma(1+\nu)\frac{J_\nu(r)}{(2r)^\nu}$$

Произведение функций Бесселя первого рода порядков p и q при условии $p+q>-1$ определяется формулой ([46], формула 2.12.27.10)

$$\frac{J_p(\lambda t)}{(2\lambda t)^p}\,\frac{J_q(\lambda r)}{(2\lambda r)^q}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{i\theta(p-q)}\,(\cos\theta)^{p+q}\;\frac{J_{p+q}(\lambda s)}{(\lambda s)^{p+q}}\,d\theta\,,$$

$$s=\sqrt{2\cos\theta\,(t^2\,e^{i\theta}+r^2e^{-i\theta})}\,.$$

Полагая здесь $p=\mu$, $q=\nu$, запишем

$$j_\nu(\lambda_n r)\;j_\mu(\lambda_n t)=\frac{2^{\nu+\mu}\,\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)}{\pi\;\Gamma(\nu+\mu)}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{i\theta(\mu-\nu)}\cos^{\nu+\mu}\theta\,j_{\nu+\mu}(s\lambda_n)\,d\theta\,,$$

Если положить здесь $\lambda_n=0$, то учитывая, что $j_\nu(0)$=1 $(\forall\;\nu>-1/2)$, получим равенство

$$1=\frac{2^{\nu+\mu}\,\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)}{\pi\;\Gamma(\nu+\mu)}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{i\theta(\mu-\nu)}\cos^{\nu+\mu}\theta\;d\theta\,,$$

которое показывает, что оператор

$$\overset{\nu,\mu}{V}{}^t_r\;f(r)=\frac{2^{\nu+\mu}\,\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)}{\pi\;\Gamma(\nu+\mu)}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{i\theta(\mu-\nu)}\cos^{\nu+\mu}\theta\,f(s)\,d\theta\,,$$

является усредняющим оператором: $\overset{\nu,\mu}{V_r^t} 1 = 1$ (поэтому обладает некоторыми свойствами обобщенного сдвига, но не принадлежит классу обобщенных сдвигов Левитана). Таким образом

$$j_\mu(\lambda_n t)\, j_\nu(\lambda_n r) = \overset{\nu,\mu}{V_r^t}\, j_{\nu+\mu}(\lambda r)\,.$$

Из (3.4.16) получаем следующий аналог формулы Пуассона.

Теорема 3.4.1. *Пусть в* (3.4.1) *параметры* $\beta \geq 1$ *и* $\gamma > 0$ *. Решение краевой задачи* (3.4.1) – (3.4.3) *с одним из граничных условий* (3.4.4), (3.4.5), (3.4.6) *существует и единственно. Решение в виде ряда Левитана* (3.4.16) *(типа Фурье—Бесселя (если параметр* λ_n *удовлетворяет условиям i) или ii)) или ряда Дини, если параметр* λ_n *удовлетворяет условиям iii)) имеет вид*

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n\,(\lambda_n t)^{2\mu}}{|\mathbb{J}_\mu^*(\lambda_n)|\; 2^\mu\, \Gamma(\mu+1)} \quad \overset{\nu,\mu}{V_r^t}\, j_{\nu+\mu}(\lambda r)\,, \quad \varphi_n = \int\limits_0^1 \varphi(r)\, X_n(r) r^\gamma dr,$$

где $\mu{=}\frac{\beta+1}{2}$, $\nu{=}\frac{\gamma-1}{2}$, X_n *– нормированная j-функция Бесселя, определенная формулой*

$$X_n(r) = \begin{cases} \frac{j_\nu(\lambda_n r)}{|j\,'_\nu(\lambda_n)|} & \text{в случае i)}, \\ \frac{j_\nu(\lambda_n r)}{|j_\nu(\lambda_n)|} & \text{в случае ii)}, \\ \frac{j_\nu(\lambda_n r)}{\frac{|j_\nu(\lambda_n)|}{\lambda_n}\sqrt{[\lambda^2-\nu^2+(\nu+H)^2]|}} & \text{в случае iii)}. \end{cases}$$

Литература

[1] *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978. – 352с.

[2] *Бейтмен Г.* Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Т. 1. – М.: Наука, 1973. – 295 с.

[3] *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. – М.: ИЛ, 1947. – 780 с.

[4] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука. 1981. – 512 с.

[5] *Градштейн И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М Рыжик. – М.: ГИФМЛ., 1963. – 1100 с.

[6] *Диткин В.А.* Интегральные преобразования и операционное исчисление / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – Физматгиз, 1961. – 524 с.

[7] *Елецких К.С.* О среднем по окружности радиальной j-функции Бесселя / К.С. Елецких // Вестник ПММ Воронежского государственного университета. Воронеж: Научная книга. – 2016. – Выпуск 13. – С. 66–75.

[8] *Елецких К.С.* О смешанном преобразовании Фурье-Бесселя целого и полуцелого индекса в пространстве $\mathbb{R}_2$ / К.С. Елецких // Вестник ПММ Воронежского государственного университета. Воронеж: Научная книга. – 2017. – Выпуск 14. – С. 30–37.

[9] *Елецких К.С.* Преобразование Фурье-Бесселя радиальной j-функции Бесселя / К.С. Елецких // Материалы международной конференции Дифференциальные уравнения и смежные проблемы. Тезисы докладов. Самара. – 2017. – С. 53–55.

[10] *Елецких К.С.* О среднем по окружности радиальной j-функции Бесселя / К.С. Елецких // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2018". Воронеж: ВГУ. – 2018. – С. 205–206.

[11] *Елецких К.С.* Сингулярное уравнение типа Ибрагимова-Мамонтова / К.С. Елецких // Материалы международной конференции Дифференциальные уравнения и смежные проблемы. Тезисы докладов. Стерлитамак. – 2018. – Т. 1. – С. 69-71.

[12] *Елецких К.С.* О принципе Гюйгенса в задачах сингулярных дифференциальных уравнений / К.С. Елецких // Материалы международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам в г. Суздаль. Тезисы докладов. Суздаль. – 2018. – С. 86.

[13] *Елецких К.С.* О фундаментальном решении D_B-гиперболического оператора / К.С. Елецких // Материалы 9-го международного семинара AMADE . Тезисы докладов. Минск. – 2018.– С. 30–31.

[14] *Елецких К.С.* Псевдообобщенный $\binom{\mu}{\nu}$-сдвиг и формула Пуассона решения краевой задачи для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу / К.С. Елецких // Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В. А. Садовничего. Тезисы докладов. – Москва : МАКС Пресс. – 2019. – С. 50.

[15] *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т.1. – М.: Мир. – 1965. – 615 с.

[16] *Ибрагимов Н.Х.* О задаче Коши для уравнения $u_{tt} - u_{xx} - \sum_{i,j=1}^{n-1} u_{y_i y_j} = 0$ / Н.Х. Ибрагимов, Е.В. Мамонтов // М.: Математ. сб. – 1977. – Т. 102(144). – № 3. – С. 391–409.

[17] *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применение к дифференциальным уравнениям с частными производными. – М.: Изд-во. иностр. лит., 1958. – 158 с.

[18] *Каган Г.М.* Об одном классе сингулярных задач, удовлетворяющих принципу Гюйгенса / Г.М. Каган // ДАН. 1981. – Т.256. – № 6. – С. 1307–1311.

[19] *Каган Г.М.* О преобразовании Фурье функции $j_n(a|x|)$ / Г.М. Каган // Сб. Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск. – 1981. Издат. СО АН СССР. – С. 75–76.

[20] *Каган Г.М.* Задача Коши для гиперболических уравнений второго порядка с особенностями. – Воронеж, ВГУ, автореф. канд. диссерт, 1983. – 16 с.

[21] *Какичев В.А.* О свертках для интегральных преобразований / В.А. Какичев // Изв. АН БССР, Сер. : Физ.-мат. наук. – 1967. – № 22. – С. 48–57.

[22] *Катрахов В.В.* Полное преобразование Фурье-Бесселя и алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов / В.В. Катрахов, Л.Н. Ляхов // Дифференц. уравн. – 2011. – Т. 47. – № 5. – С. 681–695

[23] *Келдыш М.В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области / М.В. Келдыш // ДАН СССР. – 1951. – Т. 77. – № 1. – С. 181–183.

[24] *Киприянов И.А.* Об одном операторе, порожденном преобразованием Фурье—Бесселя / И.А. Киприянов // Сибирск. марем. журнал. – 1967. – Т.8. – № 3. – С. 601–620.

[25] *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические задачи. – М.:Наука, 1997. – 199 с.

[26] *Киприянов И.А.* О фундаментальном решении волнового уравнения с многими особенностями и о принципе Гюйгенса / И.А. Киприянов, Ю.В. Засорин // Дифференц. уравн. – 1992. – Т28. – № 3. – С. 452–462.

[27] *Киприянов И.А.* Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов / И.А. Киприянов, В.В. Катрахов // Матем. сборник. – 1977. – Т. 104(146). – № 1(9). – С. 49–68.

[28] *Киприянов И.А.* Метод Адамара для некоторых классов уравнений с особенностями / И.А. Киприянов, Л.А. Иванов // ДАН СССР. – 1980. – Т.252. – № 3. – С.1045–1048.

[29] *Киприянов И.А.* Метод Адамара для некоторых классов гиперболических уравнений с переменными коэффициентами / И.А. Киприянов, Л.А. Иванов // Сибирск. математ. журнал. – 1982. – Т. 23. – № 3. – С. 91–100.

[30] *Ключанцев М.И.* Введение в теорию $(\nu_1, ..., \nu_{r-1})$-преобразований / М.И. Ключанцев // Матем. сб. – 1987. – Т.132(174). – № 2. – С. 167-181.

[31] *Кошляков Н.С.* Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.В. Глинер, М.М. Смирнов. – М. : Высшая школа, 1976. – 712 с.

[32] *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.

[33] *Левитан Б.М.* Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя / Б. М. Левитан // УМН. – 1951. – Т. 6. – № 2. – С. 102–143.

[34] *Ляхов Л.Н.* В-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с В-потенциальными ядрами. – Липецк: ЛГПУ, 2007. – 232 с.

[35] *Ляхов Л.Н.* О свертывателях и мультипликаторах классов функций, связанных с преобразованием Фурье—Бесселя / Л.Н. Ляхов // ДАН. – 1998. – Т. 360. – № 1. – С. 16–19.

[36] *Ляхов Л.Н.* Построение ядер Дирихле и Валле-Пуссена–Никольского для j-бесселевых интегралов Фурье / Л.Н. Ляхов // Тр. Московского математического общества. – 2015. – Т. 76. – Вып. 1. – С. 67–84.

[37] *Ляхов Л.Н.* О смешанном преобразование Фурье—Бесселя радиальной j-функций Бесселя / Л.Н. Ляхов, К.С. Елецких // Проблемы математ. анализа. – 2017. – Т. 89. – С. 52–63

[38] *Ляхов Л.Н.* О сингулярном уравнении типа уравнения Ибрагимова—Мамонтова / Л.Н. Ляхов, К.С. Елецких, С.А. Рощупкин // Проблемы математического анализа. – 2018. – Т. 92. – С. 31–39.

[39] *Ляхов Л.Н.* О формулах Пуассона для краевых задач уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу / Л.Н. Ляхов, К.С. Елецких , Е.Л. Санина // Проблемы математического анализа. – 2019. – Т. 97. – № 3. – С. 83–91.

[40] *Ляхов Л.Н.* Обращение интегральных операций с плоской весовой волной / Л.Н. Ляхов, М.Г. Лапшина // Проблемы математического анализа. – 2016. – Т. 84. – С. 113–121.

[41] *Ляхов Л.Н.* Об априорной оценке решений сингулярных B-эллиптических псевдодифференциальных уравнений с ∂_B оператором Бесселя / Л.Н. Ляхов, С.А. Рощупкин // Проблемы математического анализа. – 2013. – Т. 74. – С. 109–116.

[42] *Ляхов Л.Н.* Об одной задаче И.А. Киприянова для сингулярного ультрагиперболического уравнения / Л.Н. Ляхов, И.П. Половинкин, Э.Л. Шишкина // Дифференц. уравн. – 2014. – Т. 50. – № 4. – С. 516–528.

[43] *Ляхов Л.Н., Половинкин И.П., Шишкина Э.Л.* Формулы решения задачи Коши для сингулярного волнового уравнения с оператором Бесселя по времени / Л.Н. Ляхов, И.П. Половинкин, Э.Л. Шишкина // ДАН. – 2014. – Т. 459. – № 5. – С. 533–538.

[44] Математическая энциклопедия: Гл. ред. И. М. Виноградов, Т. 2. Д - Коо.-М.: «Советская Энциклопедия», 1979.

[45] *Никольский С.М.* Курс математического анализа. – М.: ФИЗМАТЛИТ. – 6-е изд., стереотип., 2001. – 592 с.

[46] *Прудников А.П.*, Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. — М.: Наука, – 1983. – 753 с.

[47] *Сабитов К.Б.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в прямоугольной области / К.Б. Сабитов, Э.В. Вагапова // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49. – № 1. – С. 68–78.

[48] *Сабитов К.Б.* Вторая начально-граничная задача для B-гиперболического уравнения / К.Б. Сабитов, Н.В. Зайцева // Изв. вузов. Математика. – 2019. – № 10. – С. 75–86.

[49] *Санина Е.Л.* Дробные B-производные Вейля j-бесселевых разложений и неравенство Бернштейна для B-производных четных j-многочленов Шлемильха / Е.Л. Санина. – Воронеж, ВГУ, автореф. канд. диссерт., 2008. – 16 с.

[50] *Стейн И.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн , Г. Вейс. – М.: Мир, 1974. – 333 с.

[51] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 736 с.

[52] *Толстов Г.П.* Ряды Фурье. – М.: Наука, 1980. – 381 с.

[53] *Трикоми Ф.* Lezioni sulle on equazion a derivate parziali / Editrice oheroni torino. 1954 Русский перевод В.А. Райкова, с предисловием Б.М. Левитана — Лекции по уравнениям в частных производных. – М.: ИИЛ, 1957. – 445 с.

[54] *Diaz J.* On Singular and Regular Cauchy Problems / J. Diaz // Comm. on Pure and Appl. Math. – 1956. – V. 9. – P. 383–390.

[55] *Fox D.W.* The Solution and Huygens' Principle for a Singular Cauchy Problem / D.W. Fox // Journal of Mathematics and Mechanics. – 1959. – V.8. – No. 2. – P. 197—219.

[56] *Günter P.* Eine Beissiel einer nichttrivialen Huyghensscher Differentialgleichung mit vier unabbängigen / P. Günter // Arch. Rational Mech. Anal. – 1965. – J. 18. – No. 2. – P. 103–106.

[57] *Ibragimov N.H.* Sur le probléme de J. Hadamard relatif á la diffus ondes / N.H. Ibragimov, E.V. Mamontov // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1970. – J. 270. – 456–458.

[58] *Lyakhov L.N.* A Priori Estimates for Solutions of Singular B-Elliptic Pseudodifferential Equations with Bessel ∂_B-Operators / L.N. Lyakhov, S.A. Roschupkin // Jornal Of Mathematical Sciences. – 2014. – V. 196, – № 4. – P. 563–571.

[59] *Lyakhov L.N.* The Mixed Fourier–Bessel Transform of a Radial Bessel j-Function / L.N. Lyakhov, K.S. Yeletskikh // Jornal Of Mathematical Sciences. Springer. – 2017. – V. 226. – № 4. – P. 388—401.

[60] *Lyakhov L.N.* Singular Ibragimov—Mamontov Type Equations / L.N. Lyakhov, K.S. Yeletskikh, S.A. Roshupkin // Jornal Of Mathematical Sciences. Springer. – 2018. – V. 232. – № 4.– P. 437–446.

[61] *Lyakhov L.N.* Poisson Formulas for Boundary Value Problems for the Euler–Poisson–Darboux Equation / L.N. Lyakhov, K.S. Yeletskikh, E.L. Sanina // Jornal Of Mathematical Sciences. Springer. – 2019. – V. 239. – № 3. – P. 329–339.

[62] *Matisson M.* Le probleme de M. Hadamard relatif a la diffusion des ondes / M. Matisson // Acta Math. – 1939. – J. 71. – P. 249–282.

[63] *Stellmacher K.L.* Eine Klass Huygensscher Differentialgleichungen und ihre Integration / K.L. Stellmacher // Math. Ann. – 1955. – V. 130. – No. 3. – 219–233.

[64] *Yeletskikh K.S.* On the mixed fourier-bessel transformation of a radial Bessel j-function of integer and half-integral index / К.С. Елецких // Материалы докладов международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VII". Тезисы докладов. – Ростов н/Д: ДГТУ. – 2017. – С. 81–82.

[65] *Yeletskikh K.S.* On a particular class of singular equations / К.С. Елецких // Материалы докладов международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VIII". Тезисы докладов. – Ростов н/Д: ДГТУ. – 2018. – С. 75–76.

[66] *Yeletskikh K. S.* On boundary value problems for the Euler—Poisson—Darboux equationss / К.С. Елецких // Материалы докладов международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – IX". Тезисы докладов.– Ростов н/Д: ДГТУ.– 2019. – С. 73–74.