МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЭКОНОМИКИ, СТАТИСТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

На правах рукописи

Тельнова

Тельнова Мария Юрьевна

ОЦЕНКИ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С УСЛОВИЯМИ ДИРИХЛЕ И ВЕСОВЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:
доктор физико–математических наук,
профессор Асташова И. В.

ВЛАДИМИР — 2015

Оглавление

Введение

Актуальность темы

В диссертации рассматривается задача, основополагающей для которой послужила задача, известная как задача Лагранжа [29] или задача о наиболее прочной колонне заданного объема. Эту задачу в более общей постановке решали ученые разных стран мира более чем 200 лет: Keller J.B. [28], [32], Tadjbakhsh I. [32], А. С. Братусь [2], [3], А. П. Сейранян [3], [19], S. J. Cox [21], [22], M. L. Overton [22], Ю. В. Егоров и В. А. Кондратьев [6], [24] и др. Для решения задачи Лагранжа потребовались практически все разделы вариационного исчисления, включая современные достижения. В свою очередь эта задача стимулирует развитие новых математических дисциплин, таких как теория экстремальных задач с недифференцируемыми функционалами. Механическая сущность задачи о колонне позволила выбрать среди возможных экстремалей оптимальные решения, имеющие явный физический смысл.

В 1773 году Ж.-Л. Лагранж, развивая работы Л. Эйлера [20] об устойчивости упругих стержней, поставил задачу об оптимальной форме колонны, нагруженной продольной силой P: найти форму колонны, максимизирующую критерий «прочности»

$$\max \frac{P_c}{V^2},$$

где P_c – критическая сила потери устойчивости, V – объем колонны. Колонна является телом вращения плоской кривой вокруг некоторой прямой, расположенной в ее плоскости.

Потеря устойчивости колонны описывается уравнением изгиба тонких тонких стержней Бернулли – Эйлера

$$(EI(x)y'')'' + Py'' = 0, \quad 0 < x < L, \tag{1}$$

где $y(x)$ – функция прогиба, E – модуль Юнга, $I(x) = \pi R^4(x)/4$ – момент инерции стержня круглого сечения радиуса R.

Ж.-Л. Лагранж рассматривал условия шарнирного опирания колонны на обоих концах

$$y(0) = (EI(x)y'')_{x=0} = 0, \quad y(L) = (EI(x)y'')_{x=L} = 0. \tag{2}$$

Объем колонны задается интегралом

$$V = \int_0^L A(x)dx, \tag{3}$$

где $A(x) = \pi R^2(x)$ – площадь поперечного сечения.

После введения безразмерных переменных $x^0 = x/L$, $y^0 = y/L$, $S(x^0) = A(Lx^0)L/V$, введя обозначения $\lambda = 4\pi PL^4/(EV^2)$, $Q(x) = S^2(x)$, уравнение (1) и условия (2), (3) примут вид (нули в символах x^0 и y^0 опускаем)

$$(Q(x)y'')'' + \lambda y'' = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{4}$$

$$y(0) = (Q(x)y'')_{x=0} = 0, \quad y(1) = (Q(x)y'')_{x=1} = 0. \tag{5}$$

$$\int_0^1 \sqrt{Q(x)}dx = 1. \tag{6}$$

Задача (4) – (5) представляет собой задачу на собственные значения и сводится к максимизации первого собственного значения λ при изопериметрическом условии (6).

Приведем постановку задачи Лагранжа, рассматриваемой в работах [28], [32], [6], и связанной с ней вариационной задачи при жестком закреплении колонны с обоих концов:

$$y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0. \tag{7}$$

Потенциальная энергия колонны единичной длины выражается функционалом

$$T = \int_0^1 Q(x)y''(x)^2dx - \lambda \int_0^1 y'(x)^2dx.$$

При малых значениях λ минимальное значение T в классе $H_0^2(0,1)$ равно 0. *Критической нагрузкой* λ_0 называется максимальное значение λ, при котором $\inf_{y\in H_0^2(0,1)} T = 0$. Пусть

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y\in H_0^2(0,1)} L[Q,y], \quad \text{где} \quad L[Q,y] = \frac{\int_0^1 Q(x)y''(x)^2dx}{\int_0^1 y'(x)^2dx}.$$

Задача оптимизации Лагранжа состоит в отыскании такой неотрицательной функции поперечного сечения $\sqrt{Q_0(x)}$, что $\lambda_0 = \lambda_1(Q_0)$ и $\int_0^1 \sqrt{Q_0(x)}dx = 1$. Уравнение (4) является уравнением Эйлера – Лагранжа для функционала $L[Q, y]$ при условии, что выполняются граничные условия (5) или (7).

Если колонна имеет сечения произвольной формы, подобные одному из них, и неоднородна, то есть составлена из слоев с различными упругими свойствами, то условие на функцию Q можно заменить условием

$$\int_0^1 Q^\gamma(x)dx = 1 \tag{8}$$

при некотором $\gamma \in (0, 1]$.

В работах [28], [32], [6] рассматривается задача для уравнения (4), граничных условий (7) и интегрального условия (8), которая сводится к нахождению экстремальных значений функционала $L[Q, y]$ при условиях, что функция y принадлежит пространству $H^2(0, 1)$, удовлетворяет граничным условиям (7), и функция Q – неотрицательная ограниченная измеримая функция, удовлетворяющая условию (8) (в работах [28], [32] $\gamma = 1/2$). В работе [6] авторами используются пространства Соболева ${W_p}^l(0, 1)$, $l = 1, 2$, с любыми вещественными значениями $p \neq 0$, что интересно также и вне рамок задачи Лагранжа.

В работе [6] приводится эквивалентная задаче (4) – (7) – (8) вариационная задача об экстремуме функционала

$$F[Q, y] = \frac{\int_0^1 Q(x)y'(x)^2dx}{\int_0^1 y(x)^2dx}$$

при условии, что функция $y \in H_0^1(0, 1)$ удовлетворяет условию $\int_0^1 y(x)dx = 0$, и функция Q удовлетворяет условию (8).

Задача Лагранжа послужила источником для различных постановок экстремальных задач на собственные значения, в том числе для уравнений второго порядка с интегральным условием на потенциал. Одной из первых задач такого типа для уравнения второго порядка и нулевых граничных условий

$$y'' + \lambda Q(x)y = 0, \ \ x \in (0, 1)\,, \tag{9}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{10}$$

была поставлена и изучена Ю. В. Егоровым и В. А. Кондратьевым [6], [24] при условии, что функция Q принадлежит множеству R_γ действительных положительных измеримых на (0, 1) функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1 Q^\gamma(x)dx = 1, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \ \gamma \neq 0. \tag{11}$$

Из вариационного принципа следует, что

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y \in C_0^\infty(0,1)} \frac{\int_0^1 y'^2 dx}{\int_0^1 Q(x) y^2 dx}.$$

Оценивались значения

$$m_\gamma = \inf_{Q \in R_\gamma} \lambda_1(Q), \qquad M_\gamma = \sup_{Q \in R_\gamma} \lambda_1(Q).$$

Точные оценки снизу наименьшего собственного значения задачи (9) – (11) при $\gamma = 1$ были получены также и И. М. Рапопортом [18].

Среди экстремальных задач на собственные значения с интегральным условием на потенциал для уравнений второго порядка выделим задачу на нахождение оценок $\lambda_1(P, Q)$ задачи

$$y'' - Q(x)y + \lambda P(x)y = 0, \ x \in (0,1),$$

$$y(0) = y(1) = 0,$$

где Q и P – такие измеримые неотрицательные функции, что выполняются условия

$$\int_0^1 Q^\gamma(x)dx = 1 \quad \text{и} \quad \int_0^1 P^\alpha(x)dx < \infty, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \ \gamma \neq 0.$$

Одним из первых эту задачу поставил A. Ramm [30]. Его формулировка задачи дана в случае $Q(x) \equiv 1$ и $\alpha = 1$. В этом частном случае задача была решена G. Talenti [31] и M. Essen [25]. В общем случае данная задача была решена Ю. В. Егоровым [23] и S. Karaa [23], [27].

В. А. Винокуровым и В. А. Садовничим [4] рассматривалась задача

$$y'' + (\lambda - Q(x))y = 0, \ x \in (0,\pi), \quad y(0) = y(\pi) = 0, \tag{12}$$

где Q – вещественная интегрируемая по Лебегу на $(0,\pi)$ функция.

Для произвольной функции $Q \in L_1(0,\pi)$ n–ое собственное значение обозначалось $\lambda = \lambda_n(Q)$, для $Q \equiv 0$ n–ое собственное значение, равное n^2, обозначалось $\lambda_{n,0}$:

$$\lambda_n(Q) = n^2 = \lambda_{n,0}.$$

Исследовался вопрос: как сильно можно изменить (увеличить или уменьшить) собственное значение, если Q меняется в пределах некоторого множества

$$U_p[t] \equiv \{Q \in L_p(0,\pi),\ \|Q\|_p \leqslant t\},\ \ t \geqslant 0,\ \ p \in [1,+\infty].$$

Рассматривались следующие величины:

$$\overline{\lambda}_{n,p}(t) = \sup_{Q\in U_p[t]} \lambda_n(Q), \qquad \underline{\lambda}_{n,p}(t) = \inf_{Q\in U_p[t]} \lambda_n(Q),$$

соответственно точная верхняя и точная нижняя грани собственного значения на множестве $U_p[t]$;

$$v_{n,p}(t) = \overline{\lambda}_{n,p}(t) - \lambda_{n,0}, \qquad w_{n,p}(t) = \lambda_{n,0} - \underline{\lambda}_{n,p}(t),$$

соответственно верхний сдвиг и нижний сдвиг собственного значения на множестве $U_p[t]$.

В работе [4] приводятся оценки снизу и сверху собственных значений задачи (12) при $p \geqslant 1$ и результат о достижимости оценок при $p > 1$. Отметим, что случай $p < 1$ в работе [4] не рассматривался.

Для сдвига $v_{n,1}(t)$ собственного значения в пространстве $L_1(0,\pi)$ приводится теорема, утверждающая, что для любых $n \in N$ и $t \in [0,+\infty)$ верно неравенство

$$v_{n,1}(t) \leqslant t + \frac{\lambda_{n,0}}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4t}{\lambda_{n,0}}} - 1\right).$$

Из данной теоремы следует, что для точной верхней грани первого собственного значения задачи (12), рассмотренной на отрезке $[0,1]$, справедлива оценка

$$M_1 \leqslant \frac{\pi^2}{2} + 1 + \frac{\pi}{2}\sqrt{\pi^2+4},$$

где M_1 – точная верхняя грань первого собственного значения задачи при $p = 1$ и $t = 1$. Достижимость данной оценки была доказана С. С. Ежак в работах [7], [8], [26].

С. С. Ежак [7], [8], [26] рассматривалась задача

$$y'' + \delta Q(x)y + \lambda y = 0,\ \ x \in (0,1)\,, \quad y(0) = y(1) = 0, \tag{13}$$

где $\delta = \pm 1$, Q принадлежит множеству A_γ неотрицательных ограниченных на $[0,1]$ функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1 Q^\gamma(x)dx = 1, \quad \gamma \in \mathbb{R},\ \ \gamma \neq 0. \tag{14}$$

Рассматривался функционал

$$R[Q,y] = \frac{\int_0^1 y'^2 dx - \delta \int_0^1 Q(x)y^2 dx}{\int_0^1 y^2 dx}.$$

Согласно вариационному принципу

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y \in H_0^1(0,1)} R[Q,y].$$

Оценивались значения

$$m_\gamma = \inf_{Q \in A_\gamma} \lambda_1(Q), \qquad M_\gamma = \sup_{Q \in A_\gamma} \lambda_1(Q).$$

Для $\delta = -1$ доказана следующая теорема.

Теорема (см. [8], с. 518). *Пусть $\delta = -1$. Если $\gamma > 1$, то*

$$m_\gamma = \pi^2, \quad M_\gamma = const < \infty,$$

причем существуют такие функции $u(x) \in H_0^1(0,1)$ и $Q(x) \in A_\gamma$, что

$$\inf_{y(x) \in H_0^1(0,1)} R[Q,y] = R[Q,u] = M_\gamma.$$

Если $\gamma = 1$, то

$$m_1 = \pi^2, \quad M_1 = \frac{\pi^2}{2} + 1 + \frac{\pi}{2}\sqrt{\pi^2 + 4},$$

причем существуют такие функции $u(x) \in H^1_0(0,1)$ *и* $Q(x) \in A_\gamma$, *что*

$$\inf_{y(x)\in H^1_0(0,1)} R[Q,y] = R[Q,u] = M_1.$$

Если $0 < \gamma < 1$, *то*

$$m_\gamma = \pi^2, \quad M_\gamma = \infty.$$

Если $\gamma < 0$, *то*

$$m_\gamma = const > \pi^2, \quad M_\gamma = \infty,$$

причем существуют такие функции $u(x) \in H^1_0(0,1)$ *и* $Q(x) \in A_\gamma$, *что*

$$\inf_{y(x)\in H^1_0(0,1)} R[Q,y] = R[Q,u] = M_\gamma.$$

К. З. Куралбаевой [12], [13] впервые рассматривалась задача

$$y'' + \lambda Q(x)y = 0, \ \ x \in (0,1)\,, \quad y(0) = y(1) = 0$$

при условии, что функция Q принадлежит множеству $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ действительных положительных измеримых на $(0,1)$ функций, удовлетворяющих весовому интегральному условию

$$\int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta Q^\gamma(x)dx = 1, \quad \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}, \ \ \gamma \neq 0, \tag{15}$$

при дополнительном условии

$$\int_0^1 x(1-x)Q(x)dx < \infty. \tag{16}$$

Автором [12] показано, что требование выполнения условия (16) существенно, поскольку существуют такие значения параметров α,β,γ, при которых вариационный принцип не выполняется только при выполнении условия (15), хотя в некоторых случаях это требование оказывается лишним, а именно, при $\gamma \geqslant 1$, $\alpha,\beta < 2\gamma - 1$ из того, что $Q(x)$ удовлетворяет (15), следует, что для $Q(x)$ выполнено (16). Однако введение условия (16) сужает множество значений параметров α,β,γ, при которых множество $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ непусто.

Вопрос об оценках первого собственного значения задачи с условиями Дирихле для уравнения

$$y'' - Q(x)y + \lambda y = 0, \;\; x \in (0,1)\,,$$

при условии, что потенциал имеет разные порядки особенностей внутри и на концах отрезка $[0,1]$, оставался открытым. При этом требовалось ввести такое функциональное пространство, чтобы получить оценки первого собственного значения при всех значениях параметров интегрального условия.

В диссертации рассматривается задача

$$y'' - Q(x)y + \lambda y = 0, \;\; x \in (0,1)\,, \tag{17}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{18}$$

при условии, что Q – действительная неотрицательная локально интегрируемая на интервале $(0,1)$ функция, для которой выполняется интегральное условие

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta Q^\gamma(x)dx = 1, \;\; \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R},\, \gamma \neq 0. \tag{19}$$

Множество всех таких функций Q обозначим через $T_{\alpha,\beta,\gamma}$.

Цель работы

Получить оценки для

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} = \inf_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q) \quad \text{и} \quad M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q)$$

при всех значениях параметров интегрального условия и доказать достижимость точных оценок.

Методы исследований

В диссертации используются методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, функционального анализа и спектральной теории дифференциальных операторов, в частности, вариационный метод нахождения первого собственного значения краевой задачи.

Задача Штурма–Лиувилля сводится к задаче нахождения экстремума некоторого функционала, уравнение Эйлера–Лагранжа для которого совпадает с уравнением Штурма–Лиувилля в классе функций, удовлетворяющих граничным условиям.

Научная новизна

Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Основные результаты состоят в следующем:

1. Для всех значений параметров α, β, γ интегрального условия получены оценки сверху и снизу первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с нулевыми граничными условиями и с весовым интегральным условием на потенциал.
2. При $\gamma > 1$ для всех значений параметров α, β интегрального условия получены точные оценки сверху первого собственного значения поставленной задачи и доказана их достижимость.
3. Для всех значений параметров α, β, γ интегрального условия получены точные оценки снизу первого собственного значения поставленной задачи.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертация носит теоретический характер и может представлять интерес для специалистов в области качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и спектральной теории дифференциальных операторов.

Апробация работы

Результаты работы обсуждались и докладывались на следующих научных семинарах:

- научный семинар по качественной теории дифференциальных уравнений кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством проф., д.ф.м.н. И.В. Асташовой, проф., д.ф.м.н. А.В. Боровских, проф., д.ф.м.н. Н.Х. Розова, проф., д.ф.м.н. И.Н. Сергеева (2012, 2014 гг.);

- научный семинар по проблемам механики сплошной среды Института проблем механики РАН под руководством проф., д.ф.м.н. Д.В. Георгиевского, проф., д.ф.м.н. С.В. Нестерова (2015 г.);

- межвузовский научный семинар по качественной теории дифференциальных уравнений МЭСИ, МГУ им. М.В. Ломоносова, МГТУ им. Н.Э. Баумана под руководством проф., д.ф.м.н. И.В. Асташовой, проф., д.ф.м.н. А.В. Филиновского, проф., к.ф.м.н. В.А. Никишкина (неоднократно, 2007–2015 гг.).

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- 14-ая Саратовская зимняя школа "Современные проблемы теории функций и их приложения", 2008 г.

- Международная миниконференция "Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения" Москва, МЭСИ, 2008, 2010, 2011, 2013, 2014 гг.

- Международная конференция "Дифференциальные уравнения и топология", Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2008 г.

- Международный Российско–Абхазский симпозиум "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики", Нальчик–Эльбрус, 2009 г.

- "Equadiff 12" – Международная конференция по дифференциальным уравнениям и их приложениям, Брно, Чехия, 2009 г.

- Международная конференция по дифференциальным и разностным уравнениям и их приложениям, Азорский университет, Понта Дельгада, Португалия, 2011 г.

- Международная конференция "Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования", Воронеж, 2011, 2012 гг.
- Всероссийская научная конференция с международным участием "Спектральная теория операторов и ее приложения", г. Архангельск, Институт математики и компьютерных наук САФУ имени М.В. Ломоносова, 2012 г.
- Международная научная конференция "Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования", Архангельск, САФУ, 2014 г.
- Всероссийская научная конференция "Понтрягинские чтения" в рамках Воронежской весенней математической школы "Современные методы теории краевых задач", Воронеж, 2013, 2014 гг.
- International Conference on Applied Mathematics and Scientific Computing, Sibenik, Croatia, 2013 г.
- Международная конференция по дифференциальным и разностным уравнениям и приложениям, Ясна, Словакия, 2014 г.
- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 2014 г.
- European Advanced Studies Conference 2014, Symposium on Differential and Difference Equations 2014, Homburg/Saar, Germany, 2014.

Публикации автора

Результаты диссертации опубликованы в **25** работах, **3** из которых опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК, в том числе **7** статей, **14** тезисов докладов, **1** глава в монографии. Их список приведен в конце диссертации. Работ в соавторстве нет.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего **57** наименований, включая работы автора. Объем диссертации составляет **93** страницы. Диссертация содержит **6** рисунков и **6** таблиц.

Краткое изложение содержания работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в данной диссертационной работе, приводится краткий обзор работ по данной проблеме, формулируется цель исследования, приводятся основные результаты исследований.

В **первой главе** диссертации приводится постановка задачи, определяется, какая функция называется решением задачи, какая функция называется обобщенным решением рассматриваемой задачи.

Для получения оценок для $m_{\alpha,\beta,\gamma}$ и $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ вводится следующее функциональное пространство. Для произвольной функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ через H_Q обозначается замыкание множества $C_0^\infty(0,1)$ по норме

$$\|y\|_{H_Q} = \left(\int_0^1 y'^2 dx + \int_0^1 Q(x) y^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В первой главе через Γ_1 обозначается множество таких функций y из H_Q, что

$$\int_0^1 y^2 dx = 1.$$

Доказывается, что

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y \in H_Q \setminus \{0\}} R[Q, y] = \inf_{y \in \Gamma_1} F[Q, y],$$

где

$$R[Q, y] = \frac{\int_0^1 y'^2 dx + \int_0^1 Q(x) y^2 dx}{\int_0^1 y^2 dx}, \quad F[Q, y] = \int_0^1 y'^2 dx + \int_0^1 Q(x) y^2 dx.$$

Результатом первой главы являются следующие теоремы:

Теорема 1.1. *Пусть* $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ *и* $m = \inf_{y \in \Gamma_1} F[Q, y]$. *Тогда существует такая функция* $y \in \Gamma_1$, *что* $F[Q, y] = m$.

Теорема 1.2. *Пусть функция y удовлетворяет условиям теоремы 1.1. Тогда y является решением уравнения*

$$-y'' + Q(x)y - \lambda y = 0,$$

где $\lambda = m$ – минимальное собственное значение задачи (17), (18).

Во **второй главе** диссертации получены оценки для $m_{\alpha,\beta,\gamma}$. Результатом **первого параграфа** второй главы является

Теорема 2.1. *Для $m_{\alpha,\beta,\gamma}$ имеют место следующие оценки.*

1. *Если $\gamma > 0$, то $m_{\alpha,\beta,\gamma} = \pi^2$.*
2. *Если $\gamma < 0$, то $\pi^2 \leqslant m_{\alpha,\beta,\gamma} < \infty$, причем*

   1) *если $\gamma < 0$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, то справедливо неравенство*

   $$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \min\Big\{\pi^2 + 1, \Big(1 + 4(\alpha - 2\gamma + 1)^{\frac{1}{\gamma}}\Big)\pi^2, \Big(1 + 4(\beta - 2\gamma + 1)^{\frac{1}{\gamma}}\Big)\pi^2\Big\};$$

   2) *если $\gamma < 0$, $2\gamma - 1 < \alpha < 0 \leqslant \beta$, то справедливо неравенство*

   $$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \left(1 + 4(\alpha - 2\gamma + 1)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\pi^2;$$

   3) *если $\gamma < 0$, $2\gamma - 1 < \beta < 0 \leqslant \alpha$, то справедливо неравенство*

   $$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \left(1 + 4(\beta - 2\gamma + 1)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\pi^2;$$

   4) *если $\gamma \leqslant \alpha, \beta < 0$ или $2\gamma - 1 < \beta < \gamma \leqslant \alpha < 0$ или $2\gamma - 1 < \alpha < \gamma \leqslant \beta < 0$, то справедливо неравенство*

   $$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \left(1 + \theta^{\frac{1}{\gamma}} \cdot 2^{\frac{\theta + 4\gamma - 2}{\gamma}}\right)\pi^2,$$

   где $\theta = \min\{\alpha, \beta\} - 2\gamma + 1$;

   5) *если $\gamma < 0$ и $2\gamma - 1 < \alpha, \beta < \gamma$, то справедливо неравенство*

   $$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \min\left\{\left(1 + \theta^{\frac{1}{\gamma}} \cdot 2^{\frac{\theta + 4\gamma - 2}{\gamma}}\right)\pi^2, R\left[\frac{1}{y_1^2}, y_1\right]\right\},$$

   где $y_1(x) = x^{\frac{\alpha}{2\gamma}}(1 - x)^{\frac{\beta}{2\gamma}}$ и $\theta = \min\{\alpha, \beta\} - 2\gamma + 1$;

6) если $\gamma < 0$ и $\alpha \leqslant 2\gamma - 1$, то

а) при $\beta \geqslant \gamma$ справедливо неравенство $m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant R[Q_{\alpha,\beta,\gamma}, y_\theta]$,

б) при $\beta < \gamma$ справедливо неравенство

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \min\left\{ R[Q_{\alpha,\beta,\gamma}, y_\theta], R\left[\frac{1}{y_1^2}, y_1\right]\right\},$$

где

$$y_1(x) = x^{\frac{\alpha}{2\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{2\gamma}},$$

$$Q_{\alpha,\beta,\gamma}(x) = A\, x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}} x^{\frac{A^\gamma - 1}{\gamma}},$$

$$y_\theta(x) = \begin{cases} x^\theta, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}; \\ (1-x)^\theta, & \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1, \end{cases}$$

и θ – некоторое действительное число, при некотором $A > 0$ удовлетворяющее неравенству $\theta > \frac{\alpha - |\beta| - \gamma - A^\gamma + 1}{2\gamma}$;

7) если $\gamma < 0$ и $\beta \leqslant 2\gamma - 1$, то имеют место результаты пункта 6, где α и β меняются местами и $Q_{\alpha,\beta,\gamma}(x) = A\, x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}(1-x)^{\frac{A^\gamma - 1}{\gamma}}$.

Замечание. Отметим, что если рассмотреть при $\gamma > 0$ обобщенное решение задачи (17) – (19) с потенциалом $Q_*(x) = x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}\delta(x-1)$ (или с потенциалом $Q_*(x) = x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}\delta(x)$) в виде δ – функции с носителем в точке 1 (0), то

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} = \pi^2 = \lambda_1(Q_*).$$

Результаты теоремы 2.1 представлены с помощью рисунков 1, 2, 3 и таблиц 1, 2, 3.

В **третьей главе** получены оценки для $M_{\alpha,\beta,\gamma}$. Результатом **первого параграфа** третьей главы является

Теорема 3.1. *Для $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ имеют место следующие оценки.*

1. Если $\gamma < 0$ или $0 < \gamma < 1$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty$.

2. Если $\gamma \geqslant 1$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} < \infty$, причем

1) если $\gamma > 1$ и $0 < \alpha,\ \beta \leqslant 2\gamma - 1$, то справедливо неравенство

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \left(1 + 2^{\frac{3\gamma-2}{\gamma}}\left(\frac{2\gamma-1}{\gamma}\right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}}\right)\pi^2;$$

2) если $\gamma > 1$ и $\beta \leqslant 0 < \alpha \leqslant 2\gamma - 1$ или $\alpha \leqslant 0 < \beta \leqslant 2\gamma - 1$, то справедливо неравенство

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \left(1 + \left(\frac{2\gamma-1}{\gamma}\right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}}\right)\pi^2;$$

3) если $\gamma > 1$ и $\alpha, \beta \leqslant 0$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant 2\pi^2$;

4) если $\gamma \geqslant 1$ и $\alpha, \beta > \gamma$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant R\left[\frac{1}{y_1^2}, y_1\right]$, где

$$y_1(x) = x^{\frac{\alpha}{2\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{2\gamma}};$$

5) если $\gamma \geqslant 1$, то

а) при $\beta \leqslant \gamma < \alpha$ и $y_2(x) = x^{\frac{\alpha}{2\gamma}}\sin\pi(1-x)$ справедливо неравенство

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \frac{\int_0^1 {y_2'}^2 dx + \pi^2\left(\frac{\gamma-1}{3\gamma-\beta-1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\int_0^1 y_2^2 dx} \quad \text{при} \quad \gamma > 1,$$

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \frac{\int_0^1 {y_2'}^2 dx + \pi^2}{\int_0^1 y_2^2 dx} \quad \text{при} \quad \gamma = 1;$$

б) при $\alpha \leqslant \gamma < \beta$ имеют место результаты пункта 5. а), где в формулах для $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ вместо функции y_2 стоит функция

$$y_3(x) = (1-x)^{\frac{\beta}{2\gamma}}\sin\pi x;$$

6) если $\gamma \geqslant 1$, то

а) при $\alpha > \gamma$, $\beta \leqslant 0$ и $y_2(x) = x^{\frac{\alpha}{2\gamma}}\sin\pi(1-x)$ справедливо неравенство

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant R\left[\frac{1}{y_2^2}, y_2\right];$$

б) при $\beta > \gamma$, $\alpha \leqslant 0$ имеет место результат пункта 6. а), где в формуле для $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ вместо функции y_2 стоит функция

$$y_3(x) = (1-x)^{\frac{\beta}{2\gamma}} \sin \pi x;$$

7) если $\gamma = 1 \geqslant \alpha > 0 \geqslant \beta$ или $\gamma = 1 \geqslant \beta > 0 \geqslant \alpha$, то

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant 2\pi^2;$$

8) если $\gamma = 1 \geqslant \alpha,\ \beta > 0$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant 3\pi^2$;

9) если $\gamma = 1,\ \alpha, \beta \leqslant 0$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \frac{5}{4}\pi^2$.

Результаты теоремы 3.1 представлены с помощью рисунков 4, 5, 6 и таблиц 4, 5, 6.

Во **втором параграфе второй главы** получены точные оценки $m_{\alpha,\beta,\gamma}$ при $\gamma < 0$ (при $\gamma > 0$ в теореме 2.1 доказано, что $m_{\alpha,\beta,\gamma} = \pi^2$).

Во **втором параграфе третьей главы** получены точные оценки $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ при $\gamma > 1$ (при $\gamma < 0$ и при $0 < \gamma < 1$ в теореме 3.1 доказано, что $M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty$), доказывается их достижимость.

В случае $\gamma = 1$ достижимость точных оценок $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ доказана А. А. Владимировым [5]. Достижимость точной оценки $M_{0,0,1}$ доказана С. С. Ежак [7], [8], [26].

Для получения точных оценок для $m_{\alpha,\beta,\gamma}$ при $\gamma < 0$ и точных оценок для $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ при $\gamma > 1$ рассматривается функционал

$$G[y] = \frac{\int_0^1 y'^2 dx + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} |y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\int_0^1 y^2\, dx}$$

и вводится новое пространство $B_{\alpha,\beta,\gamma}$ функций из $H_0^1(0,1)$ с конечной нормой

$$\|y\|_{B_{\alpha,\beta,\gamma}} = \left(\int_0^1 y'^2 dx + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} |y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $\Gamma_2 = \{y \mid y \in B_{\alpha,\beta,\gamma}, \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx = 1\}$,

$$m = \inf_{y \in B_{\alpha,\beta,\gamma} \setminus \{0\}} G[y].$$

Результатом второго параграфа второй главы являются следующие теоремы.

Теорема 2.2. *Пусть $\gamma < 0$; тогда существует такая неотрицательная на интервале $(0,1)$ функция $u \in \Gamma_2$, что $G[u] = m$, причем при $\gamma < -1$ функция u является слабым решением уравнения*

$$u'' + mu = x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}\, u^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}.$$

Теорема 2.3. *Пусть $\gamma < 0$ и функция u удовлетворяет условиям теоремы 2.2. Тогда существует такая последовательность функций $Q_n(x) \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$, что $R[Q_n, u] \to G[u] = m$ при $n \to \infty$, и $m_{\alpha,\beta,\gamma} = m$.*

Результатом второго параграфа третьей главы является

Теорема 3.2. *Пусть $\gamma > 1$; тогда существуют такая функция $Q_* \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и такая положительная на $(0,1)$ функция $u \in H_{Q_*}$, что $R[Q_*, u] = G[u] = m$, и $M_{\alpha,\beta,\gamma} = m$, при этом функция u удовлетворяет уравнению*

$$u'' + mu = x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}\, u^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

и условию

$$\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}\, u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\, dx = 1.$$

Замечание. При $\gamma > 1$ справедливо неравенство $M_{\alpha,\beta,\gamma} > \pi^2$.

В заключение автор выражает глубокую признательность научному руководителю И. В. Асташовой за постановку задачи, руководство и постоянное внимание к работе. Автор благодарен А. В. Филиновскому за обсуждение результатов работы и полезные советы.

Список обозначений

1. $AC[0,1]$ – пространство функций, абсолютно непрерывных на отрезке $[0,1]$.
2. $C_0^\infty(0,1)$ – пространство бесконечно дифференцируемых на интервале $(0,1)$ функций с компактными носителями.
3. ${W_1}^1(0,1)$ – пространство функций, принадлежащих пространству $L_1(0,1)$, имеющих обобщенную производную первого порядка, принадлежащую пространству $L_1(0,1)$, с конечной нормой
$$\|y\|_{{W_1}^1(0,1)} = \int_0^1 |y'|dx + \int_0^1 |y|dx.$$
4. $H_0^1(0,1)$ – пространство функций, определенных на $[0,1]$, удовлетворяющих нулевым граничным условиям и имеющих обобщенную производную первого порядка, с конечной нормой
$$\|y\|_{H_0^1(0,1)} = \left(\int_0^1 {y'}^2 dx + \int_0^1 y^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$
5. $H_0^2(0,1)$ – пространство функций, определенных на $[0,1]$, удовлетворяющих граничным условиям
$$y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0$$
и имеющих обобщенные производные первого и второго порядков, с конечной нормой
$$\|y\|_{H_0^2(0,1)} = \left(\int_0^1 {y''}^2 dx + \int_0^1 {y'}^2 dx + \int_0^1 y^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

6. $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ – множество всех действительных неотрицательных локально интегрируемых на интервале $(0,1)$ функций Q, для которых выполняется интегральное условие

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta Q^\gamma(x)dx = 1, \;\; \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}, \;\; \gamma \neq 0.$$

7. H_Q – замыкание множества $C_0^\infty(0,1)$ по норме

$$\|y\|_{H_Q} = \left(\int_0^1 {y'}^2 dx + \int_0^1 Q(x)y^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

где Q – произвольная функция из множества $T_{\alpha,\beta,\gamma}$.

8. $B_{\alpha,\beta,\gamma}$ – пространство функций из $H_0^1(0,1)$ с конечной нормой

$$\|y\|_{B_{\alpha,\beta,\gamma}} = \left(\int_0^1 {y'}^2 dx + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Глава 1.

Вариационная постановка задачи

Рассматривается задача

$$y'' - Q(x)y + \lambda y = 0, \quad x \in (0,1)\,, \tag{1.1}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{1.2}$$

при условии, что Q – действительная неотрицательная локально интегрируемая на интервале $(0,1)$ функция, для которой выполняется интегральное условие

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta Q^\gamma(x)dx = 1, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\, \gamma \neq 0. \tag{1.3}$$

Множество всех таких функций Q обозначим через $T_{\alpha,\beta,\gamma}$.

Под *решением* задачи (1.1), (1.2) понимается функция y, абсолютно непрерывная на $[0,1]$, удовлетворяющая условиям (1.2), имеющая абсолютно непрерывную производную на любом отрезке, содержащемся в интервале $(0,1)$, и удовлетворяющая уравнению (1.1) почти всюду на интервале $(0,1)$.

Для любой функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ функция $y \in H_0^1(0,1)$ называется *обобщенным решением* задачи (1.1), (1.2), если для любой функции $\psi \in C_0^\infty(0,1)$ выполняется равенство

$$\int_0^1 (y'\psi' + Q(x)y\psi)dx = \lambda \int_0^1 y\psi dx.$$

Изучается зависимость первого собственного значения λ_1 задачи (1.1) – (1.3) от потенциала Q при различных значениях параметров $\alpha, \beta, \gamma, \;\; \gamma \neq 0$.

Пусть Γ_1 – множество таких функций y из H_Q, что

$$\int_0^1 y^2 dx = 1.$$

Рассмотрим функционалы

$$R[Q,y] = \frac{\int_0^1 y'^2 dx + \int_0^1 Q(x) y^2 dx}{\int_0^1 y^2 dx}, \quad F[Q,y] = \int_0^1 y'^2 dx + \int_0^1 Q(x) y^2 dx.$$

Заметим, что множества значений R и F ограничены снизу. Покажем, что первое собственное значение $\lambda_1(Q)$ задачи (1.1), (1.2) определяется равенствами

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y \in H_Q \setminus \{0\}} R[Q,y] = \inf_{y \in \Gamma_1} F[Q,y].$$

Докажем для этого две теоремы.

Теорема 1.1. *Пусть $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и $m = \inf\limits_{y \in \Gamma_1} F[Q,y]$. Тогда существует такая функция $y \in \Gamma_1$, что $F[Q,y] = m$.*

Доказательство теоремы 1.1

Для любых функций $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и $y \in \Gamma_1$ имеем

$$F[Q,y] = \int_0^1 y'^2 dx + \int_0^1 Q(x) y^2 dx = \|y\|^2_{H_Q}.$$

Для любой функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ пусть $\{y_k\}$ – минимизирующая последовательность функционала $F[Q,y]$ в Γ_1. Тогда для всех достаточно больших значений k

$$F[Q,y_k] = \|y_k\|^2_{H_Q} \leqslant m + 1.$$

Поскольку $\{y_k\}$ – ограниченная последовательность в сепарабельном гильбертовом пространстве H_Q, она содержит подпоследовательность $\{z_k\}$, которая слабо сходится в пространстве H_Q к функции y, и $\|y\|^2_{H_Q} \leqslant m + 1$.

Докажем, что пространство H_Q компактно вкладывается в пространство $C[0,1]$. Сначала установим ограниченность соответствующего оператора вложения.

Заметим, что неравенство

$$\|u\|_{C[0,1]} \leqslant \|u'\|_{L_1(0,1)} + \|u\|_{L_1(0,1)} \tag{1.4}$$

выполняется для любой функции $u \in {W_1}^1(0,1)$ (см. [17], с. 18).

Поскольку $u \in AC[0,1]$, в силу леммы 4.4. (см. [17], с. 21) функция u принадлежит пространству ${W_1}^1(0,1)$, и на $[0,1]$ для нее выполняется неравенство (1.4).

Если $u \in AC[0,1]$ и $u(0) = u(1) = 0$, то

$$\|u\|_{L_1(0,1)} = \int_0^1 |u|dx = \int_0^1 \left|\int_0^x u'dx\right| dx \leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 |u'|dx\right) dx = \\ = \int_0^1 |u'|dx = \|u'\|_{L_1(0,1)}.$$

Таким образом,

$$\|u\|_{L_1(0,1)} \leqslant \|u'\|_{L_1(0,1)}. \tag{1.5}$$

В силу неравенств (1.4), (1.5) и в силу неравенства Гёльдера

$$\|u\|_{C[0,1]} \leqslant \|u'\|_{L_1(0,1)} + \|u\|_{L_1(0,1)} \leqslant 2\|u'\|_{L_1(0,1)} \leqslant \\ \leqslant 2\|u'\|_{L_2(0,1)} \leqslant 2\|u\|_{H_Q}. \tag{1.6}$$

Ограниченность оператора вложения доказана.

Докажем теперь компактность оператора вложения. Пусть $M \in H_Q$ – ограниченное множество, то есть существует такое действительное число R, что $\|u\|_{H_Q} \leqslant R$ для всех $u \in M$. Необходимо доказать предкомпактность M в $C[0,1]$. По теореме Арцела – Асколи для этого достаточно доказать, что множество M равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Множество M называется равномерно ограниченным, если существует такое действительное число R_1, что $|u(x)| \leqslant R_1$ для всех $u \in M$ и $x \in [0,1]$. В силу неравенств (1.6) имеем $|u(x)| \leqslant \|u\|_{C[0,1]} \leqslant 2R = R_1$ для всех $u \in M$ и $x \in [0,1]$.

Теперь докажем, что множество M равностепенно непрерывно, то есть для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для любой функции $u \in M$ и для любых $x, y \in (0,1)$ таких, что $|x-y| < \delta$, имеем $|u(x) - u(y)| < \varepsilon$. По формуле Ньютона–Лейбница получаем: если $|x-y| < \delta = \left(\varepsilon R^{-1}\right)^2$, то

$$|u(x) - u(y)| \leqslant \left| \int_x^y |u'(\xi)| d\xi \right| \leqslant |x-y|^{\frac{1}{2}} \|u'\|_{L_2(0,1)} \leqslant |x-y|^{\frac{1}{2}} R < \varepsilon$$

для всех $u \in M$.

Пространство H_Q компактно вкладывается в пространство $C[0,1]$. Следовательно, существует сходящаяся в $C[0,1]$ подпоследовательность $\{u_k\}$ последовательности $\{z_k\}$. Поскольку $C[0,1]$ вкладывается в $L_p(0,1)$, где $p \geqslant 1$, последовательность $\{u_k\}$ сходится в пространстве $L_2(0,1)$ к функции $y \in L_2(0,1)$, и

$$\int_0^1 y^2 dx = 1. \tag{1.7}$$

Докажем, что последовательность $\{u_k\}$ сходится в H_Q. Для этого достаточно доказать, что последовательность $\{u_k\}$ фундаментальна в H_Q. Поскольку для любых функций $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и $y \in \Gamma_1$ имеем

$$\|y\|^2_{H_Q} = F[Q, y],$$

достаточно доказать, что числовая последовательность $\{F[Q, y_k]\}$ фундаментальна.

Поскольку функционал F квадратичный, имеет место тождество

$$F\left[Q, \frac{y_k - y_l}{2}\right] + F\left[Q, \frac{y_k + y_l}{2}\right] = \frac{1}{2} F[Q, y_k] + \frac{1}{2} F[Q, y_l].$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и k и l так велики, что для u_k, u_l из последовательности $\{u_k\}$ имеем

$$F[Q, u_k] \leqslant m + \varepsilon, \quad F[Q, u_l] \leqslant m + \varepsilon \quad \text{и} \quad \int_0^1 \left(\frac{u_k - u_l}{2}\right)^2 dx \leqslant \varepsilon^2.$$

Тогда

$$\int_0^1 \left(\frac{u_k + u_l}{2}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(u_l + \frac{u_k - u_l}{2}\right)^2 dx \geqslant$$

$$\geqslant (1-\varepsilon) \int_0^1 u_l^2 dx - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \left(\frac{u_k - u_l}{2}\right)^2 dx \geqslant (1-\varepsilon) - \varepsilon = 1 - 2\varepsilon.$$

Следовательно, $F[Q, \frac{u_k+u_l}{2}] \geqslant m(1-2\varepsilon)$ и

$$F\left[Q, \frac{u_k - u_l}{2}\right] \leqslant m + \varepsilon - m(1-2\varepsilon) = \varepsilon(1+2m).$$

Это означает, что последовательность $\{u_k\}$ сходится в H_Q. Поскольку она слабо сходится в H_Q к y, то предельная функция этой последовательности в H_Q совпадает с y. В силу равенства (1.7) функция y принадлежит Γ_1. Тогда, принимая во внимание, что функционал F непрерывен в H_Q, получаем $F[Q,y] = m$.

Теорема 1.1 доказана.

Теорема 1.2. *Пусть функция y удовлетворяет условиям теоремы 1.1. Тогда y является решением уравнения*

$$-y'' + Q(x)y - \lambda y = 0,$$

где $\lambda = m$ – минимальное собственное значение задачи (1.1), (1.2).

Доказательство теоремы 1.2

Отметим, что

$$m = \inf_{y\in\Gamma_1} F[Q,y] = \inf_{y\in H_Q\setminus\{0\}} R[Q,y].$$

Пусть u – элемент H_Q. Рассмотрим две функции переменной $t \in \mathbb{R}$

$$g(t) = \int_0^1 \left((y'+tu')^2 + Q(x)(y+tu)^2\right) dx, \quad h(t) = \int_0^1 (y+tu)^2 dx.$$

Если $h(0) = 1$, то $g(t) \geqslant g(0) = m$, то есть функция g принимает минимальное значение в нуле при условии $h(0) = 1$. Следовательно, $g'(0) + \lambda_1 h'(0) = 0$, где λ_1 – некоторое действительное число. Пусть $\lambda = -\lambda_1$. Это означает, что для всех $u \in H_Q$ имеет место равенство $\int_0^1 (y'u' + Q(x)yu)dx = \lambda \int_0^1 yu dx$. В частности, если $u = y$, то мы получаем $\lambda = m$. Значит, $\int_0^1 (y'u' + Q(x)yu - myu)dx = 0$.

Это равенство имеет место для любой функции $u \in C_0^\infty(0,1)$. Из этого следует, что существует такая обобщенная производная функции y', что

$$-y'' + Q(x)y - my = 0. \tag{1.8}$$

Поскольку Q – локально интегрируемая на интервале $(0,1)$ функция, она является интегрируемой на любом отрезке $[\rho, 1-\rho]$, где $0 < \rho < \frac{1}{2}$. Тогда в силу следствия 2.6.1 из теоремы 2.6.1 (см. [16], с. 41) функция y непрерывно дифференцируема на любом отрезке $[\rho, 1-\rho]$, где $0 < \rho < \frac{1}{2}$, и почти всюду на нем имеет классическую производную второго порядка

$$y'' = Q(x)y - my.$$

При этом y' абсолютно непрерывна на отрезке $[\rho, 1-\rho]$.

Более того, $y(0) = y(1) = 0$ (выполнение граничных условий следует из принадлежности функции y пространству H_Q). Поскольку ρ может быть произвольно малым числом, функция y является абсолютно непрерывной на отрезке $[0,1]$.

Таким образом, почти всюду на отрезке $[\rho, 1-\rho]$ обобщенная производная второго порядка функции y является классической производной второго порядка функции y, и равенство (1.8) имеет место почти всюду на интервале $(0,1)$. Следовательно, y является решением задачи (1.1), (1.2) с собственным значением $\lambda = m$.

Для любого решения z задачи (1.1), (1.2) имеем:

$$\int_0^1 \left(z'^2 + Q(x)z^2\right) dx = \lambda \int_0^1 z^2 dx.$$

Тогда, в силу того что $m = \inf\limits_{y \in H_Q \setminus \{0\}} R[Q,y]$, мы получаем неравенство $\lambda \geqslant m$, из которого следует, что m – минимальное собственное значение задачи (1.1), (1.2).

Теорема 1.2 доказана.

В диссертации приводятся оценки наименьшего собственного значения задачи (1.1) – (1.3) при различных значениях α, β и γ, $\gamma \neq 0$.

Глава 2.

Оценки первого собственного значения снизу

Получим некоторые оценки для

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} = \inf_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q)$$

при различных значениях параметров интегрального условия.

2.1. Предварительные оценки

Теорема 2.1. *Для $m_{\alpha,\beta,\gamma}$ имеют место следующие оценки.*

1. Если $\gamma > 0$, то $m_{\alpha,\beta,\gamma} = \pi^2$.

2. Если $\gamma < 0$, то $\pi^2 \leqslant m_{\alpha,\beta,\gamma} < \infty$, причем

1) если $\gamma < 0$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, то справедливо неравенство

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \min\left\{\pi^2 + 1, \left(1 + 4(\alpha - 2\gamma + 1)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\pi^2, \left(1 + 4(\beta - 2\gamma + 1)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\pi^2\right\};$$

2) если $\gamma < 0$, $2\gamma - 1 < \alpha < 0 \leqslant \beta$, то справедливо неравенство

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \left(1 + 4(\alpha - 2\gamma + 1)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\pi^2;$$

3) если $\gamma < 0$, $2\gamma - 1 < \beta < 0 \leqslant \alpha$, то справедливо неравенство

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \left(1 + 4(\beta - 2\gamma + 1)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\pi^2;$$

4) если $\gamma \leqslant \alpha, \beta < 0$ *или* $2\gamma - 1 < \beta < \gamma \leqslant \alpha < 0$ *или* $2\gamma - 1 < \alpha < \gamma \leqslant \beta < 0$, *то справедливо неравенство*

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \left(1 + \theta^{\frac{1}{\gamma}} \cdot 2^{\frac{\theta+4\gamma-2}{\gamma}}\right) \pi^2,$$

где $\theta = \min\{\alpha, \beta\} - 2\gamma + 1$*;*

5) если $\gamma < 0$ *и* $2\gamma - 1 < \alpha, \beta < \gamma$, *то справедливо неравенство*

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \min\left\{\left(1 + \theta^{\frac{1}{\gamma}} \cdot 2^{\frac{\theta+4\gamma-2}{\gamma}}\right) \pi^2, R\left[\frac{1}{y_1^2}, y_1\right]\right\},$$

где $y_1(x) = x^{\frac{\alpha}{2\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{2\gamma}}$ *и* $\theta = \min\{\alpha, \beta\} - 2\gamma + 1$*;*

6) если $\gamma < 0$ *и* $\alpha \leqslant 2\gamma - 1$, *то*

а) при $\beta \geqslant \gamma$ *справедливо неравенство* $m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant R[Q_{\alpha,\beta,\gamma}, y_\theta]$,

б) при $\beta < \gamma$ *справедливо неравенство*

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \min\left\{R[Q_{\alpha,\beta,\gamma}, y_\theta], R\left[\frac{1}{y_1^2}, y_1\right]\right\},$$

где

$$y_1(x) = x^{\frac{\alpha}{2\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{2\gamma}},$$

$$Q_{\alpha,\beta,\gamma}(x) = A\, x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}} x^{\frac{A^\gamma - 1}{\gamma}},$$

$$y_\theta(x) = \begin{cases} x^\theta, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}; \\ (1-x)^\theta, & \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1, \end{cases}$$

и θ *– некоторое действительное число, при некотором* $A > 0$ *удовлетворяющее неравенству* $\theta > \frac{\alpha - |\beta| - \gamma - A^\gamma + 1}{2\gamma}$*;*

7) если $\gamma < 0$ *и* $\beta \leqslant 2\gamma - 1$, *то имеют место результаты пункта 6, где* α *и* β *меняются местами и* $Q_{\alpha,\beta,\gamma}(x) = A\, x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}(1-x)^{\frac{A^\gamma - 1}{\gamma}}$.

Доказательство теоремы 2.1

Отметим, что в силу неравенства Фридрихса для любых α, β, γ, $\gamma \neq 0$, и для любой функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ выполняются следующие соотношения:

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y\in H_Q\setminus\{0\}} \frac{\int_0^1 \left(y'^2 + Q(x)y^2\right)dx}{\int_0^1 y^2\,dx} \geqslant \inf_{y\in H_Q\setminus\{0\}} \frac{\int_0^1 y'^2 dx}{\int_0^1 y^2\,dx} \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{y\in H_0^1(0,1)\setminus\{0\}} \frac{\int_0^1 y'^2 dx}{\int_0^1 y^2\,dx} = \pi^2.$$

Поэтому для любых $\alpha,\beta,\gamma,\ \gamma\neq 0$, выполняется неравенство

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} \geqslant \pi^2.$$

1. Пусть $\gamma > 0$, α, β – любые действительные числа. Докажем, что $m_{\alpha,\beta,\gamma} = \pi^2$.

Для $0<\theta<1$ рассмотрим функции

$$Q_{\theta,\alpha,\beta,\gamma}(x) = \begin{cases} 0, \quad 0<x<\theta\,; \\ (1-\theta)^{-\frac{1}{\gamma}}\,x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}\,(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}, \quad \theta\leqslant x<1, \end{cases}$$

$$y_\theta(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{\pi x}{\theta}\,, \quad 0\leqslant x<\theta\,; \\ 0, \quad \theta\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_0^1 Q_{\theta,\alpha,\beta,\gamma}(x)y_\theta^2 dx = \int_0^\theta 0\cdot\sin^2\frac{\pi x}{\theta}\,dx +$$

$$+\int_\theta^1 (1-\theta)^{-\frac{1}{\gamma}}x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}\cdot 0\,dx = 0$$

и для функции $Q_{\theta,\alpha,\beta,\gamma}$ выполняется интегральное условие:

$$\int_\theta^1 \left((1-\theta)^{-\frac{1}{\gamma}}x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}\right)^\gamma x^\alpha(1-x)^\beta dx = \int_\theta^1 (1-\theta)^{-1}\,dx = 1.$$

С учетом равенств

$$\int_0^1 y_\theta^2(x)dx = \frac{1}{2}\,\theta, \quad \int_0^1 {y'_\theta}^2(x)dx = \frac{\pi^2}{2\theta}$$

получаем

$$\lim_{\theta\to 1-0} R[Q_{\theta,\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}, y_\theta] = \lim_{\theta\to 1-0} \frac{\dfrac{\pi^2}{2\theta}}{\dfrac{1}{2}\theta} = \pi^2.$$

Тогда

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} = \inf_{Q\in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q) \leqslant \pi^2.$$

С другой стороны, поскольку $m_{\alpha,\beta,\gamma} \geqslant \pi^2$, получаем $m_{\alpha,\beta,\gamma} = \pi^2$.

Замечание 2.1. Отметим, что если рассмотреть обобщенное решение задачи (1.1) – (1.3) с потенциалом $Q_*(x) = x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}\delta(x-1)$ (или с потенциалом $Q_*(x) = x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}\delta(x)$) в виде δ – функции с носителем в точке 1 (0), то

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} = \pi^2 = \lambda_1(Q_*).$$

2. Докажем теорему при условии $\gamma < 0$. Докажем сначала следующие леммы.

Лемма 2.1. *Пусть* $\gamma < 0$, $\alpha,\beta \geqslant 0$. *Тогда*

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \pi^2 + 1.$$

Доказательство.

Рассмотрим функцию $Q_{\alpha,\beta,\gamma}(x) = x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}$. В силу неравенства Фридрихса

$$\int_0^1 Q_{\alpha,\beta,\gamma}(x) y^2 dx = \int_0^1 x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}} y^2 dx \leqslant \int_0^1 y^2 dx \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 y'^2 dx.$$

Поскольку $H_{Q_{\alpha,\beta,\gamma}} = H_0^1(0,1)$, имеем

$$\inf_{y\in H_{Q_{\alpha,\beta,\gamma}}\setminus\{0\}} \frac{\int_0^1 y'^2 dx}{\int_0^1 y^2\, dx} = \inf_{y\in H_0^1(0,1)\setminus\{0\}} \frac{\int_0^1 y'^2 dx}{\int_0^1 y^2\, dx} = \pi^2$$

и

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \pi^2 + 1.$$

Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Если $\gamma < 0$, $2\gamma - 1 < \alpha < 0 \leqslant \beta$, то*

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \left(1 + 4(\alpha - 2\gamma + 1)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\pi^2.$$

Если $\gamma < 0$, $2\gamma - 1 < \beta < 0 \leqslant \alpha$, то

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \left(1 + 4(\beta - 2\gamma + 1)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\pi^2.$$

Доказательство.

Рассмотрим функцию $Q_\theta(x) = Cx^{-\frac{\alpha+1}{\gamma}+\frac{\theta}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}$, где θ – такое положительное число, что $\alpha \geqslant 2\gamma - 1 + \theta$. Константа C выбирается так, чтобы выполнялось равенство $\int_0^1 Q_\theta(x)^\gamma x^\alpha (1-x)^\beta dx = 1$, то есть $C = \theta^{\frac{1}{\gamma}}$.

Поскольку $\alpha \geqslant 2\gamma - 1 + \theta$, в силу неравенства Харди имеем:

$$\int_0^1 Q_\theta(x) y^2 dx = C\int_0^1 \frac{(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}} y^2}{x^{\frac{\alpha+1-\theta}{\gamma}}} dx \leqslant C\int_0^1 x^{-2} y^2 dx \leqslant 4C\int_0^1 y'^2 dx \tag{2.1}$$

и

$$\frac{\int_0^1 \left(y'^2 + Q_\theta(x) y^2\right) dx}{\int_0^1 y^2\, dx} \leqslant \frac{(1+4C)\int_0^1 y'^2 dx}{\int_0^1 y^2\, dx}.$$

Заметим, что в силу неравенства (2.1) пространства H_{Q_θ} и $H_0^1(0,1)$ совпадают, и

$$\inf_{y \in H_{Q_\theta}\setminus\{0\}} \frac{\int_0^1 y'^2 dx}{\int_0^1 y^2\, dx} = \inf_{y \in H_0^1(0,1)\setminus\{0\}} \frac{\int_0^1 y'^2 dx}{\int_0^1 y^2\, dx} = \pi^2.$$

Выберем значение θ таким образом, чтобы константа $1 + 4C$ была наименьшей. Поскольку $C = \theta^{\frac{1}{\gamma}}$ и $\theta \leqslant \alpha - 2\gamma + 1$, в качестве θ возьмем число $\alpha - 2\gamma + 1$. Тогда имеем

$$\frac{\int_0^1 \left(y'^2 + Q_\theta(x) y^2\right) dx}{\int_0^1 y^2\, dx} \leqslant \frac{\left(1 + 4(\alpha - 2\gamma + 1)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\int_0^1 y'^2 dx}{\int_0^1 y^2\, dx},$$

и

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \left(1 + 4(\alpha - 2\gamma + 1)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\pi^2. \tag{2.2}$$

Отметим, что случай $\gamma < 0$, $2\gamma - 1 < \beta < 0 \leqslant \alpha$ симметричен случаю $\gamma < 0$, $2\gamma - 1 < \alpha < 0 \leqslant \beta$. Для получения соответствующей оценки нужно сделать замену переменных $x = 1 - t$ и поменять местами в приведенных рассуждениях α и β.

Таким образом, если $\gamma < 0$, $2\gamma - 1 < \beta < 0 \leqslant \alpha$, то

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \left(1 + 4(\beta - 2\gamma + 1)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\pi^2.$$

Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. *Если* $\gamma < 0$, $2\gamma - 1 < \alpha < 0$, $2\gamma - 1 < \beta < 0$, *то*

$$\pi^2 \leqslant m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \left(1 + \theta^{\frac{1}{\gamma}} \cdot 2^{\frac{\theta + 4\gamma - 2}{\gamma}}\right)\pi^2,$$

где $\theta = \min\{\alpha, \beta\} - 2\gamma + 1$.

Доказательство.

Рассмотрим функцию

$$Q_{\theta,\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}(x) = \begin{cases} Cx^{-\frac{\alpha+1}{\gamma} + \frac{\theta}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}, & 0 < x \leqslant \dfrac{1}{2}; \\ Cx^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta+1}{\gamma} + \frac{\theta}{\gamma}}, & \dfrac{1}{2} < x < 1, \end{cases}$$

где θ – такое положительное число, что $\alpha \geqslant 2\gamma - 1 + \theta$, $\beta \geqslant 2\gamma - 1 + \theta$, то есть $\theta = \min\{\alpha, \beta\} - 2\gamma + 1$. Константа C выбирается так, чтобы выполнялось интегральное условие $\int_0^1 Q^{\gamma}_{\theta,\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}(x)x^{\alpha}(1-x)^{\beta}dx = 1$, то есть $C = (\theta \cdot 2^{\theta-1})^{\frac{1}{\gamma}}$.

Тогда

$$\int_0^1 Q_{\theta,\,\alpha,\,\beta,\,\gamma}(x)y^2dx =$$

$$= C\int_0^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{\alpha+1}{\gamma} + \frac{\theta}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}y^2dx + C\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{-\frac{\beta+1}{\gamma} + \frac{\theta}{\gamma}}x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}y^2dx \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}} \cdot C\int_0^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{\alpha+1}{\gamma} + \frac{\theta}{\gamma}}y^2dx + 2^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}} \cdot C\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{-\frac{\beta+1}{\gamma} + \frac{\theta}{\gamma}}y^2dx \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}} \cdot C\left(\int_0^{\frac{1}{2}} x^{-2}y^2dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{-2}y^2dx\right) \leqslant$$

$$\leqslant 4C \cdot 2^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}}\int_0^1 y'^2dx = 2^{\frac{4\gamma-1}{\gamma}} \cdot C\int_0^1 y'^2dx$$

и

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \left(1 + 2^{\frac{4\gamma-1}{\gamma}} \cdot C\right) \pi^2.$$

Таким образом, если $\gamma < 0,\ 2\gamma - 1 < \alpha, \beta < 0$, то

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \left(1 + \theta^{\frac{1}{\gamma}} \cdot 2^{\frac{\theta+4\gamma-2}{\gamma}}\right) \pi^2,$$

где $\theta = \min\{\alpha, \beta\} - 2\gamma + 1$.

Лемма 2.3 доказана.

Лемма 2.4. *Если $\gamma < 0,\ \alpha \leqslant 2\gamma - 1$, то*

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant R[Q_{A,\alpha,\beta,\gamma}, y_\theta],$$

где

$$Q_{A,\alpha,\beta,\gamma}(x) = A\, x^{-\frac{\alpha}{\gamma}} (1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}} x^{\frac{A^\gamma - 1}{\gamma}}$$

и

$$y_\theta(x) = \begin{cases} x^\theta, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}; \\ (1-x)^\theta, & \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1, \end{cases}$$

θ – некоторое действительное число, удовлетворяющее неравенству $\theta > \frac{\alpha - |\beta| - \gamma - A^\gamma + 1}{2\gamma}$, $A > 0$.

Доказательство.

А) Пусть сначала $\gamma < 0,\ \alpha \leqslant 2\gamma - 1,\ \beta \geqslant 0$.

Рассмотрим функции

$$Q_{A,\alpha,\beta,\gamma}(x) = A\, x^{-\frac{\alpha}{\gamma}} (1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}} x^{\frac{A^\gamma - 1}{\gamma}}$$

и

$$y_\theta(x) = \begin{cases} x^\theta, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}; \\ (1-x)^\theta, & \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1, \end{cases}$$

где θ – такое число, что $2\theta - \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{A^\gamma - 1}{\gamma} > -1$ и $2\theta > 1,\ A > 0$.

Отметим, что поскольку $\gamma < 0,\ \alpha \leqslant 2\gamma - 1$, то $\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{A^\gamma - 1}{\gamma} - 1 > 1$, и в качестве θ можно взять любое действительное число, удовлетворяющее неравенству $2\theta > \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{A^\gamma - 1}{\gamma} - 1$.

Обозначим через C_1, C_2 и C_3 следующие интегралы:

$$\int_0^1 {y_\theta}'^2 dx = C_1, \quad \int_0^1 {y_\theta}^2 dx = C_2, \quad \int_0^1 x^{-\frac{\alpha}{\gamma}} x^{\frac{A^\gamma - 1}{\gamma}} {y_\theta}^2 dx = C_3.$$

Тогда

$$\inf_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \inf_{y \in H_Q \setminus \{0\}} \frac{\int_0^1 \left(y'^2 + Q(x) y^2 \right) dx}{\int_0^1 y^2 dx} \leqslant \frac{\int_0^1 \left({y'_\theta}^2 + Q_{A,\alpha,\beta,\gamma}(x) y_\theta^2 \right) dx}{\int_0^1 y_\theta^2 dx} =$$

$$= \frac{\int_0^1 \left({y'_\theta}^2 + A\, x^{-\frac{\alpha}{\gamma}} (1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}} x^{\frac{A^\gamma - 1}{\gamma}} y_\theta^2 \right) dx}{\int_0^1 y_\theta^2 dx} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\int_0^1 \left({y'_\theta}^2 + A\, x^{-\frac{\alpha}{\gamma}} x^{\frac{A^\gamma - 1}{\gamma}} y_\theta^2 \right) dx}{\int_0^1 y_\theta^2 dx} = \frac{C_1 + A\, C_3}{C_2}$$

и

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} = \inf_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \inf_{y \in H_Q \setminus \{0\}} \frac{\int_0^1 \left(y'^2 + Q(x) y^2 \right) dx}{\int_0^1 y^2(x) dx} \leqslant R[Q_{A,\alpha,\beta,\gamma}, y_\theta].$$

B) Рассмотрим теперь случай $\gamma < 0$, $\alpha \leqslant 2\gamma - 1$, $\beta < 0$.

Рассмотрим функции

$$Q_{A,\alpha,\beta,\gamma}(x) = A\, x^{-\frac{\alpha}{\gamma}} (1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}} x^{\frac{A^\gamma - 1}{\gamma}}$$

и

$$y_\theta(x) = \begin{cases} x^\theta, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}; \\ (1-x)^\theta, & \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1, \end{cases}$$

где θ – такое действительное число, что $2\theta > \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} - \frac{A^\gamma - 1}{\gamma} - 1$, $2\theta > 1$ и $2\theta > \frac{\beta}{\gamma} - 1$, $A > 0$. Учитывая условия на α, β, γ, получаем, что в качестве θ можно взять любое действительное число, удовлетворяющее неравенству $2\theta > \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} - \frac{A^\gamma - 1}{\gamma} - 1$.

Введем обозначения для следующих интегралов:

$$\int_0^1 {y_\theta}'^2 dx = C_1, \quad \int_0^1 {y_\theta}^2 dx = C_2, \quad \int_0^1 Q_{A,\alpha,\beta,\gamma}(x) {y_\theta}^2 dx = AC_3.$$

Тогда

$$\inf_{Q\in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \inf_{y\in H_Q\setminus\{0\}} \frac{\int_0^1 \left(y'^2+Q(x)y^2\right)dx}{\int_0^1 y^2dx} \leqslant \frac{\int_0^1 \left({y'_\theta}^2+Q_{A,\alpha,\beta,\gamma}(x)y_\theta^2\right)dx}{\int_0^1 y_1^2dx} = \\ = \frac{C_1+AC_3}{C_2} = R[Q_{A,\alpha,\beta,\gamma}, y_\theta]$$

и

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} = \inf_{Q\in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \inf_{y\in H_Q\setminus\{0\}} \frac{\int_0^1 \left(y'^2+Q(x)y^2\right)dx}{\int_0^1 y^2dx} \leqslant R[Q_{A,\alpha,\beta,\gamma}, y_\theta].$$

Объединяя результаты случаев A) и B), получим: если $\gamma < 0$, $\alpha \leqslant 2\gamma-1$ и β – любое действительное число, то $m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant R[Q_{\alpha,\beta,\gamma}, y_\theta]$, где

$$Q_{\alpha,\beta,\gamma}(x) = A\,x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}x^{\frac{A^\gamma-1}{\gamma}}$$

и

$$y_\theta(x) = \begin{cases} x^\theta, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2}; \\ (1-x)^\theta, & \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1, \end{cases}$$

и θ – некоторое действительное число, удовлетворяющее неравенству $\theta > \frac{\alpha-|\beta|-\gamma-A^\gamma+1}{2\gamma}$, $A > 0$.

Случай $\gamma < 0$, $\beta \leqslant 2\gamma-1$ симметричен случаю $\gamma < 0$, $\alpha \leqslant 2\gamma-1$. Таким образом, если $\gamma < 0$, $\beta \leqslant 2\gamma-1$ и α – любое действительное число, то $m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant R[Q_{\alpha,\beta,\gamma}, y_\theta]$, где

$$Q_{\alpha,\beta,\gamma}(x) = A\,x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}(1-x)^{\frac{A^\gamma-1}{\gamma}}$$

и

$$y_\theta(x) = \begin{cases} x^\theta, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2}; \\ (1-x)^\theta, & \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1, \end{cases}$$

и θ – некоторое действительное число, удовлетворяющее неравенству $\theta > \frac{\beta-|\alpha|-\gamma-A^\gamma+1}{2\gamma}$, $A > 0$.

Лемма 2.4 доказана.

Лемма 2.5. *Если* $\gamma < 0$ *и* $\alpha, \beta < \gamma$, *то* $m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant R\left[\frac{1}{y_1^2}, y_1\right]$, *где* $y_1(x) = x^{\frac{\alpha}{2\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{2\gamma}}$.

Доказательство.

Рассмотрим функцию

$$y_1(x) = x^{\frac{\alpha}{2\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{2\gamma}}$$

и функцию

$$Q_1(x) = \frac{1}{y_1^2} = x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}},$$

удовлетворяющую интегральному условию (1.3).

Заметим, что интеграл $\int_0^1 {y_1'}^2 dx$ сходится при α, $\beta < \gamma$.

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y \in H_Q \setminus \{0\}} \frac{\int_0^1 \left({y'}^2 + Q(x)y^2\right) dx}{\int_0^1 y^2 dx} \leqslant R[Q_1, y_1]$$

и $m_{\alpha,\beta,\gamma} = \inf\limits_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q) \leqslant R[Q_1, y_1]$.

Лемма 2.5 доказана.

Результат 2.1) теоремы получается на основании лемм 2.1 и 2.2.

Результат 2.2) теоремы получается на основании леммы 2.2.

Результат 2.3) теоремы получается на основании леммы 2.2.

Результат 2.4) теоремы получается на основании леммы 2.3.

Результат 2.5) теоремы получается на основании лемм 2.3 и 2.5.

Результат 2.6) теоремы при $\gamma < 0$, $\alpha \leqslant 2\gamma - 1$ и $\beta \geqslant \gamma$ получается на основании леммы 2.4, при $\gamma < 0$, $\alpha \leqslant 2\gamma - 1$ и $\beta < \gamma$ – на основании лемм 2.4 и 2.5.

Результат 2.7) теоремы при $\gamma < 0$, $\beta \leqslant 2\gamma - 1$ и $\alpha \geqslant \gamma$ получается на основании леммы 2.4, при $\gamma < 0$, $\beta \leqslant 2\gamma - 1$ и $\alpha < \gamma$ – на основании лемм 2.4 и 2.5.

Теорема 2.1 доказана.

Замечание 2.2. Заметим, что в случае $\gamma < 0$ при неограниченном увеличении параметров α или β $m_{\alpha,\beta,\gamma}$ приближается к π^2.

Замечание 2.3. Результат, полученный в теореме 2.1 при $\gamma > 0$, $\alpha = \beta = 0$, совпадает с результатом работ [7], [8], [26], при $\delta = -1$ (см., например, [8], теор. 1.1, с. 516).

Результаты теоремы 2.1 представлены с помощью рисунков 1, 2, 3 и таблиц 1, 2, 3. В последнем столбце таблицы либо указано значение $m_{\alpha,\beta,\gamma}$, либо номер неравенства для $m_{\alpha,\beta,\gamma}$ в теореме 2.1.

При $\beta < -1$

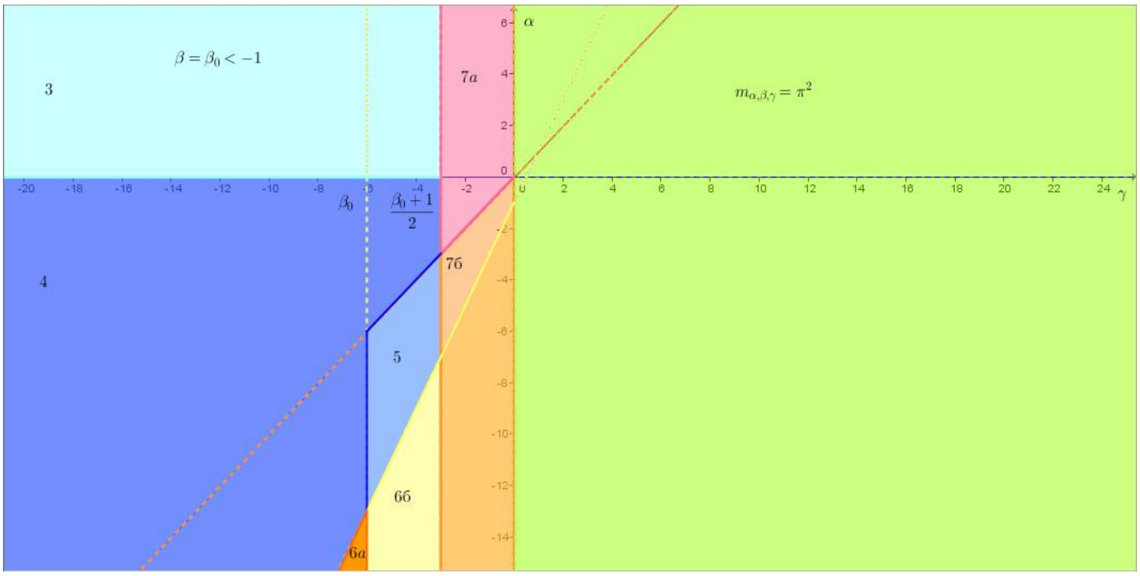

Рисунок 1

γ	α	$m_{\alpha,\beta,\gamma}$
$\gamma \leqslant \beta$	$\alpha \leqslant 2\gamma - 1$	6 *а*
	$2\gamma - 1 < \alpha < 0$	4
	$\alpha \geqslant 0$	3
$\beta < \gamma < \frac{\beta+1}{2}$	$\alpha \leqslant 2\gamma - 1$	6 *б*
	$2\gamma - 1 < \alpha < \gamma$	5
	$\gamma \leqslant \alpha < 0$	4
	$\alpha \geqslant 0$	3
$\frac{\beta+1}{2} \leqslant \gamma < 0$	$\alpha \leqslant 2\gamma - 1$	6 *б*, 7 *б*
	$2\gamma - 1 < \alpha < \gamma$	7 *б*
	$\alpha \geqslant \gamma$	7 *а*
$\gamma > 0$	$-\infty < \alpha < +\infty$	$m_{\alpha,\beta,\gamma} = \pi^2$

Таблица 1

При $-1 \leqslant \beta < 0$

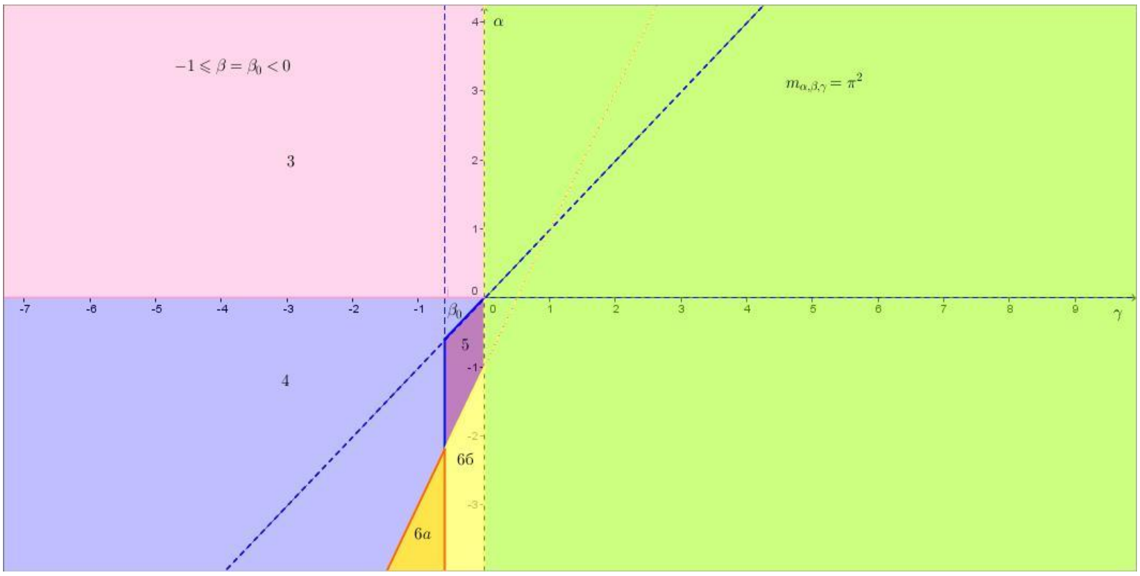

Рисунок 2

γ	α	$m_{\alpha,\beta,\gamma}$
$\gamma \leqslant \beta$	$\alpha \leqslant 2\gamma - 1$	6 *a*
	$2\gamma - 1 < \alpha < 0$	4
	$\alpha \geqslant 0$	3
$\beta < \gamma < 0$	$\alpha \leqslant 2\gamma - 1$	6 *б*
	$2\gamma - 1 < \alpha < \gamma$	5
	$\gamma \leqslant \alpha < 0$	4
	$\alpha \geqslant 0$	3
$\gamma > 0$	$-\infty < \alpha < +\infty$	$m_{\alpha,\beta,\gamma} = \pi^2$

Таблица 2

При $\beta \geqslant 0$

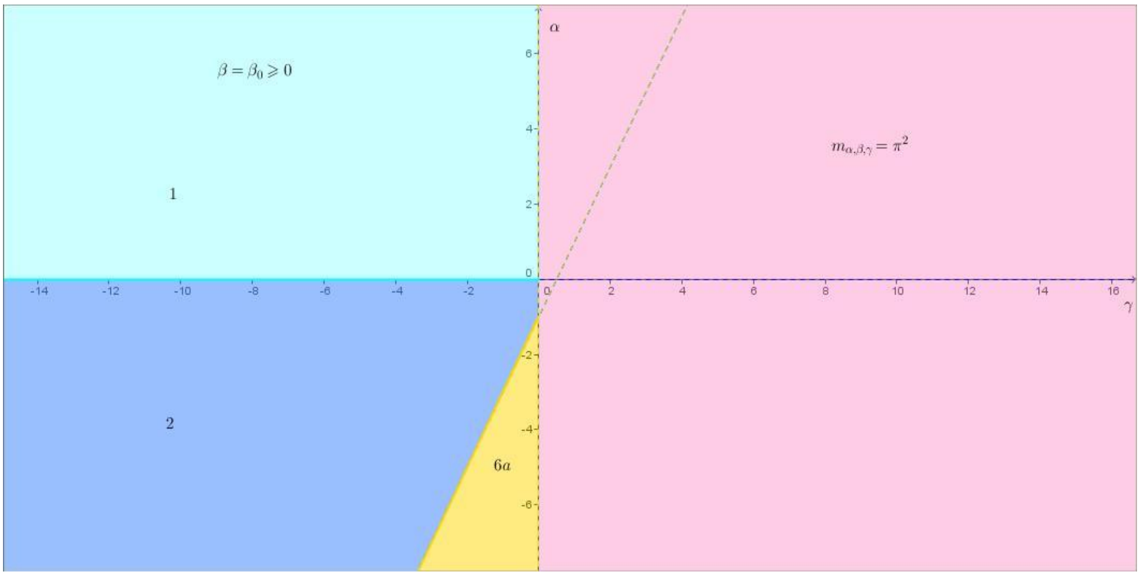

Рисунок 3

γ	α	$m_{\alpha,\beta,\gamma}$
$\gamma < 0$	$\alpha \leqslant 2\gamma - 1$	$6\ a$
	$2\gamma - 1 < \alpha < 0$	2
	$\alpha \geqslant 0$	1
$\gamma > 0$	$-\infty < \alpha < +\infty$	$m_{\alpha,\beta,\gamma} = \pi^2$

Таблица 3

2.2. Точные оценки

Приведем точные оценки для $m_{\alpha,\beta,\gamma}$ в случае $\gamma < 0$.

Рассмотрим пространство $B_{\alpha,\beta,\gamma}$ функций из $H_0^1(0,1)$ с конечной нормой

$$\|y\|_{B_{\alpha,\beta,\gamma}} = \left(\int_0^1 y'^2 dx + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.3)$$

Покажем, что определяемая формулой (2.3) норма задана корректно. Проверим выполнение всех аксиом нормы.

Докажем, что

$$\|y+z\|_{B_{\alpha,\beta,\gamma}} \leqslant \|y\|_{B_{\alpha,\beta,\gamma}} + \|z\|_{B_{\alpha,\beta,\gamma}} \tag{2.4}$$

или

$$\left(\int_0^1 (y'+z')^2 dx + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y+z|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^1 {y'}^2 dx + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left(\int_0^1 {z'}^2 dx + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|z|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $p = \frac{2\gamma}{\gamma-1}$.

В силу неравенства Минковского имеем

$$\left(\int_0^1 (y'+z')^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_0^1 {y'}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 {z'}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Кроме того, докажем, что

$$\left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y+z|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|z|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть p и q – сопряженные показатели.

$$\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y+z|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y+z|^{p-1}|y| dx + \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y+z|^{p-1}|z| dx.$$

Применив неравенство Гёльдера, получим

$$\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y+z|^{p-1}|y| dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y+z|^{q(p-1)} dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Поскольку $q(p-1)=p$, имеем

$$\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y+z|^p dx \leqslant \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y+z|^p dx\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|z|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

Разделив обе части полученного неравенства на

$$\left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y+z|^p dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

получим требуемое неравенство

$$\left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y+z|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \leqslant \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|z|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Возведем левую и правую части неравенства (2.4) в квадрат. Оценим левую часть полученного неравенства.

$$\int_0^1 (y'+z')^2 dx + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y+z|^p dx\right)^{\frac{2}{p}} \leqslant \leqslant \left(\left(\int_0^1 {y'}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 {z'}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 + + \left(\left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|z|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right)^2 = = \left(\int_0^1 {y'}^2 dx + 2\left(\int_0^1 {y'}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 {z'}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \int_0^1 {z'}^2 dx\right) + + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^p dx\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|z|^p dx\right)^{\frac{2}{p}} + + 2\left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|z|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Для доказательства неравенства (2.4) достаточно доказать, что

$$\left(\int_0^1 {y'}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 {z'}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|z|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_0^1 {y'}^2 dx + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\left(\int_0^1 {z'}^2 dx + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|z|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

что выполняется, поскольку для любых положительных чисел a, b, c, d имеет место неравенство:

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leqslant \sqrt{(a+c)(b+d)}.$$

Неравенство (2.4) доказано. Выполнение двух других аксиом нормы очевидно.

В силу неравенства Гёльдера для любой положительной функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и для любой функции $y \in H_Q$ имеет место неравенство

$$\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_0^1 Q^\gamma(x) x^\alpha (1-x)^\beta dx\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(\int_0^1 Q(x) y^2 dx\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Тогда

$$\int_0^1 Q(x) y^2 dx \geqslant \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \qquad (2.5)$$

В силу неравенства (2.5) имеем

$$H_Q \subset B_{\alpha,\beta,\gamma} \subset H_0^1(0,1).$$

Заметим, что в силу неравенства (2.5) при $\gamma < 0$, $\alpha, \beta > 2\gamma - 1$ пространства $B_{\alpha,\beta,\gamma}$ и $H_0^1(0,1)$ совпадают.

Пусть

$$G[y] = \frac{\int_0^1 y'^2 dx + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\int_0^1 y^2\,dx}.$$

Заметим, что $G[y] \geqslant 0$ для любого $y \in B_{\alpha,\beta,\gamma}$. Обозначим

$$m = \inf_{y \in B_{\alpha,\beta,\gamma}\setminus\{0\}} G[y]. \tag{2.6}$$

Для любой функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ в силу неравенства (2.5) имеем

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y \in H_Q\setminus\{0\}} R[Q,y] \geqslant \inf_{y \in H_Q\setminus\{0\}} G[y] \geqslant \inf_{y \in B_{\alpha,\beta,\gamma}\setminus\{0\}} G[y] = m.$$

Тогда

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} = \inf_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q) \geqslant \inf_{y \in B_{\alpha,\beta,\gamma}\setminus\{0\}} G[y] = m,$$

то есть $m_{\alpha,\beta,\gamma} \geqslant m$.

Для доказательства равенства $m_{\alpha,\beta,\gamma} = m$ докажем следующие две теоремы.

Рассмотрим множество

$$\Gamma_2 = \{y \mid y \in B_{\alpha,\beta,\gamma}, \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx = 1\}.$$

Теорема 2.2. *Пусть* $\gamma < 0$*; тогда существует такая неотрицательная на интервале* $(0,1)$ *функция* $u \in \Gamma_2$*, что* $G[u] = m$*, причем функция* u *при* $\gamma < -1$ *является слабым решением уравнения*

$$u'' + mu = x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}\,u^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}. \tag{2.7}$$

Теорема 2.3. *Пусть* $\gamma < 0$ *и функция* u *удовлетворяет условиям теоремы 2.2. Тогда существует такая последовательность функций* $Q_n(x) \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$*, что* $R[Q_n, u] \to G[u] = m$ *при* $n \to \infty$*, и* $m_{\alpha,\beta,\gamma} = m$*.*

Доказательство теоремы 2.2

Обозначим через

$$\Gamma_* = \{y \in B_{\alpha,\beta,\gamma} \mid \int_0^1 y^2 dx = 1\}.$$

Пусть

$$I[y] = \int_0^1 {y'}^2 dx + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} |y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Пусть $\{\tilde{y}_k\}$ – минимизирующая последовательность функционала $G[y]$ в $B_{\alpha,\beta,\gamma}$, то есть $G[\tilde{y}_k] \to m$ при $k \to \infty$.

Покажем, что последовательность $y_k = \frac{\tilde{y}_k}{C_k^{\frac{1}{2}}}$, где $C_k = \int_0^1 \tilde{y}_k^2 dx$, – минимизирующая последовательность функционала $I[y]$ в Γ_*, то есть $I[y_k] \to m$ при $k \to \infty$.

Действительно,

$$\int_0^1 y_k^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{\tilde{y}_k}{C_k^{\frac{1}{2}}} \right)^2 dx = \frac{\int_0^1 \tilde{y}_k^2 dx}{C_k} = \frac{C_k}{C_k} = 1$$

и

$$I[y_k] = G[y_k] = G\left[\frac{\tilde{y}_k}{C_k^{\frac{1}{2}}} \right] =$$

$$= \frac{\frac{1}{C_k} \int_0^1 {\tilde{y}_k}'^2 dx + \frac{1}{C_k} \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} |\tilde{y}_k|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\frac{1}{C_k} \int_0^1 \tilde{y}_k^2 dx} = G\left[\tilde{y}_k\right].$$

Тогда

$$m = \inf_{y \in B_{\alpha,\beta,\gamma} \setminus \{0\}} G[y] = \inf_{y \in \Gamma_*} I[y]. \tag{2.8}$$

Лемма 2.6. *Существует такая функция $u_* \in \Gamma_*$, что $I[u_*] = m$, где m определяется формулой (2.8).*

Доказательство леммы 2.6.

Поскольку $\{y_k\}$ – минимизирующая последовательность функционала $I[y]$ в Γ_* и $m = \inf\limits_{y\in\Gamma_*} I[y]$, то для всех достаточно больших значений k имеем $I[y_k] \leqslant m{+}1$. Так как $\|y_k\|^2_{B_{\alpha,\beta,\gamma}} = I[y_k]$, то последовательность $\{y_k\}$ ограничена в $B_{\alpha,\beta,\gamma}$. Рассмотрим эту последовательность в сепарабельном гильбертовом пространстве $H_0^1(0,1)$.

Поскольку она ограничена в $H_0^1(0,1)$, то она содержит подпоследовательность $\{z_k\}$, слабо сходящуюся в $H_0^1(0,1)$ к некоторой функции u_*, причем

$$\|u_*\|^2_{H_0^1(0,1)} \leqslant m+1.$$

Пространство $H_0^1(0,1)$ компактно вкладывается в пространство $C[0,1]$, следовательно, существует подпоследовательность $\{s_k\}$ последовательности $\{z_k\}$, сильно сходящаяся в $C[0,1]$.

Поскольку пространство $C[0,1]$ вкладывается в $L_2(0,1)$, то последовательность $\{s_k\}$ сильно сходится в $L_2(0,1)$ к функции u_*. Следовательно, для функционала $G[s_k]$ имеем

$$\int_0^1 s_k^2 dx \to \int_0^1 u_*^2 dx \quad \text{при } k\to\infty$$

и

$$\int_0^1 u_*^2 dx = 1. \tag{2.9}$$

Рассмотрим последовательность значений функционала I на функциях из последовательности $\{s_k\}$:

$$I[s_k] = \int_0^1 {s_k}'^2 dx + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|s_k|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Поскольку последовательность $\{s_k\}$ ограничена в $H_0^1(0,1)$, в силу определения нормы $\|s_k\|_{H_0^1(0,1)}$ последовательность $\{s_k'\}$ ограничена в $L_2(0,1)$. Тогда существует такая подпоследовательность $\{w_k\}$ последовательности $\{s_k\}$, что последовательность $\{w_k'\}$ слабо сходится к u_*' в $L_2(0,1)$.

Поскольку числовая последовательность $\{\int_0^1 {w_k}'^2 dx\}$ ограничена, то она имеет конечный нижний предел. Обозначим его через A. Тогда существует такая подпоследовательность $\{v_k\}$ последовательности $\{w_k\}$, что

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 {v_k'}^2 dx = \varliminf_{k\to\infty}\int_0^1 {w_k'}^2 dx = A.$$

Так как $\{v_k'\}$ слабо сходится к u_*' в $L_2(0,1)$, то

$$\|u_*'\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant \varliminf_{k\to\infty}\|v_k'\|^2_{L_2(0,1)} = \lim_{k\to\infty}\|v_k'\|^2_{L_2(0,1)} = A \quad (\text{см. [15], стр. 217}).$$

Таким образом,

$$\|u_*'\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant A. \tag{2.10}$$

Поскольку последовательность $\{I[y_k]\}$ имеет предел m, вторая последовательность

$$\left\{\left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|s_k|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right\}$$

имеет частичный предел $m-A$. Тогда существует такая подпоследовательность $\{t_k\}$ последовательности $\{v_k\}$, что для любого ε найдется такой номер K, что для всех $k\geqslant K$ выполняется неравенство

$$\left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|t_k|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} < m-A+\varepsilon.$$

Тогда

$$\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|t_k|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx < (m-A+\varepsilon)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Поскольку последовательность $\{t_k\}$ сильно сходится в $C[0,1]$ к функции u_*, последовательность $\{x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|t_k|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\}$ сходится почти всюду на $[0,1]$. Тогда по теореме Фату (см. [17], с. 5)

$$x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u_*|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \in L_1(0,1)$$

и

$$\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u_*|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx \leqslant (m-A+\varepsilon)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Возведем левую и правую части этого неравенства в степень $\frac{\gamma-1}{\gamma}$. Получим

$$\left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u_*|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \leqslant m-A+\varepsilon.$$

Поскольку ε может быть произвольно малым числом,

$$\left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u_*|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \leqslant m - A. \tag{2.11}$$

Учитывая неравенства (2.10) и (2.11), получаем

$$I[u_*] \leqslant m. \tag{2.12}$$

Поскольку $m = \inf\limits_{y \in \Gamma_*} I[y]$, то $I[u_*] = m$.

Из условий (2.9) и (2.12) следует принадлежность функции u_* множеству Γ_*.

Лемма 2.6 доказана.

Рассмотрим функцию $u = Cu_*$, где константа C выбирается так, чтобы функция u принадлежала Γ_2 и была неотрицательной на отрезке $[0, 1]$, то есть

$$C = \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u_*|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}.$$

Тогда $G[u] = G[u_*] = I[u_*] = m$.

Покажем, что при $\gamma < -1$ функция $u \in \Gamma_2$ является слабым решением уравнения (2.7) (см. [17], с. 32).

Зафиксируем аргумент u функционала $G[y]$, зафиксируем некоторую вариацию $z \in B_{\alpha,\beta,\gamma}$ аргумента u и рассмотрим семейство кривых $u+tz$, где t – произвольный параметр. На кривых $u+tz$ функционал $G[y]$ превращается в функцию параметра $t \in \mathbb{R}$:

$$g(t) = \frac{\int_0^1 (u'(x)+tz'(x))^2dx + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u(x)+tz(x)|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\int_0^1 (u(x)+tz(x))^2dx}.$$

Поскольку функционал $G[y]$ достигает экстремума при $y = u$ и функция $g(t)$ при $\gamma < -1$ дифференцируема в нуле, то $g'(0) = 0$. Таким образом,

$$\frac{\int_0^1 u'z'dx}{\int_0^1 u^2dx}+$$

$$+\frac{\left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\operatorname{sgn}u z dx}{\int_0^1 u^2dx}=$$

$$=\frac{\left(\int_0^1 u'^2dx+\left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)\int_0^1 uzdx}{(\int_0^1 u^2dx)^2}.$$

Поскольку $u\in\Gamma_2$ и $G[u]=m$, получаем

$$\frac{\int_0^1 u'z'dx+\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\operatorname{sgn}u z dx}{\int_0^1 u^2dx}=\frac{m\int_0^1 uzdx}{\int_0^1 u^2dx}$$

или

$$\int_0^1 u'z'dx+\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\operatorname{sgn}u z dx=m\int_0^1 uzdx. \qquad (2.13)$$

Покажем, что равенство (2.13) выполняется для любой функции $z\in B_{\alpha,\beta,\gamma}$.

В силу неравенства Гёльдера

$$\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\operatorname{sgn}u\, z\, dx\leqslant\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}|z|\,dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}\right)^{\frac{1}{r}}\left(x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}\right)^{\frac{1}{s}}|u|^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}|z|dx\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}\left(|u|^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\right)^r dx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|z|^s dx\right)^{\frac{1}{s}},$$

где $r=\frac{2\gamma}{\gamma+1}$, $s=\frac{2\gamma}{\gamma-1}$, то есть

$$\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\operatorname{sgn}u\, z\, dx\leqslant\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}|z|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}\left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|z|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}.$$

Полагая, что $z \in C_0^\infty(0,1)$, получаем, что функция u' имеет обобщенную производную, равную

$$u'' = x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\operatorname{sgn} u - mu.$$

Так как $G[y] = G[|y|]$, то можно считать, что последовательность $\{y_k\}$ неотрицательна, и $u \geqslant 0$.

Функция $y \in B_{\alpha,\beta,\gamma}$ называется *слабым решением* уравнения (2.7), если для любой функции $z \in C_0^\infty(0,1)$ выполняется равенство (2.13).

Таким образом, при $\gamma < -1$ функция $u \in \Gamma_2$ является слабым решением уравнения (2.7).

Теорема 2.2 доказана.

Доказательство теоремы 2.3

Рассмотрим последовательность функций

$$\tilde{u}_n(x) = \begin{cases} u(x), \quad u(x) \geqslant \dfrac{1}{n}, \quad x \in (0,1)\,; \\ v(x), \quad u(x) < \dfrac{1}{n}, \quad x \in \left(0, \dfrac{1}{n}\right) \cup \left(1-\dfrac{1}{n}, 1\right); \\ \dfrac{1}{n}, \quad u(x) < \dfrac{1}{n}, \quad x \in \left(\dfrac{1}{n}, 1-\dfrac{1}{n}\right), \end{cases}$$

где $n \geqslant 3$ и

$$v(x) = \begin{cases} x(1-x), \quad \text{если } \alpha,\, \beta > 2\gamma - 1\,; \\ x^{\frac{\alpha}{2\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{2\gamma}}, \quad \text{если } \alpha, \beta \leqslant 2\gamma - 1\,; \\ x(1-x)^{\frac{\beta}{2\gamma}}, \quad \text{если } \alpha > 2\gamma - 1,\, \beta \leqslant 2\gamma - 1\,; \\ x^{\frac{\alpha}{2\gamma}}(1-x), \quad \text{если } \alpha \leqslant 2\gamma - 1,\, \beta > 2\gamma - 1. \end{cases}$$

Пусть $u_n = C_n \tilde{u}_n$, где константы C_n таковы, что для любого $n \geqslant 3$ $u_n \in \Gamma_2$, то есть

$$C_n = \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}\,\tilde{u}_n^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}.$$

Рассмотрим последовательность положительных локально интегрируемых на интервале $(0,1)$ функций

$$Q_n(x) = x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u_n^{\frac{2}{\gamma-1}},$$

для каждой из которых

$$\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}{Q_n}^{\gamma}(x)dx = \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}x^{\frac{\alpha\gamma}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta\gamma}{1-\gamma}}{u_n}^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx =$$
$$= \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}{u_n}^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx = 1,$$

то есть $Q_n \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$.

Тогда для любого $n \geqslant 3$ функция u_n принадлежит пространству H_{Q_n}, поскольку

$$\int_0^1 Q_n(x)u_n^2dx = \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}{u_n}^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx = 1$$

и

$$\|u_n\|^2_{H_{Q_n}} = \int_0^1 \left({u_n'}^2 + Q_n(x)u_n^2\right)dx < +\infty.$$

Докажем, что

$$\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}{u_n}^{\frac{2}{\gamma-1}}u^2dx \to \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Применим теорему Лебега (см. [11], гл. V, теор. 6).

Для последовательности $\{x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}{u_n}^{\frac{2}{\gamma-1}}u^2\}$ имеем:

$$x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}{u_n}^{\frac{2}{\gamma-1}}u^2 \to x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

при $n \to +\infty$ почти всюду на $[0,1]$.

Докажем, что найдется такая константа A, что для любого $n \geqslant 3$

$$x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}{u_n}^{\frac{2}{\gamma-1}}u^2 \leqslant A\, x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}.$$

Пусть

$$X_n = \left\{x : x \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \cup \left(1-\frac{1}{n}, 1\right),\ u(x) < \frac{1}{n}\right\},$$

$$Y_n = \left\{x : x \in \left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right),\ u(x) < \frac{1}{n}\right\},$$

$$Z_n = \left\{x : x \in (0,1),\ u(x) \geqslant \frac{1}{n}\right\}.$$

Из условий $u_n = C_n \tilde{u}_n$ и $u_n \in \Gamma_2$ следует, что

$$C_n = \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} \, \tilde{u}_n^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx \right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} =$$

$$\left(\int_{X_n} w(x)dx + \int_{Y_n} n^{\frac{2\gamma}{1-\gamma}} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} dx + \int_{Z_n} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx \right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}},$$

где $w(x) = x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} v(x)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$.

Поскольку функция w суммируема, то по теореме об абсолютной непрерывности интеграла Лебега

$$\int_{X_n} w(x)dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Рассмотрим монотонно возрастающую последовательность интегралов

$$\int_{Z_n} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx.$$

Данная последовательность ограничена, поскольку для любого $n \geqslant 3$

$$\int_{Z_n} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx \leqslant \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx = 1.$$

Значит, по теореме Вейерштрасса данная последовательность имеет предел. Докажем, что этот предел равен 1. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_\varepsilon > 0$, что для любого множества $e \subset (0,1)$ из того, что $\mu(e) < \delta_\varepsilon$, следует, что выполняется неравенство

$$\int_e x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx < \varepsilon.$$

Заметим, что $(0,1) = \cup_n Z_n$ и $Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots$. Тогда для любого $\delta > 0$, и в частности для $\delta = \delta_\varepsilon$, найдется такой номер N, что для любого $n \geqslant N$ выполняется неравенство $\mu((0,1) \setminus Z_n) < \delta_\varepsilon$. Следовательно, для любого $n \geqslant N$ выполняется неравенство

$$\int_{(0,1)\setminus Z_n} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx < \varepsilon,$$

то есть
$$\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx - \int_{Z_n} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx < \varepsilon.$$

Тогда
$$1 = \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx < \varepsilon + \int_{Z_n} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx \leqslant \varepsilon + 1$$
и
$$1-\varepsilon < \int_{Z_n} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx \leqslant 1.$$
Но это означает, что
$$\lim_{n\to\infty}\int_{Z_n} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx = 1.$$
Поскольку
$$\lim_{n\to\infty}\int_{Y_n} n^{\frac{2\gamma}{1-\gamma}}x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}dx = 0,$$
получаем $\lim_{n\to\infty} C_n = 1$. Так как для любого $n \geqslant 3$ имеем $C_n > 0$, то $b = \inf_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1,2\}} C_n > 0$. Тогда получаем $A = b^{\frac{2}{\gamma-1}}$, так как для любого $n \geqslant 3$ выполняются соотношения:
$$u_n{}^{\frac{2}{\gamma-1}}u^2 = C_n^{\frac{2}{\gamma-1}}\,\tilde{u}_n^{\frac{2}{\gamma-1}}\,u^2 \leqslant b^{\frac{2}{\gamma-1}}\,u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}.$$
Поскольку
$$x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \in L_1(0,1),$$
то по теореме Лебега
$$\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u_n{}^{\frac{2}{\gamma-1}}u^2dx \to \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx = 1$$
при $n \to +\infty$ и, следовательно,
$$\lim_{n\to+\infty} R[x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u_n{}^{\frac{2}{\gamma-1}}, u] = G[u].$$

Тогда
$$\begin{aligned} m_{\alpha,\beta,\gamma} = \inf_{Q\in T_{\alpha,\beta,\gamma}}\inf_{y\in H_Q\setminus\{0\}} R[Q,y] \leqslant \\ \leqslant \lim_{n\to+\infty}\inf_{y\in H_{Q_n}\setminus\{0\}} R[x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u_n{}^{\frac{2}{\gamma-1}}, y] \leqslant \\ \leqslant \lim_{n\to+\infty} R[x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u_n{}^{\frac{2}{\gamma-1}}, u] = G[u] = m. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем $m_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant m$. Поскольку ранее было доказано неравенство $m_{\alpha,\beta,\gamma} \geqslant m$, получаем $m_{\alpha,\beta,\gamma} = m = G[u]$.

Теорема 2.3 доказана.

Глава 3.

Оценки первого собственного значения сверху

Получим некоторые оценки для

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q)$$

при различных значениях параметров интегрального условия и докажем достижимость точных оценок.

3.1. Предварительные оценки

Для получения оценок для $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ докажем следующую лемму.

Лемма 3.1. *При $\gamma > 1,\ \alpha, \beta \leqslant 2\gamma - 1$ пространства H_Q и $H_0^1(0,1)$ совпадают.*

Доказательство леммы 3.1.

Пусть $\gamma > 1,\ \alpha, \beta \leqslant 2\gamma - 1$.

В силу неравенства Гёльдера для любой функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и для любой функции $y \in H_Q$ имеет место неравенство

$$\int_0^1 Q(x) y^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_0^1 Q^\gamma(x) x^\alpha (1-x)^\beta dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} |y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Покажем, что при $\gamma > 1,\ \alpha, \beta \leqslant 2\gamma - 1$ интеграл

$$\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx \tag{3.1}$$

сходится и, следовательно, пространства H_Q и $H_0^1(0,1)$ совпадают.

Очевидно, что при любых $\gamma > 1,\ \alpha, \beta \leqslant 0$ интеграл (3.1) сходится. Покажем, что при $\gamma > 1,\ 0 < \alpha, \beta \leqslant 2\gamma - 1$ интеграл (3.1) тоже сходится.

В силу обобщенного неравенства Харди [1] имеем

$$\left(\int_0^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{2\gamma-1}{\gamma-1}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \leqslant \left(\frac{2\gamma-1}{\gamma}\right)^{\frac{2\gamma-1}{2\gamma}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} y'^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{2\gamma-1}{\gamma-1}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx \leqslant \left(\frac{2\gamma-1}{\gamma}\right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma-1}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} y'^2 dx\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Аналогично,

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx \leqslant \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{-\frac{2\gamma-1}{\gamma-1}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2\gamma-1}{\gamma}\right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma-1}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 y'^2 dx\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Тогда

$$\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx \leqslant$$

$$\leqslant C\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx + C\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx \leqslant$$

$$\leqslant C\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx + C\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx \leqslant$$

$$\leqslant 2C\left(\frac{2\gamma-1}{\gamma}\right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma-1}} \left(\int_0^1 y'^2 dx\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

где $C = 2^{\frac{2\gamma-1}{\gamma-1}}$, и при $\gamma > 1$, $0 < \alpha, \beta \leqslant 2\gamma - 1$ интеграл (3.1) сходится.

Таким образом,

$$\left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \leqslant 2^{\frac{3\gamma-2}{\gamma}}\left(\frac{2\gamma-1}{\gamma}\right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}}\int_0^1 {y'}^2 dx. \quad (3.2)$$

Если $\gamma > 1$, $\beta \leqslant 0 < \alpha \leqslant 2\gamma - 1$, то в силу неравенства Гёльдера и в силу обобщенного неравенства Харди имеем

$$\int_0^1 Q(x)y^2dx \leqslant \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^1 x^{-\frac{2\gamma-1}{\gamma-1}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \leqslant \left(\frac{2\gamma-1}{\gamma}\right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}}\int_0^1 {y'}^2 dx.$$

Таким образом,

$$\int_0^1 Q(x)y^2dx \leqslant \left(\frac{2\gamma-1}{\gamma}\right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}}\int_0^1 {y'}^2 dx. \quad (3.3)$$

Отметим, что случай $\gamma > 1$, $\alpha \leqslant 0 < \beta \leqslant 2\gamma - 1$ симметричен случаю $\gamma > 1$, $\beta \leqslant 0 < \alpha \leqslant 2\gamma - 1$.

Если же $\gamma > 1$, $\alpha, \beta \leqslant 0$, то в силу неравенства Гёльдера имеем

$$\int_0^1 Q(x)y^2dx \leqslant \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \leqslant \left(\int_0^1 |y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Докажем неравенство:

$$\left(\int_0^1 |y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\, dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \leqslant \int_0^1 {y'}^2 dx. \quad (3.4)$$

Пусть $p = \frac{\gamma}{\gamma-1}$. Тогда

$$|y(x)|^{2p} = \left(\left|\int_0^x y'(t)dt\right|\right)^{2p} \leqslant \left(\int_0^1 |y'(t)|dt\right)^{2p};$$

$$\int_0^1 |y(x)|^{2p}dx \leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 |y'(t)|dt\right)^{2p} dx = \left(\int_0^1 |y'(t)|dt\right)^{2p};$$

$$\left(\int_0^1 |y(t)|^{2p}dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_0^1 |y'(t)|dt\right)^2 \leqslant \int_0^1 y'^2(t)dt.$$

Таким образом, мы получаем

$$\int_0^1 Q(x)y^2dx \leqslant \int_0^1 {y'}^2dx. \tag{3.5}$$

Лемма 3.1 доказана.

Теорема 3.1. *Для $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ имеют место следующие оценки.*

1. Если $\gamma < 0$ или $0 < \gamma < 1$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty$.

2. Если $\gamma \geqslant 1$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} < \infty$, причем

1) если $\gamma > 1$ и $0 < \alpha, \beta \leqslant 2\gamma - 1$, то справедливо неравенство

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \left(1 + 2^{\frac{3\gamma-2}{\gamma}}\left(\frac{2\gamma-1}{\gamma}\right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}}\right)\pi^2;$$

2) если $\gamma > 1$ и $\beta \leqslant 0 < \alpha \leqslant 2\gamma - 1$ или $\alpha \leqslant 0 < \beta \leqslant 2\gamma - 1$, то справедливо неравенство

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \left(1 + \left(\frac{2\gamma-1}{\gamma}\right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}}\right)\pi^2;$$

3) если $\gamma > 1$ и $\alpha, \beta \leqslant 0$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant 2\pi^2$;

4) если $\gamma \geqslant 1$ и $\alpha, \beta > \gamma$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant R\left[\frac{1}{y_1^2}, y_1\right]$, где

$$y_1(x) = x^{\frac{\alpha}{2\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{2\gamma}};$$

5) если $\gamma \geqslant 1$, то

a) при $\beta \leqslant \gamma < \alpha$ и $y_2(x) = x^{\frac{\alpha}{2\gamma}}\sin\pi(1-x)$ справедливо неравенство

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \frac{\int_0^1 {y_2'}^2dx + \pi^2\left(\frac{\gamma-1}{3\gamma-\beta-1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\int_0^1 y_2^2dx} \quad \text{при} \quad \gamma > 1,$$

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \frac{\int_0^1 {y_2'}^2dx + \pi^2}{\int_0^1 y_2^2dx} \quad \text{при} \quad \gamma = 1;$$

б) при $\alpha \leqslant \gamma < \beta$ имеют место результаты пункта 5. а), где в формулах для $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ вместо функции y_2 стоит функция

$$y_3(x) = (1-x)^{\frac{\beta}{2\gamma}} \sin \pi x;$$

6) если $\gamma \geqslant 1$, то

а) при $\alpha > \gamma$, $\beta \leqslant 0$ и $y_2(x) = x^{\frac{\alpha}{2\gamma}} \sin \pi(1-x)$ справедливо неравенство

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant R\left[\frac{1}{y_2^2}, y_2\right];$$

б) при $\beta > \gamma$, $\alpha \leqslant 0$ имеет место результат пункта 6. а), где в формуле для $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ вместо функции y_2 стоит функция

$$y_3(x) = (1-x)^{\frac{\beta}{2\gamma}} \sin \pi x;$$

7) если $\gamma = 1 \geqslant \alpha > 0 \geqslant \beta$ или $\gamma = 1 \geqslant \beta > 0 \geqslant \alpha$, то

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant 2\pi^2;$$

8) если $\gamma = 1 \geqslant \alpha$, $\beta > 0$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant 3\pi^2$;

9) если $\gamma = 1$, $\alpha, \beta \leqslant 0$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \frac{5}{4}\pi^2$.

Доказательство теоремы 3.1

Докажем сначала пункт 1. теоремы.

1.1) Пусть $\gamma < 0$, $\alpha, \beta > 0$. Докажем, что $M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty$.

Пусть $\alpha \geqslant \beta$. Рассмотрим функцию

$$Q_{\varepsilon,\alpha,\beta,\gamma}(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\varepsilon^{2\alpha}(1-\varepsilon)^{\alpha}}{2\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\gamma}} x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}, & 0 < x < \varepsilon\,; \\ \left(\dfrac{\varepsilon^{2\alpha}(1-\varepsilon)^{\alpha}}{1-2\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\gamma}} x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}, & \varepsilon \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon; \\ \left(\dfrac{1-\varepsilon^{2\alpha}(1-\varepsilon)^{\alpha}}{2\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\gamma}} x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}, & 1-\varepsilon < x < 1, \end{cases}$$

где $0 < \varepsilon < 1$. На отрезке $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ функцию $Q_{\varepsilon,\alpha,\beta,\gamma}$ можно представить следующим образом:

$$\frac{\varepsilon^{\frac{\alpha}{\gamma}}}{(1-2\varepsilon)^{\frac{1}{\gamma}}} \cdot \frac{x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\alpha}{\gamma}}}{\varepsilon^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-\varepsilon)^{-\frac{\alpha}{\gamma}}}(1-x)^{\frac{\alpha-\beta}{\gamma}}.$$

На отрезке $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ в силу неравенства $x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \geqslant \varepsilon^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-\varepsilon)^{-\frac{\alpha}{\gamma}}$ имеем:

$$\frac{x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\alpha}{\gamma}}}{\varepsilon^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-\varepsilon)^{-\frac{\alpha}{\gamma}}} \geqslant 1.$$

Тогда

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} y^2 dx \leqslant \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\alpha}{\gamma}}}{\varepsilon^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-\varepsilon)^{-\frac{\alpha}{\gamma}}}(1-x)^{\frac{\alpha-\beta}{\gamma}} y^2 dx =$$
$$= \frac{\varepsilon^{-\frac{\alpha}{\gamma}}}{(1-2\varepsilon)^{-\frac{1}{\gamma}}} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\varepsilon^{\frac{\alpha}{\gamma}}}{(1-2\varepsilon)^{\frac{1}{\gamma}}} \cdot \frac{x^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}}{\varepsilon^{-\frac{\alpha}{\gamma}}(1-\varepsilon)^{-\frac{\alpha}{\gamma}}} y^2 dx =$$
$$= \frac{\varepsilon^{-\frac{\alpha}{\gamma}}}{(1-2\varepsilon)^{-\frac{1}{\gamma}}} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} Q_{\varepsilon,\alpha,\beta,\gamma}(x) y^2 dx.$$

В силу неравенства Гёльдера

$$\int_0^1 y^2 dx = \int_0^{\varepsilon} y^2 dx + \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} y^2 dx + \int_{1-\varepsilon}^1 y^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^{\varepsilon} y'^2 dx + \frac{\varepsilon^{-\frac{\alpha}{\gamma}}}{(1-2\varepsilon)^{-\frac{1}{\gamma}}} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} Q_{\varepsilon,\alpha,\beta,\gamma}(x) y^2 dx + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{1-\varepsilon}^1 y'^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant a(\varepsilon) \left(\int_0^1 y'^2 dx + \int_0^1 Q_{\varepsilon,\alpha,\beta,\gamma}(x) y^2 dx \right),$$

где

$$a(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^{-\frac{\alpha}{\gamma}}}{(1-2\varepsilon)^{-\frac{1}{\gamma}}}.$$

Тогда для любой функции y из пространства $H_{Q_{\varepsilon,\alpha,\beta,\gamma}} \setminus \{0\}$

$$R[Q_{\varepsilon,\alpha,\beta,\gamma}, y] = \frac{\int_0^1 y'^2dx + \int_0^1 Q_{\varepsilon,\alpha,\beta,\gamma}(x)y^2dx}{\int_0^1 y^2dx} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\int_0^1 y'^2dx + \int_0^1 Q_{\varepsilon,\alpha,\beta,\gamma}(x)y^2dx}{a(\varepsilon)\left(\int_0^1 y'^2dx + \int_0^1 Q_{\varepsilon,\alpha,\beta,\gamma}(x)y^2dx\right)} = \frac{1}{a(\varepsilon)}.$$

Следовательно,

$$\inf_{y\in H_{Q_{\varepsilon,\alpha,\beta,\gamma}}\setminus\{0\}} R[Q_{\varepsilon,\alpha,\beta,\gamma}, y] \geqslant \frac{1}{a(\varepsilon)}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup_{Q\in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q) \geqslant \lambda_1(Q_{\varepsilon,\alpha,\beta,\gamma}) = \inf_{y\in H_{Q_{\varepsilon,\alpha,\beta,\gamma}}\setminus\{0\}} R[Q_{\varepsilon,\alpha,\beta,\gamma}, y] \geqslant \frac{1}{a(\varepsilon)}.$$

Поскольку ε может быть произвольно малым числом и $a(\varepsilon) \to +0$ при $\varepsilon \to +0$, то

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty.$$

1.2) Пусть $\gamma < 0$, $\beta \leqslant 0 < \alpha$. Докажем, что $M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty$.

Рассмотрим функцию

$$Q_{\varepsilon,\alpha,\beta,\gamma}(x) = \begin{cases} (\alpha+1)^{\frac{1}{\gamma}}\,\varepsilon^{-\frac{\alpha+1}{\gamma}}(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}, & 0 < x \leqslant \varepsilon\,; \\ (\alpha+1)^{\frac{1}{\gamma}}\,\varepsilon^{\frac{1}{\gamma}}(1-\varepsilon^{\alpha+1})^{-\frac{1}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}, & \varepsilon < x < 1, \end{cases}$$

где $0 < \varepsilon < 1$.

В силу неравенства Гёльдера

$$\int_0^1 y^2dx = \int_0^\varepsilon y^2dx + \int_\varepsilon^1 y^2dx \leqslant \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^\varepsilon y'^2dx +$$
$$+\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \varepsilon^{-\frac{1}{\gamma}}(1-\varepsilon^{\alpha+1})^{\frac{1}{\gamma}} \int_\varepsilon^1 (\alpha+1)^{\frac{1}{\gamma}}\varepsilon^{\frac{1}{\gamma}}(1-\varepsilon^{\alpha+1})^{-\frac{1}{\gamma}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}y^2dx =$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^\varepsilon y'^2dx + \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \varepsilon^{-\frac{1}{\gamma}}(1-\varepsilon^{\alpha+1})^{\frac{1}{\gamma}} \int_\varepsilon^1 Q_{\varepsilon,\alpha,\gamma}(x)y^2dx \leqslant$$
$$\leqslant a(\varepsilon)\left(\int_0^1 y'^2dx + \int_0^1 Q_{\varepsilon,\alpha,\beta,\gamma}(x)y^2dx\right),$$

где

$$a(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2} + \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \varepsilon^{-\frac{1}{\gamma}} (1-\varepsilon^{\alpha+1})^{\frac{1}{\gamma}}.$$

В силу рассуждений, аналогичным рассуждениям пункта 1.1), получаем $M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty$.

Отметим, что случай $\gamma < 0$, $\alpha \leqslant 0 < \beta$ симметричен случаю $\gamma < 0$, $\beta \leqslant 0 < \alpha$.

1.3) Пусть $\gamma < 0$, $\alpha, \beta \leqslant 0$. Докажем, что $M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty$.

Рассмотрим функцию

$$Q_{\varepsilon,\alpha,\beta,\gamma}(x) = \begin{cases} (1-\varepsilon)^{\frac{1}{\gamma}} \varepsilon^{-\frac{1}{\gamma}} x^{-\frac{\alpha}{\gamma}} (1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}, & 0 < x \leqslant \varepsilon\,; \\ (1-\varepsilon)^{-\frac{1}{\gamma}} \varepsilon^{\frac{1}{\gamma}} x^{-\frac{\alpha}{\gamma}} (1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}, & \varepsilon < x < 1, \end{cases}$$

где $0 < \varepsilon < 1$.

В силу неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned} \int_0^1 y^2 dx = \int_0^\varepsilon y^2 dx + \int_\varepsilon^1 y^2 dx \leqslant \\ \leqslant \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^\varepsilon y'^2 dx + (1-\varepsilon)^{\frac{1}{\gamma}} \varepsilon^{-\frac{1}{\gamma}} \int_\varepsilon^1 (1-\varepsilon)^{-\frac{1}{\gamma}} \varepsilon^{\frac{1}{\gamma}} y^2 dx \leqslant \\ \leqslant \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^\varepsilon y'^2 dx + (1-\varepsilon)^{\frac{1}{\gamma}} \varepsilon^{-\frac{1}{\gamma}} \int_\varepsilon^1 (1-\varepsilon)^{-\frac{1}{\gamma}} \varepsilon^{\frac{1}{\gamma}} x^{-\frac{\alpha}{\gamma}} (1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}} y^2 dx \leqslant \\ \leqslant a(\varepsilon) \left(\int_0^1 y'^2 dx + \int_0^1 Q_{\varepsilon,\alpha,\beta,\gamma}(x) y^2 dx \right), \end{aligned}$$

где

$$a(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2} + (1-\varepsilon)^{\frac{1}{\gamma}} \varepsilon^{-\frac{1}{\gamma}}.$$

Аналогично пунктам 1.1) и 1.2) получаем $M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty$.

1.4) Пусть $0 < \gamma < 1$, $\alpha, \beta \geqslant 0$.

Разобьем отрезок $[0,1]$ точками $0 = \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \ldots < \varepsilon_n = 1$ на равные отрезки длины ε. Рассмотрим функцию $Q_\varepsilon(x)$, определенную на полуинтервале [0,1) и заданную на каждом полуинтервале $[\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i)$

$(1 \leqslant i \leqslant n)$ следующим образом:

$$Q_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, \quad \varepsilon_{i-1} \leqslant x < \varepsilon_{i-1} + \dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{\varepsilon^\rho}{2}; \\ \varepsilon^{-\mu} x^{-\frac{\alpha}{\gamma}} (1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}, \quad \varepsilon_{i-1} + \dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{\varepsilon^\rho}{2} \leqslant x \leqslant \varepsilon_{i-1} + \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon^\rho}{2}; \\ 0, \quad \varepsilon_{i-1} + \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon^\rho}{2} < x < \varepsilon_i, \end{cases}$$

где $0 < \varepsilon < 1$, $\rho = \frac{1+\gamma+\alpha}{1-\gamma}$, $\mu = \frac{2+\frac{\alpha}{\gamma}}{1-\gamma}$.

Отметим, что $\rho > 1$ при $\alpha > -2\gamma$ и, в частности, при $\alpha \geqslant 0$. Проверим выполнение интегрального условия. Заметим, что для любого i имеют место следующие равенства:

$$\int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} Q_\varepsilon^\gamma(x)\, x^\alpha (1-x)^\beta dx = \int_{\varepsilon_{i-1}+\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^\rho}{2}}^{\varepsilon_{i-1}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^\rho}{2}} Q_\varepsilon^\gamma(x)\, x^\alpha (1-x)^\beta dx =$$
$$= \int_{\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^\rho}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^\rho}{2}} Q_\varepsilon^\gamma(x)\, x^\alpha (1-x)^\beta dx;$$

$$\int_0^1 Q_\varepsilon^\gamma(x)\, x^\alpha (1-x)^\beta dx = n \int_{\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^\rho}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^\rho}{2}} \varepsilon^{-\mu\gamma} dx = \frac{1}{\varepsilon}\, \varepsilon^{-\mu\gamma}\, \varepsilon^\rho = \varepsilon^{-\mu\gamma+\rho-1} = 1.$$

Для любой функции $y \in H_{Q_\varepsilon}$ рассмотрим $\int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} Q_\varepsilon(x) y^2 dx$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. В силу интегральной теоремы о среднем в интервале $\left(\varepsilon_{i-1} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^\rho}{2}, \varepsilon_{i-1} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^\rho}{2}\right)$ найдется такая точка θ_i, что

$$\int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} Q_\varepsilon(x) y^2 dx = \int_{\varepsilon_{i-1}+\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^\rho}{2}}^{\varepsilon_{i-1}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^\rho}{2}} \varepsilon^{-\mu}\, x^{-\frac{\alpha}{\gamma}} (1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}} y^2 dx =$$
$$= \varepsilon^{-\mu}\, \varepsilon^\rho\, \theta_i^{-\frac{\alpha}{\gamma}} (1-\theta_i)^{-\frac{\beta}{\gamma}} y^2(\theta_i) = \varepsilon^{-\frac{\alpha}{\gamma}-1}\, \theta_i^{-\frac{\alpha}{\gamma}} (1-\theta_i)^{-\frac{\beta}{\gamma}}\, y^2(\theta_i).$$

В силу неравенства Гёльдера

$$\left(\int_{\theta_i}^x y'(x) dx \right)^2 \leqslant (x - \theta_i) \int_{\theta_i}^x y'(x)^2 dx.$$

Используя представление $y(x) = y(\theta_i) + \int_{\theta_i}^{x} y'(x)dx$, получаем

$$\int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} y^2 dx = \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} \left(y(\theta_i) + \int_{\theta_i}^{x} y' dx \right)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} \left(2y^2(\theta_i) + 2 \left(\int_{\theta_i}^{x} y' dx \right)^2 \right) dx =$$

$$= 2\varepsilon \ y^2(\theta_i) + 2 \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} \left(\int_{\theta_i}^{x} y' dx \right)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon \ y^2(\theta_i) + 2\varepsilon^2 \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} y'^2 dx = 2\varepsilon^2 \left(y^2(\theta_i)\, \varepsilon^{-1} + \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} y'^2 dx \right) =$$

$$= 2\varepsilon^2 \left(\varepsilon^{\frac{\alpha}{\gamma}}\, \theta_i^{\frac{\alpha}{\gamma}} \cdot (1-\theta_i)^{\frac{\beta}{\gamma}} \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} Q_{\varepsilon_i}(x) y^2 dx + \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} y'^2 dx \right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon^2 \left(\int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} Q_{\varepsilon}(x) y^2 dx + \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} y'^2 dx \right).$$

Тогда, в силу определения функции $Q_\varepsilon(x)$, имеем

$$\int_0^1 y^2 dx \leqslant 2\varepsilon^2 \left(\int_0^1 Q_\varepsilon(x) y^2 dx + \int_0^1 y'^2 dx \right),$$

и $M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup\limits_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q) = \infty$.

1.5) Если $0 < \gamma < 1$, $\alpha < 0 \leqslant \beta$, то опять разобьем отрезок $[0,1]$ точками $0 = \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \ldots < \varepsilon_n = 1$ на равные отрезки длины ε и определим функцию Q_ε на каждом полуинтервале $\big[\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i\big)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ следующим образом:

$$Q_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, \quad \varepsilon_{i-1} \leqslant x < \varepsilon_{i-1} + \dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{\varepsilon^\rho}{2}; \\ \varepsilon^{-\mu} x^{-\frac{\alpha}{\gamma}} (1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}}, \quad \varepsilon_{i-1} + \dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{\varepsilon^\rho}{2} \leqslant x \leqslant \varepsilon_{i-1} + \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon^\rho}{2}; \\ 0, \quad \varepsilon_{i-1} + \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon^\rho}{2} < x < \varepsilon_i, \end{cases}$$

где $0 < \varepsilon < 1$, $\rho = \frac{1+\gamma-\alpha}{1-\gamma}$, $\mu = \frac{2-\frac{\alpha}{\gamma}}{1-\gamma}$.

Отметим, что $\rho > 1$ при $\alpha < 2\gamma$ и, в частности, при $\alpha < 0$. Проверим выполнение интегрального условия. Заметим, что для любого i

$(1 \leqslant i \leqslant n)$ имеют место следующие равенства:

$$\int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} Q_\varepsilon^\gamma(x) x^\alpha (1-x)^\beta dx = \int_{\varepsilon_{i-1}+\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^\rho}{2}}^{\varepsilon_{i-1}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^\rho}{2}} Q_\varepsilon^\gamma(x) x^\alpha (1-x)^\beta dx =$$

$$= \int_{\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^\rho}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^\rho}{2}} Q_\varepsilon^\gamma(x) x^\alpha (1-x)^\beta dx;$$

$$\int_0^1 Q_\varepsilon^\gamma(x) x^\alpha (1-x)^\beta dx = n \int_{\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^\rho}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^\rho}{2}} \varepsilon^{-\mu\gamma} dx = \frac{1}{\varepsilon}\, \varepsilon^{-\mu\gamma} \cdot \varepsilon^\rho = \varepsilon^{-\mu\gamma+\rho-1} = 1.$$

Для любой функции $y \in H_{Q_\varepsilon}$ рассмотрим $\int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} Q_\varepsilon(x) y^2 dx$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. В силу интегральной теоремы о среднем в интервале $\left(\varepsilon_{i-1}+\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^\rho}{2},\, \varepsilon_{i-1}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^\rho}{2}\right)$ найдется такая точка θ_i, что

$$\int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} Q_\varepsilon(x) y^2 dx = \int_{\varepsilon_{i-1}+\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^\rho}{2}}^{\varepsilon_{i-1}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^\rho}{2}} \varepsilon^{-\mu} x^{-\frac{\alpha}{\gamma}} (1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma}} y^2 dx =$$

$$= \varepsilon^{-\mu} \cdot \varepsilon^\rho \theta_i^{-\frac{\alpha}{\gamma}} (1-\theta_i)^{-\frac{\beta}{\gamma}} y^2(\theta_i) = \varepsilon^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} \theta_i^{-\frac{\alpha}{\gamma}} (1-\theta_i)^{-\frac{\beta}{\gamma}} y^2(\theta_i).$$

Так же, как и для случая 1.4),

$$\int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} y^2 dx \leqslant 2\varepsilon y^2(\theta_i) + 2\varepsilon^2 \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} y'^2 dx =$$

$$= 2\varepsilon \theta_i^{\frac{\alpha}{\gamma}} (1-\theta_i)^{\frac{\beta}{\gamma}} \varepsilon^{1-\frac{\alpha}{\gamma}} \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} Q_\varepsilon(x) y^2 dx + 2\varepsilon^2 \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} y'^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon^2 \left(\theta_i^{\frac{\alpha}{\gamma}} \varepsilon^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} Q_\varepsilon(x) y^2 dx + \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} y'^2 dx \right).$$

Тогда

$$\int_0^1 y^2 dx \leqslant 2\varepsilon^2 \left(\max_i \left(\theta_i^{\frac{\alpha}{\gamma}}\right) \varepsilon^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \int_0^1 Q_\varepsilon(x) y^2 dx + \int_0^1 y'^2 dx \right) =$$

$$= 2\varepsilon^2 \left(\theta_1^{\frac{\alpha}{\gamma}} \varepsilon^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \int_0^1 Q_\varepsilon(x) y^2 dx + \int_0^1 y'^2 dx \right).$$

Поскольку

$$\theta_1 \in \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^\rho}{2}, \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^\rho}{2}\right), \quad \theta_1^{\frac{\alpha}{\gamma}} < \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^\rho}{2}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}}.$$

Тогда

$$\int_0^1 y^2dx = 2\varepsilon^2\left(\theta_1^{\frac{\alpha}{\gamma}}\varepsilon^{-\frac{\alpha}{\gamma}}\int_0^1 Q_\varepsilon(x)y^2dx + \int_0^1 y'^2dx\right) <$$

$$< 2\varepsilon^2\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}}\bigl(1-\varepsilon^{\rho-1}\bigr)^{\frac{\alpha}{\gamma}}\varepsilon^{-\frac{\alpha}{\gamma}}\int_0^1 Q_\varepsilon(x)y^2dx + \int_0^1 y'^2dx\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}\varepsilon^2\bigl(1-\varepsilon^{\rho-1}\bigr)^{\frac{\alpha}{\gamma}}\left(\int_0^1 Q_\varepsilon(x)y^2dx + \int_0^1 y'^2dx\right).$$

При достаточно малом ε для любой функции y из пространства $H_{Q_\varepsilon}\setminus\{0\}$ имеем

$$R[Q_\varepsilon, y] = \frac{\int_0^1 y'^2dx + \int_0^1 Q_\varepsilon(x)y^2dx}{\int_0^1 y^2dx} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\int_0^1 y'^2dx + \int_0^1 Q_\varepsilon(x)y^2dx}{2^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}\varepsilon^2(1-\varepsilon^{\rho-1})^{\frac{\alpha}{\gamma}}\left(\int_0^1 y'^2dx + \int_0^1 Q_\varepsilon(x)y^2dx\right)} =$$

$$= \frac{\bigl(1-\varepsilon^{\rho-1}\bigr)^{-\frac{\alpha}{\gamma}}\left(\int_0^1 y'^2dx + \int_0^1 Q_\varepsilon(x)y^2dx\right)}{2^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}\varepsilon^2\left(\int_0^1 y'^2dx + \int_0^1 Q_\varepsilon(x)y^2dx\right)} > \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{\alpha}{\gamma}}}{2^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}\varepsilon^2}$$

и $M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup\limits_{Q\in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q) = \infty$.

Отметим, что случай $0<\gamma<1$, $\beta<0\leqslant\alpha$ симметричен случаю $0<\gamma<1$, $\alpha<0\leqslant\beta$.

1.6) Пусть $0<\gamma<1$, $\alpha,\beta<0$.

Если $\beta>\alpha$, то рассмотрим при $0<\gamma<1$, $\alpha,\beta<0$ функцию $Q_\varepsilon(x)$ пункта 1.5). Если $\beta<\alpha$, то можно провести аналогичные рассуждения, поменяв в определении функции $Q_\varepsilon(x)$ и далее α и β местами. Проверив выполнение интегрального условия, аналогично тому, как это было проделано в пунктах 1.4) и 1.5), имеем:

$$\int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} y^2dx \leqslant 2\varepsilon y^2(\theta_i) + 2\varepsilon^2 \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} y'^2dx =$$

$$= 2\varepsilon\theta_i^{\frac{\alpha}{\gamma}}(1-\theta_i)^{\frac{\beta}{\gamma}}\varepsilon^{1-\frac{\alpha}{\gamma}} \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} Q_\varepsilon(x)y^2dx + 2\varepsilon^2 \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} y'^2dx =$$

$$= 2\varepsilon\theta_i^{\frac{\alpha}{\gamma}}(1-\theta_i)^{\frac{\alpha}{\gamma}}(1-\theta_i)^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma}}\varepsilon^{1-\frac{\alpha}{\gamma}} \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} Q_\varepsilon(x)y^2dx + 2\varepsilon^2 \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} y'^2dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon^2 \left(\theta_i^{\frac{\alpha}{\gamma}}(1-\theta_i)^{\frac{\alpha}{\gamma}}\varepsilon^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} Q_\varepsilon(x)y^2dx + \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} y'^2dx\right).$$

Тогда

$$\int_0^1 y^2dx \leqslant 2\varepsilon^2 \left(\max_i \left(\theta_i^{\frac{\alpha}{\gamma}}(1-\theta_i)^{\frac{\alpha}{\gamma}}\right)\varepsilon^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \int_0^1 Q_\varepsilon(x)y^2dx + \int_0^1 y'^2dx\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon^2 \left(\left(\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^\rho}{2}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \left(1-\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^\rho}{2}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \varepsilon^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \int_0^1 Q_\varepsilon(x)y^2dx + \int_0^1 y'^2dx\right) =$$

$$2\varepsilon^2 \left(\varepsilon^{\frac{\alpha}{\gamma}}\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon^{\rho-1}}{2}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \left(1-\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^\rho}{2}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \varepsilon^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \int_0^1 Q_\varepsilon(x)y^2dx + \int_0^1 y'^2dx\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon^2 \left(\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon^{\rho-1}}{2}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \left(1-\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^\rho}{2}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \int_0^1 Q_\varepsilon(x)y^2dx + \int_0^1 y'^2dx\right).$$

При достаточно малом ε для любой функции y из пространства $H_{Q_\varepsilon} \setminus \{0\}$ имеем

$$R[Q_\varepsilon, y] = \frac{\int_0^1 y'^2dx + \int_0^1 Q_\varepsilon(x)y^2dx}{\int_0^1 y^2dx} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\int_0^1 y'^2dx + \int_0^1 Q_\varepsilon(x)y^2dx}{2^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}\varepsilon^2(1-\varepsilon^{\rho-1})^{\frac{\alpha}{\gamma}}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^\rho}{2}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}}\left(\int_0^1 y'^2dx + \int_0^1 Q_\varepsilon(x)y^2dx\right)} > \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2\alpha}{\gamma}}}{2^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}\varepsilon^2}$$

и $M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup\limits_{Q\in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q) = \infty$.

2. Докажем, что если $\gamma \geqslant 1$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} < \infty$.

Отметим, что в силу леммы 3.1 при $\gamma > 1$, $\alpha, \beta \leqslant 2\gamma - 1$ пространства H_Q и $H_0^1(0,1)$ совпадают и

$$\inf_{y \in H_Q \setminus \{0\}} \frac{\int_0^1 y'^2 dx}{\int_0^1 y^2 dx} = \inf_{y \in H_0^1(0,1) \setminus \{0\}} \frac{\int_0^1 y'^2 dx}{\int_0^1 y^2\, dx} = \pi^2.$$

Тогда при $\gamma > 1$, $0 < \alpha, \beta \leqslant 2\gamma - 1$ в силу неравенства (3.2) имеем

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \left(1 + 2^{\frac{3\gamma-2}{\gamma}} \left(\frac{2\gamma - 1}{\gamma}\right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}}\right) \pi^2.$$

При $\gamma > 1$ и $\beta \leqslant 0 < \alpha \leqslant 2\gamma - 1$ или $\alpha \leqslant 0 < \beta \leqslant 2\gamma - 1$ в силу неравенства (3.3) имеем

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \left(1 + \left(\frac{2\gamma - 1}{\gamma}\right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}}\right) \pi^2.$$

При $\gamma > 1$, $\alpha, \beta \leqslant 0$ в силу неравенства (3.5), мы получаем

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant 2\pi^2.$$

Утверждения 1) – 3) пункта 2. теоремы доказаны.

4) Пусть $\gamma \geqslant 1$ и $\alpha, \beta > \gamma$.
Докажем, что

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant R\left[\frac{1}{y_1^2}, y_1\right], \quad \text{где} \quad y_1(x) = x^{\frac{\alpha}{2\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{2\gamma}}.$$

Заметим, что интеграл $\int_0^1 {y_1'}^2 dx$ сходится при $\alpha, \beta > \gamma$. Пусть

$$\int_0^1 {y_1'}^2 dx = C_1, \quad \int_0^1 y_1^2 dx = C_2.$$

Тогда для любой функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y \in H_Q \setminus \{0\}} \frac{\int_0^1 \left(y'^2 + Q(x) y^2\right) dx}{\int_0^1 y^2 dx} \leqslant \frac{\int_0^1 \left({y_1'}^2 + Q(x) y_1^2\right) dx}{\int_0^1 y_1^2 dx} =$$

$$= \frac{C_1 + \int_0^1 Q(x) x^{\frac{\alpha}{\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{\gamma}} dx}{C_2} \leqslant \frac{C_1 + \left(\int_0^1 Q^\gamma(x) x^\alpha (1-x)^\beta dx\right)^{\frac{1}{\gamma}}}{C_2} =$$

$$= \frac{C_1 + 1}{C_2}$$

и

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup_{Q\in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q) \leqslant \frac{C_1+1}{C_2}.$$

5) Докажем, что если $\gamma \geqslant 1$ и $\beta \leqslant \gamma < \alpha$, $y_2(x) = x^{\frac{\alpha}{2\gamma}} \sin \pi(1-x)$, то

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \frac{\int_0^1 {y_2'}^2 dx + \pi^2 \left(\frac{\gamma-1}{3\gamma-\beta-1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\int_0^1 y_2^2 dx} \quad \text{при} \quad \gamma > 1,$$

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \frac{\int_0^1 {y_2'}^2 dx + \pi^2}{\int_0^1 y_2^2 dx} \quad \text{при} \quad \gamma = 1.$$

Пусть сначала $\gamma > 1$ и $\beta \leqslant \gamma < \alpha$.

Обозначим через C_1 и C_2 следующие интегралы:

$$\int_0^1 {y_2'}^2 dx = C_1, \quad \int_0^1 y_2^2 dx = C_2.$$

Для любой функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ функция $y_2 \in H_Q$, поскольку

$$\int_0^1 Q(x) y_2^2 dx = \int_0^1 Q(x) x^{\frac{\alpha}{\gamma}} \sin^2 \pi(1-x) dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^1 Q^\gamma(x) x^\alpha (1-x)^\beta dx\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\int_0^1 (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} \sin^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \pi(1-x) dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \leqslant$$

$$\leqslant \pi^2 \left(\int_0^1 (1-x)^{\frac{\beta-2\gamma}{1-\gamma}} dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \pi^2 \left(\frac{\gamma-1}{3\gamma-\beta-1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Рассмотрим теперь случай $\beta \leqslant 1 = \gamma < \alpha$.

Пусть $y_2(x) = x^{\frac{\alpha}{2}} \sin \pi(1-x)$ и

$$\int_0^1 {y_2'}^2 dx = C_1, \quad \int_0^1 y_2^2 dx = C_2.$$

Для любой функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ функция $y_2 \in H_Q$, поскольку при $\beta < 2$ имеем

$$(1-x)^2 < (1-x)^\beta$$

и

$$\int_0^1 Q(x)y_2^2dx = \int_0^1 Q(x)x^\alpha \sin^2 \pi(1-x)dx <$$
$$< \pi^2 \int_0^1 Q(x)x^\alpha (1-x)^\beta dx = \pi^2.$$

Тогда для любой функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ имеем

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y \in H_Q \setminus \{0\}} \frac{\int_0^1 \left(y'^2 + Q(x)y^2\right)dx}{\int_0^1 y^2 dx} \leqslant \frac{\int_0^1 \left({y_2'}^2 + Q(x)y_2^2\right)dx}{\int_0^1 y_2^2 dx} \leqslant \frac{C_1+\pi^2}{C_2}$$

и

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q) \leqslant \frac{C_1+\pi^2}{C_2}.$$

Отметим, что данные оценки имеют место не только для $\beta \leqslant \gamma$, но и для всех $\beta < 3\gamma - 1$.

Отметим также, что если $\gamma \geqslant 1$, $\alpha \leqslant \gamma < \beta$ $(\alpha < 3\gamma - 1)$, то имеет место аналогичный результат, где в формулах для $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ вместо функции y_2 стоит функция $y_3(x) = (1-x)^{\frac{\beta}{2\gamma}} \sin \pi x$.

6) Пусть $\gamma \geqslant 1$, $\alpha > \gamma$, $\beta \leqslant 0$. Докажем, что

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \frac{\int_0^1 {y_2'}^2 dx + 1}{\int_0^1 y_2^2 dx},$$

где $y_2(x) = x^{\frac{\alpha}{2\gamma}} \sin \pi(1-x)$.

Пусть $\alpha > \gamma \geqslant 1$, $\beta \leqslant 0$ и $y_2(x) = x^{\frac{\alpha}{2\gamma}} \sin \pi(1-x)$. Обозначим через C_1 и C_2 следующие интегралы:

$$\int_0^1 {y_2'}^2 dx = C_1, \quad \int_0^1 y_2^2 dx = C_2.$$

Для любой функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ функция $y_2 \in H_Q$, поскольку

$$\int_0^1 Q(x)y_2^2dx = \int_0^1 Q(x)x^{\frac{\alpha}{\gamma}} \sin^2 \pi(1-x)dx \leqslant \int_0^1 Q^\gamma(x)x^\alpha(1-x)^\beta dx = 1.$$

Тогда для любой функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ имеем

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y\in H_Q\setminus\{0\}} \frac{\int_0^1 \left(y'^2 + Q(x)y^2\right) dx}{\int_0^1 y^2 dx} \leqslant \frac{\int_0^1 \left({y_2'}^2 + Q(x)y_2^2\right) dx}{\int_0^1 y_2^2 dx} \leqslant \frac{C_1+1}{C_2}$$

и $M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup\limits_{Q\in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q) \leqslant \frac{C_1+1}{C_2}$.

Отметим, что при $\beta > \gamma \geqslant 1$, $\alpha \leqslant 0$ имеет место аналогичный результат, где в формулах для $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ вместо функции y_2 стоит функция $y_3(x) = (1-x)^{\frac{\beta}{2\gamma}} \sin \pi x$.

Отметим также, что для случая $\beta \leqslant 0$, $\gamma = 1 < \alpha$ полученная оценка точнее, чем оценка, полученная в пункте 5) при $\beta \leqslant \gamma = 1 < \alpha$, поэтому на рисунке 3 приводится данный результат.

7) Пусть $\gamma = 1$, $\beta \leqslant 0 < \alpha \leqslant 1$. Докажем, что $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant 2\pi^2$.

Для любой функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ имеем

$$\int_0^1 Q(x)y^2 dx = \int_0^1 Q(x)y^2 x^{\alpha} x^{-\alpha} dx \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{[0,1]} \frac{y^2}{x^{\alpha}} \int_0^1 Q(x)x^{\alpha}(1-x)^{\beta} dx \leqslant \sup_{[0,1]} \frac{y^2}{x}.$$

Поскольку для любого $x \in (0,1)$ в силу неравенства Гёльдера имеем

$$y^2(x) = \left(\int_0^x y'(t)dt\right)^2 \leqslant x\int_0^x y'^2(t)dt \leqslant x\int_0^1 y'^2(t)dt,$$

то

$$\sup_{[0,1]} \frac{y^2}{x} \leqslant \int_0^1 y'^2 dx. \tag{3.6}$$

Заметим, что в силу неравенства (3.6) пространства H_Q и $H_0^1(0,1)$ совпадают и

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y\in H_Q\setminus\{0\}} \frac{\int_0^1 y'^2 + \int_0^1 Q(x)y^2 dx}{\int_0^1 y^2 dx} \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{y\in H_Q\setminus\{0\}} \frac{2\int_0^1 y'^2 dx}{\int_0^1 y^2 dx} = \inf_{y\in H_0^1(0,1)\setminus\{0\}} \frac{2\int_0^1 y'^2 dx}{\int_0^1 y^2\, dx} = 2\pi^2$$

и

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup_{Q\in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q) \leqslant 2\pi^2.$$

Отметим, что случай $\alpha \leqslant 0 < \beta \leqslant 1 = \gamma$ симметричен случаю $\beta \leqslant 0 < \alpha \leqslant 1 = \gamma$.

8) Пусть $\gamma = 1$, $0 < \alpha, \beta \leqslant 1$. Докажем, что $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant 3\pi^2$.

Для любой функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ имеем

$$\int_0^1 Q(x)y^2dx = \int_0^1 Q(x)y^2x^{\alpha}x^{-\alpha}(1-x)^{\beta}(1-x)^{-\beta}dx \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{[0,1]} \frac{y^2}{x^{\alpha}(1-x)^{\beta}} \int_0^1 Q(x)x^{\alpha}(1-x)^{\beta}dx \leqslant \sup_{[0,1]} \frac{y^2}{x(1-x)} =$$
$$= \sup_{[0,1]}\ y^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) \leqslant \sup_{[0,1]} \frac{y^2}{x} + \sup_{[0,1]} \frac{y^2}{1-x}.$$

Для любого $x \in (0,1)$ мы имеем

$$y^2(x) = \left(\int_0^x y'(t)dt\right)^2 \leqslant x\int_0^x y'^2(t)dt \leqslant x\int_0^1 y'^2(t)dt$$

и

$$y^2(x) = \left(-\int_x^1 y'(t)dt\right)^2 \leqslant (1-x)\int_x^1 y'^2(t)dt \leqslant (1-x)\int_0^1 y'^2(t)dt.$$

Принимая во внимание неравенства

$$\sup_{[0,1]} \frac{y^2}{x} \leqslant \int_0^1 y'^2dx \quad \text{и} \quad \sup_{[0,1]} \frac{y^2}{1-x} \leqslant \int_0^1 y'^2dx,$$

аналогично пункту 7) мы получаем

$$\lambda_1(Q) \leqslant \inf_{y\in H_Q\setminus\{0\}} \frac{3\int_0^1 y'^2dx}{\int_0^1 y^2dx} = \inf_{y\in H_0^1(0,1)\setminus\{0\}} \frac{\int_0^1 y'^2dx}{\int_0^1 y^2\,dx} = 3\pi^2.$$

Следовательно,

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup_{Q\in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q) \leqslant 3\pi^2.$$

9) Пусть $\gamma = 1$, $\alpha, \beta \leqslant 0$. Докажем, что $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \frac{5}{4}\pi^2$.

Можно доказать [6, 24, 13], что для любой функции $y \in H_0^1(0,1)$ справедливо неравенство

$$\sup_{[0,1]} y^2 \leqslant \frac{1}{4} \int_0^1 {y'}^2 dx. \tag{3.7}$$

Применив неравенство (3.7), для любой функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и для любой функции $y \in H_Q$ получаем

$$\int_0^1 Q(x) y^2 dx \leqslant \sup_{[0,1]} \frac{y^2}{x^\alpha} \int_0^1 Q(x) x^\alpha dx \leqslant \sup_{[0,1]} \frac{y^2}{x^\alpha} \int_0^1 Q(x) x^\alpha (1-x)^\beta dx \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{[0,1]} \frac{y^2}{x^\alpha} \leqslant \sup_{[0,1]} y^2 \leqslant \frac{1}{4} \int_0^1 {y'}^2 dx$$

и $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant \frac{5}{4}\pi^2$.

Теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.1. Результаты, полученные в теореме 3.1 при $\gamma < 0$ и при $0 < \gamma < 1$, $\alpha = \beta = 0$, совпадают с результатами работ [7], [8], [26] при $\delta = -1$ (см., например, [8], теор. 1.1, с. 516).

Результаты теоремы 3.1 представлены с помощью рисунков 4, 5, 6 и таблиц 4, 5, 6. В последнем столбце таблицы либо указано значение $M_{\alpha,\beta,\gamma}$, либо номер неравенства для $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ в теореме 3.1.

При $\beta > 1$

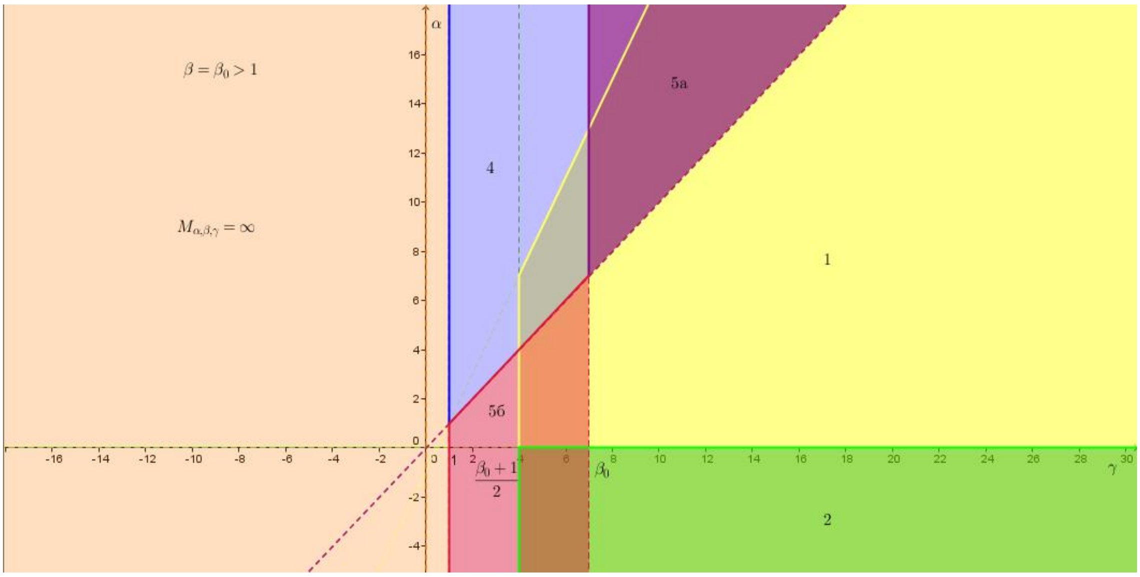

Рисунок 4

γ	α	$M_{\alpha,\beta,\gamma}$
$\gamma < 0$	$-\infty < \alpha < +\infty$	$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty$
$0 < \gamma < 1$	$-\infty < \alpha < +\infty$	$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty$
$1 \leqslant \gamma < \frac{\beta+1}{2}$	$\alpha \leqslant \gamma$	5 *б*
	$\alpha > \gamma$	4
$\frac{\beta+1}{2} \leqslant \gamma < \beta$	$\alpha \leqslant 0$	5 *б*, 2
	$0 < \alpha \leqslant \gamma$	5 *б*, 1
	$\gamma < \alpha \leqslant 2\gamma - 1$	4, 1
	$\alpha > 2\gamma - 1$	4
$\gamma \geqslant \beta$	$\alpha \leqslant 0$	2
	$0 < \alpha \leqslant \gamma$	1
	$\gamma < \alpha \leqslant 2\gamma - 1$	5 *a*, 1
	$\alpha > 2\gamma - 1$	5 *a*

Таблица 4

При $0 < \beta \leqslant 1$

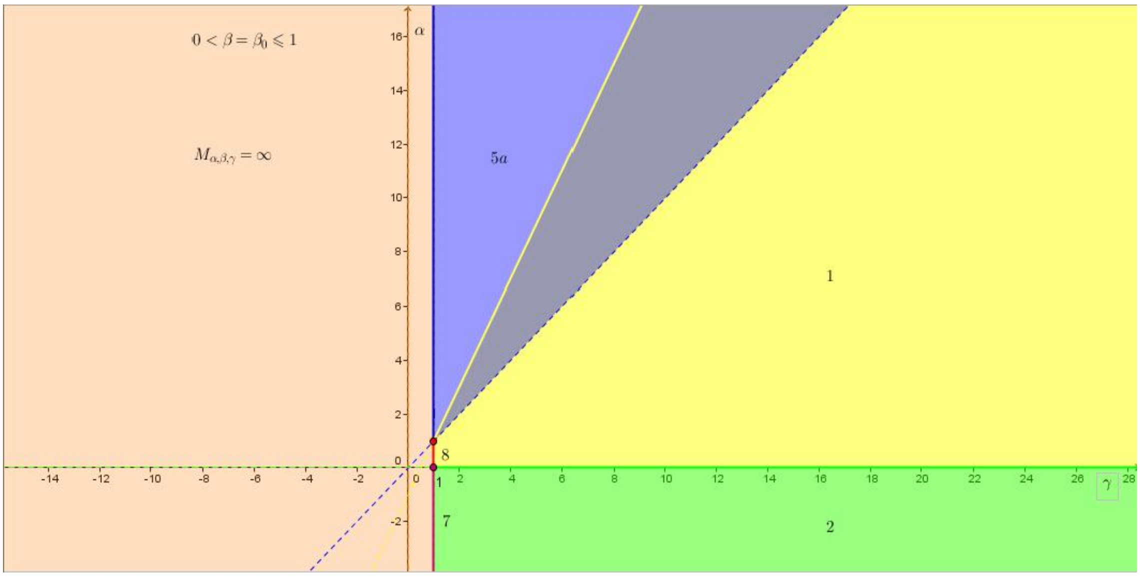

Рисунок 5

γ	α	$M_{\alpha,\beta,\gamma}$
$\gamma < 0$	$-\infty < \alpha < +\infty$	$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty$
$0 < \gamma < 1$	$-\infty < \alpha < +\infty$	$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty$
$\gamma = 1$	$\alpha \leqslant 0$	7
	$0 < \alpha \leqslant 1$	8
	$\alpha > 1$	5 a
$\gamma > 1$	$\alpha \leqslant 0$	2
	$0 < \alpha \leqslant \gamma$	1
	$\gamma < \alpha \leqslant 2\gamma - 1$	5 a, 1
	$\alpha > 2\gamma - 1$	5 a

Таблица 5

При $\beta \leqslant 0$

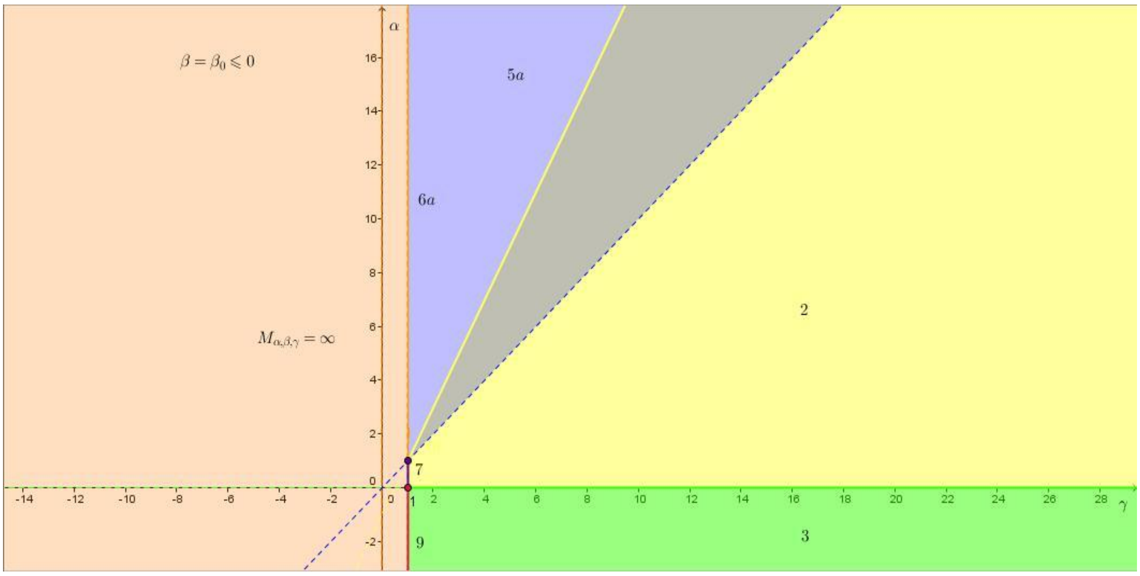

Рисунок 6

γ	α	$M_{\alpha,\beta,\gamma}$
$\gamma < 0$	$-\infty < \alpha < +\infty$	$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty$
$0 < \gamma < 1$	$-\infty < \alpha < +\infty$	$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty$
$\gamma = 1$	$\alpha \leqslant 0$	9
	$0 < \alpha \leqslant 1$	7
	$\alpha > 1$	6 a
$\gamma > 1$	$\alpha \leqslant 0$	3
	$0 < \alpha \leqslant \gamma$	2
	$\gamma < \alpha \leqslant 2\gamma - 1$	5 a, 2
	$\alpha > 2\gamma - 1$	5 a

Таблица 6

3.2. Точные оценки

Уточним полученные оценки для $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ при $\gamma > 1$.

Пусть $B_{\alpha,\beta,\gamma}$ – пространство функций из $H_0^1(0,1)$ с конечной нормой

$$\|y\|_{B_{\alpha,\beta,\gamma}} = \left(\int_0^1 y'^2 dx + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В силу неравенства Гёльдера для любой функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и для любой функции $y \in B_{\alpha,\beta,\gamma}$ имеет место неравенство

$$\int_0^1 Q(x)y^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^1 Q^\gamma(x)x^\alpha(1-x)^\beta dx\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (3.8)$$

В силу неравенства (3.8) имеем

$$B_{\alpha,\beta,\gamma} \subset H_Q \subset H_0^1(0,1).$$

Заметим, что в силу неравенства (3.8) при $\gamma > 1$, α, $\beta < 2\gamma - 1$ пространства $B_{\alpha,\beta,\gamma}$ и $H_0^1(0,1)$ совпадают.

Пусть

$$G[y] = \frac{\int_0^1 y'^2 dx + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\int_0^1 y^2\, dx}.$$

Обозначим

$$m = \inf_{y \in B_{\alpha,\beta,\gamma}\setminus\{0\}} G[y].$$

В силу неравенства (3.8) для любой функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и для любой функции $y \in B_{\alpha,\beta,\gamma}$ имеет место неравенство

$$R[Q,y] \leqslant G[y].$$

Тогда

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y\in H_Q\setminus\{0\}} R[Q,y] \leqslant \inf_{y\in H_Q\setminus\{0\}} G[y] \leqslant \inf_{y\in B_{\alpha,\beta,\gamma}\setminus\{0\}} G[y] = m$$

и

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup_{Q\in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q) \leqslant \inf_{B_{\alpha,\beta,\gamma}\setminus\{0\}} G[y] = m,$$

то есть $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant m$.

Докажем, что $M_{\alpha,\beta,\gamma} = m$.

Теорема 3.2. *Пусть $\gamma > 1$; тогда существуют такая функция $Q_* \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и такая положительная на $(0,1)$ функция $u \in H_{Q_*}$, что $R[Q_*,u] = G[u] = m$, и $M_{\alpha,\beta,\gamma} = m$, при этом функция u удовлетворяет уравнению*

$$u'' + mu = x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}\, u^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tag{3.9}$$

и условию

$$\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}\, u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\, dx = 1. \tag{3.10}$$

Доказательство теоремы 3.2

Обозначим через

$$\Gamma_* = \{y \in B_{\alpha,\beta,\gamma} \mid \int_0^1 y^2 dx = 1\}.$$

Пусть

$$I[y] = \int_0^1 {y'}^2 dx + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Пусть $\{\tilde{y}_k\}$ – минимизирующая последовательность функционала $G[y]$ в $B_{\alpha,\beta,\gamma}$, то есть $G[\tilde{y}_k] \to m$ при $k \to \infty$. Так как $G[y_k] = G[|y_k|]$, то можно считать, что последовательность $\{y_k\}$ неотрицательна.

Покажем, что последовательность $y_k = \frac{\tilde{y}_k}{C_k^{\frac{1}{2}}}$, где $C_k = \int_0^1 \tilde{y}_k^2 dx$, – минимизирующая последовательность функционала $I[y]$ в Γ_*, то есть $I[y_k] \to m$ при $k \to \infty$.

Действительно,

$$\int_0^1 y_k^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{\tilde{y}_k}{C_k^{\frac{1}{2}}}\right)^2 dx = \frac{\displaystyle\int_0^1 \tilde{y}_k^2 dx}{C_k} = \frac{C_k}{C_k} = 1$$

и

$$I[y_k] = G[y_k] = G\left[\frac{\tilde{y}_k}{C_k^{\frac{1}{2}}}\right] =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{C_k}\displaystyle\int_0^1 \tilde{y}_k'^2 dx + \dfrac{1}{C_k}\left(\displaystyle\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|\tilde{y}_k|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\dfrac{1}{C_k}\displaystyle\int_0^1 \tilde{y}_k^2 dx} = G\left[\tilde{y}_k\right].$$

Тогда

$$m = \inf_{y \in B_{\alpha,\beta,\gamma}\setminus\{0\}} G[y] = \inf_{y\in\Gamma_*} I[y]. \tag{3.11}$$

Лемма 3.2. *Существует такая функция $u_* \in \Gamma_*$, что $I[u_*] = m$, где m определяется формулой (3.11).*

Доказательство леммы 3.2.

Поскольку $\{y_k\}$ – минимизирующая последовательность функционала $I[y]$ в Γ_* и $m = \inf\limits_{y\in\Gamma_*} I[y]$, то для всех достаточно больших значений k имеем $I[y_k] \leqslant m+1$. Так как $\|y_k\|^2_{B_{\alpha,\beta,\gamma}} = I[y_k]$, то последовательность $\{y_k\}$ ограничена в $B_{\alpha,\beta,\gamma}$.

Рассмотрим эту последовательность в сепарабельном гильбертовом пространстве $H_0^1(0,1)$. Поскольку она ограничена в $H_0^1(0,1)$, то она содержит подпоследовательность $\{z_k\}$, слабо сходящуюся в $H_0^1(0,1)$ к некоторой функции u_*, причем

$$\|u_*\|^2_{H_0^1(0,1)} \leqslant m+1.$$

Пространство $H_0^1(0,1)$ компактно вкладывается в пространство $C[0,1]$, следовательно, существует подпоследовательность $\{s_k\}$ последовательности $\{z_k\}$, сильно сходящаяся в $C[0,1]$.

Поскольку пространство $C[0,1]$ вкладывается в $L_2(0,1)$, то последовательность $\{s_k\}$ сильно сходится в $L_2(0,1)$ к функции u_*. Следовательно, для функционала $G[s_k]$ имеем

$$\int_0^1 s_k^2 dx \to \int_0^1 u_*^2 dx \quad \text{при } k \to \infty$$

и

$$\int_0^1 u_*^2 dx = 1. \tag{3.12}$$

Для произвольного $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ рассмотрим вспомогательный функционал

$$I_\varepsilon[y] = \int_0^1 {y'}^2 dx + \left(\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} |y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} dx \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

На множестве $[\varepsilon, 1-\varepsilon] \times [0, +\infty)$ рассмотрим функцию

$$F(x,y) = x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} |y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}.$$

Функция $F(x,y)$ выпукла по переменной y, поскольку для любого $x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ и для любого $y \in [0, +\infty)$

$$F_y(x,y) = \frac{2\gamma}{\gamma-1} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} |y|^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{sgn} y = \frac{2\gamma}{\gamma-1} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} |y|^{\frac{2}{\gamma-1}} y,$$

$$F_{yy}(x,y) = \frac{2\gamma(\gamma+1)}{(\gamma-1)^2} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} y^{\frac{2}{\gamma-1}} \geqslant 0.$$

Тогда для любого $x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ и для любых двух значений $y, \overline{y}$ из множества $[0, +\infty)$

$$F(x, \overline{y}) - F(x,y) - F_y(x,y)(\overline{y} - y) \geqslant 0.$$

Тогда при $\overline{y} = s_k$ и $y = u_*$ имеем

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \left(F(x, s_k) - F(x, u_*) \right) dx \geqslant \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} F_{u_*}(x, u_*)(s_k - u_*)\, dx,$$

то есть

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|s_k|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} - x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u_*|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\right)dx \geqslant$$
$$\geqslant \frac{2\gamma}{\gamma-1}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u_*|^{\frac{2}{\gamma-1}}u_*(s_k-u_*)dx.$$

В силу равномерной сходимости на $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ последовательности $\{s_k\}$ к функции u_* интеграл в правой части неравенства стремится к нулю при $k \to \infty$. Тогда, поскольку последовательность $\{s_k\}$ слабо сходится в $L_2(0,1)$ к функции u_*, имеем (см. [14], стр. 398)

$$\varliminf_{k\to\infty}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} F(x,s_k)dx \geqslant \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} F(x,u_*)dx$$

или

$$\varliminf_{k\to\infty}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|s_k|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx \geqslant \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u_*|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx. \quad (3.13)$$

Поскольку последовательность $\{s_k\}$ ограничена в $H_0^1(0,1)$, в силу определения нормы $\|s_k\|_{H_0^1(0,1)}$ последовательность $\{s_k'\}$ ограничена в $L_2(0,1)$. Тогда существует такая подпоследовательность $\{w_k\}$ последовательности $\{s_k\}$, что последовательность $\{w_k'\}$ слабо сходится к u_*' в $L_2(0,1)$.

Рассмотрим числовую последовательность $\{\int_0^1 {w_k'}^2 dx\}$, имеющую конечный нижний предел. Тогда существует такая подпоследовательность $\{v_k\}$ последовательности $\{w_k\}$, что

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 {v_k'}^2 dx = \varliminf_{k\to\infty}\int_0^1 {w_k'}^2 dx.$$

Так как $\{v_k'\}$ слабо сходится к u_*' в $L_2(0,1)$, то

$$\|u_*'\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant \varliminf_{k\to\infty}\|v_k'\|^2_{L_2(0,1)} = \lim_{k\to\infty}\|v_k'\|^2_{L_2(0,1)} \quad \text{(см. [15], стр. 217).} \quad (3.14)$$

В силу неравенств (3.13) и (3.14) для произвольного $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ имеем

$$I_\varepsilon[u_*] \leqslant \varliminf_{k\to\infty} I_\varepsilon[v_k] \leqslant \varliminf_{k\to\infty} I[v_k] = m.$$

Так как ε произвольно,

$$I[u_*] \leqslant \varliminf_{k\to\infty} I[v_k] = m. \tag{3.15}$$

Поскольку $m = \inf\limits_{y\in\Gamma_3} I[y]$, то $I[u_*] = m$.

Из условий (3.12) и (3.15) следует принадлежность функции u_* множеству Γ_*.

Лемма 3.2 доказана.

Рассмотрим множество

$$\Gamma_3 = \{y \in B_{\alpha,\beta,\gamma} \mid \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx = 1\}$$

и функцию $u = Cu_*$, где константа C выбирается так, чтобы функция u принадлежала Γ_3 и была неотрицательной на отрезке $[0,1]$, то есть

$$C = \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u_*|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}.$$

Тогда $G[u] = G[u_*] = I[u_*] = m$.

Лемма 3.3. *Пусть $u \in \Gamma_3$ и $G[u] = m$; тогда функция u положительна на интервале $(0,1)$ и удовлетворяет уравнению (3.9).*

Доказательство леммы 3.3.

Зафиксируем аргумент u функционала $G[y]$, зафиксируем некоторую вариацию $z \in B_{\alpha,\beta,\gamma}$ аргумента u и рассмотрим семейство кривых $u+tz$, где t – произвольный параметр. На кривых $u+tz$ функционал $G[y]$ превращается в функцию параметра $t \in \mathbb{R}$:

$$g(t) =$$
$$= \frac{\int_0^1 (u'(x)+tz'(x))^2dx + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u(x)+tz(x)|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\int_0^1 (u(x)+tz(x))^2dx}.$$

Поскольку функционал $G[y]$ достигает экстремума при $y = u$, то его вариация обращается в нуль при $y = u$, то есть $g'(0) = 0$. Таким образом,

$$\frac{\int_0^1 u'z'dx}{\int_0^1 u^2dx}+$$
$$+\frac{\left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\operatorname{sgn} u\, zdx}{\int_0^1 u^2dx}=$$
$$=\frac{\left(\int_0^1 u'^2dx+\left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)\int_0^1 uzdx}{(\int_0^1 u^2dx)^2}.$$

Поскольку $u\in\Gamma_3$ и $G[u]=m$, получаем

$$\frac{\int_0^1 u'z'dx+\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\operatorname{sgn} u\, zdx}{\int_0^1 u^2dx}=\frac{m\int_0^1 uzdx}{\int_0^1 u^2dx}$$

или

$$\int_0^1 u'z'dx+\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\operatorname{sgn} u\, zdx=m\int_0^1 uzdx. \qquad (3.16)$$

Покажем, что равенство (3.16) выполняется для любой функции $z\in B_{\alpha,\beta,\gamma}$. В силу неравенства Гёльдера

$$\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\operatorname{sgn} uzdx\leqslant\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}|z|dx\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}\left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|z|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}.$$

Полагая, что $z\in C_0^\infty(0,1)$, получаем, что функция u' имеет обобщенную производную

$$u''=x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\operatorname{sgn} u-mu=x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{2}{\gamma-1}}u-mu.$$

Поскольку $u\in AC[0,1]$, функция $x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\operatorname{sgn} u$ непрерывна на отрезке $[\rho,1-\rho]$, где $0<\rho<\frac{1}{2}$, и тогда $u''\in L_p(\rho,1-\rho)$. В силу следствия 2.6.1. теоремы 2.6.1. (см. [16], с. 41), поскольку

$u, v \in L_p(\rho, 1-\rho)$, $p \geqslant 1$, где v – обобщенная производная второго порядка от u, то функция u непрерывно дифференцируема на отрезке $[\rho, 1-\rho]$ и почти всюду на нем имеет классическую производную второго порядка $u'' = v$. При этом u' абсолютно непрерывна на отрезке $[\rho, 1-\rho]$.

Таким образом,

$$u'' - x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{2}{\gamma-1}}u + mu = 0, \quad \text{где } x \in [\rho, 1-\rho].$$

Поскольку ρ может быть произвольно малым числом, имеет место равенство

$$u'' - x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{2}{\gamma-1}}u + mu = 0, \quad \text{где } x \in (0, 1).$$

Так как функция u непрерывна на $(0,1)$, функция u'' также непрерывна на $(0,1)$ и равенство имеет место всюду на $(0,1)$. Поскольку $u \in \Gamma_3$, доказано существование неотрицательной функции $u \in B_{\alpha,\beta,\gamma}$, удовлетворяющей уравнению (3.9) и условию (3.10).

Докажем, что функция u положительна на интервале $(0,1)$.

Заметим, что поскольку функция u неотрицательна на интервале $(0,1)$, график функции не может пересечь ось Ox. Касание оси Ox также невозможно в силу теоремы существования и единственности задачи Коши, так как $\gamma > 1$ и $\frac{\gamma+1}{\gamma-1} > 1$. Следовательно, функция u на интервале $(0,1)$ положительна.

Лемма 3.3 доказана.

С помощью лемм 3.2 и 3.3 мы получили, что если $m = \inf\limits_{y \in B_{\alpha,\beta,\gamma}\setminus\{0\}} G[y]$, то существует положительная на интервале $(0,1)$ функция $u \in B_{\alpha,\beta,\gamma}$, которая удовлетворяет уравнению (3.9) и условию (3.10).

Рассмотрим функцию

$$Q_*(x) = x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u^{\frac{2}{\gamma-1}},$$

удовлетворяющую интегральному условию (1.3):

$$\int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta Q_*^\gamma(x)dx = \int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta x^{\frac{\alpha\gamma}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta\gamma}{1-\gamma}}u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx =$$

$$= \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx = 1.$$

Тогда функция u принадлежит H_{Q_*}.

В силу леммы 3.3 функция u удовлетворяет уравнению (3.9) и условиям (1.2). Таким образом, функция u удовлетворяет при $Q = Q_*$ уравнению (1.1) и условиям (1.2). Тогда, поскольку функция u непрерывна на отрезке $[0,1]$ и ее производная u' непрерывна на интервале $(0,1)$, функция u является *первой собственной функцией* задачи (1.1) – (1.3) для $Q = Q_*$ с *первым собственным значением* $\lambda_1(Q_*) = m$.

Тогда

$$\inf_{y\in H_{Q_*}\setminus\{0\}} R[Q_*, y] = R[Q_*, u] = G[u] = m$$

и

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup_{Q\in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q) \geqslant \lambda_1(Q_*) =$$
$$= \inf_{y\in H_{Q_*}\setminus\{0\}} R[Q_*, y] = R[Q_*, u] = G[u] = m.$$

Следовательно, поскольку также $M_{\alpha,\beta,\gamma} \leqslant m$, получаем $M_{\alpha,\beta,\gamma} = m$.

Теорема 3.2 доказана.

Замечание 3.2. Отметим, что поскольку $u \in H_0^1(0,1)$ и

$$R[Q_*, u] = \frac{\int_0^1 u'^2 dx + 1}{\int_0^1 u^2 dx} > \frac{\int_0^1 u'^2 dx}{\int_0^1 u^2 dx} \geqslant \inf_{y\in H_0^1(0,1)\setminus\{0\}} \frac{\int_0^1 {y'}^2 dx}{\int_0^1 y^2\, dx} = \pi^2,$$

выполняется неравенство $M_{\alpha,\beta,\gamma} > \pi^2$.

Замечание 3.3. При $\gamma > 1$, $\alpha = \beta = 0$ результат теоремы 3.2 совпадает с результатом [7], [8], [26] при $\delta = -1$ (см., например, [8], теор. 1.1, с. 516).

Замечание 3.4. В случае $\gamma = 1$ достижимость точных оценок $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ доказана А. А. Владимировым [5]. Достижимость точной оценки $M_{0,0,1}$ доказана С. С. Ежак [7], [8], [26] (см. [8], теор. 1.1, с. 516).

Литература

[1] Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения,* Наука, Москва, 1996.

[2] Братусь А.С. Кратные собственные значения в задачах оптимизации. Спектральные свойства систем с конечным числом степеней свободы// Журнал Вычисл. Матем. и Мат. Физики, 1986, Т.26, с. 1–7.

[3] Братусь А.С., Сейранян А.П. Бимодальные решения в задачах оптимизации собственного значения // Прикл. Мат. Мех., 1983, Т. 47, с. 451–457.

[4] Винокуров В.А., Садовничий В.А. О границах изменения собственного значения при изменении потенциала // Доклады Академии наук, 2003, Т. 392, №5, С. 592–597.

[5] Владимиров А.А. О мажорантах собственных значений задач Штурма–Лиувилля с потенциалами из шаров весовых пространств // arXiv:1412.7992v2 [math.SP] 19 March 2015

[6] Егоров Ю.В., Кондратьев В.А. Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма–Лиувилля // Успехи математических наук, 1996, Т. 51(3), С. 73–144.

[7] Ежак С.С. Об оценках минимального собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с интегральным условием // Современная математика и ее приложения, 2005, Т. 36, С. 56–69.

[8] Ежак С.С. Оценки первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле,с. 517–559. // Часть 4 в сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: научное издание

под ред. И. В. Асташовой. М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012, 647 с. (ISBN 978-5-238-02368-7)

[9] Карулина Е.С. Некоторые оценки первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с интегральными условиями на потенциал и симметричными краевыми условиями // Дифференц. уравнения, 2010, Т. 46, № 6, С. 901.

[10] Карулина Е.С. Оценки первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с краевыми условиями третьего типа, с. 560–607. // Часть 4 в сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: научное издание под ред. И. В. Асташовой. М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012, 647 с. (ISBN 978-5-238-02368-7)

[11] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009, 572 с.

[12] Куралбаева К.З. Некоторые оптимальные оценки собственных значений задач Штурма–Лиувилля // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.02, 116 с., 1996.

[13] Куралбаева К.З. Об оценках первого собственного значения оператора Штурма–Лиувилля // Дифференциальные уравнения, 1996, Т. 32(6), С. 852–853.

[14] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., Наука, 1973.

[15] Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Элементы функционального анализа,* Наука, Москва, 1965.

[16] Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. Учеб. пособие для вузов. М., "Высш. школа", 1977.

[17] Осмоловский В.Г. Нелинейная задача Штурма–Лиувилля. Учеб. пособие. Издательство С.-Петербургского университета, Санкт-Петербург, 2003.

[18] Рапопорт И.М. Об одной вариационной задаче в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями// Докл. АН СССР, 1950, Т. 73, №5, с. 889–890.

[19] Сейранян А.П. Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны // Институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова, 2003, Т. 2, №2, С. 45-96.

[20] Эйлер Л. Об упругих кривых. В кн.: Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума или решение изопериметрической задачи , взятой в самом широком смысле // М.-Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1934, С. 447–572

[21] Cox S.J. The shape of ideal column // The Mathematical Intelligencer, 1992, V. 14, p.16–24.

[22] Cox S.J., Overton M.L. On optimal design of columns against buckling //SIAM J. Math. Anal., 1992, Vol. 23, p. 287–325.

[23] Egorov J.V., Karaa S. Optimization of the first eigenvalue of Sturm–Liouville operator // C. R. Acad. Sci. Paris, t. 319. Serie I, 1994, p. 793–798.

[24] Egorov Yu.V., Kondratiev V.A. On Spectral theory of elliptic operators // Operator theory: Advances and Applications, Birkhauser, Basel, 1996, V. 89, P. 1–325.

[25] Essen M. On estimating eigenvalues of a second order linear differential operator // ISNM, 80, Birkhauser, 1987, p. 347–366.

[26] Ezhak S.S. On the estimates for the minimum eigenvalue of the Sturm–Liouville problem with integral condition. (English) *J. Math. Sci.*, New York, 145, №. 5, 5205–5218 (2007); translation from *Sovrem. Mat. Prilozh.* 36, 56–69 (2005).

[27] Karaa S. Valeurs propres extremales dans problems de Sturm–Liouville// C. R. Acad. Sci. Paris, t. 321. Serie I, 1995, p. 265–270.

[28] Keller J.B. The shape of the strongest column // Arch. Rat. Mech. Anal., 1960, V.5, №4, P. 275–285.

[29] Lagrange J.L. Sur la figure des colonnes // In: Ouevres de Lagrange (Publ. de M.J.-A. Serret), V.2. Paris: Gauthier–Villars, 1868, P. 125–170.

[30] Ramm A.G. Question 5 (Part 2) // Notices Amer. Math. Soc., 29, 1982, p. 328–329.

[31] Talenti G. Estimates for eigenvalues of Sturm–Liouville problems// General inequalities, 4, in W. Walter ed., Birkhauser, Boston, 1984, p. 341–350.

[32] Tadjbakhsh I., Keller J.B. Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues // Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1962, V. 29, №1, P. 159–164.

Публикации автора по теме диссертации

Издания из списка ВАК.

[33] Тельнова М.Ю. Оценки первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с нулевыми граничными условиями и весовым интегральным условием на потенциал // Дифференциальные уравнения, 2012, Т. 48, №11, С. 1570–1571.

[34] Тельнова М.Ю. Об оценках первого собственного значения одной задачи Штурма–Лиувилля // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2014, №1(1), С. 209–217.

[35] Тельнова М.Ю. О задаче минимизации функционала, порожденного задачей Штурма-Лиувилля с весовым интегральным условием (Tel'nova M.Yu. Minimization problem for a functional generated by a Sturm–Liouville problem with weighted integral condition // Differential equations, 2014, Vol. 50, №12, pp. 1688–1689) // Дифференциальные уравнения, 2014, Т. 50, №12, С. 1683–1684.

Монография.

[36] Тельнова М.Ю. Оценки первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле и весовым интегральным условием, с. 608–647.// Часть 4 в сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: научное издание под ред. И. В. Асташовой. М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2012, 647 с. (ISBN 978-5-238-02368-7)

Статьи.

[37] Telnova M.Yu. On some estimates of the first eigen-value of a Sturm–Liouville problem with a weight integral condition // Materials of International miniconference "Qualitative theory of differential equations and applications" (2008, 30 May), M.: MESI, 2009, p. 131–145. (ISBN 978-5-7764-0563-1)

[38] Тельнова М.Ю. Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с весовым интегральным условием // Материалы Международной миниконференции "Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения" (8,15 июня, 2010), М.: МЭСИ, 2011, с. 45–63. (ISBN 978-5-7764-0607-2)

[39] Telnova M.Yu. On estimates for the first eigenvalue of one Sturm–Liouville problem // Материалы Международной миниконференции "Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения" (3 июня, 2011), М.: МЭСИ, 2011, с. 78–87. (ISBN 978-5-7764-0637-9)

[40] Telnova M.Yu. Some estimates for the first eigenvalue of the Sturm–Liouville problem with a weight integral condition // Mathematica Bohemica, 2012, V. 137, № 2, P. 229–238.

[41] Тельнова М.Ю. Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле и весовым интегральным условием // Материалы Международной миниконференции "Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения" (16 июня, 2012), М.: МЭСИ, 2013, с. 208–266.
(ISBN 978-5-7764-0752-0)

[42] Тельнова М.Ю. Об оценке снизу первого собственного значения одной задачи Штурма–Лиувилля с весовым интегральным усло-

вием на потенциал // Материалы Международной научной конференции "Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования", Архангельск, САФУ, 16–21 ноября 2014, с. 204–216.

[43] Тельнова М.Ю. Об одной оценке сверху первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле и весовым интегральным условием // Материалы Международной миниконференции "Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения" (22 июня и 19 декабря 2013 г., 24 мая 2014 г.), М.: МЭСИ, 2014, с. 126–140. (ISBN 978-5-7764-0983-7)

Тезисы докладов.

[44] Тельнова М.Ю. Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с весовым интегральным условием // Тезисы докладов 14-й Саратовской зимней школы "Современные проблемы теории функций и их приложения", 28 января–4 февраля 2008 года, Издательство Саратовского университета, 2008, с. 185–186.

[45] Telnova M.Yu. On some estimates of the first eigen-value of a Sturm–Liouville problem with a weight integral condition // Тезисы Международной конференции "Дифференциальные уравнения и топология", посвященной 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина. Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2008, с. 80–81.

[46] Тельнова М.Ю. Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с весовым интегральным условием печатный // Тезисы Международного Российско–Абхазского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики", Нальчик–Эльбрус, 2009, с. 212–213.

[47] Telnova M.Yu. Some estimates of the first eigen-value of a Sturm–Liouville problem with a weight integral condition // Abstracts of International Conference on Differential Equations and their Applications Equadiff 12, Brno, Czech Republic, 2009, p. 136.

[48] Telnova M.Yu. Some estimates for the first eigenvalue of one Sturm–Liouville problem // Abstracts of International Conference on Differential and Difference Equations and Applications, Department of Mathematics, Azores University, Ponta Delgada, Portugal, 2011, p. 121–122.

[49] Тельнова М.Ю. Об оценках первого собственного значения одной задачи Штурма–Лиувилля // Материалы IV Международной конференции "Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования" Воронеж, 2011, с. 288–290.

[50] Тельнова М.Ю. Оценки первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле и с весовым интегральным условием нам потенциал // Материалы V Международной конференции "Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования", 11–16 сентября 2012, Воронеж, с. 276–277.

[51] Тельнова М.Ю. Об оценках первого собственного значения одной задачи Штурма–Лиувилля с весовым интегральным условием на потенциал // Материалы Всероссийской научной конференции с международным участием "Спектральная теория операторов и ее приложения", г. Архангельск, Институт математики и компьютерных наук САФУ имени М.В. Ломоносова, 25–29 ноября 2012, с. 118–122.

[52] Тельнова М.Ю. Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле и весовым интегральным условием // Материалы Всероссийской научной конференции "Понтрягинские чтения – XXIV" в рамках XXIV Воронежской весенней математической школы "Современные методы теории краевых задач", Воронеж, 6–11 мая 2013 г., с. 190–192.

[53] Telnova M.Yu. Some estimates for the first eigenvalue of one Sturm–Liouville problem // Abstracts of International Conference on Applied Mathematics and Scientific Computing, Sibenik, Croatia, June 10–14, 2013, p. 61–62.

[54] Тельнова М.Ю. Об одной оценке минимального собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с интегральным условием // Материалы Всероссийской научной конференции "Понтрягинские чтения – XXV" в рамках XXV Воронежской весенней математической школы "Современные методы теории краевых задач", Воронеж, 3–8 мая 2014 г., с. 170–172.

[55] Telnova M. On some lower estimate for the first eigenvalue of a Sturm–Liouville problem with a weight singular integral condition // Abstracts of International Conference on Differential and Difference Equations and Applications, Jasna, Slovak Republic, June 23–27, 2014, p. 53–54.

[56] Тельнова М.Ю. Об одной оценке сверху первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с интегральным условием на потенциал // Материалы Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 4–9 июля 2014 г., с. 166–167.

[57] Telnova M. Estimates for the First Eigenvalue of a Sturm–Liouville Problem // Abstracts of European Advanced Studies Conference 2014, Symposium on Differential and Difference Equations 2014, 5th September 2014–8th September 2014, Homburg/Saar, Germany, p. 71.