

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.922+517.958



БОГАЕВСКИЙ Илья Александрович

**Фронты стратифицированных лежандровых подмногообразий
в задачах теории дифференциальных уравнений и
оптимизации**

Специальность 01.01.02 — «дифференциальные уравнения, динамические
системы и оптимальное управление»

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:

доктор физико-математических наук, профессор
Давыдов Алексей Александрович

Москва — 2018

Оглавление

Введение	5
1 Фронты стратифицированных лежандровых подмногообразий	15
1 Пары лежандровых подмногообразий	20
1.1 Понятия и определения	20
1.2 Теорема о надстройке	22
1.3 Контактные векторные поля и гамильтонианы	23
1.4 Действие гамильтонианов на производящие функции	24
1.5 Кратность пары лежандровых подмногообразий	25
1.6 Теорема о конечной Λ -определённости	26
1.7 Квазиструи производящих функций и правильные гамиль- тонианы	27
1.8 Теорема о достаточной квазиструе	28
2 Семейства пар лежандровых подмногообразий	29
2.1 Эквивалентность семейств	29
2.2 Бифуркационные диаграммы	31
2.3 Версальные деформации	31
2.4 Инфинитезимальная версальность и теорема версальности .	31
3 Приведение фронтов к нормальным формам	32
3.1 Основная конструкция	32
3.2 Устойчивость лежандровых отображений	34
4 Доказательства	36
4.1 Гомотопический метод и гомологическое уравнение	36
4.2 Лемма Накаямы с параметром	38
4.3 Доказательство теоремы о достаточной квазиструе	39
4.4 Доказательство конечной Λ -определённости	40

4.5	Классическая лемма	41
4.6	Доказательство теоремы версальности	42
2	Особенности фронтов геометрической оптики	46
1	Световая гиперповерхность и её особенности	49
1.1	Общая конструкция	49
1.2	Теория упругости	51
1.3	Уравнения Дирака для графена	53
1.4	Управляемые системы	54
2	Фронты лежандровых подмногообразий Λ_1 и Λ_2	55
2.1	Лежандровы подмногообразия Λ_1 и Λ_2	55
2.2	Производящие функции	56
2.3	Нормальные формы пар	57
2.4	Нормальные формы семейств пар	58
2.5	Явные формулы для бифуркационных диаграмм	58
2.6	Нормальные формы фронтов	60
3	Перестройки фронтов и особенности каустик	62
3.1	Фронты и каустики	62
3.2	Случай $D = 2$	63
3.3	Случай $D = 3$	67
4	Приведение к нормальным формам	70
4.1	Гамильтонианы	70
4.2	Леммы	72
4.3	Доказательство теоремы 2.2	77
4.4	Доказательство теоремы 2.3	80
3	Выпуклые оболочки трёхмерных гиперповерхностей	83
1	Фронты лежандровых подмногообразий R'_3 и V'_3	84
1.1	Лежандровы подмногообразия R'_3 и V'_3	84
1.2	Производящие функции	88
1.3	Нормальные формы пар	89
1.4	Нормальные формы семейств пар	93
1.5	Нормальные формы C^1 -фронтов	95
2	Особенности выпуклых оболочек	103

2.1	Введение	103
2.2	Выпуклые оболочки и опорные симплексы	110
2.3	Классификация особенностей выпуклых оболочек	111
2.4	Особенности лежандровых многообразий	113
2.5	Двойственность	115
2.6	Доказательство теоремы 2.10	117
4	Неявные обыкновенные дифференциальные уравнения и быстро-медленные системы	120
1	Конические точки уравнений и систем	123
1.1	Введение	123
1.2	Формулировки результатов	126
1.3	Доказательства	130
1.4	Явное интегрирование при $c = 0$	136
1.5	Уравнения смешанного типа на плоскости	136
2	Перестройки первых интегралов	139
2.1	Введение	139
2.2	Формулировки результатов	141
2.3	Доказательства	143
	Заключение	146
	Список литературы	147

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Фронты лежандровых подмногообразий применяются для описания многочисленных физических явлений и процессов, а исследование их особенностей очень важно для приложений. Возникающие в них лежандровы подмногообразия могут быть как гладкими¹, так и особыми или стратифицированными².

В гладком случае типичные особенности фронтов в пространствах низких размерностей³ в настоящее время хорошо изучены, а их дискретная классификация во всех размерностях совпадает со ADE -списком групп, порождённых отражениями. А именно, дискриминант группы (т. е. многообразие её нерегулярных орбит) диффеоморфен особенности фронта с тем же названием. Например, в трёхмерном пространстве типичные неприводимые особенности фронта гладкой лежандровой поверхности исчерпываются полукубическими рёбрами возврата и ласточкиными хвостами. (Неприводимость исключает из рассмотрения три очевидные типичные особенности: двойное и тройное самопересечения гладких стратов, а также пересечение гладкого страта с ребром возврата.)

Однако, в приложениях встречаются стратифицированные лежандровы подмногообразия. Например, при исследовании особенностей систем лучей в задаче о скорейшем обходе препятствия появились раскрытые ласточкины хвосты и раскрытые зонтики Уитни, фронты которых тоже хорошо изучены в простран-

¹Термин «гладкий» здесь и далее означает «бесконечно гладкий».

²Во избежание недоразумений в дальнейшем мы говорим о *стратифицированных* подмногообразиях, а не об *особых*.

³*Низкие* размерности — это 4 или меньше, что наиболее интересно для приложений, в которых фронт лежит в физическом пространстве или пространстве–времени.

ствах низких размерностей с помощью производящих семейств. Эти лежандровы подмногообразия универсальны — они появляются во многих задачах, друг с другом не связанных, и задаются алгебраическими уравнениями. Фронты раскрытых ласточкиных хвостов изучались О. П. Щербаком [53] и А. Б. Гивенталем [27].

Затем В. И. Арнольд [56] описал новое универсальное стратифицированное лежандрово подмногообразие Λ_2 , не являющееся алгебраическим, — в его уравнение входят логарифмы. Оно появляется при исследовании на уровне геометрической оптики волновых фронтов, распространяющихся в неоднородных анизотропных средах, в графене и в некоторых управляемых системах специального вида. В отличие от раскрытых ласточкиных хвостов и раскрытых зонтиков Уитни, это лежандрово подмногообразие не задаётся гладким производящим семейством, и поэтому особенности его фронтов не поддаются изучению традиционными методами.

Стратифицированные лежандровы подмногообразия, фронты которых не исследовались ранее, также возникают при исследовании особенностей выпуклых оболочек гладких подмногообразий. Последние встречаются в задачах выпуклого анализа и оптимизации. Например, в теории оптимального управления известна процедура релаксации, или замены множества допустимых скоростей управляемой системы на его выпуклую оболочку, особенности которой появляются при описании зоны локальной транзитивности исходной управляемой системы.

Фазовый портрет неявного обыкновенного дифференциального уравнения представляет собой семейство фронтов лежандровых кривых. В простейшем случае, исследованном М. Чибрарио [65], все эти лежандровы кривые имеют гладкие замыкания. Но уже для сложенных особых точек, нормальные формы которых были найдены А. А. Давыдовым [29], замыкания некоторых из них оказываются негладкими, но стратифицированными.

Таким образом, фронты стратифицированных лежандровых подмногообразий возникают в различных задачах теории дифференциальных уравнений и оптимизации. Поэтому разработка методов их локального исследования и классификация особенностей представляются важными, и актуальность тематики диссертации не вызывает сомнений.

Степень разработанности темы

В настоящее время известны следующие классификационные результаты о типичных особенностях фронтов в пространствах низких размерностей для различных лежандровых подмногообразий. Индекс (в пункте 5 — сумма верхнего и нижнего индексов) в обозначении особенности фронта — это её коразмерность в объемлющем пространстве; если она больше размерности базы проектирования, то указанная особенность не реализуется как типичная.

1. Исходное лежандрово подмногообразие гладкое. В этом хорошо известном классическом случае дискретная часть классификации особенностей фронтов совпадает с ADE -классификацией ростков функций, полученной В. И. Арнольдом [5], и типичные особенности фронтов исчерпываются с точностью до диффеоморфизмов следующими: A_1 (это просто точки гладкости), A_2 (кривая с полукубической точкой возврата или цилиндр над ней), A_3 (ласточкин хвост или цилиндр над ним), A_4 , D_4^+ и D_4^- .

2. Исходное лежандрово подмногообразие диффеоморфно паре пересекающихся прямых или цилиндру над ней. В этом случае дискретная часть классификации особенностей фронтов совпадает с классификацией ростков функций на многообразии с краем и к особенностям пункта 1 добавляются следующие [6],[88]: B_2 (пара касающихся парабол или цилиндр над ней), B_3 , B_4 и F_4 .

3. Исходное лежандрово подмногообразие диффеоморфно кривой с полукубической точкой возврата или цилиндру над ней. К особенностям пункта 1 добавляются следующие [53],[27],[52]: H_2 (кривая с точкой возврата $5/2$ или цилиндр над ней), H_3 и H_4 .

4. Исходное лежандрово подмногообразие — раскрытый ласточкин хвост размерности 2, или цилиндр над ним, или раскрытый ласточкин хвост размерности 3. К особенностям пунктов 1 и 3 добавляются следующие [53],[27]: Ξ_3 (фронт двумерного раскрытого ласточкина хвоста или цилиндр над ним), Ξ_4 (фронт трёхмерного раскрытого ласточкина хвоста) и Ω_4 (фронт цилиндра над двумерным раскрытым ласточкиным хвостом).

5. Исходное лежандрово подмногообразие — раскрытый зонтик Уитни размерности 2 или цилиндр над ним. К особенностям пункта 1 добавляются следующие [27]: S_2^1 (сложенный зонтик Уитни или цилиндр над ним) и S_3^1 .

Раскрытые ласточкины хвосты [7], [24],[25], [8], [77] и раскрытые зонтики Уитни [37], [26], [75], [76] — это серии особых алгебраических лежандровых подмногообразий, которые встречаются во многих задачах, в том числе о скорейшем обходе препятствия.

А. Б. Гивенталь [27] предложил критерий устойчивости ростка лежандрова (лагранжева) отображения исходного подмногообразия относительно возмущений проектирования и доказал теорему о его конечной определённости. Однако, нам развитой им техники недостаточно, поскольку не все ростки типичных лежандровых отображений устойчивы. Кроме того, в ней нет удобного критерия распознавания устойчивых ростков лежандровых отображений.

Лежандрово подмногообразие Λ_2 было описано В. И. Арнольдом [56],[12] при изучении геометрической оптики внутреннего рассеяния коротких линейных волн. Внутреннее рассеяние наблюдается в неоднородных анизотропных средах, т. е. оптические свойства которых зависят и от точки, и от направления, например, при распространении звука в упругой среде с линейной зависимостью тензора напряжений от тензора деформаций достаточно общего вида. Внутреннее рассеяние происходит, если в данной точке при данной фазовой скорости возможны две линейно независимые поляризации волны. По этой же причине происходит коническая рефракция Гамильтона [42] в кристаллах — анизотропных, но однородных средах.

Выпуклая оболочка общей гладкой компактной поверхности без края в трёхмерном пространстве может иметь особенности лишь двух видов, которые были найдены В. М. Закалюкиным [35]. В. Д. Седых описал [48] стабилизации этих особенностей, появляющиеся у выпуклой оболочки гладкой гиперповерхности в четырёхмерном пространстве, и сформулировал [47] гипотезу об отсутствии функциональных модулей у всех её типичных особенностей.

Теорема об усилении контактной эквивалентности до орбитальной для ростка гладкого неявного дифференциального уравнения в точке складке доказана А. А. Давыдовым [29]. Топологическая классификация типичных морсовских перестроек неявного дифференциального уравнения получена в статье [64].

Цели и задачи

Целями проведённого в диссертации исследования являются разработка универсального метода приведения фронтов стратифицированных лежандровых подмногообразий к локальным нормальным формам и его применение к решению следующих конкретных задач теории дифференциальных уравнений и оптимизации:

- Классификация и изучение типичных особенностей фронтов конкретных лежандровых подмногообразий, встречающихся при описании коротковолновых и квазиклассических асимптотик решений систем линейных уравнений с частными производными, а также в некоторых задачах быстрогодействия оптимального управления.
- Классификация и изучение особенностей выпуклых оболочек гладких замкнутых трёхмерных гиперповерхностей.
- Получение новых общих результатов об усилении контактной эквивалентности до орбитальной для ростков неявных дифференциальных уравнений и их семейств.
- Изучение некоторых особенностей и перестроек, встречающихся в типичных однопараметрических семействах неявных дифференциальных уравнений и быстро-медленных систем.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем.

1. Разработан оригинальный метод приведения фронта стратифицированного лежандра подмногообразия к локальной нормальной форме, основанный на представлении лежандра расслоения с помощью семейства производящих функций, на пространстве которых действует группа контактных диффеоморфизмов, сохраняющих исходное стратифицированное лежандрово подмногообразие.

2. Получена классификация особенностей типичного фронта стратифицированного лежандрова подмногообразия, описывающего геометрическую оптику внутреннего рассеяния волн в неоднородных анизотропных средах; фазу квазиклассической асимптотики решения уравнения Дирака для графена; решение задачи быстрогодействия для некоторых управляемых систем.
3. Завершена классификация особенностей выпуклой оболочки типичной гладкой замкнутой гиперповерхности в четырёхмерном пространстве. Доказана гипотеза, утверждающая отсутствие функциональных модулей в их нормальных формах. Найдены нормальные формы ростков стратифицированного лежандрова подмногообразия, фронтом которого является граница рассматриваемой выпуклой оболочки.
4. Доказана теорема об усилении контактной эквивалентности до орбитальной для особого ростка неявного дифференциального уравнения, квадратичного по производной, а также для ростка семейства таких уравнений. Как следствие, получена формальная орбитальная классификация конических точек неявных дифференциальных уравнений, встречающихся в типичных однопараметрических семействах.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты диссертации носят теоретический характер. Её значимость заключается как в решении конкретных задач теории дифференциальных уравнений и оптимизации, так и в возможности дальнейшего применения её общих результатов к аналогичным задачам в вышеперечисленных и смежных областях. Например, разработанный в диссертации метод приведения фронтов к локальным нормальным формам универсален и эффективно работает для широкого класса стратифицированных лежандровых подмногообразий.

Методология и методы исследования

Результаты второй, третьей и четвёртой глав диссертации получены с помощью разработанного в первой главе оригинального метода приведения фрон-

та стратифицированного лежандрова подмногообразия к локальной нормальной форме.

Этот метод основан на представлении лежандрова расслоения с помощью семейства производящих функций, для которых по обычной схеме Мазера–Мартине строится теория особенностей относительно группы контактных диффеоморфизмов, сохраняющих исходное стратифицированное лежандрово подмногообразие. Основными техническими средствами являются стандартные в теории особенностей теоремы о конечной определённости и версальности.

При доказательстве некоторых результатов диссертации используются гомотопический метод и подготовительная теорема Мальгранжа–Вейерштрасса.

Результаты, выносимые на защиту

1. Метод приведения фронта стратифицированного лежандрова подмногообразия к локальной нормальной форме, основанный на представлении лежандрова расслоения с помощью семейства производящих функций.
2. Классификация типичных особенностей фронтов некоторых лежандровых подмногообразий, встречающихся при описании коротковолновых и квазиклассических асимптотик решений систем линейных уравнений с частными производными, а также в некоторых задачах быстрогодействия оптимального управления.
3. Качественное исследование типичных перестроек мгновенных фронтов и особенностей каустик, проведённое с помощью полученной классификации.
4. Классификация типичных особенностей выпуклых оболочек гладких замкнутых трёхмерных гиперповерхностей и лежандровых подъёмов их границ.
5. Отсутствие функциональных модулей в нормальных формах всех типичных особенностей выпуклых оболочек гладких замкнутых трёхмерных гиперповерхностей.

6. Теорема об усилении контактной эквивалентности до орбитальной для особого ростка неявного дифференциального уравнения, квадратичного по производной, а также для ростка семейства таких уравнений.
7. Формальная орбитальная классификация конических точек неявных дифференциальных уравнений, встречающихся в их типичных однопараметрических семействах.
8. Нормальная форма взаимодействия сложенного зонтика и ласточкина хвоста на фронте раскрытого зонтика Уитни.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты диссертации прошли апробацию на многих международных конференциях и научных семинарах. В том числе за последние пять лет автором были сделаны по её теме следующие доклады:

1. «Фронты стратифицированных лежандровых подмногообразий в задачах теории дифференциальных уравнений и оптимизации», совместное заседание семинара по качественной теории дифференциальных уравнений и семинара “Математические методы экономики и естественных наук”, механико-математический ф-т МГУ имени М. В. Ломоносова, 14 декабря 2018 г.
2. «Фронты стратифицированных лежандровых подмногообразий в задачах теории дифференциальных уравнений и оптимизации», семинар “Динамические системы и дифференциальные уравнения”, механико-математический ф-т МГУ имени М. В. Ломоносова, 3 декабря 2018 г.
3. «Особенности подъёма фронта аффинной по управлению системы», семинар “Геометрическая теория оптимального управления”, механико-математический ф-т МГУ имени М. В. Ломоносова, 17 октября 2018 г.
4. «О локальной классификации неявных обыкновенных дифференциальных уравнений», международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, Россия, 6–11 июля 2018 г.

5. «Arnold's interior scattering in graphene», международная конференция “Semi-classical and Geometric Asymptotics in Mathematical Physics”, Toulon, Франция, 24–25 апреля 2018 г.
6. «Singularities of attainable sets and Arnold's interior scattering», международная конференция “Contemporary Mathematics 2017”, посвящённая 80-летию со дня рождения В. И. Арнольда, Москва, Россия, 18–23 декабря 2017 г.
7. «Singularities of attainable sets of control-affine systems», международная конференция “Geometric and Algebraic Singularity Theory”, Będlewo, Польша, 10–16 сентября 2017 г.
8. «Left-invariant sub-Lorentzian structures and control-affine systems», международная конференция по математической теории управления и механике, Суздаль, Россия, 7–11 июля 2017 г.
9. «Сублоренцевы структуры и аффинные по управлению системы», семинар “Геометрическая теория оптимального управления”, механико-математический ф-т МГУ имени М. В. Ломоносова, 19 апреля 2017 г.
10. «Особые системы лучей математической физики и их каустики», семинар “Асимптотические методы в математической физике”, ИПМех им. А. Ю. Ишлинского РАН, 15 ноября 2016 г.
11. «Особые системы лучей и их каустики», международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, Россия, 8–12 июля 2016.
12. «Особенности решений уравнения в частных производных», семинар “Динамические системы и дифференциальные уравнения”, механико-математический ф-т МГУ имени М. В. Ломоносова, 23 мая 2016 г.
13. «Left-invariant relativistic sub-Riemannian structures», международная конференция “Метрические структуры и управляемые системы”, Новосибирск, Россия, 17–21 декабря 2015 г.

14. «Релятивистские субримановы структуры: классификация и нормальные формы», научное совещание “Неголономные дни в Переславле”, Переславль-Залесский, Россия, 6-8 августа 2015 г.
15. «Implicit ordinary differential equations: transitions and strengthening equivalence», международная конференция “Singularities in Generic Geometry and its Applications”, Kobe, Kyoto, Япония, 3–10 июня 2015 г.
16. «Особенности и перестройки дифференциальных уравнений смешанного типа», международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, Россия, 4–9 июля 2014 г.

ГЛАВА 1

Фронты стратифицированных лежандровых подмногообразий

В настоящей главе разработан метод приведения к локальной нормальной форме фронта стратифицированного лежандрова подмногообразия, основанный на теории особенностей пары, состоящей из него самого и гладкого лежандрова подмногообразия. Особенностью такой пары мы называем росток объединения двух рассматриваемых лежандровых подмногообразий с точностью до контактных диффеоморфизмов объемлющего пространства.

Наш метод основан на следующем наблюдении. В терминах теории особенностей фронт исходного стратифицированного лежандрова подмногообразия локально представляет собой бифуркационную диаграмму семейства пар, состоящих из него и слоя лежандрова проектирования, который зависит от точки базы как от параметра. (По определению, бифуркационная диаграмма в этой ситуации — это множество значений параметра, при которых указанные многообразия пересекаются.) Но бифуркационные диаграммы можно приводить к локальным нормальным формам с помощью стандартных в теории особенностей теорем о конечной определённости и версальности.

Описанный подход к приведению фронтов к нормальным формам, основанный на теории особенностей пар лежандровых подмногообразий, является новым. Он более детально описан в разделе 3 настоящей главы. Сама используемая теория особенностей пар ранее не рассматривалась, но схема её построения обычна для теории особенностей — понятия и теоремы конечной определённости и версальности широко известны для различных эквивалентностей. Остаётся только их

приспособить к нашей ситуации, что мы и делаем в разделах 1, 2 и 4 настоящей главы.

Мы интересуемся типичными особенностями фронта исходного стратифицированного лежандрова подмногообразия, т. е. его образа при лежандровом проектировании общего положения. Такой фронт представляет собой, вообще говоря, особую гиперповерхность в базе проектирования. Во всех рассматриваемых в дальнейшем приложениях размерность базы проектирования не превосходит 4.

Сформулируем известные результаты в этой ситуации для различных лежандровых подмногообразий. Индекс (в пункте 5 — сумма верхнего и нижнего индексов) в обозначении особенности фронта — это её коразмерность в объемлющем пространстве; если она больше размерности базы проектирования, то указанная особенность не реализуется как типичная.

1. Исходное лежандрово подмногообразие гладкое. Это хорошо известный классический случай — среди типичных особенностей фронта встречаются дискриминанты групп Кокстера A_μ ($\mu \geq 1$, симметрии μ -мерного симплекса), D_μ ($\mu \geq 4$), E_6 , E_7 , E_8 и цилиндры¹ над ними. В частности, в нашей ситуации типичные особенности исчерпываются с точностью до диффеоморфизмов следующим списком:

A_1 (это просто точки гладкости), A_2 (кривая с полукубической точкой возврата или цилиндр над ней), A_3 (ласточкин хвост или цилиндр над ним), A_4 , D_4^+ и D_4^- .

См. [5], §§ 20–22 в [14], [9].

2. Исходное лежандрово подмногообразие диффеоморфно паре пересекающихся прямых или цилиндру над ней. Тогда среди типичных особенностей его фронта, кроме перечисленных в пункте 1, встречаются ещё дискриминанты групп Кокстера B_μ ($\mu \geq 2$, симметрии μ -мерного куба) и F_4 . В частности, в нашей ситуации к типичным особенностям пункта 1 добавляются следующие:

B_2 (пара касающихся парабол или цилиндр над ней), B_3 , B_4 и F_4 .

См. [6], [51], [89], [88], п. 3.2 главы 5 в [15], [9].

¹Цилиндр над X — это $X \times \mathbb{R}^k$, где $k \geq 1$.

3. Исходное лежандрово подмногообразие диффеоморфно кривой с полукубической точкой возврата или цилиндру над ней. Тогда среди типичных особенностей его фронта, кроме перечисленных в пункте 1, встречаются ещё дискриминанты групп Кокстера H_2 (симметрии правильного пятиугольника), H_3 (симметрии икосаэдра) и H_4 . Все они реализуются в нашей ситуации — т. е. к типичным особенностям пункта 1 добавляются следующие:

H_2 (кривая с точкой возврата $5/2$ или цилиндр над ней), H_3 и H_4 .

См. [52], [53], [27].

4. Исходное лежандрово подмногообразие — один из раскрытых ласточкиных хвостов или цилиндр над ним. Тогда среди типичных особенностей его фронта, кроме перечисленных в пунктах 1 и 3, встречаются ещё особенности Ξ_μ ($\mu \geq 3$) и Ω_μ ($\mu \geq 4$). В частности, в нашей ситуации к типичным особенностям пунктов 1 и 3 добавляются следующие:

Ξ_3 (фронт двумерного раскрытого ласточкина хвоста или цилиндр над ним),

Ξ_4 (фронт трёхмерного раскрытого ласточкина хвоста) и Ω_4 (фронт цилиндра над двумерным раскрытым ласточкиным хвостом).

См. [53], [27].

5. Исходное лежандрово подмногообразие — раскрытый зонтик Уитни размерности $2k$ или цилиндр над ним. Тогда среди типичных особенностей его фронта, кроме перечисленных в пункте 1, встречаются ещё особенности S_m^k ($m > k \geq 1$). В частности, в нашей ситуации к типичным особенностям пункта 1 добавляются следующие:

S_2^1 (сложенный зонтик Уитни или цилиндр над ним) и S_3^1 .

См. [27], [40].

Раскрытые ласточкины хвосты [7], [24], [25], [8], [77] — это серия многообразий с неизолрованными особенностями, которые встречаются во многих задачах, в том числе о скорейшем обходе препятствия. Раскрытые зонтики Уитни [37], [26], [75], [76] — это серия особых многообразий, которые также встречаются во многих задачах.

В большинстве процитированных выше работ лежандрово проектирование фиксировано, а исходное лежандрово подмногообразие задаётся с помощью производящего семейства функций или гиперповерхностей. Мы поступаем наоборот — фиксируем лежандрово подмногообразие, а лежандрово проектирование задаём с помощью семейства производящих функций. Наш подход более универсален, поскольку не всякое лежандрово подмногообразие задаётся производящим семейством. Таков, например, раскрытый зонтик Уитни — его можно задать производящим семейством, но только вместе с некоторым «лишним» лежандровым подмногообразием. В случаях 1 и 2 оба подхода приводят к хорошо известному (п. 21.5 в [14], [88]) описанию фронтов как бифуркационных диаграмм гиперповерхностей.

В [27] предложен критерий устойчивости роста лежандрова (лагранжева) отображения исходного подмногообразия относительно возмущений проектирования и доказана теорема о его конечной определённости. В частности, там доказано, что:

- ростки лежандровых отображений, перечисленные в пунктах 3–5 устойчивы;
- все простые устойчивые ростки лагранжевых отображений декартовых произведений аналитических плоских кривых, раскрытых ласточкиных хвостов и цилиндров над ними исчерпываются перечисленными в пунктах 1–4.

Однако, нам развитой в этой статье техники недостаточно, поскольку не все ростки типичных лежандровых отображений устойчивы. Кроме того, в ней нет удобного критерия распознавания устойчивых ростков лежандровых отображений.

Такой критерий предложен в параграфе 3.2 (теорема 3.9), но при его доказательстве мы существенно используем известный факт (п. 1.1 в [36]) о достаточности диффеоморфизма типичных фронтов для эквивалентности соответствующих лежандровых отображений. Верен ли аналогичных критерий для лагранжевых отображений, неизвестно.

Основной результат раздела 1 — сформулированная в параграфе 1.8 теорема 1.20 о достаточной квазиструе гладкого лежандрова подмногообразия, образующего пару с исходным стратифицированным лежандровым подмногообразием. Эта теорема используется в дальнейшем как одно из двух технических средств для

приведения его фронта к локальной нормальной форме. Кроме того, из неё следует теорема о конечной определённости особенности, кратность которой, определённая в параграфе 1.5, конечна.

При доказательстве теоремы 1.20 в разделе 4 мы следуем схеме доказательства теоремы о конечной определённости ростка функций с точностью до правой эквивалентности, принадлежащего Дж. Мазеру [83] и изложенного в [14], § 6, п. 6.4. А именно, мы рассматриваем действие контактных диффеоморфизмов, сохраняющих исходное стратифицированное лежандрово подмногообразие, на производящую функцию гладкого. Однако, в отличие от правой эквивалентности, действие контактного диффеоморфизма на производящую функцию нелинейно, но эта трудность преодолевается в параграфе 1.7.

Теория особенностей функций относительно правой эквивалентности (этот хорошо известный случай наиболее близок к нашему) со всеми используемыми нами доказательствами подробно изложена в учебнике [14]. Теорема о конечной определённости для них, которая часто называется теоремой Тужрона, доказана в [80], [90], [4], [91], [57], [44] в различных ситуациях.

В разделе 2 мы рассматриваем деформации пары стратифицированных лежандровых подмногообразий под действием двух семейств контактных диффеоморфизмов, зависящих от одних и тех параметров, но каждое из которых действует только на свое лежандрово подмногообразие. В параграфе 2.3 среди всех деформаций мы выделяем версальные, из которых получаются все остальные с помощью индуцирования и эквивалентности.

Вторым техническим средством, используемым в дальнейшем для приведения фронтов к локальным нормальным формам, является сформулированная в параграфе 2.4 теорема 2.13 версальности, позволяющая эффективно находить для данной особенности её версальную деформацию, из которой получаются все остальные. При её доказательстве в разделе 4 мы следуем схеме, предложенной Ж. Мартине и изложенной в [14], § 8, п. 8.3.

Систематический подход к устойчивости, версальности и конечной определённости отображений был развит Дж. Мазером в серии его работ [84], [86], [83], [85], [87], [82]. В другой ситуации теорема версальности была доказана в [50]. Затем Ж. Мартине в [81] предложил более красивое доказательство теоремы версальности для отображений. При доказательстве в разделе 4 наших теорем

о конечной определённости и версальности мы следуем схеме Мазера–Мартине, приспособивая её к парам лежандровых подмногообразий.

Дж. Деймон в [66], [67] сформулировал свойства, которыми должна обладать группа эквивалентности ростков отображений, чтобы стандартная схема Мазера–Мартине была применима. Это так называемые хорошие геометрические группы, теория которых без доказательств изложена в обзоре [2] (п. 2.5 главы 3).

Таким образом, видимо, есть и другой путь доказательства наших теорем о конечной определённости и версальности, состоящий в скрупулёзной проверке свойств Дж. Деймона и применения его теории хороших геометрических подгрупп. Однако, в нашей ситуации он не выглядит проще и нагляднее предложенного в разделе 4 настоящей главы.

Более подробная библиография по теории особенностей приведена в обзорах [2], [3], [15]. Результаты этой главы опубликованы в [60].

1 Пары лежандровых подмногообразий

1.1. Понятия и определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Стратифицированное подмногообразие* — это замкнутое подмножество гладкого многообразия с фиксированным конечным неупорядоченным разбиением на попарно непересекающиеся гладкие подмногообразия, называемые *стратами*. Само замкнутое подмножество называется *носителем*, а его разбиение на страты — *стратификацией*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. (Про)образ стратифицированного подмногообразия Λ при диффеоморфизме объемлющего многообразия — это стратифицированное подмногообразие, каждый страт которого — (про)образ некоторого страта Λ . Диффеоморфизм объемлющего пространства сохраняет Λ , если он переводит его страты в страты, быть может переставляя их.

Как правило, в приложениях возникают стратифицированные подмногообразия с «геометрически естественной» стратификацией. С формальной точки зрения это означает, что их стратификация инвариантна в следующем смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. *Инвариантно стратифицированное подмногообразие Λ* — это стратифицированное подмногообразие, разбиение которого на страты удовлетворяет следующему дополнительному условию инвариантности: любой диффеоморфизм объемлющего многообразия, сохраняющий носитель Λ , сохраняет и его стратификацию, т. е. переводит страты в страты.

Этому определению удовлетворяют, например, все аналитические подмногообразия. Оно нам понадобится только в параграфе 3.2. Однако, все стратифицированные подмногообразия, упоминаемые в настоящей диссертации, ему удовлетворяют за исключением следующего контрпримера. А именно, прямая с отмеченной точкой является стратифицированным подмногообразием (состоящим из отмеченной точки и её дополнения до прямой), но не является инвариантно стратифицированным.

Пусть E — контактное пространство размерности $2m + 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Стратифицированное подмногообразие $\Lambda \subset E$ называется лежандровым, если выполнены следующие условия:

- Λ является замыканием объединения всех своих стратов наибольшей размерности m ;
- все страты наибольшей размерности m — лежандровы подмногообразия.

Мы рассматриваем пары (Λ, L) , состоящие из стратифицированного лежандрова подмногообразия Λ и гладкого лежандрова подмногообразия L .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Две пары (Λ, L) и (Λ', L') называются эквивалентными, если они переводятся друг в друга контактным диффеоморфизмом $g : E \rightarrow E$: $\Lambda = g(\Lambda')$, $L = g(L')$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Если пары (Λ, L) и (Λ, L') эквивалентны, то лежандровы подмногообразия L и L' называются Λ -эквивалентными, что обозначается как $L \sim_{\Lambda} L'$.

Пусть теперь $E = J^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ — пространство 1-струй функций на \mathbb{R}^m со стандартной контактной формой $\theta = p dx - du$, где $x = (x_1, \dots, x_m)$ — координаты в \mathbb{R}^m , $p = (p_1, \dots, p_m)$ — сопряжённые им импульсы, $u \in \mathbb{R}$ — значение функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Гладкая функция $w : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ называется производящей функцией лежандрова подмногообразия

$$\mathcal{L}[w] = \{ (p, x, u) \in J^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \mid p = \partial_x w, u = w(x) \}.$$

Если пары $(\Lambda, \mathcal{L}[w])$ и $(\Lambda, \mathcal{L}[w'])$ эквивалентны, то производящие функции w и w' называются Λ -эквивалентными, что обозначается как $w \sim_\Lambda w'$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Пусть (Λ, L) — пара лежандровых подмногообразий в $J^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ и $k \geq 1$. Рассмотрим естественное отождествление

$$J^1(\mathbb{R}^{m+k}, \mathbb{R}) = J^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{k*} \times \mathbb{R}^k,$$

где \mathbb{R}^{k*} — пространство линейных форм на \mathbb{R}^k и пару лежандровых подмногообразий в $J^1(\mathbb{R}^{m+k}, \mathbb{R})$:

$$\Lambda' = \Lambda \times \mathbb{R}^{k*} \times 0, \quad L' = L \times 0 \times \mathbb{R}^k.$$

Лежандрово подмногообразие Λ' называется *надстройкой* над Λ , а пара (Λ', L') — *надстройкой* над (Λ, L) .

1.2. Теорема о надстройке

ТЕОРЕМА 1.9. Пусть $\Lambda \subset J^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ — стратифицированное лежандрово подмногообразие,

$$\Lambda' = \Lambda \times \mathbb{R}^{k*} \times 0 \subset J^1(\mathbb{R}^{m+k}, \mathbb{R}) = J^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{k*} \times \mathbb{R}^k$$

— надстройка над Λ , $\mathcal{L}[w'] \subset J^1(\mathbb{R}^{m+k}, \mathbb{R})$ — гладкое лежандрово подмногообразие, заданное производящей функцией $w' : \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$, а $w = w'|_{\mathbb{R}^m} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — ограничение производящей функции w' на $\mathbb{R}^m \times 0 \subset \mathbb{R}^{m+k}$ при естественном отождествлении $\mathbb{R}^m \times 0 \cong \mathbb{R}^m$.

Тогда пара $(\Lambda', \mathcal{L}[w'])$ эквивалентна надстройке над парой $(\Lambda, \mathcal{L}[w])$, где $\mathcal{L}[w] \subset J^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ — гладкое лежандрово подмногообразие, заданное производящей функцией w .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опишем диффеоморфизм, сохраняющий контактную форму и переводящий стратифицированное лежандрово подмногообразие $\Lambda' = \Lambda \times \mathbb{R}^{k^*} \times 0$ в себя, а гладкое лежандрово подмногообразие $\mathcal{L}[w] \times 0 \times \mathbb{R}^k$ — в $\mathcal{L}[w']$.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$, $p = (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{R}^{m^*}$, $q = (q_1, \dots, q_k) \in \mathbb{R}^{k^*}$ и $u \in \mathbb{R}$ — стандартные координаты. Тогда $w(x) = w'(x, 0)$,

$$\mathcal{L}[w'] = \{u = w'(x, y), p = \partial_x w'(x, y), q = \partial_y w'(x, y)\} \subset J^1(\mathbb{R}^{m+k}, \mathbb{R}),$$

$$\mathcal{L}[w] = \{u = w'(x, 0), p = \partial_x w'(x, 0)\} \subset J^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$$

Пусть $w_1(x, y) = w'(x, y) - w'(x, 0)$. Диффеоморфизм

$$g : J^1(\mathbb{R}^{m+k}, \mathbb{R}) \rightarrow J^1(\mathbb{R}^{m+k}, \mathbb{R}),$$

$$g : (p, x, u, q, y) \mapsto (p + \partial_x w_1(x, y), x, u + w_1(x, y), q + \partial_y w_1(x, y), y)$$

сохраняет контактную форму $p dx + q dy - du$ и переводит

$$\mathcal{L}[w] \times 0 \times \mathbb{R}^k = \{u = w(x, 0), p = \partial_x w(x, 0), q = 0\} \subset J^1(\mathbb{R}^{m+k}, \mathbb{R})$$

в $\mathcal{L}[w']$. Кроме того, g сохраняет подпространство $\{y = 0\}$ и действует на нём по формулам:

$$g|_{y=0} : (p, x, u, q, 0) \mapsto (p, x, u, q + \partial_y w_1(x, 0), 0),$$

поскольку $w_1(x, 0) = 0$. Следовательно, g сохраняет $\Lambda' = \Lambda \times \mathbb{R}^{k^*} \times 0$ и осуществляет требуемую эквивалентность. \square

1.3. Контактные векторные поля и гамильтонианы

Векторное поле v на контактном пространстве называется *контактным*, если его фазовый поток сохраняет распределение контактных гиперплоскостей. Гладкая функция $H : J^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, определённая формулой $H = \theta(v)$ называется *гамильтонианом* контактного векторного поля v , которое восстанавливается

по своему гамильтониану:

$$\mathbf{v} = \begin{cases} \dot{p} = -\partial_x H - p \partial_u H \\ \dot{x} = \partial_p H \\ \dot{u} = p \partial_p H - H \end{cases} . \quad (1.1)$$

Имея в виду этот факт, мы в дальнейшем используем обозначение $\vec{H} = \mathbf{v}$ для векторного поля, определённого формулами (1.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10. Хорошо известно (и непосредственно следует из формул (1.1) для \vec{H}), что $\vec{H}(\theta) = -\partial_u H \cdot \theta$ и $\vec{H}(H) = -\partial_u H \cdot H$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.11. *Гамильтонианы контактных векторных полей, которые касаются всех стратов стратифицированного лежандрова подмногообразия Λ , обращаются в нуль на Λ и образуют идеал в алгебре гладких функций на $J^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что контактное векторное поле касается гладкого лежандрова подмногообразия Λ_0 тогда и только тогда, когда его гамильтониан обращается на Λ_0 в нуль. Применяя этот факт к объединению Λ_0 стратов старшей размерности стратифицированного лежандрова подмногообразия Λ , получаем, что гамильтониан любого контактного векторного поля, касающегося всех его стратов, обращается в нуль на Λ_0 , а значит и на его замыкании Λ .

Далее, пусть контактное векторное поле \vec{H} касается всех стратов Λ . Тогда H обращается на Λ в нуль. Рассмотрим контактное векторное поле \mathbf{v} с гамильтонианом $f \cdot H$, где f — гладкая функция на $J^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$. Согласно формулам (1.1) $\mathbf{v}(e) = f(e)\vec{H}(e)$, если $H(e) = 0$, где $e \in J^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$. Следовательно, поле \mathbf{v} пропорционально полю \vec{H} во всех точках стратифицированного лежандрова подмногообразия Λ , поскольку H обращается на нём в нуль. Значит, поле \mathbf{v} касается всех стратов Λ . \square

1.4. Действие гамильтонианов на производящие функции

Рассмотрим фазовый поток g_H^t контактного векторного поля с гамильтонианом H . Под его действием лежандрово подмногообразие, заданное начальной производящей функцией w_0 , изменяется, оставаясь лежандровым. Как вычислить

скорость изменения его производящей функции под действием фазового потока g_H^t ?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12. Функция

$$H[w] : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto H(\partial_x w(x), x, w(x))$$

называется ограничением гамильтониана

$$H : J^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (p, x, u) \mapsto H(p, x, u)$$

на лежандрово подмногообразии

$$\mathcal{L}[w] = \{p = \partial_x w(x), u = w(x)\},$$

заданное производящей функцией $w : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.13. Пусть w_t — производящая функция лежандрова подмногообразия $g_H^t(\mathcal{L}[w_0])$:

$$\mathcal{L}[w_t] = g_H^t(\mathcal{L}[w_0]).$$

Тогда она удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби:

$$\partial_t w_t + H[w_t] = 0.$$

1.5. Кратность пары лежандровых подмногообразий

Пусть (Λ, L) — пара стратифицированных лежандровых подмногообразий, имеющих общую точку $\ell \in \Lambda \cap L$. Обозначим через \mathcal{E}_E алгебру ростков в точке ℓ гладких функций на E , а через \mathfrak{h}_Λ и \mathfrak{h}_L — идеалы в \mathcal{E}_E , состоящие из ростков гамильтонианов контактных векторных полей, которые касаются всех стратов Λ и L соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.14. Фактор-алгебра

$$Q(\Lambda, L) = \mathcal{E}_E / (\mathfrak{h}_\Lambda + \mathfrak{h}_L)$$

называется *локальной алгеброй* ростка пары (Λ, L) стратифицированных лежандровых подмногообразий. Размерность локальной алгебры

$$\mu(\Lambda, L) = \dim_{\mathbb{R}} Q(\Lambda, L) \geq 1$$

называется *кратностью* ростка пары (Λ, L) .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.15. Неравенство $\mu(\Lambda, L) \geq 1$ следует из условия $\ell \in \Lambda \cap L$.

Если L — гладкое лежандрово подмногообразие, то \mathfrak{h}_L состоит из всех ростков гладких функций, обращающихся на L в нуль. В этом случае локальная алгебра пары вычисляется по очевидной формуле:

$$Q(\Lambda, L) = \mathcal{E}_L / \mathfrak{h}_\Lambda[L],$$

где \mathcal{E}_L — алгебра ростков гладких функций на L , а $\mathfrak{h}_\Lambda[L]$ — ограничение идеала \mathfrak{h} на гладкое лежандрово подмногообразие L (поскольку $\mathcal{E}_L = \mathcal{E}_E / \mathfrak{h}_L$).

1.6. Теорема о конечной Λ -определённости

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.16. Если все ростки гладких лежандровых подмногообразий с одной и той же струей Λ -эквивалентны, то эта струя называется Λ -достаточной. Росток лежандрова подмногообразия называется *конечно Λ -определённым*, если его некоторая конечная струя Λ -достаточна.

ТЕОРЕМА 1.17. *Если кратность μ ростка пары, состоящей из стратифицированного лежандрова подмногообразия Λ и гладкого лежандрова подмногообразия L , конечна, то росток L конечно Λ -определён. Более точно, его μ -струя Λ -достаточна.*

Теорема 1.17 следует из более общей теоремы 1.20 о достаточной квази-струе, сформулированной в параграфе 1.8.

1.7. Квазиструи производящих функций и правильные гамильтонианы

Выберем в окрестности точки $\ell \in E$ локальные координаты $p = (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{R}^{m*}$, $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ и $u \in \mathbb{R}$ такие, что контактная структура в E задаётся контактной формой

$$\theta = p dx - du.$$

Алгебра \mathcal{E}_E ростков в ℓ гладких функций на E отождествляется с алгеброй $\mathcal{E}_{p,x,u}$ ростков в начале координат гладких функций от координат p , x и u . Элементы этой алгебры мы будем называть ростками гамильтонианов или просто гамильтонианами.

Обозначим через \mathcal{E}_x алгебру ростков в нуле гладких функций на \mathbb{R}^m , т. е. только от координат x , а через \mathfrak{m}_x — максимальный идеал в ней. Элементы алгебры \mathcal{E}_x мы будем называть ростками производящих функций или просто производящими ростками.

Зафиксируем у координат p , x и u натуральные веса так, чтобы контактная форма θ была квазиоднородной:

$$\deg u = \deg p_1 + \deg x_1 = \dots = \deg p_m + \deg x_m,$$

$$\deg p_1, \dots, \deg p_m, \deg x_1, \dots, \deg x_m \geq 1, \quad \deg u \geq 2.$$

Обозначим через $\mathcal{E}_{p,x,u}^d \subset \mathcal{E}_{p,x,u}$ и $\mathcal{E}_x^d \subset \mathcal{E}_x$ идеалы, состоящие из ростков, в разложении Тейлора которых все ненулевые члены имеют квазистепени d или выше.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.18. Производящие ростки из $\mathcal{E}_x^{\deg u}$ и гамильтонианы из $\mathcal{E}_{p,x,u}^{\deg u}$ называются *правильными*. Элементы фактор-пространства $\mathcal{E}_x^{\deg u} / \mathcal{E}_x^{k+1}$, где $k \geq \deg u$ называются k -квазиструями правильных производящих ростков.

Оказывается, что фазовые потоки контактных векторных полей с правильными гамильтонианами корректно действуют на квазиструи правильных производящих ростков. Точно этот факт отражает следующая лемма 1.19. Прежде чем её сформулировать отметим, что согласно уравнению Гамильтона–Якоби действие контактного векторного поля на производящую функцию — это с точностью до

знака ограничение гамильтониана на лежандрово подмногообразии. (См. определение 1.12 и утверждение 1.13.)

ЛЕММА 1.19. Пусть w_0 и w_1 — правильные производящие ростки с одной и той же k -квазиструей, а h — правильный гамильтониан:

$$w_0, w_1 \in \mathcal{E}_x^{\deg u}, \quad w_1 - w_0 \in \mathcal{E}_x^{k+1}, \quad k \geq \deg u, \quad h \in \mathcal{E}_{p,x,u}^{\deg u}.$$

Тогда $h[w_0]$ и $h[w_1]$ — правильные производящие ростки с одной и той же k -квазиструей:

$$h[w_0], h[w_1] \in \mathcal{E}_x^{\deg u}, \quad h[w_1] - h[w_0] \in \mathcal{E}_x^{k+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, если $w \in \mathcal{E}_x^{\deg u}$ и $f \in \mathcal{E}_{p,x,u}^d$, то $f[w] \in \mathcal{E}_x^d$. В самом деле, для всех $j = 1, \dots, m$:

$$\partial_{x_j} w \in \mathcal{E}_x^{\deg u - \deg x_j} = \mathcal{E}_x^{\deg p_j}, \quad x_j \in \mathcal{E}_x^{\deg x_j}, \quad w \in \mathcal{E}_x^{\deg u}.$$

Следовательно, $f[w] = f(\partial_x w, x, w) \in \mathcal{E}_x^d$, поскольку $f \in \mathcal{E}_{p,x,u}^d$. В частности, $h[w_0]$ и $h[w_1]$ — правильные производящие ростки.

Пусть далее $\tau \in \mathbb{R}$ и $w_\tau = w_0 + \tau\varphi \in \mathcal{E}_x^{\deg u}$, где $\varphi = w_1 - w_0 \in \mathcal{E}_x^{k+1}$. Тогда согласно доказанному выше $\partial_{p_i} h[w_\tau] \in \mathcal{E}_x^{\deg x_i}$, поскольку $\partial_{p_i} h \in \mathcal{E}_{p,x,u}^{\deg u - \deg p_i} = \mathcal{E}_{p,x,u}^{\deg x_i}$. Следовательно:

$$\partial_\tau (h[w_0 + \tau\varphi] - h[w_0]) = \partial_p h[w_\tau] \cdot \partial_x \varphi + \partial_u h[w_\tau] \cdot \varphi \in \mathcal{E}_x^{k+1},$$

поскольку $\partial_{p_i} h[w_\tau] \in \mathcal{E}_x^{\deg x_i}$, $\varphi \in \mathcal{E}_x^{k+1}$ и $\partial_{x_i} \varphi \in \mathcal{E}_x^{k+1 - \deg x_i}$.

Но разность $h[w_0 + \tau\varphi] - h[w_0]$ при $t = 0$ обращается в нуль. Значит, $h[w_0 + \tau\varphi] - h[w_0] \in \mathcal{E}_x^{k+1}$ при всех $\tau \in \mathbb{R}$. В частности, при $\tau = 1$ получаем: $h[w_0 + \varphi] - h[w_0] = h[w_1] - h[w_0] \in \mathcal{E}_x^{k+1}$. \square

1.8. Теорема о достаточной квазиструе

Пусть теперь $\Lambda \subset E$ — стратифицированное лежандрово подмногообразие, содержащее точку ℓ , а $\mathfrak{h}'_\Lambda = \mathfrak{h}_\Lambda \cap \mathcal{E}_{p,x,u}^{\deg u}$ — идеал, состоящий из таких правильных гамильтонианов, что их контактные векторные поля касаются всех стратов Λ .

Пусть далее $w_0 \in \mathcal{E}_x^{\deg u}$ — правильный производящий росток. (Как следствие, росток лежандрова подмногообразия $\mathcal{L}[w_0]$ содержит точку ℓ .) Обозначим через $\mathfrak{h}'_\Lambda[w_0] \subset \mathcal{E}_x$ — ограничение идеала \mathfrak{h}'_Λ на росток лежандрова подмногообразия $\mathcal{L}[w_0]$, как в определении 1.12. Согласно лемме 1.19 это ограничение состоит только из правильных производящих ростков: $\mathfrak{h}'_\Lambda[w_0] \subset \mathcal{E}_x^{\deg u}$.

ТЕОРЕМА 1.20. *Если $\mathcal{E}_x^{k+1} \subset \mathfrak{m}_x \cdot \mathfrak{h}'_\Lambda[w_0]$ для некоторого $k \geq \deg u$, то k -квазиструя правильного производящего ростка w_0 Λ -достаточна: $w_0 + \varphi \sim_\Lambda w_0$ для любого ростка $\varphi \in \mathcal{E}_x^{k+1}$.*

2 Семейства пар лежандровых подмногообразий

2.1. Эквивалентность семейств

Пусть $\Lambda, L \subset E$ — фиксированные стратифицированные лежандровы подмногообразия, а $f_\star, g_\star : E \times X \rightarrow E$ — семейства контактных диффеоморфизмов $f_\xi, g_\xi : E \rightarrow E$, гладко зависящих от параметра $\xi \in X$ — точки многообразия X .

Мы рассматриваем семейства

$$(\Lambda_\star, L_\star) = (f_\star(\Lambda), g_\star(L))$$

пар стратифицированных лежандровых подмногообразий

$$(\Lambda_\xi, L_\xi) = (f_\xi(\Lambda), g_\xi(L)),$$

зависящих от параметра $\xi \in X$ — точки многообразия X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Семейство $(f_\star(\Lambda), g_\star(L))$ пар стратифицированных лежандровых подмногообразий — это пара стратифицированных подмногообразий в $E \times X$ вида

$$f_\star(\Lambda) = \{(e, \xi) \mid e \in f_\xi(\Lambda)\}, \quad g_\star(L) = \{(e, \xi) \mid e \in g_\xi(L)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Два семейства пар стратифицированных лежандровых подмногообразий $(f_\xi(\Lambda), g_\xi(L))$ и $(f_\xi^\circ(\Lambda), g_\xi^\circ(L))$, зависящих от одного и того же

параметра $\xi \in X$, называются эквивалентными, если они переводятся друг в друга гладким семейством κ_\star контактных диффеоморфизмов $\kappa_\xi : E \rightarrow E$, зависящих от того же самого параметра $\xi \in X$:

$$\kappa_\xi(f_\xi(\Lambda)) = f_\xi^\circ(\Lambda), \quad \kappa_\xi(g_\xi(L)) = g_\xi^\circ(L) \quad \forall \xi \in X.$$

Иначе говоря, семейства $(f_\star(\Lambda), g_\star(L))$ и $(f_\star^\circ(\Lambda), g_\star^\circ(L))$ эквивалентны, если диффеоморфизм $(e, \xi) \mapsto (\kappa_\xi(e), \xi)$ переводит $f_\star(\Lambda)$ в $f_\star^\circ(\Lambda)$, а $g_\star(L)$ в $g_\star^\circ(L)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Пусть $f_\star^\circ, g_\star^\circ : E \times X \rightarrow E$ и $f_\star', g_\star' : E \times X' \rightarrow E$ — семейства контактных диффеоморфизмов, гладко зависящих от параметров $\xi \in X$ и $\xi' \in X'$, а $\varphi : X \rightarrow X'$ — гладкое отображение. Семейство пар стратифицированных лежандровых подмногообразий $(f_\xi^\circ(\Lambda), g_\xi^\circ(L))$, зависящих от параметра $\xi \in X$, называется индуцированным с помощью отображения φ из семейства пар стратифицированных лежандровых подмногообразий $(f_{\xi'}'(\Lambda), g_{\xi'}'(L))$, зависящих от параметра $\xi' \in X'$, если

$$f_\xi^\circ(\Lambda) = f_{\varphi(\xi)}'(\Lambda), \quad g_\xi^\circ(L) = g_{\varphi(\xi)}'(L) \quad \forall \xi \in X.$$

Иначе говоря, семейство $(f_\star^\circ(\Lambda), g_\star^\circ(L))$ индуцировано с помощью отображения φ из семейства $(f_\star'(\Lambda), g_\star'(L))$, если $f_\star^\circ(\Lambda)$ — прообраз $f_\star'(\Lambda)$, а $g_\star^\circ(L)$ — прообраз $g_\star'(L)$ при отображении $(e, \xi) \mapsto (e, \varphi(\xi))$.

Объединим последние два определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Семейство пар $(f_\star(\Lambda), g_\star(L))$ стратифицированных лежандровых подмногообразий эквивалентно индуцированному из семейства $(f_{\xi'}'(\Lambda), g_{\xi'}'(L))$ с помощью отображения φ , если $f_\star(\Lambda)$ — прообраз $f_\star'(\Lambda)$, а $g_\star(L)$ — прообраз $g_\star'(L)$ при отображении $(e, \xi) \mapsto (\kappa_\xi(e), \varphi(\xi))$:

$$\kappa_\xi(f_\xi(\Lambda)) = f_{\varphi(\xi)}'(\Lambda), \quad \kappa_\xi(g_\xi(L)) = g_{\varphi(\xi)}'(L) \quad \forall \xi \in X,$$

где κ_\star — семейство контактных диффеоморфизмов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Два семейства пар стратифицированных лежандровых подмногообразий называются индуцированно эквивалентными, если одно из них эквивалентно индуцированному из другого с помощью диффеоморфизма.

2.2. Бифуркационные диаграммы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Бифуркационная диаграмма $\Sigma(\Lambda_*, L_*)$ семейства пар лежандровых подмногообразий, зависящих от параметра $\xi \in X$, — это множество тех значений параметра $\xi \in X$, при которых лежандровы подмногообразия Λ_ξ и L_ξ имеют общую точку.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. Бифуркационные диаграммы эквивалентных семейств совпадают.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Бифуркационные диаграммы индуцированно эквивалентных семейств диффеоморфны.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.9. Бифуркационные диаграммы семейства и его надстройки совпадают.

2.3. Версальные деформации

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. Деформация ростка пары (Λ, L) стратифицированных лежандровых подмногообразий в точке $\ell \in \Lambda \cap L \subset E$ — это пара ростков в точке $\ell \times 0$ стратифицированных подмногообразий в $E \times \mathbb{R}^n$ вида

$$f_*(\Lambda) = \{(e, \xi) \mid e \in f_\xi(\Lambda)\}, \quad g_*(L) = \{(e, \xi) \mid e \in g_\xi(L)\},$$

где $f_*, g_* : E \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$ — семейства зависящих от параметров $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ контактных диффеоморфизмов, удовлетворяющие условиям $f_0 = g_0 = \text{id}_E$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.11. Деформация ростка пары (Λ, L) стратифицированных лежандровых подмногообразий называется *версальной*, если любая другая деформация того же ростка эквивалентна индуцированной из неё.

2.4. Инфинитезимальная версальность и теорема версальности

Пусть $e = (p, x, u)$ — координаты в окрестности точки $\ell \in E$. Алгебра \mathcal{E}_E ростков в ℓ гладких функций на E отождествляется с алгеброй $\mathcal{E}_e = \mathcal{E}_{p, x, u}$ ростков в начале координат гладких функций от координат $e = (p, x, u)$. Как и раньше, элементы этой алгебры мы будем называть ростками гамильтонианов или просто гамильтонианами.

Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, а $h^1, \dots, h^n \in \mathcal{E}_e$ — ростки гамильтонианов контактных векторных полей

$$\vec{h}^i(e) = \partial_{\xi_i} f_\xi(e)|_{\xi=0} - \partial_{\xi_i} g_\xi(e)|_{\xi=0}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.12. Деформация $(f_*(\Lambda), g_*(L))$ ростка пары стратифицированных лежандровых подмногообразий называется *инфинитезимально версальной*, если классы ростков гамильтонианов $h^1, \dots, h^n \in \mathcal{E}_e$ порождают локальную алгебру ростка пары как векторное пространство:

$$\mathcal{E}_e / (\mathfrak{h}_\Lambda + \mathfrak{h}_L) = \langle [h^1], \dots, [h^n] \rangle_{\mathbb{R}},$$

где \mathfrak{h}_Λ и \mathfrak{h}_L — идеалы, которые состоят из гамильтонианов контактных векторных полей, касающихся всех стратов лежандровых подмногообразий Λ и L соответственно.

ТЕОРЕМА 2.13 (ВЕРСАЛЬНОСТИ). *Инфинитезимально версальная деформация ростка пары стратифицированных лежандровых подмногообразий является версальной.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.14. Верно и обратное: версальная деформация инфинитезимально версальна. Но нам этот факт не понадобится, поэтому мы его не доказываем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.15. Инфинитезимально версальная деформация с наименьшим возможным числом параметров называется *миниверсальной*.

3 Приведение фронтов к нормальным формам

3.1. Основная конструкция

Пусть E — контактное пространство, а $\pi : E \rightarrow X$ — *лежандрово* расслоение, т. е. слои которого лежандровы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Фронт стратифицированного лежандрова подмногообразия $\Lambda \subset E$ — это его образ $\pi(\Lambda)$ при проектировании π .

Общее описание типичных особенностей фронта исходного стратифицированного лежандрова подмногообразия Λ к локальным нормальным формам состоит в следующем.

- Рассмотрим пару $(\Lambda, \pi^{-1}(\xi))$ лежандровых подмногообразий, состоящую из исходного лежандрова подмногообразия и слоя проектирования. Такие пары зависят от точки базы $\xi \in X$ как от параметра и образуют семейство, бифуркационная диаграмма которого и есть фронт $\pi(\Lambda)$.
- Предполагая, что π общего положения, с помощью теоремы о достаточной квазиструе приводим к нормальным формам ростки всех пар, встречающихся в нашем семействе. Часто при этом можно понизить размерность пары с помощью теоремы о надстройке.
- После этого выписываем миниверсальные деформации всех полученных ростков пар с помощью теоремы версальности. Любой росток нашего семейства эквивалентен индуцированному из миниверсальной деформации с помощью отображения φ общего положения, которое можно упростить по крайней мере выбором координат в прообразе. Как и при классификации лагранжевых и лежандровых отображений гладких подмногообразий (§ 21 в [14], [34]), при этом возможны следующие два варианта.
 1. Нормальная форма ростка пары $(\Lambda, \pi^{-1}(\xi))$ не содержит непрерывных инвариантов. Тогда φ — эпиморфизм, который выбором координат в прообразе приводится к виду проектирования вдоль дополнительных параметров. В этом случае деформация, индуцированная из миниверсальной с помощью отображения φ , является версальной.
 2. В нормальной форме ростка пары $(\Lambda, \pi^{-1}(\xi))$ есть непрерывные инварианты. Тогда общность положения требует от φ только трансверсальности страту, параметризованному этими инвариантами. Ситуация усложняется, и деформация, индуцированная из миниверсальной с помощью отображения φ , уже не обязана быть версальной.

Бифуркационная диаграмма деформации, индуцированной из миниверсальной с помощью отображения φ , и есть локальная нормальная форма фронта исходного лежандрова подмногообразия.

3.2. Устойчивость лежандровых отображений

В этом параграфе вкратце обсуждается связь нашего подхода с устойчивостью лежандровых отображений. Его результаты в дальнейшем не используются.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. *Лежандрово отображение* $\Lambda \subset E \rightarrow X$ состоит из лежандрова расслоения $\pi : E \rightarrow X$ и стратифицированного лежандрова подмногообразия $\Lambda \subset E$. *Лежандрова эквивалентность* двух лежандровых отображений $\Lambda \subset E \rightarrow X$ и $\Lambda' \subset E' \rightarrow X'$ — это право-левая эквивалентность расслоений такая, что диффеоморфизм прообразов является контактным и переводит друг в друга стратифицированные лежандровы подмногообразия Λ и Λ' . *Фронтом* лежандрова отображения называется образ $\pi(\Lambda)$.

Итак, мы рассматриваем три отношения эквивалентности для лежандровых отображений:

1. лежандрова эквивалентность лежандровых отображений;
2. индуцированная эквивалентность определяемых ими семейств пар $(\Lambda, \pi^{-1}(\xi))$, зависящих от параметра $\xi \in X$ — точки базы;
3. диффеоморфность их фронтов $\pi(\Lambda)$.

Очевидно, что $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$. Сформулируем условия, при которых $3 \Rightarrow 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Точка Λ называется *регулярной* точкой лежандрова отображения, если: проходящий через неё слой больше нигде не пересекает Λ ; она принадлежит страту Λ наибольшей размерности; ограничение π на этот страт в её окрестности является погружением. Лежандрово отображение называется *регулярным*, если множество его регулярных точек всюду плотно в Λ .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Лежандрово отображение данного стратифицированного лежандрова подмногообразия регулярно, если лежандрово расслоение π — общего положения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.5. *Регулярные лежандровы отображения инвариантно стратифицированных лежандровых подмногообразий эквивалентны, если их фронты диффеоморфны.*

Аналогичный факт для аналитических множеств известен — см. п. 3.3 в [27] и п. 1.1 в [36], и его доказательство легко приспособить для нашего случая. А именно, при условии регулярности лежандрова отображения носитель Λ восстанавливается однозначно по фронту, поскольку любое лежандрово расслоение локально канонически лежандрово эквивалентно расслоению $PT^*X \rightarrow X$. А любой диффеоморфизм носителей переводит стратификацию в стратификацию ввиду условия их инвариантности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Лежандрово отображение $\Lambda \subset E \rightarrow X$ называется *устойчивым*, если при фиксированном Λ и любом достаточно малом возмущении расслоения, получающееся лежандрово отображение эквивалентно исходному. Росток лежандрова отображения *устойчив*, если у него есть устойчивый представитель.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Устойчивое отображение регулярно.

А. Б. Гивенталь в статье [27] сформулировал и доказал критерий устойчивости для (особого) аналитического лежандрова подмногообразия Λ . В наших терминах он формулируется так.

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ (А. Б. ГИВЕНТАЛЬ). *Росток лежандрова отображения $\Lambda \subset E \rightarrow X$ (особого) аналитического лежандрова подмногообразия Λ устойчив тогда и только тогда, когда деформация $(\Lambda, \pi^{-1}(\xi))$ инфинитезимально версальна.*

Этот результат и его доказательство из [27] непосредственно обобщаются на стратифицированные лежандровы подмногообразия.

ТЕОРЕМА 3.8. *Росток лежандрова отображения $\Lambda \subset E \rightarrow X$ стратифицированного лежандрова подмногообразия Λ устойчив тогда и только тогда, когда деформация $(\Lambda, \pi^{-1}(\xi))$ инфинитезимально версальна.*

С помощью разработанного в настоящей главе метода доказывается следующая теорема распознавания устойчивых ростков.

ТЕОРЕМА 3.9. *Класс эквивалентности устойчивого ростка лежандрова отображения $\Lambda \subset E \rightarrow X$ инвариантно стратифицированного лежандрова подмногообразия Λ однозначно определяется классом Λ -эквивалентности ростка слоя, проходящего через его точку приложения.*

Доказательство. Рассмотрим росток пары, состоящей из Λ и слоя $\pi^{-1}(\xi_0)$, проходящего через точку приложения. По теореме версальности 2.13 его деформация $(\Lambda, \pi^{-1}(\xi))$ эквивалентна индуцированной из миниверсальной деформации ростка пары $(\Lambda, \pi^{-1}(\xi_0))$ с помощью отображения φ . Но деформация $(\Lambda, \pi^{-1}(\xi))$ инфинитезимально версальна согласно теореме 3.8. Значит, φ — эпиморфизм. Но любые две деформации с одинаковым числом параметров, индуцированные из одной и той же с помощью двух эпиморфизмов, индуцированы друг из друга с помощью диффеоморфизма. Итак, класс индуцированной эквивалентности деформации $(\Lambda, \pi^{-1}(\xi))$ определяется классом эквивалентности ростка пары $(\Lambda, \pi^{-1}(\xi_0))$.

Из индуцированной эквивалентности деформаций вытекает диффеоморфность ростков фронтов, из которой следует лежандрова эквивалентность лежандровых отображений согласно утверждению 3.5 и замечанию 3.7. \square

4 Доказательства

4.1. Гомотопический метод и гомологическое уравнение

Для доказательства, что ростки производящих функций w_0 и $w_1 = w_0 + \varphi$ Λ -эквивалентны друг другу, мы применяем гомотопический метод, состоящий в следующем. Рассмотрим семейство w_* производящих функций $w_t = w_0 + t\varphi$, зависящих от параметра $t \in \mathbb{R}$. Пусть оно удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби

$$\partial_t w_t + h_t[w_t] = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

где h_* — семейство гамильтонианов, векторные поля \vec{h}_t которых касаются всех стратов Λ и обращаются в нуль в начале координат $p = x = 0$ при любом $t \in \mathbb{R}$. Семейство контактных векторных полей \vec{h}_t порождает семейство локальных контактных диффеоморфизмов f_* :

$$f_0 = \text{id}, \quad \partial_t f_t(e) = \vec{h}_t(f_t(e)),$$

которые сохраняют Λ , оставляют начало координат на месте и переводят $\mathcal{L}[w_0]$ в $\mathcal{L}[w_t]$. В частности, $w_0 \sim_\Lambda w_1$ что и требуется.

В нашем случае $w_t = w_0 + t\varphi$ уравнение Гамильтона–Якоби переписывается в виде

$$h_t[w_t] = -\varphi \quad (1.2)$$

и называется *гомологическим* уравнением. Таким образом, для доказательства исходной эквивалентности остаётся показать, что оно разрешимо относительно h_* с указанными свойствами.

Для этого мы рассматриваем алгебру $\mathcal{E}_{p,x,u,t}$ ростков гладких функций от p , x , u и $t \in \mathbb{R}$ только не в точке, а на прямой $p = x = u = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Элементы этой алгебры мы будем называть семействами гамильтонианов, зависящими от параметра $t \in \mathbb{R}$.

Аналогично обозначим через $\mathcal{E}_{x,t}$ алгебру ростков гладких функций от x и $t \in \mathbb{R}$ на прямой $x = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Элементы этой алгебры мы будем называть семействами производящих функций, зависящими от параметра $t \in \mathbb{R}$.

Для прямых образов ранее определённых идеалов

$$\mathcal{E}_{p,x,u}^d, \mathfrak{h}'_{\Lambda} \subset \mathcal{E}_{p,x,u}, \quad \mathcal{E}_x^d, \mathfrak{m}_x \subset \mathcal{E}_x$$

при естественных вложениях

$$\mathcal{E}_{p,x,u} \hookrightarrow \mathcal{E}_{p,x,u,t}, \quad \mathcal{E}_x \hookrightarrow \mathcal{E}_{x,t}$$

мы соответственно используем обозначения:

$$\mathcal{E}_{p,x,u,t}^d, \mathfrak{h}'_{\Lambda,t} \subset \mathcal{E}_{p,x,u,t}, \quad \mathcal{E}_{x,t}^d, (\mathfrak{x}) \subset \mathcal{E}_{x,t}.$$

Рассмотрим теперь семейство правильных гамильтонианов и семейство правильных производящих функций:

$$h_* \in \mathfrak{h}'_{\Lambda,t} \subset \mathcal{E}_{p,x,u,t}^{\deg u}, \quad w_* \in \mathcal{E}_{x,t}^{\deg u}, \quad w_t = w_0 + t\varphi, \quad w_0 \in \mathcal{E}_x^{\deg u}, \quad \varphi \in \mathcal{E}_x^{k+1},$$

где $k \geq \deg u$. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$:

- контактное векторное поле \vec{h}_t обращается в нуль в начале координат, так как в разложении Тейлора гамильтониана h_t нет констант и линейных функций

от p и x (но может быть линейная функция от u), поскольку h_t — правильный гамильтониан, т. е. $h_t \in \mathcal{E}_{p,x,u}^{\deg u}$;

– контактное векторное поле \vec{h}_t касается всех стратов Λ , поскольку $h_t \in \mathfrak{h}'_\Lambda \subset \mathfrak{h}_\Lambda$;

– лежандрово подмногообразие $\mathcal{L}[w_t]$ содержит начало координат, так как в разложении Тейлора производящей функции w_t нет констант и линейных функций, поскольку w_t — правильный производящий росток, т. е. $w_t \in \mathcal{E}_x^{\deg u}$.

Итак, условие

$$- \varphi \in \mathfrak{h}'_{\Lambda,t}[w_0 + t\varphi] \quad (1.3)$$

эквивалентно разрешимости гомологического уравнения 1.2.

4.2. Лемма Накаямы с параметром

Для доказательства разрешимости гомологического уравнения нам понадобится следующий вариант леммы Накаямы. Обозначим через $\mathcal{E}_t \cong \mathcal{E}_{x,t}/(x)$ алгебру гладких функций (но не ростков!) от параметра t .

ЛЕММА НАКАЯМЫ С ПАРАМЕТРОМ. *Элементы h_1, \dots, h_N конечно порождённого $\mathcal{E}_{x,t}$ -модуля \mathcal{A} порождают \mathcal{A} тогда и только тогда, когда их классы смежности порождают \mathcal{E}_t -модуль $\mathcal{A}/(x)\mathcal{A}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Часть «только тогда» очевидна. Пусть классы смежности элементов h_1, \dots, h_N порождают \mathcal{E}_t -модуль $\mathcal{A}/(x)\mathcal{A}$. Обозначим через a_1, \dots, a_M образующие $\mathcal{E}_{x,t}$ -модуля \mathcal{A} . Тогда по условию:

$$a_i = \sum_{j=1}^N \phi_{ij} h_j + \sum_{k=1}^M \psi_{ik} a_k, \quad \phi_{ij} \in \mathcal{E}_{x,t}, \quad \psi_{ik} \in (x), \quad i = 1, \dots, M.$$

Это линейная система уравнений относительно a_1, \dots, a_M с квадратной матрицей коэффициентов $\delta_{ik} - \psi_{ik} \in \mathcal{E}_{x,t}$ при a_k , где δ_{ik} — символ Кронекера. Но определитель этой матрицы коэффициентов обратим в алгебре $\mathcal{E}_{x,t}$, поскольку равен 1 при $x = 0$. Следовательно, согласно правилу Крамера все образующие a_1, \dots, a_M

являются линейными комбинациями элементов h_1, \dots, h_N с коэффициентами из $\mathcal{E}_{x,t}$. \square

4.3. Доказательство теоремы о достаточной квазиструе

Теорема 1.20 о достаточной квазиструе следует из условия 1.3 разрешимости гомологического уравнения 1.2. В свою очередь, справедливость условия 1.3 непосредственно следует из следующей леммы, которая доказывается с помощью леммы Накаямы с параметром из параграфа 4.2.

ЛЕММА 4.1 (О РАЗРЕШИМОСТИ ГОМОЛОГИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ). *Если $w_0 \in \mathcal{E}_x^{\deg u}$, $\varphi \in \mathcal{E}_x^{k+1}$ и $\mathcal{E}_x^{k+1} \subset \mathfrak{m}_x \cdot \mathfrak{h}'_\Lambda[w_0]$ для некоторого $k \geq \deg u$, то $\mathcal{E}_{x,t}^{k+1} \subset (x) \cdot \mathfrak{h}'_{\Lambda,t}[w_0 + t\varphi]$. Тем самым, $-\varphi \in \mathfrak{h}'_{\Lambda,t}[w_0 + t\varphi]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть производящие ростки $a_1, \dots, a_N \in \mathcal{E}_x^{k+1}$ порождают \mathcal{E}_x -модуль \mathcal{E}_x^{k+1} . Следовательно они порождают и $\mathcal{E}_{x,t}$ -модуль $\mathcal{E}_{x,t}^{k+1}$. Кроме того, по условию леммы найдутся такие гамильтонианы h_1, \dots, h_N , что

$$a_1 = h_1[w_0], \dots, a_N = h_N[w_0], \quad h_r = \sum_{j=1}^m x_j H_{jr}, \quad H_{jr} \in \mathfrak{h}'_\Lambda \subset \mathcal{E}_{p,x,u}^{\deg u}, \quad (1.4)$$

где $j = 1, \dots, m$, $r = 1, \dots, N$.

Итак, производящие ростки $h_1[w_0], \dots, h_N[w_0]$ порождают $\mathcal{E}_{x,t}$ -модуль $\mathcal{E}_{x,t}^{k+1}$. Для доказательства леммы достаточно показать, что производящие ростки $h_1[w_t], \dots, h_N[w_t]$ также порождают $\mathcal{E}_{x,t}$ -модуль $\mathcal{E}_{x,t}^{k+1}$.

Для этого прежде всего заметим, что по лемме 1.19

$$H_{jr}[w_t] - H_{jr}[w_0] \in \mathcal{E}_{x,t}^{k+1},$$

поскольку

$$w_t, w_0 \in \mathcal{E}_{x,t}^{\deg u}, \quad w_t - w_0 \in \mathcal{E}_{x,t}^{k+1}, \quad H_{jr} \in \mathcal{E}_{x,t}^{\deg u}.$$

Принимая во внимание (1.4), получаем, что

$$h_r[w_t] - h_r[w_0] \in (x) \cdot \mathcal{E}_{x,t}^{k+1},$$

и поэтому классы смежности производящих ростков в \mathcal{E}_t -модуле $\mathcal{E}_{x,t}^{k+1}/(\mathfrak{x})\mathcal{E}_{x,t}^{k+1}$ просто совпадают.

Покажем теперь, что производящие ростки $h_1[w_t], \dots, h_N[w_t]$ порождают $\mathcal{E}_{x,t}$ -модуль $\mathcal{E}_{x,t}^{k+1}$, применив к $\mathcal{E}_{x,t}$ -модулю $\mathcal{A} = \mathcal{E}_{x,t}^{k+1}$ лемму Накаямы с параметром, доказанную в параграфе 4.2. А именно, мы знаем, что производящие ростки $h_1[w_0], \dots, h_N[w_0]$ порождают $\mathcal{E}_{x,t}$ -модуль $\mathcal{E}_{x,t}^{k+1}$. Поэтому по лемме Накаямы их классы смежности порождают \mathcal{E}_t -модуль $\mathcal{E}_{x,t}^{k+1}/(\mathfrak{x})\mathcal{E}_{x,t}^{k+1}$. Значит, совпадающие с ними классы смежности производящих ростков $h_1[w_t], \dots, h_N[w_t]$ тоже порождают \mathcal{E}_t -модуль $\mathcal{E}_{x,t}^{k+1}/(\mathfrak{x})\mathcal{E}_{x,t}^{k+1}$. Следовательно, по лемме Накаямы сами производящие ростки $h_1[w_t], \dots, h_N[w_t]$ порождают $\mathcal{E}_{x,t}$ -модуль $\mathcal{E}_{x,t}^{k+1}$. \square

4.4. Доказательство конечной Λ -определённости

Теорема 1.17 о конечной Λ -определённости следует из теоремы 1.20 о достаточной квазиструе.

Выберем в окрестности точки $\ell \in E$ локальные координаты $\mathfrak{p} = (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{R}^{m*}$, $\mathfrak{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ и $u \in \mathbb{R}$ такие, что контактная структура в E задаётся контактной формой

$$\theta = \mathfrak{p} \, d\mathfrak{x} - du,$$

а росток лежандрова подмногообразия L — производящим ростком $w \in \mathcal{E}_x$:

$$L = \mathcal{L}[w] = \{\mathfrak{p} = \partial_x w, u = w(\mathfrak{x})\},$$

причём $w \in \mathfrak{m}_x^2$, поскольку L по условию содержит начало координат — точку ℓ .

Нам нужно доказать, что $(\mu + 1)$ -струя производящего ростка w Λ -достаточна, поскольку при переходе от производящих функций к лежандровым подмногообразиям порядок струи уменьшается на единицу.

Для этого нам понадобится включение $\mathfrak{m}_x^\mu \subset \mathfrak{h}_\Lambda[w]$, где $\mathfrak{h}_\Lambda[w]$ — ограничение идеала \mathfrak{h}_Λ на росток лежандрова подмногообразия $\mathcal{L}[w]$, как в определении 1.12. Это стандартное включение обсуждается в параграфе 4.5.

Пусть $\deg p_1 = \dots = \deg p_m = \deg x_1 = \dots = \deg x_m = 1$ и $\deg u = 2$. Тогда

$$\mathfrak{h}_\Lambda \cdot (x) \subset \mathfrak{h}_\Lambda \cap \mathcal{E}_{p,x,u}^2 = \mathfrak{h}'_\Lambda,$$

поскольку $\mathfrak{h}_\Lambda \subset (p, x, u)$, так как $\ell \in \Lambda$, а значит $\mathfrak{h}_\Lambda \cdot (x) \subset (p, x, u) \cdot (x) \subset \mathcal{E}_{p,x,u}^2$. Следовательно, с учётом включения $\mathfrak{m}_x^\mu \subset \mathfrak{h}_\Lambda[w]$ получаем:

$$\mathfrak{m}_x^{\mu+1} \subset \mathfrak{h}_\Lambda[w] \cdot \mathfrak{m}_x = \mathfrak{h}_\Lambda[w] \cdot (x)[w] \subset \mathfrak{h}'_\Lambda[w].$$

Значит,

$$\mathcal{E}_x^{\mu+2} = \mathfrak{m}_x^{\mu+2} \subset \mathfrak{m}_x \cdot \mathfrak{h}'_\Lambda[w_0].$$

Воспользовавшись теперь теоремой 1.20 о достаточной квазиструе при $k = \mu + 1 \geq 2 = \deg u$, заключаем, что $(\mu + 1)$ -струя производящего ростка w Λ -достаточна.

Теорема 1.17 о конечной Λ -определённости доказана.

4.5. Классическая лемма

При доказательстве теоремы 1.17 о конечной определённости мы воспользовались стандартным наблюдением, сформулированным в следующей лемме 4.2.

ЛЕММА 4.2. Пусть $\mu = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_x / \mathfrak{h}_\Lambda[w] < \infty$. Тогда $\mathfrak{m}_x^\mu \subset \mathfrak{h}_\Lambda[w]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Этот факт верен для любой локальной алгебры \mathcal{E}_x с максимальным идеалом \mathfrak{m}_x и любого идеала $\mathfrak{h}_\Lambda[w]$. Его доказательство опубликовано, например, в [14], п. 5.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Идеал \mathfrak{m}_x^μ порождён образующими вида $\phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_\mu$, где $\phi_1, \dots, \phi_\mu \in \mathfrak{m}_x$. Рассмотрим ростки $1, \phi_1, \phi_1 \cdot \phi_2, \dots, \phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_\mu$. Их число равно $\mu + 1$, и они линейно зависимы по модулю идеала $\mathfrak{h}_\Lambda[w]$ согласно условию леммы. Значит, найдётся нетривиальная линейная комбинация с числовыми коэффициентами

$$C_0 + C_1\phi_1 + C_2\phi_1 \cdot \phi_2 + \dots + C_\mu\phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_\mu \in \mathfrak{h}_\Lambda[w].$$

Пусть C_k — первый ненулевой коэффициент, тогда

$$\phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_k \cdot (C_k + C_{k+1}\phi_{k+1} + \dots + C_\mu\phi_{k+1} \cdot \dots \cdot \phi_\mu) \in \mathfrak{h}_\Lambda[w].$$

Но росток в скобках обратим в алгебре \mathcal{E}_x , поскольку $C_k \neq 0$. Поэтому $\phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_k \in \mathfrak{h}_\Lambda[w]$. Следовательно, $\phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_\mu \in \mathfrak{h}_\Lambda[w]$. \square

4.6. Доказательство теоремы версальности

При доказательстве сформулированной выше теоремы версальности мы следуем схеме доказательства теоремы версальности для V -эквивалентности, предложенного Ж. Мартине в [81] и изложенного в [14], § 8, п. 8.3.

ЛЕММА 4.4 (О РЕДУКЦИИ). *Пусть деформация $(f_\xi(\Lambda), g_\xi(L))$, где $\xi \in \mathbb{R}^n$, ростка пары стратифицированных лежандровых подмногообразий инфинитезимально версальна. Рассмотрим пару ростков в точке $\ell \times 0$ семейств контактных диффеоморфизмов $F_{\xi,t}$ и $G_{\xi,t}$, зависящих от ξ и дополнительного параметра $t \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющих равенствам $F_{\xi,0} = f_\xi$ и $G_{\xi,0} = g_\xi$ при всех значениях параметра ξ . Тогда деформация $(F_\star(\Lambda), G_\star(L))$ эквивалентна индуцированной из исходной деформации $(f_\star(\Lambda), g_\star(L))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{E}_{e,\xi,t}$ алгебру ростков в нуле гладких функций от координат e , ξ и t , элементы этой алгебры будем называть семействами гамильтонианов. Пусть $\mathfrak{h}_{F_\star(\Lambda)}$ и $\mathfrak{h}_{G_\star(L)}$ — идеалы в $\mathcal{E}_{e,\xi,t}$, состоящие из семейств гамильтонианов контактных векторных полей, которые при любых ξ и t касаются всех стратов лежандровых подмногообразий $F_{\xi,t}(\Lambda)$ и $G_{\xi,t}(L)$ соответственно, а $\mathcal{E}_{\xi,t}$ — алгебра ростков в нуле гладких функций от координат ξ и t .

Найдем семейства гамильтонианов

$$\mathfrak{F}_\star \in \mathfrak{h}_{F_\star(\Lambda)} \subset \mathcal{E}_{e,\xi,t}, \quad \mathfrak{G}_\star \in \mathfrak{h}_{G_\star(L)} \subset \mathcal{E}_{e,\xi,t}$$

и ростки $w_\star^1, \dots, w_\star^n \in \mathcal{E}_{\xi,t}$ такие, что

$$-\mathcal{F}_{\xi,t}^0(e) + \mathcal{G}_{\xi,t}^0(e) = \sum_{j=1}^n w_{\xi,t}^j \left(\mathcal{F}_{\xi,t}^j(e) - \mathcal{G}_{\xi,t}^j(e) \right) + \mathfrak{F}_{\xi,t}(e) - \mathfrak{G}_{\xi,t}(e), \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\xi,t}^0(e) &= \theta(\partial_t F_{\xi,t}(e)), & \mathcal{F}_{\xi,t}^j(e) &= \theta(\partial_{\xi_j} F_{\xi,t}(e)), \\ \mathcal{G}_{\xi,t}^0(e) &= \theta(\partial_t G_{\xi,t}(e)), & \mathcal{G}_{\xi,t}^j(e) &= \theta(\partial_{\xi_j} G_{\xi,t}(e))\end{aligned}$$

— семейства гамильтонианов контактных векторных полей $\partial_t F_{\xi,t}$, $\partial_{\xi_j} F_{\xi,t}$, $\partial_t G_{\xi,t}$, $\partial_{\xi_j} G_{\xi,t}$, зависящих от ξ и t , а θ — контактная форма. Возможность этого разложения следует из инфинитезимальной версальности исходной деформации $(f_\xi(\Lambda), g_\xi(L))$ и подготовительной теоремы Мальгранжа–Вейерштрасса ([22], 6.5, стр. 73; [28], теорема 3.6, стр. 158), применённой к конечно порождённому $\mathcal{E}_{e,\xi,t}$ -модулю $\mathcal{E}_{e,\xi,t}/(\mathfrak{h}_{F_\star(\Lambda)} + \mathfrak{h}_{G_\star(L)})$ и проектированию $(e,\xi,t) \mapsto (\xi,t)$.

В самом деле, согласно упомянутой подготовительной теореме семейства гамильтонианов

$$\mathcal{F}_{\xi,t}^1(e) - \mathcal{G}_{\xi,t}^1(e), \dots, \mathcal{F}_{\xi,t}^n(e) - \mathcal{G}_{\xi,t}^n(e)$$

порождают $\mathcal{E}_{\xi,t}$ -модуль $\mathcal{E}_{e,\xi,t}/(\mathfrak{h}_{F_\star(\Lambda)} + \mathfrak{h}_{G_\star(L)})$, если гамильтонианы

$$h^1(e) = \mathcal{F}_{0,0}^1(e) - \mathcal{G}_{0,0}^1(e), \dots, h^n(e) = \mathcal{F}_{0,0}^n(e) - \mathcal{G}_{0,0}^n(e)$$

порождают линейное пространство $\mathcal{E}_e/(\mathfrak{h}_\Lambda + \mathfrak{h}_L)$, а это и есть условие инфинитезимальной версальности исходной деформации $(f_\star(\Lambda), g_\star(L))$ из определения 2.12, поскольку $F_{\xi,0} = f_\xi$ и $G_{\xi,0} = g_\xi$ по условию.

Введём следующие обозначения:

$$\mathcal{F}_{\xi,t}(e) = \mathcal{F}_{\xi,t}^0(e) + \sum_{j=1}^n w_{\xi,t}^j \mathcal{F}_{\xi,t}^j(e), \quad \mathcal{G}_{\xi,t}(e) = \mathcal{G}_{\xi,t}^0(e) + \sum_{j=1}^n w_{\xi,t}^j \mathcal{G}_{\xi,t}^j(e),$$

$$\mathcal{K}_{\xi,t}(e) = \mathcal{F}_{\xi,t}(e) + \mathfrak{F}_{\xi,t}(e) = \mathcal{G}_{\xi,t}(e) + \mathfrak{G}_{\xi,t}(e).$$

Последнее равенство выполняется вследствие разложения 1.5.

Заметим теперь, что векторные поля

$$\dot{e} = \vec{\mathcal{F}}_{\xi,t}(e), \quad \dot{\xi}_j = w_{\xi,t}^j, \quad \dot{t} = 1 \quad \text{и} \quad \dot{e} = \vec{\mathfrak{F}}_{\xi,t}(e), \quad \dot{\xi}_j = 0, \quad \dot{t} = 0$$

касаются всех стратов стратифицированного подмногообразия $F_\star(\Lambda)$, а векторные поля

$$\dot{e} = \vec{\mathcal{G}}_{\xi,t}(e), \quad \dot{\xi}_j = w_{\xi,t}^j, \quad \dot{t} = 1 \quad \text{и} \quad \dot{e} = \vec{\mathfrak{G}}_{\xi,t}(e), \quad \dot{\xi}_j = 0, \quad \dot{t} = 0$$

— всех стратов стратифицированного подмногообразия $G_*(L)$. Значит, векторное поле

$$\dot{e} = \vec{\mathcal{K}}_{\xi,t}(e) = \vec{\mathcal{F}}_{\xi,t}(e) + \vec{\mathfrak{F}}_{\xi,t}(e) = \vec{\mathcal{G}}_{\xi,t}(e) + \vec{\mathfrak{G}}_{\xi,t}(e), \quad \dot{\xi}_j = w_{\xi,t}^j, \quad \dot{t} = 1$$

касается всех стратов стратифицированных подмногообразий $F_*(\Lambda)$ и $G_*(L)$.

Рассмотрим росток в нуле проектирования

$$\Phi : E \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow E \times \mathbb{R}^n \times 0, \quad (e, \xi, t) \mapsto (\kappa_{\xi,t}(e), \varphi(\xi, t), 0)$$

вдоль фазовых кривых построенного векторного поля

$$\dot{e} = \vec{\mathcal{K}}_{\xi,t}(e), \quad \dot{\xi}_j = w_{\xi,t}^j, \quad \dot{t} = 1.$$

По построению κ_* — семейство контактных диффеоморфизмов, зависящих от параметров ξ и t . Кроме того, стратифицированное подмногообразие $F_*(\Lambda) \subset E \times \mathbb{R}^{n+1}$ является прообразом при отображении Φ своего сечения $t = 0$, которое при естественном отождествлении $E \times \mathbb{R}^n \times 0 \simeq E \times \mathbb{R}^n$ совпадает со стратифицированным подмногообразием $f_*(\Lambda) \subset E \times \mathbb{R}^n$, поскольку $F_{\xi,0} = f_\xi$. Аналогично и стратифицированное подмногообразие $G_*(\Lambda) \subset E \times \mathbb{R}^{n+1}$ является прообразом при отображении Φ своего сечения $t = 0$, которое при естественном отождествлении $E \times \mathbb{R}^n \times 0 \simeq E \times \mathbb{R}^n$ совпадает со стратифицированным подмногообразием $g_*(\Lambda) \subset E \times \mathbb{R}^n$, поскольку $G_{\xi,0} = g_\xi$.

В соответствии с определением 2.4 получаем, что деформация $(F_*(\Lambda), G_*(L))$ эквивалентна индуцированной из исходной деформации $(f_*(\Lambda), g_*(L))$ с помощью отображения $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. \square

Доказательство теоремы версальности. Пусть $f_*, g_* : E \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$ и $f'_*, g'_* : E \times \mathbb{R}^{n'} \rightarrow E$ — семейства контактных диффеоморфизмов, гладко зависящих от параметров $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\xi' \in \mathbb{R}^{n'}$ такие, что выполняются условия $f_0 = g_0 = f'_0 = g'_0 = \text{id}_E$. Предположим, что $(f_*(\Lambda), g_*(L))$ — инфинитезимально версальная деформация. Докажем, что деформация $(f'_*(\Lambda), g'_*(L))$ эквивалентна индуцированной из неё.

Для этого рассмотрим семейства контактных диффеоморфизмов

$$\begin{aligned} F_{\star} &: E \times \mathbb{R}^{n+n'} \rightarrow E, & F_{\xi, \xi'} &= f_{\xi} \circ f'_{\xi'}, \\ G_{\star} &: E \times \mathbb{R}^{n+n'} \rightarrow E, & G_{\xi, \xi'} &= g_{\xi} \circ g'_{\xi'} \end{aligned}$$

и деформацию

$$(F_{\star}(\Lambda), G_{\star}(L)),$$

которая при $\xi' = 0$ совпадает с $(f_{\star}(\Lambda), g_{\star}(L))$, а при $\xi = 0$ совпадает с $(f'_{\star}(\Lambda), g'_{\star}(L))$. В частности, деформация $(f'_{\star}(\Lambda), g'_{\star}(L))$ индуцирована из $(F_{\star}(\Lambda), G_{\star}(L))$.

Рассмотрим теперь сужения деформации $(F_{\star}(\Lambda), G_{\star}(L))$ цепочку подпространств

$$\{\xi' = 0\} = \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \dots \subset \mathbb{R}^{n+n'}.$$

Все эти сужения инфинитезимально версальны, первое из них совпадает с $(f_{\star}(\Lambda), g_{\star}(L))$, а каждое следующее эквивалентно индуцированному из предыдущего по лемме 4.4 о редукции. Но деформация $(f'_{\star}(\Lambda), g'_{\star}(L))$ индуцирована из $(F_{\star}(\Lambda), G_{\star}(L))$. Поэтому она эквивалентна индуцированной из $(f_{\star}(\Lambda), g_{\star}(L))$.

Теорема версальности доказана. \square

ГЛАВА 2

Особенности фронтов геометрической оптики

В настоящей главе с помощью метода, разработанного в главе 1, мы классифицируем типичные особенности фронта двумерного лежандрова подмногообразия Λ_2 и его декартова произведения на прямую. Лежандрово подмногообразие Λ_2 имеет неизолированные особенности и определено в параграфе 2.1 настоящей главы. С помощью полученной классификации мы описываем типичные особенности и перестройки волновых фронтов, а также типичные особенности их каустик, возникающие в физически интересных размерностях — на плоскости и в трёхмерном пространстве.

Лежандрово подмногообразие Λ_2 было описано В. И. Арнольдом в книгах [56] и [12] при изучении геометрической оптики внутреннего рассеяния коротких линейных волн. Внутреннее рассеяние наблюдается в неоднородных анизотропных средах, т. е. оптические свойства которых зависят и от точки, и от направления, например, при распространении звука в упругой среде с линейной зависимостью тензора напряжений от тензора деформаций достаточно общего вида. Внутреннее рассеяние происходит, если в данной точке при данной фазовой скорости возможны две линейно независимые поляризации волны. По этой же причине происходит коническая рефракция Гамильтона в кристаллах — анизотропных, но однородных средах [42].

Волновой фронт в пространстве–времени или *мировой фронт* — это гиперповерхность уровня фазы коротковолновой асимптотики решения исходной системы линейных уравнений в частных производных. Мировой фронт — это проекция лежандрова подмногообразия, на котором в точках внутреннего рассеяния могут возникать особенности, диффеоморфные цилиндру над Λ_2 . Эти особенно-

сти устойчивы — от них нельзя избавиться малым возмущением ни коэффициентов уравнения, ни фронта в начальный момент времени. Правда, возникают они только при достаточно общем выборе коэффициентов исходной системы линейных уравнений в частных производных, например, при постоянных коэффициентах особенности Λ_2 не появляются.

Эти же особенности возникают на лежандровых подмногообразиях, описывающих квазиклассические асимптотики в некоторых задачах математической физики. Эта ситуация очень близка к вышеописанной, а отличие состоит в том, что здесь малый параметр входит в саму систему линейных уравнений в частных производных. Один из конкретных примеров — уравнение Дирака, описывающее взаимодействие электронов и дырок в графене [92].

Объяснение описанной универсальности лежандрова подмногообразия Λ_2 состоит в следующем. Лежандрово подмногообразие, проектирующееся в мировой фронт, лежит на световой гиперповерхности и состоит из его характеристик. Световая гиперповерхность задаётся уравнением эйконала (дисперсионным соотношением) и называется ещё гиперповерхностью Френеля. Лучи — это проекции характеристик световой гиперповерхности на пространство–время; таким образом, мировой фронт состоит из лучей. Если световая гиперповерхность и начальный фронт гладкие, то лежандрово подмногообразие тоже гладкое, хотя у самого мирового фронта с течением времени могут появиться особенности.

Однако световая гиперповерхность необязательно гладкая. Дело в том, что уравнение эйконала — это условие вырождения некоторой симметрической матрицы, зависящей от точки фазового пространства и являющейся главным символом исходной системы линейных уравнений в частных производных. Поэтому особенности световой гиперповерхности в случае общего положения совпадают с особенностями подмножества вырожденных матриц в пространстве симметрических, типичными из которых являются конические точки. В окрестности конической точки световая гиперповерхность представляет собой цилиндр над обычным двумерным конусом. В самой конической точке ранг главного символа падает на 2 (а не на 1) — физически это означает, что волна, распространяющаяся в данной точке с данной фазовой скоростью, может иметь две (а не одну) линейно независимые поляризации. Таким образом, и внутреннее рассеяние, и рефракция Гамильтона происходят в конических точках световой гиперповерхности.

В статьях [10] и [55] В. И. Арнольд обнаружил, что росток световой гиперповерхности в конической точке при контактной структуре общего положения может иметь одну из двух нормальных форм — гиперболическую или эллиптическую — относительно контактных диффеоморфизмов объемлющего пространства. Б. А. Хесин в статье [78] доказал, что этот же результат справедлив, если все элементы главного символа исходной системы уравнений (являющегося симметрической матрицей) — функции общего положения от независимых переменных. При постоянных же коэффициентах ни гиперболические, ни эллиптические конические точки не реализуются.

Гиперболические конические точки световой гиперповерхности являются причиной появления на лежандровом подмногообразии особенностей Λ_2 . Особенности, возникающие из-за эллиптических конических точек мы не рассматриваем.

Кроме того, особенности Λ_2 появляются у лежандровых подмногообразий, отвечающих за распространение фронтов трёхмерной управляемой системы, множество допустимых скоростей которой в каждой точке представляет собой двумерный плоский диск (центр которого не обязан находиться в нуле). Здесь тоже возникает световая гиперповерхность с коническими точками, задаваемая принципом максимума Понтрягина, геометрическая формулировка которого дана в [1], п. 12.1. Определяемые ею лучи — это экстремальные траектории управляемой системы, а мировой фронт — гиперповерхность в пространстве–времени, сотканная из экстремальных траекторий.

Если центры всех дисков допустимых скоростей — нулевые векторы, то наша управляемая система отождествляется с субримановой структурой на распределении плоскостей в трёхмерном пространстве. При этом экстремальные траектории управляемой системы превращаются в геодезические субримановой метрики, движение по которым происходит с единичной скоростью. Особенности фронтов в этой ситуации изучались в [23] и [54] и возникают как раз из-за эллиптических конических точек световой гиперповерхности. Гиперболические же конические точки, так же как и лежандровы подмногообразия Λ_2 , в этой ситуации вообще не встречаются.

Если центры дисков допустимых скоростей образуют ненулевое векторное поле, которое обычно называют *дрейфом*, то наша управляемая система отождествляется с сублоренцевой структурой на трёхмерном распределении в четырёх-

рёхмерном пространстве–времени. При этом экстремали управляемой системы превращаются в нулевые геодезические сублоренцевой метрики. В этой ситуации на световой гиперповерхности уже реализуются как эллиптические, так и гиперболические конические точки, и поэтому появляется лежандрово подмногообразие Λ_2 .

Отметим, что сублоренцевы структуры исследовались, например, в работах [69], [70], [71], [72], [73], [79], и далеко не так хорошо изучены, как субримановы.

Результаты этой главы опубликованы в работах автора [16], [58], [60], [18], [19], [61]. В первых пяти изучаются особенности фронтов и каустик внутреннего рассеяния волн, а в шестой — управляемых систем и сублоренцевых структур.

1 Световая гиперповерхность и её особенности

1.1. Общая конструкция

Рассмотрим лежандрово расслоение $\pi : E \rightarrow \mathbb{R}^{1+D}$ над пространством–временем \mathbb{R}^{1+D} с $D \geq 2$ и световую гиперповерхность в E вида

$$\mathcal{S} = \{\alpha\gamma - \beta^2 = 0\}, \quad \alpha, \beta, \gamma : E \rightarrow \mathbb{R},$$

где α, β, γ — гладкие функции общего положения. Точки, лежащие на многообразии коразмерности 3

$$\mathcal{V} = \{\alpha = \beta = \gamma = 0\},$$

называются *коническими* точками — в окрестности каждой из них световая гиперповерхность представляет собой цилиндр над двумерным конусом. Согласно [55], [12] на \mathcal{V} выделяются две области $\mathcal{V}_H, \mathcal{V}_E \subset \mathcal{V}$, состоящие из гиперболических и эллиптических точек соответственно, в окрестности каждой из которых световая гиперповерхность формальным контактным диффеоморфизмом приводится к одной из двух локальных нормальных форм В. И. Арнольда:

- $\mathcal{S} = \{p_1^2 - x_1^2 = p_2^2\}$ (гиперболическая коническая точка из \mathcal{V}_H),
- $\mathcal{S} = \{p_1^2 + x_1^2 = p_2^2\}$ (эллиптическая коническая точка из \mathcal{V}_E),

где $(p, x, v) = (p_1, \dots, p_D, x_1, \dots, x_D, v)$ — координаты, в которых контактная структура задаётся формулой:

$$dv = p dx/2 - x dp/2.$$

Замыкание объединения $\mathcal{V}_H \cup \mathcal{V}_E$ гиперболической и эллиптической областей совпадает с \mathcal{V} , а в дополнении $\mathcal{V} \setminus (\mathcal{V}_H \cup \mathcal{V}_E)$ лежат более сложные особенности.

Рассмотрим теперь *начальный фронт* Φ_0 — подмногообразие произвольной размерности в физическом пространстве \mathbb{R}^D . Пусть гладкое лежандрово подмногообразие $\pi^{-1}(\Phi_0)$ трансверсально пересекает световую гиперповерхность \mathcal{S} , не задевая её особые точки. Рассмотрим объединение Λ всех характеристик световой гиперповерхности, проходящих через пересечение $\pi^{-1}(\Phi_0) \cap \mathcal{S}$. Пока эти характеристики не проходят через особые точки световой гиперповерхности, Λ — гладкое лежандрово подмногообразие. Но они могут проходить через гиперболические точки, не попадая в эллиптические — это следует из явного интегрирования нормальных форм. Оказывается, что после прохождения характеристики через гиперболическую точку Λ становится локально диффеоморфно цилиндру над лежандровой кривой Λ_1 , а в самой точке прохождения — цилиндру над лежандровой поверхностью Λ_2 . Нормальные формы стратифицированных лежандровых подмногообразий Λ_1 и Λ_2 были найдены в [12] (Λ_2), [60] (Λ_1) и приведены в параграфе 2.1 настоящей главы.

В случае общего положения при $D = 2$ на Λ нет особенностей, отличных от Λ_1 и Λ_2 , а при $D = 3$ они возникают по следующим причинам:

1. изолированные характеристики могут дважды проходить через гиперболические точки;
2. изолированные характеристики могут проходить через конические точки из $\mathcal{V} \setminus (\mathcal{V}_H \cup \mathcal{V}_E)$;
3. лежандрово подмногообразие $\pi^{-1}(\Phi_0)$ может пересекать гиперболическую область \mathcal{V}_H в изолированных точках;
4. лежандрово подмногообразие $\pi^{-1}(\Phi_0)$ может пересекать эллиптическую область \mathcal{V}_E в изолированных точках.

Нормальные формы соответствующих особенностей Λ не получены.

Стратифицированное подмногообразие Λ описывает эволюцию волнового фронта из начального следующим образом. *Мировой фронт* — это его проекция $\pi(\Lambda)$ в пространстве–времени. Мировой фронт состоит из *лучей* — проекций характеристик световой гиперповерхности. Мгновенный фронт в данный момент времени — это сечение

$$\Phi_\tau = \pi(\Lambda) \cap \{t = \tau\}$$

мирового фронта гиперповерхностью, на которой временная координата t принимает данное значение τ . С течением времени τ мгновенный фронт изменяется, при этом его точки бегут по лучам.

1.2. Теория упругости

Рассмотрим систему уравнений, описывающую малые колебания в упругой среде:

$$\partial_t^2 \psi_k = \sum_{j,l,m=1}^D \partial_j (T_{jk,lm}(\xi) \partial_l \psi_m), \quad \partial_j = \partial_{\xi_j},$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_D)$ — точка среды, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_D)$ — её малое смещение, а $T_{jk,lm}$ — симметричный тензор упругости:

$$T_{jk,lm} = T_{kj,lm} = T_{jk,ml} = T_{lm,jk},$$

зависящий от точки пространства.

Коротковолновая асимптотика — это разложение решения в асимптотический ряд

$$\psi(t, \xi) = \exp \frac{iS(t, \xi)}{\varepsilon} (\psi^0(t, \xi) + \varepsilon \psi^1(t, \xi) + \dots), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где фаза S — вообще говоря, многозначная функция. Подстановка коротковолновой асимптотики в исходную систему даёт уравнение

$$\exp \frac{iS(t, \xi)}{\varepsilon} \sum_{j,l,m=1}^D (T_{jk,lm} \partial_j S \partial_l S - \delta_{km} (\partial_t S)^2) \psi_m^0 = 0,$$

из которого следует, что фаза S удовлетворяет уравнению эйконала

$$\det \left(\sum_{j,l=1}^D T_{jk,lm} \partial_j S \partial_l S - \delta_{km} (\partial_t S)^2 \right)_{k,m=1}^D = 0,$$

где

$$\delta_{km} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = m; \\ 0, & \text{если } k \neq m; \end{cases}$$

— символ Кронекера. Геометрически уравнение эйконала — это световая гиперповерхность в контактном пространстве $E = PT^*\mathbb{R}^{1+D}$:

$$\mathcal{S} = \left\{ \det \left(\sum_{j,l=1}^D T_{jk,lm} \varkappa_j \varkappa_l - \delta_{km} \sigma^2 \right)_{k,m=1}^D = 0 \right\}, \quad (2.1)$$

где $(\sigma, \varkappa_1, \dots, \varkappa_D)$ — импульсы, сопряжённые к (t, ξ_1, \dots, ξ_D) .

В этом контексте мировой фронт волны — это гиперповерхность уровня её фазы. При другой интерпретации фронт является гиперповерхностью, образованной разрывами обобщённого решения исходной системы уравнений в частных производных.

Построенная таким образом световая гиперповерхность может иметь особенности. Дело в том, что уравнение эйконала — это условие вырождения некоторой симметрической матрицы, зависящей от точки фазового пространства. Поэтому при общих коэффициентах $T_{jk,lm}$ исходной системы уравнений особенности световой гиперповерхности такие же, как у подмножества вырожденных матриц в пространстве симметрических [10], [78], [12]. А именно, световая гиперповерхность представляется как объединение непересекающихся гладких стратов:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 \cup \dots;$$

каждый страт \mathcal{S}_k имеет коразмерность $k(k+1)/2$ и состоит из точек, в которых ранг матрицы из формулы (2.1) падает ровно на k единиц — физически это означает, что волна, распространяющаяся в данной точке с данной фазовой скоростью, может иметь ровно k линейно независимых поляризаций.

Страт $\mathcal{V} = \mathcal{S}_2$ состоит из конических точек световой гиперповерхности, к которым применимо сказанное в параграфе 1.1 настоящей главы при условии, что коэффициенты $T_{jk,lm}$ исходной системы уравнений — функции общего положения. Если же эти коэффициенты постоянны, то конические точки световой гиперповерхности не могут быть ни гиперболическими, ни эллиптическими, и в них происходит коническая рефракция Гамильтона.

Более сложными особенностями $\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4, \dots$ мы вообще не интересуемся.

1.3. Уравнения Дирака для графена

Рассмотрим уравнение Дирака, описывающее поведение квазичастиц (электронов проводимости и дырок) с энергией E в графене [92]:

$$-i\varepsilon(\sigma_1\partial_1 + \sigma_2\partial_2)\psi(\xi) + w(\xi)\psi(\xi) = E\psi(\xi),$$

где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ — точка плоскости, $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ — спинорное поле, $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция (эффективный потенциал), ε — малый параметр,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

— матрицы Паули. Подставляя асимптотическое разложение решения

$$\psi(\xi) = \exp \frac{iS(\xi)}{\varepsilon} (\psi^0(\xi) + \varepsilon\psi^1(\xi) + \dots), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

в исходное уравнение, получаем:

$$\partial_1 S \sigma_1 \psi^0 + \partial_2 S \sigma_2 \psi^0 + (w - E) \psi^0 = 0,$$

откуда следует, что фаза S удовлетворяет уравнению эйконала

$$\det \begin{pmatrix} (w - E) + \partial_1 S & -i \partial_2 S \\ i \partial_2 S & (w - E) - \partial_1 S \end{pmatrix} = 0.$$

Геометрически уравнение эйконала — это световая гиперповерхность в контактном пространстве $E = J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$:

$$\mathcal{S} = (w(\xi) - E)^2 - \varkappa_1^2 - \varkappa_2^2 = 0, \quad (2.2)$$

где $(\varkappa_1, \varkappa_2)$ — импульсы, сопряжённые к (ξ_1, ξ_2) . В этом контексте пространство–время — это $J^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, мировой фронт волны — график её фазы, а мгновенные фронты — линии уровня фазы.

Если E не является критическим значением потенциала w , то точки, удовлетворяющие условиям $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$ и $w(\xi) = E$, являются гиперболическими коническими особенностями построенной световой гиперповерхности \mathcal{S} .

1.4. Управляемые системы

Рассмотрим трёхмерную управляемую систему, множество допустимых скоростей которой в каждой точке $\xi \in \mathbb{R}^3$ представляет собой двумерный плоский диск (центр которого не обязан находиться в нуле):

$$\dot{\xi} = \mathbf{v}_0(\xi) + \nu_1 \mathbf{v}_1(\xi) + \nu_2 \mathbf{v}_2(\xi), \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 \leq 1, \quad (2.3)$$

где ν_1 и ν_2 — управляющие параметры, \mathbf{v}_0 , \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 — ограниченные гладкие векторные поля в \mathbb{R}^3 , причём \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 линейно независимы в каждой точке \mathbb{R}^3 .

Гамильтониан принципа максимума Потрягина

$$\begin{aligned} h(\varkappa, \xi) &= \max_{\nu_1^2 + \nu_2^2 \leq 1} \langle \varkappa, \mathbf{v}_0(\xi) + \nu_1 \mathbf{v}_1(\xi) + \nu_2 \mathbf{v}_2(\xi) \rangle = \\ &= \langle \varkappa, \mathbf{v}_0(\xi) \rangle + \sqrt{\langle \varkappa, \mathbf{v}_1(\xi) \rangle^2 + \langle \varkappa, \mathbf{v}_2(\xi) \rangle^2}, \end{aligned}$$

где $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3)$ — импульсы, сопряжённые к $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, определяет световую гиперповерхность в контактном пространстве $E = ST^*\mathbb{R}^{1+3}$:

$$\mathcal{S} = \{\sigma + h(\varkappa, \xi) = 0\},$$

где (σ, \varkappa) — импульсы, сопряжённые к (t, ξ) . В этом контексте нормальные формы В. И. Арнольда несколько модифицируются:

- $\mathcal{S} = \{p_1 = \sqrt{p_2^2 + x_1^2}\}$ (гиперболическая коническая точка),
- $\mathcal{S} = \{p_2 = \sqrt{p_1^2 + x_1^2}\}$ (эллиптическая коническая точка).

Характеристики построенной световой гиперповерхности являются экстремальными исходной управляемой системы, а лучи — экстремальными траекториями (см. [1], п. 12.1). Мировой фронт — это гиперповерхность в пространстве–времени, сотканная из экстремальных траекторий, выходящих из начального фронта в начальный момент времени.

2 Фронты лежандровых подмногообразий Λ_1 и Λ_2

2.1. Лежандровы подмногообразия Λ_1 и Λ_2

Согласно [56] и [12] при $D = 2$ нормальная форма типичной особенности лежандрова подмногообразия световой гиперповерхности при прохождении характеристики через гиперболическую коническую точку представляет собой стратифицированное лежандрово подмногообразие

$$\Lambda_2 = \{p = AB, q = A^2, x = -2AB \ln A^2, y = -B^2, v = -A^2 B^2 / 2\},$$

лежащее в пятимерном пространстве с контактной формой

$$\theta = p dx/2 - x dp/2 + q dy/2 - y dq/2 - dv$$

и заданное параметрически с параметрами $A, B \in \mathbb{R}$ (мы считаем, что $A \ln A^2 = 0$ при $A = 0$). При $D \geq 3$ нормальная форма — это цилиндр $\Lambda_2 \times \mathbb{R}^{D-2}$.

Лежандрово подмногообразие Λ_2 является замыканием своего гладкого двумерного страта

$$\Lambda_2^2 = \{2p \ln q + x = p^2 + qy = v + p^2/2 = 0, q > 0\},$$

и состоит из трёх гладких стратов:

$$\Lambda_2 = \Lambda_2^2 \cup \Lambda_2^1 \cup \Lambda_2^0$$

— двумерного Λ_2^2 , одномерного

$$\Lambda_2^1 = \{p = q = x = v = 0, y < 0\}$$

и начала координат

$$\Lambda_2^0 = \{p = q = x = y = v = 0\}.$$

Преобразование

$$p \mapsto -p, \quad q \mapsto q, \quad x \mapsto -x, \quad y \mapsto y, \quad v \mapsto v,$$

сохраняет контактную форму θ и лежандрово подмногообразие Λ_2 .

Особенности Λ_2 лежат на объединении

$$\Lambda_2^1 \cup \Lambda_2^0 = \{p = q = x = v = 0, y \leq 0\},$$

причём в любой точке страта Λ_2^1 росток Λ_2 контактно диффеоморфен ростку в нуле стратифицированного лежандрова подмногообразия

$$\Lambda_1 \times \mathbb{R} = \{2p \ln p^2 + x = q = v + p^2 = 0\},$$

где $p \ln p^2 = 0$ при $p = 0$, а

$$\Lambda_1 = \{2p \ln p^2 + x = v + p^2 = 0\}$$

— стратифицированное лежандрово подмногообразие, лежащее в трёхмерном пространстве с контактной структурой $2dv = p dx - x dp$ [60].

2.2. Производящие функции

Рассмотрим пространство с координатами

$$(p, x, v) = (p_1, \dots, p_m, x_1, \dots, x_m, v)$$

и контактной формой

$$\theta = p dx/2 - x dp/2 - dv.$$

Пусть I и J — такие множества индексов, что $I \cap J = \emptyset$ и $I \cup J = \{1, \dots, m\}$.
Функция w от m переменных p_I, x_J определяет лежандрово подмногообразие

$$\mathcal{L}_{p_I, x_J}[w] = \{p_J = \partial_{x_J} w, x_I = -\partial_{p_I} w, v = w - p_I \partial_{p_I} w / 2 - x_J \partial_{x_J} w / 2\}.$$

Функция w называется *производящей функцией* лежандрова подмногообразия $\mathcal{L}_{p_I, x_J}[w]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. У одного и того же ростка лежандрова подмногообразия может быть несколько (вплоть до 2^m) ростков производящих функций.

2.3. Нормальные формы пар

Пусть Λ — цилиндр (надстройка) над стратифицированным лежандровым подмногообразием Λ_2 , L_\star — типичное семейство гладких лежандровых подмногообразий L_ξ , зависящих от параметра $\xi \in X$, где $\dim X \leq 4$, а L_{ξ_0} — лежандрово подмногообразие из этого семейства, пересекающее Λ в его особой точке $\ell \in \Lambda$.

ТЕОРЕМА 2.2. Росток пары (Λ, L_{ξ_0}) в точке ℓ эквивалентен ростку надстройки над одной из пар (Λ', L') следующего списка

$$\Theta_2: \Lambda' = \Lambda_1, L' = \mathcal{L}_p[0] \text{ при } \dim X = 2, 3 \text{ или } 4;$$

$$\Theta_3: \Lambda' = \Lambda_1, L' = \mathcal{L}_x[x^3] \text{ при } \dim X = 3 \text{ или } 4;$$

$$\Theta_4^+: \Lambda' = \Lambda_1, L' = \mathcal{L}_x[x^4] \text{ при } \dim X = 4;$$

$$\Theta_4^-: \Lambda' = \Lambda_1, L' = \mathcal{L}_x[-x^4] \text{ при } \dim X = 4;$$

$$\Xi_4: \Lambda' = \Lambda_1 \times \mathbb{R}, L' = \mathcal{L}_{p,y}[y^3] \text{ при } \dim X = 4;$$

$$\Pi_3^+: \Lambda' = \Lambda_2, L' = \mathcal{L}_{p,q}[arpq + q^2/2] \text{ при } \dim X = 3 \text{ или } 4,$$

пары с a и $-a$ эквивалентны друг другу;

$$\Pi_3^-: \Lambda' = \Lambda_2, L' = \mathcal{L}_{p,q}[arpq - q^2/2] \text{ при } \dim X = 3 \text{ или } 4,$$

пары с a и $-a$ эквивалентны друг другу;

$$\Phi_4: \Lambda' = \Lambda_2, L' = \mathcal{L}_{p,q}[pq + aq^3], a \neq 0 \text{ при } \dim X = 4;$$

$$\Psi_4: \Lambda' = \Lambda_2, L' = \mathcal{L}_{p,y}[py + ay^3], a \neq 0 \text{ при } \dim X = 4.$$

2.4. Нормальные формы семейств пар

Пусть Λ — надстройка над стратифицированным лежандровым подмногообразием Λ_2 , L_\star — типичное семейство гладких лежандровых подмногообразий L_ξ , зависящих от параметра $\xi \in X$, где $\dim X \leq 4$, а L_{ξ_0} — лежандрово подмногообразие из этого семейства, пересекающее Λ в его особой точке $\ell \in \Lambda$.

ТЕОРЕМА 2.3. *Росток семейства пар (Λ, L_\star) в точке $\ell \times \xi_0$ стабильно индуцированно эквивалентен росту в начале координат одного из семейства пар (Λ', L'_\star) следующего списка, в котором \bar{a} — росток гладкой функции и $\bar{a}(0) = 0$:*

$$\Theta_2: \Lambda' = \Lambda_1, L'_\star = \mathcal{L}_p[\xi_1 + \xi_2 p] \text{ при } \dim X = 2, 3 \text{ или } 4;$$

$$\Theta_3: \Lambda' = \Lambda_1, L'_\star = \mathcal{L}_x[x^3 + \xi_1 + \xi_2 x + \xi_3 x^2] \text{ при } \dim X = 3 \text{ или } 4;$$

$$\Theta_4^\pm: \Lambda' = \Lambda_1, L'_\star = \mathcal{L}_x[\pm x^4 + \xi_1 + \xi_2 x + \xi_3 x^2 + \xi_4 x^3] \text{ при } \dim X = 4;$$

$$\Xi_4: \Lambda' = \Lambda_1 \times \mathbb{R}, L'_\star = \mathcal{L}_{p,y}[y^3 + \xi_1 + \xi_2 p + \xi_3 y + \xi_4 p y] \text{ при } \dim X = 4;$$

$$\Pi_3^\pm: \Lambda' = \Lambda_2, L'_\star = \mathcal{L}_{p,q}[\alpha p q \pm q^2/2 + \xi_1 + \xi_2 p + \xi_3 q] \text{ при } \dim X = 3 \text{ или } 4,$$

$$\text{где } \alpha = a + \bar{a}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), a > 0, a \neq 2 \text{ при } \dim X = 3 \text{ и}$$

$$\alpha = a + \xi_4, a \geq 0 \text{ или}$$

$$\alpha = a + \bar{a}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \pm \xi_4^2, a > 0, a \neq 2 \text{ при } \dim X = 4;$$

$$\Phi_4: \Lambda' = \Lambda_2, L'_\star = \mathcal{L}_{p,q}[p q + \alpha q^3 + \xi_1 + \xi_2 p + \xi_3 q + \xi_4 q^2] \text{ при } \dim X = 4,$$

$$\text{где } \alpha = a + \bar{a}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), a \neq 0;$$

$$\Psi_4: \Lambda' = \Lambda_2, L'_\star = \mathcal{L}_{p,y}[p y + \alpha y^3 + \xi_1 + \xi_2 p + \xi_3 y + \xi_4 y^2] \text{ при } \dim X = 4,$$

$$\text{где } \alpha = a + \bar{a}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), a \neq 0.$$

2.5. Явные формулы для бифуркационных диаграмм

Приведем явные формулы в параметрических формах для бифуркационных диаграмм $\Sigma(\Lambda', L'_\star)$ семейств из теоремы 2.3.

$$\Theta_2: \xi_1 = -p^2 \ln p^2 - p^2,$$

$$\xi_2 = 2p \ln p^2,$$

где p — вещественный параметр из окрестности нуля

и $p \ln p^2 = 0$ при $p = 0$;

$$\Theta_3: \xi_1 = 4\xi_3 p^2 \ln^2 p^2 + p^2 \ln p^2 - p^2 - 16p^3 \ln^3 p^2,$$

$$\xi_2 = 4\xi_3 p \ln p^2 + p - 12p^2 \ln^2 p^2,$$

где p — вещественный параметр из окрестности нуля

и $p \ln p^2 = 0$ при $p = 0$;

$$\Theta_4^\pm: \xi_1 = -p^2 \mp 48p^4 \ln^4 p^2 + p^2 \ln p^2 + 4\xi_3 p^2 \ln^2 p^2 - 16\xi_4 p^3 \ln^3 p^2,$$

$$\xi_2 = p \mp 32p^3 \ln^3 p^2 + 4\xi_3 p \ln p^2 - 12\xi_4 p^2 \ln^2 p^2,$$

где p — вещественный параметр из окрестности нуля

и $p \ln p^2 = 0$ при $p = 0$;

$$\Xi_4: \xi_1 = -p^2 \ln p^2 - p^2 + \xi_4 p y + 2y^3,$$

$$\xi_2 = 2p \ln p^2 - \xi_4 y,$$

$$\xi_3 = -\xi_4 p - 3y^2,$$

где p и y — вещественные параметры из окрестности нуля

и $p \ln p^2 = 0$ при $p = 0$;

$$\Pi_3^\pm: \xi_1 = -A^2 B^2 \ln A^2 \pm A^4/2 + \alpha A^3 B - A^2 B^2,$$

$$\xi_2 = 2AB \ln A^2 - \alpha A^2,$$

$$\xi_3 = \mp A^2 - \alpha AB + B^2,$$

где A и B — вещественные параметры из окрестности нуля

и $A \ln A^2 = 0$ при $A = 0$;

$$\Phi_4: \xi_1 = -A^2 B^2 \ln A^2 + \xi_4 A^4 + A^3 B - A^2 B^2 + 2\alpha A^6,$$

$$\xi_2 = 2AB \ln A^2 - A^2,$$

$$\xi_3 = -2\xi_4 A^2 - AB + B^2 - 3\alpha A^4,$$

где A и B — вещественные параметры из окрестности нуля

и $A \ln A^2 = 0$ при $A = 0$;

$$\Psi_4: \xi_1 = -A^2 B^2 \ln A^2 - AB^3 + \xi_4 B^4 - 2\alpha B^6,$$

$$\xi_2 = 2AB \ln A^2 + B^2,$$

$$\xi_3 = A^2 - AB + 2\xi_4 B^2 - 3\alpha B^4,$$

где A и B — вещественные параметры из окрестности нуля

и $A \ln A^2 = 0$ при $A = 0$.

2.6. Нормальные формы фронтов

Типичные особенности (двумерного) фронта лежандрова подмногообразия Λ_2 описываются теоремой 2.4, являющейся следствием теоремы 2.3.

ТЕОРЕМА 2.4. *Если лежандрово расслоение — общего положения, то (двумерный) фронт роста лежандрова подмногообразия Λ_2 в любой его особой точке в подходящих гладких координатах (ξ_1, ξ_2, ξ_3) на базе расслоения совпадает с бифуркационной диаграммой $\Sigma(\Lambda', L'_*)$ одного из семейств:*

$$\Theta_2: \Lambda' = \Lambda_1, L'_* = \mathcal{L}_p[\xi_1 + \xi_2 p];$$

$$\Theta_3: \Lambda' = \Lambda_1, L'_* = \mathcal{L}_x[x^3 + \xi_1 + \xi_2 x + \xi_3 x^2];$$

$$\Pi_3^\pm: \Lambda' = \Lambda_2, L'_* = \mathcal{L}_{p,q}[\alpha p q \pm q^2/2 + \xi_1 + \xi_2 p + \xi_3 q],$$

где $\alpha = a + \bar{a}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $a > 0$, $a \neq 2$, $\bar{a}(0) = 0$.

Явные формулы для указанных бифуркационных диаграмм приведены в параграфе 2.5.

Фронт Θ_2 представляет собой цилиндр над кривой, заданной параметрически:

$$\xi_1 = -p^2 \ln p^2 - p^2, \quad \xi_2 = 2p \ln p^2,$$

вдоль которой

$$\xi_1 \sim -\frac{\xi_2^2}{4 \ln \xi_2^2}, \quad \text{при } \xi_2 \rightarrow 0.$$

Фронт Θ_3 мы называем *острым ласточкиным хвостом*. Он напоминает обычный ласточкин хвост A_3 , но его ребро возврата состоит из двух касающихся друг друга гладких ветвей, все производные которых в точке касания совпадают (т. е. порядок

их касания бесконечен) — именно поэтому мы и называем его «острым». Следуя О. П. Щербаку, на рисунках в исходных координатах мы реалистично изображаем эти ласточкины хвосты по-разному: в окрестности ласточкина хвоста A_3 ветви ребра возврата обращены выпуклостями в противоположные стороны, а в окрестности острого ласточкина хвоста Θ_3 — в одну и ту же.

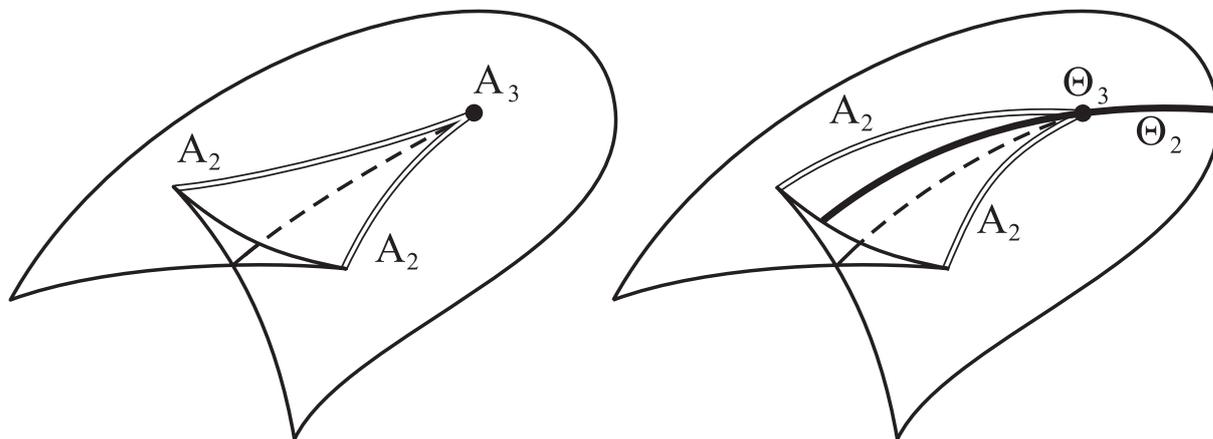


Рис. 2.1: Ласточкин хвост A_3 и острый ласточкин хвост Θ_3

На фронте Π_3^+ ребро возврата отсутствует, а на фронте Π_3^- оно состоит из двух ветвей, замыкание объединения которых является негладкой кривой, вдоль которой:

$$\xi_1 \sim -\frac{\xi_2^2}{2 \ln \xi_2^2}, \quad \xi_3 \sim -\frac{2|\xi_2| + a\xi_2}{\ln \xi_2^2} \quad \text{при } \xi_2 \rightarrow 0, \quad \text{где } a > 0, a \neq 2.$$

Таким образом, при $\xi_2 \rightarrow 0$ кривизны рёбер возврата стремятся к бесконечности, а направления их выпуклостей противоположны при $a > 2$ и совпадают при $0 < a < 2$.

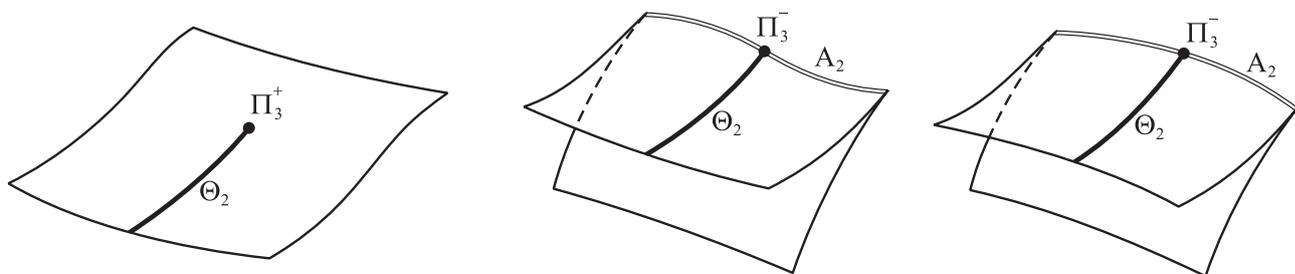


Рис. 2.2: Фронты Π_3^+ , Π_3^- при $a > 2$ и Π_3^- при $0 < a < 2$

Типичные особенности (трёхмерного) фронта лежандрова подмногообразия $\Lambda_2 \times \mathbb{R}$ описываются теоремой 2.5, тоже являющейся следствием теоремы 2.3.

ТЕОРЕМА 2.5. *Если лежандрово расслоение — общего положения, то (трёхмерный) фронт ростка лежандрова цилиндра $\Lambda_2 \times \mathbb{R}$ в любой его особой точке в подходящих гладких координатах $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ на базе расслоения совпадает с бифуркационной диаграммой $\Sigma(\Lambda', L'_\star)$ одного из семейств:*

$$\Theta_2: \Lambda' = \Lambda_1, L'_\star = \mathcal{L}_p[\xi_1 + \xi_2 p];$$

$$\Theta_3: \Lambda' = \Lambda_1, L'_\star = \mathcal{L}_x[x^3 + \xi_1 + \xi_2 x + \xi_3 x^2];$$

$$\Theta_4^\pm: \Lambda' = \Lambda_1, L'_\star = \mathcal{L}_x[\pm x^4 + \xi_1 + \xi_2 x + \xi_3 x^2 + \xi_4 x^3];$$

$$\Xi_4: \Lambda' = \Lambda_1 \times \mathbb{R}, L'_\star = \mathcal{L}_{p,y}[y^3 + \xi_1 + \xi_2 p + \xi_3 y + \xi_4 p y];$$

$$\Pi_3^\pm: \Lambda' = \Lambda_2, L'_\star = \mathcal{L}_{p,q}[\alpha p q \pm q^2/2 + \xi_1 + \xi_2 p + \xi_3 q],$$

$$\text{где } \alpha = a + \xi_4, a \geq 0$$

$$\text{или } \alpha = a + \bar{a}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \pm \xi_4^2, a > 0, a \neq 2, \bar{a}(0) = 0;$$

$$\Phi_4: \Lambda' = \Lambda_2, L'_\star = \mathcal{L}_{p,q}[p q + \alpha q^3 + \xi_1 + \xi_2 p + \xi_3 q + \xi_4 q^2],$$

$$\text{где } \alpha = a + \bar{a}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), a \neq 0, \bar{a}(0) = 0;$$

$$\Psi_4: \Lambda' = \Lambda_2, L'_\star = \mathcal{L}_{p,y}[p y + \alpha y^3 + \xi_1 + \xi_2 p + \xi_3 y + \xi_4 y^2],$$

$$\text{где } \alpha = a + \bar{a}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), a \neq 0, \bar{a}(0) = 0.$$

Явные формулы для указанных бифуркационных диаграмм приведены в параграфе 2.5.

3 Перестройки фронтов и особенности каустик

3.1. Фронты и каустики

Рассмотрим лежандрово расслоение $\pi : E \rightarrow \mathbb{R}^{1+D}$ над пространством–временем \mathbb{R}^{1+D} , где $D \geq 2$. Согласно параграфу 1.1 мировой фронт волны — это проекция $\pi(\Lambda) \subset \mathbb{R}^{1+D}$ стратифицированного лежандрова подмногообразия Λ контактного пространства E ; в типичном случае это лежандрово подмногообразие

может иметь особые точки по меньшей двух типов — Λ_1 и Λ_2 . Особые точки Λ_1 образуют гладкое подмногообразие в E размерности $D - 1$, в окрестности каждой из них лежандрово подмногообразие Λ диффеоморфно цилиндру $\Lambda_1 \times \mathbb{R}^{D-1}$ над лежандровой кривой Λ_1 . Особые точки Λ_2 образуют гладкое подмногообразие в E размерности $D - 2$, в окрестности каждой из них лежандрово подмногообразие Λ диффеоморфно цилиндру $\Lambda_2 \times \mathbb{R}^{D-2}$ над лежандровой поверхностью Λ_2 .

Мгновенный фронт в данный момент времени t

$$\Phi_t = \{ \xi \in \mathbb{R}^D \mid (t, \xi) \in \pi(\Lambda) \}$$

лежит в физическом пространстве и представляет собой сечение мирового фронта *изохроной*, т. е. гиперповерхностью, на которой временная координата принимает данное значение t . С течением времени t мгновенный фронт может перестраиваться.

Каустика — это образ особенностей мирового фронта $\pi(\Lambda)$ при естественном проектировании $(t, \xi) \mapsto \xi$ из пространства–времени \mathbb{R}^{1+D} на физическое пространство \mathbb{R}^D . Она замечается особенностями мгновенного фронта Φ_t , эволюционирующего с течением времени t .

В настоящем разделе приведены рисунки типичных перестроек мгновенных фронтов и особенностей каустики, возникающих в особых точках Λ_1 и Λ_2 лежандрова подмногообразия Λ , если $D = 2$ или $D = 3$. При этом мы интересуемся только физически интересными перестройками, при которых лучи трансверсальны изохронам и распространяются с ненулевой скоростью.

Рисунки типичных перестроек мгновенных фронтов и особенностей каустики, возникающих в гладких точках лежандрова подмногообразия Λ , опубликованы, например, в [11] и [12]. Они хорошо известны, и мы их не приводим.

3.2. Случай $D = 2$

Особенности мирового фронта. Если π общего положения, то мировой фронт $\pi(\Lambda)$ — это поверхность (возможно, самопересекающаяся) с рёбрами возврата A_2 и гладкими линиями Θ_2 разрывов третьих производных. Рёбра возврата A_2 возникают в некоторых гладких точках лежандрова подмногообразия Λ , а разрывы третьих производных Θ_2 — в его общих особых точках типа Λ_1 .

Помимо рёбер возврата A_2 и линий Θ_2 разрывов третьих производных типичный мировой фронт ещё может иметь следующие неприводимые точечные особенности, изображённые на рисунке 2.3:

- ласточкин хвост A_3 ;
- острый ласточкин хвост Θ_3 ;
- Π_3^+ , из которой выходит линия Θ_2 разрывов третьих производных;
- Π_3^- с $a > 2$, из которой выходят линия Θ_2 разрывов третьих производных и две ветви ребра возврата A_2 .

Ласточкины хвосты A_3 возникают в изолированных гладких точках лежандрова подмногообразия Λ , острые ласточкины хвосты — в его изолированных особых точках типа Λ_1 , а особенности Π_3^\pm — в его особых точках типа Λ_2 .

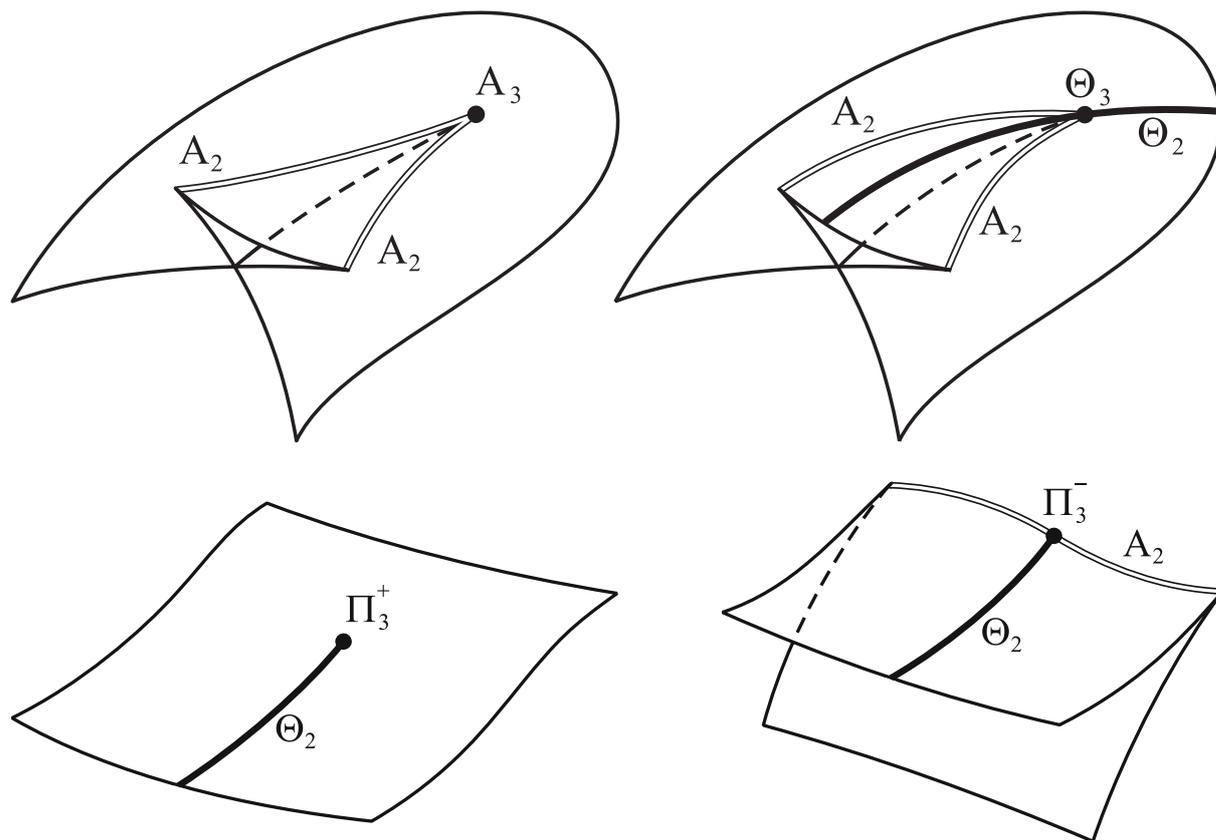


Рис. 2.3: Особенности мирового фронта при $D = 2$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В случае $D = 2$ при $0 < a < 2$ в окрестности особенности Π_3^- лучи не могут быть трансверсальны изохронам — это показано в работе [16].

Типичные перестройки мгновенных фронтов, происходящие в точках Θ_3 и Π_3^\pm изображены на рисунках 2.4 и 2.5. (Перестройка A_3 , как уже упоминалось выше, хорошо известна.) На этих рисунках изображена ещё и каустика, состоя-

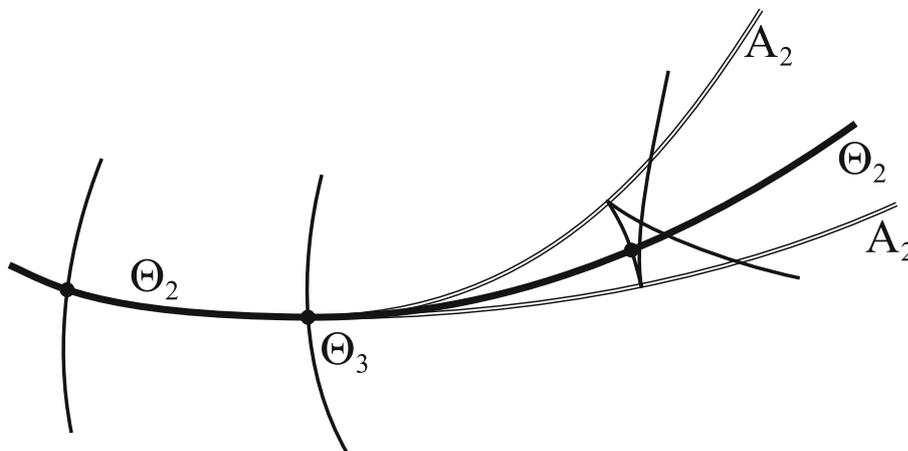


Рис. 2.4: Перестройка Θ_3 мгновенного фронта и особенность каустики на плоскости

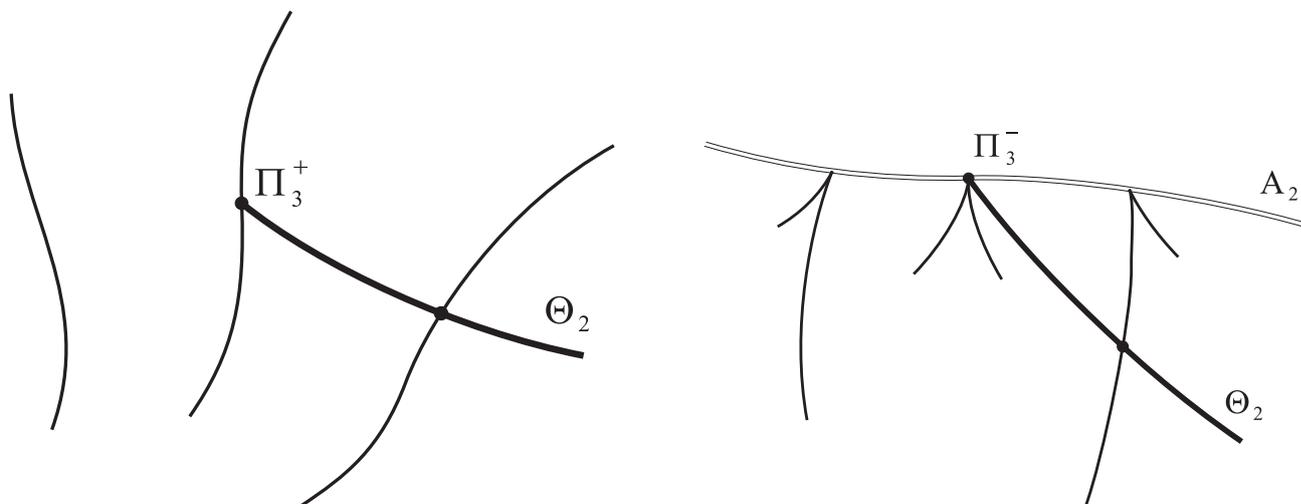


Рис. 2.5: Перестройки Π_3^\pm мгновенных фронтов и особенности каустик на плоскости

щая из двух линий — A_2 и Θ_2 . По линии A_2 скользят точки возврата мгновенного фронта, а по линии Θ_2 — разрывы его вторых производных.

После перестройки Π_3^\pm на мгновенном фронте появляется разрыв третьей производной, распространяющийся вдоль луча. Вторая же производная (а вместе с ней и кривизна) оказывается непрерывной, но не удовлетворяющей условию Гёльдера ни с каким положительным показателем. В окрестности же точки

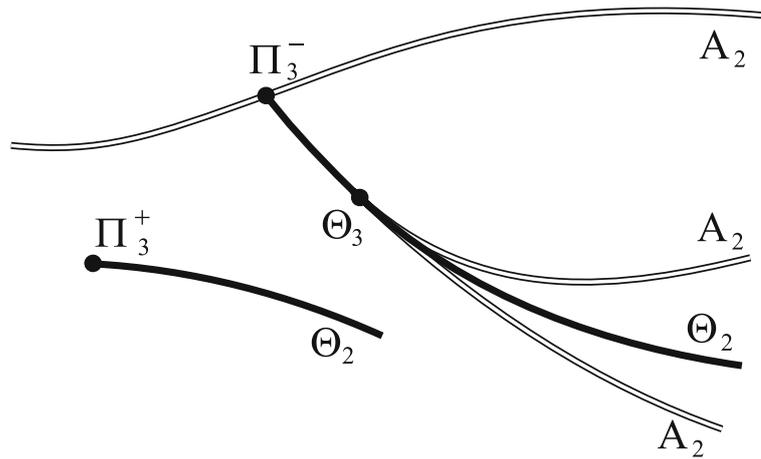


Рис. 2.6: Типичные особенности каустик на плоскости

разрыва третьей производной локальное уравнение мгновенного фронта в подходящих гладких координатах на физической плоскости имеет вид $\eta = \xi^2 / \ln |\xi| + o(\xi^2 / \ln |\xi|)$ при $\xi \rightarrow 0$. В сам момент перестройки Π_3^\pm мгновенный фронт состоит из двух касающихся ветвей различной кривизны. Локальное уравнение каждой из них в подходящих гладких координатах на физической плоскости имеет вид $\eta = \xi^2 / \ln \xi + o(\xi^2 / \ln \xi)$ при $x \rightarrow 0$.

Типичные особенности каустик, возникающие в особых точках Λ_1 и Λ_2 лежандрова подмногообразия Λ , изображены на рисунке 2.6. Такая каустика является замыканием объединения двух стратов — A_2 и Θ_2 .

Страт A_2 представляет собой огибающую лучей и с физической точки зрения состоит из точек повышенной освещённости, поэтому мы называем его *ярким* стратом. Страт Θ_2 — это луч, являющийся проекцией характеристики световой гиперповерхности, выходящей из её гиперболической конической точки, а близкие к ней характеристики, лежащие на Λ , несколько рассеиваются. Таким образом, страт Θ_2 состоит из точек пониженной освещённости, поэтому мы называем его *тёмным* стратом. Описанные явления демонстрирует рисунок 2.7.

Замыкание страта Θ_2 является объединением гладких кривых, выходящих из точек перестроек Π_3^\pm мгновенного фронта. Неожиданно оказывается, что появление тёмного страта в точке яркого — явление общего положения и малым шевелением источника излучения не устраняется. Кроме того, на тёмном страте могут находиться острые точки возврата яркого страта Θ_3 , которые напоминают

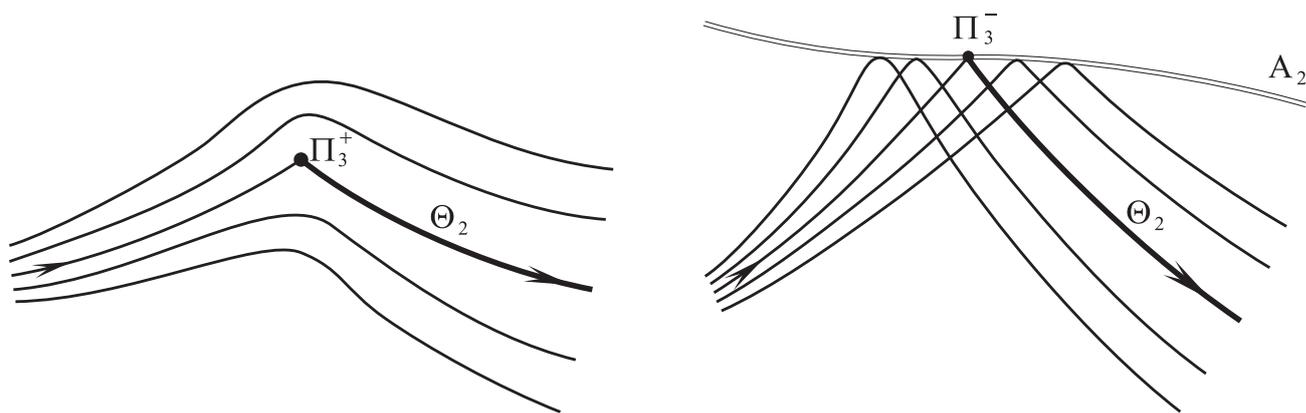


Рис. 2.7: Рассеяние лучей на плоскости и особенности каустик Π_3^\pm

обычную точку возврата, но отличаются от последней бесконечным порядком касания своих ветвей.

3.3. Случай $D = 3$

Особенности мирового фронта. Если проектирование π общего положения, а лежандрово подмногообразие Λ гладкое, то мировой фронт $\pi(\Lambda)$ при $D = 3$ может иметь лишь пять хорошо известных неприводимых особенностей: A_2 , A_3 , A_4 , D_4^+ , D_4^- . Согласно теоремам 2.4 и 2.5, если у Λ есть особые точки типа Λ_1 , то к этому списку добавляются особенности Θ_2 , Θ_3 , Θ_4^+ , Θ_4^- , Ξ_4 ; а если есть особые точки типа Λ_2 , то появляются ещё особенности Π_3^+ , Π_3^- , Φ_4 , Ψ_4 . Здесь индекс — это коразмерность подмногообразия, образованного особенностями рассматриваемого типа в четырёхмерном пространстве–времени.

Перестройки мгновенных фронтов. Мгновенный фронт распространяющейся волны в отдельные моменты времени может испытывать перестройки, изображённые на рисунках 2.8 и 2.9, которые являются типичными перестройками сечений особенностей мирового фронта гиперповерхностями $t = \text{const}$. При этом мы отбрасываем перестройки, не реализующиеся в физике, пользуясь следующим соображением: ограничение времени как на гладкую часть мирового фронта, так и на его страты A_2 и Θ_2 , не имеет критических точек.

Типичные особенности каустик. Если лежандрово подмногообразие Λ гладкое, то каустика — это поверхность, касающаяся лучей и состоящая из точек повышенной освещённости. Её типичные особенности в трёхмерном простран-

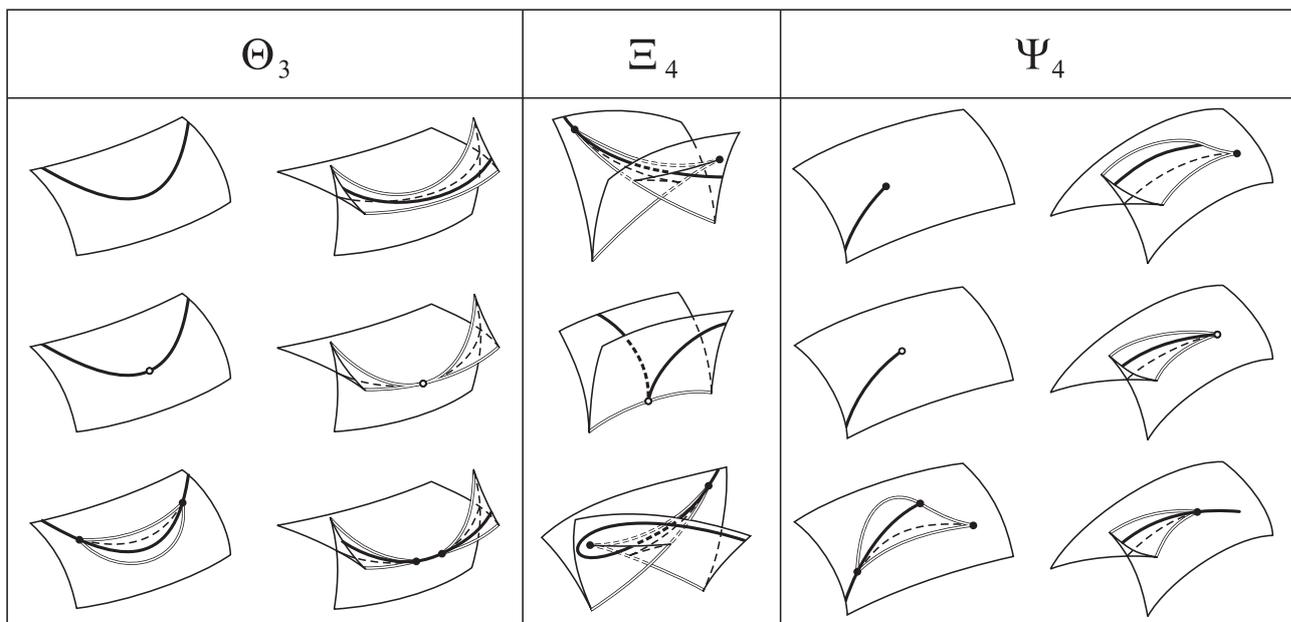


Рис. 2.8: Перестройки мгновенных фронтов в трёхмерном пространстве I

стве хорошо известны: рёбра возврата A_3 , ласточкины хвосты A_4 , кошельки D_4^+ и пирамиды D_4^- (см., например, [12]). Все они встречаются на огибающей семейства нормалей к гладкой поверхности — например, кошельки и пирамиды возникают в омбилических точках последней.

Если же на Λ есть особые точки Λ_1 и Λ_2 , то каустика является замыканием объединения двух стратов A_2 и Θ_2 . Страт A_2 состоит из точек повышенной освещённости, заматается ребрами возврата мгновенного фронта, касается лучей и, собственно, является «настоящей» каустикой. На страте Θ_2 , наоборот, лежат точки пониженной освещённости, сам он целиком состоит из лучей, а заматается слабыми особенностями мгновенного фронта (разрывами третьих производных). Такой тёмный страт и слабые особенности распространяющегося фронта — новые явления по сравнению с обычными каустиками, которые состоят лишь из одного страта A_2 .

На рис. 2.10 изображены типичные особенности каустик в трёхмерном пространстве, возникающие в изолированных особых точках Λ_1 и Λ_2 лежандрова подмногообразия Λ .

В гладких точках лежандрова подмногообразия Λ возникают хорошо известные устойчивые особенности:

- A_2 — гладкая точка каустики;

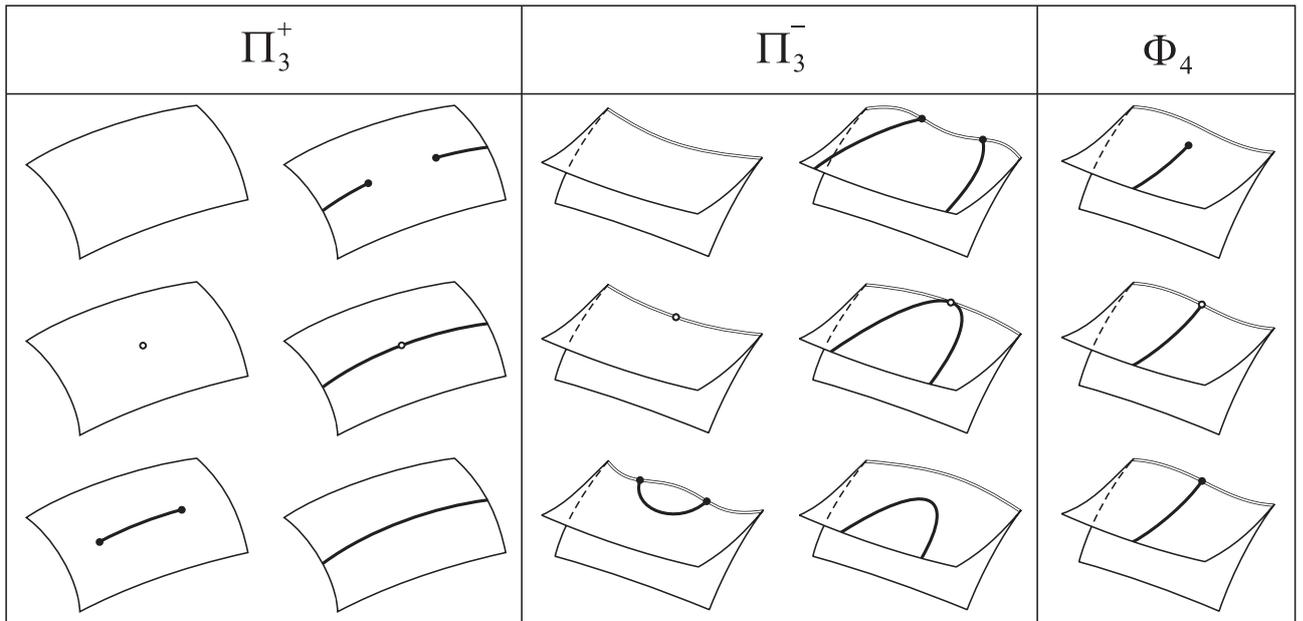


Рис. 2.9: Перестройки мгновенных фронтов в трёхмерном пространстве II

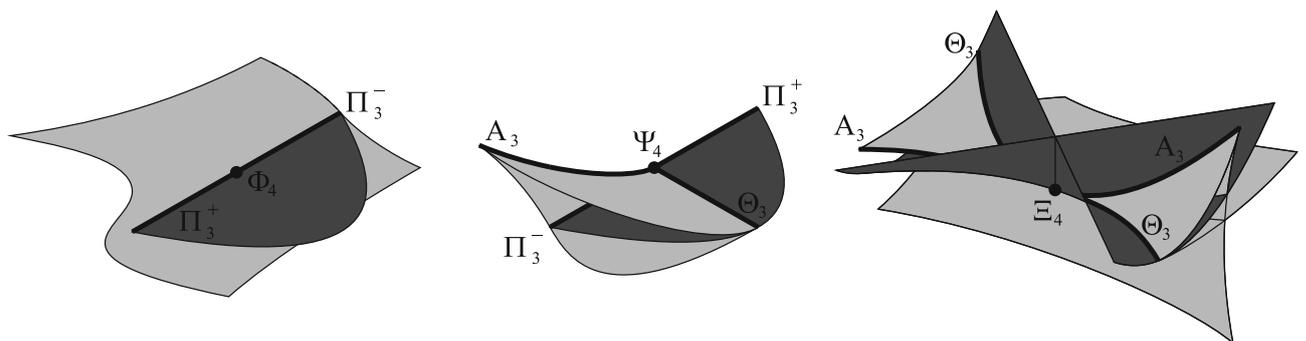


Рис. 2.10: Особенности Φ_4 , Ψ_4 и Ξ_4 каустик в трёхмерном пространстве

- A_3 — ребро возврата каустики;
- A_4 — ласточкин хвост каустики;
- D_4^+ — кошелёк каустики;
- D_4^- — пирамида каустики.

В особых точках типа Λ_1 возникают особенности:

- Θ_2 — гладкая точка тёмного страта;
- Θ_3, Θ_4^\pm — точки острого ребра возврата каустики;
- Ξ_4 — зонтик Уитни тёмного страта.

В особых точках типа Λ_2 возникают особенности:

- Π_3^+ — линия обрыва тёмного страта;
- Π_3^- — примыкание тёмного страта к каустике;
- точки Φ_4 и Ψ_4 .

4 Приведение к нормальным формам

4.1. Гамильтонианы

Функция H от (p, x, v) называется *гамильтонианом* контактного векторного поля:

$$\mathbf{v} = \begin{cases} \dot{p} = & -\partial_x H - p \partial_v H / 2 \\ \dot{x} = & \partial_p H - x \partial_v H / 2 \\ \dot{v} = & -H + p \partial_p H / 2 + x \partial_x H / 2 \end{cases},$$

которое однозначно определяется условием $\theta(\mathbf{v}) = H$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Хорошо известно (и непосредственно следует из указанной формулы для \mathbf{v}), что $H = \theta(\mathbf{v})$, $\dot{H} = -\partial_v H \cdot H$ и $\dot{\theta} = -\partial_v H \cdot \theta$.

Гамильтониан $-(p^2 + v)$ обращается в нуль на стратифицированном лежандровом подмногообразии Λ_1 , а значит контактное векторное поле

$$\begin{cases} \dot{p} = & p/2 \\ \dot{x} = & -2p + x/2 \\ \dot{v} = & v \end{cases}$$

касается гладкого страта $\Lambda_1 \setminus 0$. Кроме того, оно обращается в нуль в начале координат.

Гамильтониан $-qy$ обращается в нуль на стратифицированном лежандровом подмногообразии $\Lambda_1 \times \mathbb{R}$, а значит контактное векторное поле

$$\begin{cases} \dot{p} = 0 \\ \dot{q} = q \\ \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -y \\ \dot{v} = 0 \end{cases}$$

касается страта $(\Lambda_1 \setminus 0) \times \mathbb{R}$. Кроме того, оно касается страта $0 \times \mathbb{R} = \{p = q = x = v = 0\}$ и обращается в нуль в начале координат.

Гамильтониан $-(p^2 + 2v)$ обращается в нуль на стратифицированном лежандровом подмногообразии Λ_2 , а значит контактное векторное поле

$$\begin{cases} \dot{p} = p \\ \dot{q} = q \\ \dot{x} = -2p + x \\ \dot{y} = y \\ \dot{v} = 2v \end{cases}$$

касается страта Λ_2^2 . Кроме того, оно касается страта $\Lambda_2^1 = \{p = q = x = v = 0, y < 0\}$ и обращается в нуль в начале координат.

Гамильтониан $qy - 2v$ обращается в нуль на стратифицированном лежандровом подмногообразии Λ_2 , а значит контактное векторное поле

$$\begin{cases} \dot{p} = p \\ \dot{q} = 0 \\ \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2y \\ \dot{v} = 2v \end{cases}$$

касается страта Λ_2^2 . Кроме того, оно касается страта $\Lambda_2^1 = \{p = q = x = v = 0, y < 0\}$ и обращается в нуль в начале координат.

4.2. Леммы

Приведение к нормальным формам осуществляется с помощью шести лемм, которые доказаны в настоящем параграфе и следуют из теоремы 1.20 о достаточной квазиструе.

ЛЕММА 4.2. Пусть $w \in \mathcal{E}_p^2$ при $\deg p = \deg x = 1$, $\deg v = 2$. Тогда $w \sim_{\Lambda_1} 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что $w \sim_{\Lambda_1} 0 \pmod{\mathcal{E}_p^3}$. Пусть $w = ap^2 \pmod{\mathcal{E}_p^3}$. Контактное векторное поле с правильным гамильтонианом $-h_1 = -(p^2 + v) \in \mathcal{E}_{p,x,v}^2$ касается гладкого страта $\Lambda_1 \setminus 0$, обращается в нуль в начале координат и действует на w по формуле $\dot{a} = 1$, поскольку

$$\dot{w} = (p^2 + v)[w] = p^2 + w - p\partial_p w/2 = p^2 \pmod{\mathcal{E}_p^3}.$$

Следовательно, мы всегда можем добиться равенства $a = 0$, действуя на $\mathcal{L}_p[w]$ фазовым потоком контактного векторного поля с гамильтонианом $-h_1$.

Поскольку $h_1 \in \mathfrak{h}'_{\Lambda_1}$, с помощью явного вычисления получаем: $\mathfrak{m}_p \cdot \mathfrak{h}'_{\Lambda_1}[0] \supset (p) \cdot ((p^2 + v)[0]) = (p) \cdot (p^2) = (p^3) = \mathcal{E}_p^3$. Утверждение леммы теперь следует из теоремы 1.20 о достаточной струе при $w_0 = 0$ и $k = 2$. \square

ЛЕММА 4.3. Пусть $w \in \mathcal{E}_x^d \setminus \mathcal{E}_x^{d+1}$ при $\deg p = d - 1$, $\deg x = 1$, $\deg v = d$, где $d \geq 3$. Тогда $w \sim_{\Lambda_1} \pm x^d$, а при нечётном d $w \sim_{\Lambda_1} x^d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что $w \sim_{\Lambda_1} w_0 \pmod{\mathcal{E}_x^{d+1}}$, где $w_0 = \pm x^d$. Пусть $w = ax^d \pmod{\mathcal{E}_x^{d+1}}$, где $d \geq 3$. Контактное векторное поле с правильным гамильтонианом $-h_1 = -(p^2 + v) \in \mathcal{E}_{p,x,v}^d$ касается гладкого страта $\Lambda_1 \setminus 0$, обращается в нуль в начале координат и действует на w по формуле $\dot{a} = (1 - d/2)a$, поскольку

$$\dot{w} = (p^2 + v)[w] = (\partial_x w)^2 + w - x\partial_x w/2 = (1 - d/2)ax^d \pmod{\mathcal{E}_x^{d+1}}.$$

Следовательно, мы всегда можем добиться равенства $a = 1$ при $a > 0$ и равенства $a = -1$ при $a < 0$, действуя на $\mathcal{L}_x[w]$ фазовым потоком контактного векторного поля с гамильтонианом $-h_1$.

Поскольку $h_1 \in \mathfrak{h}'_{\Lambda_1}$, с помощью явного вычисления получаем: $\mathfrak{m}_x \cdot \mathfrak{h}'_{\Lambda_1}[w_0] \supset (x) \cdot ((p^2 + v)[w_0]) = (x) \cdot ((\partial_x w_0)^2 + w_0 - \partial_x w_0/2) = (x) \cdot (d^2 x^{2d-2} \pm (1 - d/2)x^d) =$

$(x^{d+1}) = \mathcal{E}_x^{d+1}$, так как $d \geq 3$. Утверждение леммы теперь следует из теоремы 1.20 о достаточной струе при $w_0 = \pm x^d$ и $k = d$.

Наконец, инволюция $(p, x, v) \mapsto (-p, -x, v)$, сохраняющая контактную форму, стратифицированное лежандрово подмногообразие Λ_1 и начало координат, переводит $\mathcal{L}_x[x^d]$ в $\mathcal{L}_x[(-1)^d x^d]$. \square

ЛЕММА 4.4. Пусть $w \in \mathcal{E}_{p,y}^6$ и $\partial_y^3 w(0) \neq 0$ при $\deg p = \deg x = 3$, $\deg q = 4$, $\deg y = 2$, $\deg v = 6$. Тогда $w \sim_{\Lambda_1 \times \mathbb{R}} y^3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что $w \sim_{\Lambda_1 \times \mathbb{R}} w_0 \pmod{\mathcal{E}_{p,y}^8}$, где $wF_0 = y^3$. Пусть $w = ap^2 + \xi py^2 + cy^3 \pmod{\mathcal{E}_{p,y}^8}$. Контактное векторное поле с правильным гамильтонианом $-h_1 = -(p^2 + v) \in \mathcal{E}_{p,q,x,y,v}^6$ касается всех стратов лежандрова подмногообразия $\Lambda_1 \times \mathbb{R}$, обращается в нуль в начале координат и действует на w по формулам $\dot{a} = 1$, $\dot{\xi} = -\xi/2$ и $\dot{c} = -c/2$, поскольку

$$\begin{aligned} \dot{w} &= (p^2 + v)[w] = \\ &= p^2 + w - p\partial_p w/2 - y\partial_y w/2 = p^2 - \xi py^2/2 - cy^3/2 \pmod{\mathcal{E}_{p,y}^8}. \end{aligned}$$

Следовательно, мы всегда можем добиться равенства $a = 0$, действуя на $\mathcal{L}_{p,y}[w]$ фазовым потоком контактного векторного поля с гамильтонианом $-h_1$.

Далее, контактное векторное поле с правильным гамильтонианом $-h_2 = -qy \in \mathcal{E}_{p,q,x,y,v}^6$ касается всех стратов лежандрова подмногообразия $\Lambda_1 \times \mathbb{R}$, обращается в нуль в начале координат и действует на w по формулам $\dot{a} = 0$, $\dot{\xi} = 2\xi$ и $\dot{c} = 3c$, поскольку

$$\dot{w} = (qy)[w] = y\partial_y w = 2\xi py^2 + 3cy^3 \pmod{\mathcal{E}_{p,y}^8}.$$

Следовательно, мы всегда можем добиться равенства $c = 1$ при $c > 0$ и равенства $c = -1$ при $c < 0$, сохранив уже достигнутое равенство $a = 0$ и действуя на $\mathcal{L}_{p,y}[w]$ фазовым потоком контактного векторного поля с гамильтонианом $-h_2$.

Наконец, контактное векторное поле с правильным гамильтонианом $-h_3 = -pq \in \mathcal{E}_{p,q,x,y,v}^7$ касается всех стратов лежандрова подмногообразия $\Lambda_1 \times \mathbb{R}$, обращается в нуль в начале координат и действует на w по формулам $\dot{a} = 0$, $\dot{\xi} = 3c$ и

$\dot{c} = 0$, поскольку

$$\dot{w} = (pq)[w] = p\partial_y w = 3cpy^2 \pmod{\mathcal{E}_{p,y}^8}.$$

Следовательно, мы всегда можем добиться равенства $\xi = 0$ при $c \neq 0$, сохранив уже достигнутые равенства $a = 0$, $c = \pm 1$ и действуя на $\mathcal{L}_{p,y}[w]$ фазовым потоком контактного векторного поля с гамильтонианом $-h_3$.

Итак, $w \sim_{\Lambda_1 \times \mathbb{R}} y^3 \pmod{\mathcal{E}_{p,y}^8}$ или $w \sim_{\Lambda_1 \times \mathbb{R}} -y^3 \pmod{\mathcal{E}_{p,y}^8}$. Но инволюция $(p, q, x, y, v) \mapsto (p, -q, x, -y, v)$, сохраняющая контактную форму, стратифицированное лежандрово подмногообразие $\Lambda_1 \times \mathbb{R}$ и начало координат, переводит $\mathcal{L}_{p,y}[-y^3]$ в $\mathcal{L}_{p,y}[y^3]$.

Поскольку $h_1, h_2, h_3 \in \mathfrak{h}'_{\Lambda_1 \times \mathbb{R}}$, с помощью явного вычисления получаем: $\mathfrak{m}_{p,y} \cdot \mathfrak{h}'_{\Lambda_1 \times \mathbb{R}}[w_0] \supset (p, y) \cdot (p^2 + v, pq, qy)[w_0] = (p, y) \cdot (p^2 + w_0 - p\partial_p w_0/2 - y\partial_y w_0/2, p\partial_y w_0, y\partial_y w_0) = (p, y) \cdot (p^2 - y^3/2, 3py^2, 3y^3) = (p, y) \cdot (p^2, py^2, y^3) = (p^3, p^2y, py^3, y^4) = \mathcal{E}_{p,y}^8$. Утверждение леммы теперь следует из теоремы 1.20 о достаточной струе при $w_0 = y^3$ и $k = 7$. \square

ЛЕММА 4.5. Пусть $w \in \mathcal{E}_{p,q}^2$ и $\partial_q^2 w(0) \neq 0$ при $\deg p = \deg x = \deg q = \deg y = 1$, $\deg v = 2$. Тогда $w \sim_{\Lambda_2} apq \pm q^2/2$. Кроме того, $apq + q^2/2 \sim_{\Lambda_2} -apq + q^2/2$ и $apq - q^2/2 \sim_{\Lambda_2} -apq - q^2/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что $w \sim_{\Lambda_2} w_0 \pmod{\mathcal{E}_{p,q}^3}$, где $w_0 = apq \pm q^2/2$. Пусть $w = ap^2 + \xi pq + cq^2 \pmod{\mathcal{E}_{p,q}^3}$. Контактное векторное поле с правильным гамильтонианом $-h_1 = -(p^2 + 2v) \in \mathcal{E}_{p,q,x,y,v}^2$ касается всех стратов лежандрова подмногообразия Λ_2 , в частности, обращается в нуль в начале координат и действует на w по формулам $\dot{a} = 1$, $\dot{\xi} = 0$ и $\dot{c} = 0$, поскольку

$$\dot{w} = (p^2 + 2v)[w] = p^2 + 2w - p\partial_p w - q\partial_q w = p^2 \pmod{\mathcal{E}_{p,q}^3}.$$

Следовательно, мы всегда можем добиться равенства $a = 0$, действуя на $\mathcal{L}_{p,q}[w]$ фазовым потоком контактного векторного поля с гамильтонианом $-h_1$.

Далее, контактное векторное поле с правильным гамильтонианом $-h_2 = qy - 2v \in \mathcal{E}_{p,q,x,y,v}^2$ касается всех стратов лежандрова подмногообразия Λ_2 , в частности, обращается в нуль в начале координат и действует на w по формулам $\dot{a} = 0$,

$\dot{\xi} = \xi$ и $\dot{c} = 2c$, поскольку

$$\dot{w} = (2v - qy)[w] = 2w - p\partial_p w - q\partial_q w + q\partial_q w = \xi pq + 2cq^2 \pmod{\mathcal{E}_{p,q}^3}.$$

Следовательно, мы всегда можем добиться равенства $c = 1/2$ при $c > 0$ и равенства $c = -1/2$ при $c < 0$, сохранив уже достигнутое равенство $a = 0$ и действуя на $\mathcal{L}_{p,q}[w]$ фазовым потоком контактного векторного поля с гамильтонианом $-h_2$.

Поскольку $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}'_{\Lambda_2}$, с помощью явного вычисления получаем: $\mathfrak{m}_{p,q} \cdot \mathfrak{h}'_{\Lambda_2}[w_0] \supset (p,q) \cdot (p^2 + 2v, -qy + 2v)[w_0] = (p,q) \cdot (p^2 + 2w_0 - p\partial_p w_0 - q\partial_q w_0, q\partial_q w_0 + 2w_0 - p\partial_p w_0 - q\partial_q w_0) = (p,q) \cdot (p^2, apq \pm q^2) = (p^3, p^2q, ap^2q \pm pq^2, apq^2 \pm q^3) = (p^3, p^2q, pq^2, q^3) = \mathcal{E}_{p,q}^3$. Утверждение леммы теперь следует из теоремы 1.20 о достаточной струе при $w_0 = apq \pm q^2/2$ и $k = 2$.

Наконец, инволюция $(p,q,x,y,v) \mapsto (-p,q, -x,y,v)$, сохраняющая контактную форму, стратифицированное лежандрово подмногообразие Λ_2 и начало координат, переводит $\mathcal{L}_{p,q}[apq + q^2/2]$ в $\mathcal{L}_{p,q}[-apq + q^2/2]$ и $\mathcal{L}_{p,q}[apq - q^2/2]$ в $\mathcal{L}_{p,q}[-apq - q^2/2]$. \square

ЛЕММА 4.6. Пусть $w \in \mathcal{E}_{p,q}^5$, $\partial_p \partial_q w(0) \neq 0$, $\partial_q^3 w(0) \neq 0$ при $\deg p = \deg y = 3$, $\deg x = \deg q = 2$, $\deg v = 5$. Тогда $w \sim_{\Lambda_2} pq + aq^3$, где $a \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что $w \sim_{\Lambda_2} w_0 \pmod{\mathcal{E}_{p,q}^7}$, где $w_0 = pq + aq^3$, $a \neq 0$. Пусть $w = ap^2 + \xi pq + cq^3 \pmod{\mathcal{E}_{p,q}^7}$. Контактное векторное поле с правильным гамильтонианом $-h_1 = -(p^2 + 2v) \in \mathcal{E}_{p,q,x,y,v}^5$ касается всех стратов лежандрова подмногообразия Λ_2 , в частности, обращается в нуль в начале координат и действует на w по формулам $\dot{a} = 1$, $\dot{\xi} = 0$ и $\dot{c} = -c$, поскольку

$$\dot{w} = (p^2 + 2v)[w] = p^2 + 2w - p\partial_p w - q\partial_q w = p^2 - cq^3 \pmod{\mathcal{E}_{p,q}^7}.$$

Следовательно, мы всегда можем добиться равенства $a = 0$, действуя на $\mathcal{L}_{p,q}[w]$ фазовым потоком контактного векторного поля с гамильтонианом $-h_1$. При этом знак c сохраняется.

Далее, контактное векторное поле с правильным гамильтонианом $-h_2 = qy - 2v \in \mathcal{E}_{p,q,x,y,v}^5$ касается всех стратов лежандрова подмногообразия Λ_2 , в частности, обращается в нуль в начале координат и действует на w по формулам $\dot{a} = 0$,

$\dot{\xi} = \xi$ и $\dot{c} = 2c$, поскольку

$$\dot{w} = (2v - qy)[w] = 2w - p\partial_p w - q\partial_q w + q\partial_q w = \xi pq + 2cq^3 \pmod{\mathcal{E}_{p,q}^7}.$$

Следовательно, мы всегда можем добиться равенства $\xi = 1$ при $\xi > 0$ и равенства $\xi = -1$ при $\xi < 0$, сохранив уже достигнутое равенство $a = 0$ и действуя на $\mathcal{L}_{p,q}[w]$ фазовым потоком контактного векторного поля с гамильтонианом $-h_2$. При этом знак c сохраняется.

Итак, $w \sim_{\Lambda_2} pq + cq^3 \pmod{\mathcal{E}_{p,q}^7}$ или $w \sim_{\Lambda_2} -pq + cq^3 \pmod{\mathcal{E}_{p,q}^7}$, где $c \neq 0$. Но инволюция $(p, q, x, y, v) \mapsto (-p, q, -x, y, v)$, сохраняющая контактную форму, стратифицированное лежандрово подмногообразие Λ_2 и начало координат, переводит $\mathcal{L}_{p,q}[-pq + cq^3]$ в $\mathcal{L}_{p,q}[pq + cq^3]$.

Поскольку $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}'_{\Lambda_2}$, с помощью явного вычисления получаем: $\mathfrak{m}_{p,q} \cdot \mathfrak{h}'_{\Lambda_2}[w_0] \supset (p, q) \cdot (p^2 + 2v, -qy + 2v)[w_0] = (p, q) \cdot (p^2 + 2w_0 - p\partial_p w_0 - q\partial_q w_0, q\partial_q w_0 + 2w_0 - p\partial_p w_0 - q\partial_q w_0) = (p, q) \cdot (p^2 - aq^3, pq + 2aq^3) = (p^3 - apq^3, p^2q - aq^4, p^2q + 2arpq^3, pq^2 + 2aq^4)$. Но $2(p^2q - aq^4) - 2(p^2q + 2arpq^3) + (pq^2 + 2aq^4) = pq^2(1 - 4aq)$, поэтому $pq^2 \in \mathfrak{m}_{p,q} \cdot \mathfrak{h}'_{\Lambda_2}[w_0]$. Значит, $\mathfrak{m}_{p,q} \cdot \mathfrak{h}'_{\Lambda_2}[w_0] \supset (p^3, p^2q, pq^2, q^4) = \mathcal{E}_{p,q}^7$, так как $a \neq 0$. Утверждение леммы теперь следует из теоремы 1.20 о достаточной струе при $w_0 = pq + aq^3$ и $k = 6$. \square

ЛЕММА 4.7. Пусть $w \in \mathcal{E}_{p,y}^5$, $\partial_p \partial_y w(0) \neq 0$, $\partial_y^3 w(0) \neq 0$ при $\deg p = \deg q = 3$, $\deg x = \deg y = 2$, $\deg v = 5$. Тогда $w \sim_{\Lambda_2} py + ay^3$, где $a \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что $w \sim_{\Lambda_2} w_0 \pmod{\mathcal{E}_{p,y}^7}$, где $w_0 = py + ay^3$, $a \neq 0$. Пусть $w = ap^2 + \xi py + cy^3 \pmod{\mathcal{E}_{p,y}^7}$. Контактное векторное поле с правильным гамильтонианом $-h_1 = -(p^2 + 2v) \in \mathcal{E}_{p,q,x,y,v}^5$ касается всех стратов лежандрова подмногообразия Λ_2 , в частности, обращается в нуль в начале координат и действует на w по формулам $\dot{a} = 1$, $\dot{\xi} = 0$ и $\dot{c} = -c$, поскольку

$$\dot{w} = (p^2 + 2v)[w] = p^2 + 2w - p\partial_p w - y\partial_y w = p^2 - cy^3 \pmod{\mathcal{E}_{p,y}^7}.$$

Следовательно, мы всегда можем добиться равенства $a = 0$, действуя на $\mathcal{L}_{p,y}[w]$ фазовым потоком контактного векторного поля с гамильтонианом $-h_1$. При этом знак c сохраняется.

Далее, контактное векторное поле с правильным гамильтонианом $-h_2 = qy - 2v \in \mathcal{E}_{p,q,x,y,v}^5$ касается всех стратов лежандрова подмногообразия Λ_2 , в частности, обращается в нуль в начале координат и действует на w по формулам $\dot{a} = 0$, $\dot{\xi} = -\xi$ и $\dot{c} = -4c$, поскольку

$$\dot{w} = (2v - qy)[w] = 2w - p\partial_p w - y\partial_y w - y\partial_y w = -\xi py - 4cy^3 \pmod{\mathcal{E}_{p,y}^7}.$$

Следовательно, мы всегда можем добиться равенства $\xi = 1$ при $\xi > 0$ и равенства $\xi = -1$ при $\xi < 0$, сохранив уже достигнутое равенство $a = 0$ и действуя на $\mathcal{L}_{p,y}[w]$ фазовым потоком контактного векторного поля с гамильтонианом $-h_2$. При этом знак c сохраняется.

Итак, $w \sim_{\Lambda_2} py + cy^3 \pmod{\mathcal{E}_{p,y}^7}$ или $w \sim_{\Lambda_2} -py + cy^3 \pmod{\mathcal{E}_{p,y}^7}$, где $c \neq 0$. Но инволюция $(p, q, x, y, v) \mapsto (-p, q, -x, y, v)$, сохраняющая контактную форму, стратифицированное лежандрово подмногообразие Λ_2 и начало координат, переводит $\mathcal{L}_{p,y}[-py + cy^3]$ в $\mathcal{L}_{p,y}[py + cy^3]$.

Поскольку $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}'_{\Lambda_2}$, с помощью явного вычисления получаем: $\mathfrak{m}_{p,y} \cdot \mathfrak{h}'_{\Lambda_2}[w_0] \supset (p, y) \cdot (p^2 + 2v, -qy + 2v)[w_0] = (p, y) \cdot (p^2 + 2w_0 - p\partial_p w_0 - y\partial_y w_0, -y\partial_y w_0 + 2w_0 - p\partial_p w_0 - y\partial_y w_0) = (p, y) \cdot (p^2 - ay^3, -py - 4ay^3) = (p^3 - apy^3, p^2y - ay^4, p^2y + 4apy^3, py^2 + 4ay^4)$. Но $4(p^2y - ay^4) - 4(p^2y + 4apy^3) + (py^2 + 4ay^4) = py^2(1 - 16ay)$, поэтому $py^2 \in \mathfrak{m}_{p,y} \cdot \mathfrak{h}'_{\Lambda_2}[w_0]$. Значит, $\mathfrak{m}_{p,y} \cdot \mathfrak{h}'_{\Lambda_2}[w_0] \supset (p^3, p^2y, py^2, y^4) = \mathcal{E}_{p,y}^7$, так как $a \neq 0$. Утверждение леммы теперь следует из теоремы 1.20 о достаточной струе при $w_0 = py + ay^3$ и $k = 6$. \square

4.3. Доказательство теоремы 2.2

По условию $\Lambda = \Lambda_2 \times \mathbb{R}^{m-2}$, а $\Lambda_2 = \Lambda_2^1 \cup \Lambda_2^1 \cup \Lambda_2^0$. Росток Λ в точке из $\Lambda_2^1 \times \mathbb{R}^{m-2}$ контактно диффеоморфен ростку надстройки $\Lambda_1 \times \mathbb{R}^{m-1}$ над Λ_1 . Лежандровы подмногообразия L_ξ из исходного типичного семейства, которые пересекают Λ в точках из $\Lambda_2^1 \times \mathbb{R}^{m-2}$, образуют семейство размерности $\dim X - 2$ и отсутствуют, если $\dim X \leq 1$. Обозначим через ℓ точку пересечения L_ξ и $\Lambda_2^1 \times \mathbb{R}^{m-2}$ и выберем в её окрестности координаты $p = (p, q_1, \dots, q_{m-1})$, $x = (x, y_1, \dots, y_{m-1})$, v , в которых

$$\Lambda = \Lambda_1 \times \mathbb{R}^{m-1} = \{2p \ln p^2 + x = v + p^2 = q_1 = \dots = q_{m-1} = 0\},$$

$$\theta = p dx/2 - x dp/2 - dv.$$

Росток L_ξ в точке ℓ задаётся ростком производящей функции $w \in \mathfrak{m}_{p_I, x_J}^2 \subset \mathcal{E}_{p_I, x_J}$, поскольку $\ell \in L_\xi$, т. е. $0 \in \mathcal{L}_{p_I, x_J}[w]$ (здесь \mathfrak{m}_{p_I, x_J} — максимальный идеал в алгебре \mathcal{E}_{p_I, x_J} ростков гладких функций от p_I и x_J в нуле).

По условию $\dim X - 2 \leq 2$ и L_\star — типичное семейство. Поэтому росток L_ξ в точке ℓ задаётся ростком в нуле производящей функции $w(p_I, x_J)$ с $|J| \leq 1$. В самом деле, пусть среди аргументов w есть две переменные (например, x_1, x_2), которые нельзя заменить ни на p_1, x_2 , ни на x_1, p_2 , ни на p_1, p_2 . Для этого нужны три условия: $\partial_{x_1}^2 w(0) = \partial_{x_2}^2 w(0) = \partial_{x_1} \partial_{x_2} w(0) = 0$, для выполнения которых в типичном семействе требуется по крайней мере три дополнительных параметра, а в нашем распоряжении их всего $\dim X - 2 \leq 2$.

Поскольку $|J| \leq 1$, возможны три случая:

1. $p_I = (p, q_1, \dots, q_{m-1}), J = \emptyset$;
2. $p_I = (q_1, \dots, q_{m-1}), x_J = (x), \partial_x^2 w(0) = 0$ (иначе вместо координаты x на L_ξ можно взять $p = \partial_x w$ и свести к случаю 1);
3. $p_I = (p, q_2, \dots, q_{m-1}), x_J = (y_1)$ (все y_j равноправны), $\partial_{y_1}^2 w(0) = 0$ (иначе вместо координаты y_1 на L_ξ можно взять $q_1 = \partial_{y_1} w$ и свести к случаю 1), $\partial_p \partial_{y_1} w(0) = 0$ (если $\partial_{y_1}^2 w(0) = 0$ и $\partial_p \partial_{y_1} w(0) \neq 0$, то $\partial_p^2 w \partial_{y_1}^2 w - (\partial_p \partial_{y_1} w)^2 \neq 0$, поэтому вместо координат p, y_1 на L_ξ можно взять $x = -\partial_p w, q_1 = \partial_{y_1} w$ и свести к случаю 2).

Воспользовавшись теоремой 1.9, получаем, что росток в точке ℓ пары (Λ, L_ξ) эквивалентен ростуку в нуле надстройки над одной из следующих пар:

1. $(\Lambda_1, \mathcal{L}_p[w]), w \in \mathfrak{m}_p^2$ при $\dim X = 2, 3$ или 4;
2. а) $(\Lambda_1, \mathcal{L}_x[w]), w \in \mathfrak{m}_x^3 \setminus \mathfrak{m}_x^4$ при $\dim X = 3$ или 4;
б) $(\Lambda_1, \mathcal{L}_x[w]), w \in \mathfrak{m}_x^4 \setminus \mathfrak{m}_x^5$ при $\dim X = 4$;
3. $(\Lambda_1 \times \mathbb{R}, \mathcal{L}_{p,y}[w]), w \in \mathfrak{m}_{p,y}^2, \partial_p \partial_y w(0) = 0, \partial_y^2 w(0) = 0$ при $\dim X = 4$ (здесь и далее $y = y_1$).

В случае 1 с помощью леммы 4.2 получаем утверждение Θ_2 теоремы 2.2. В случае 2 а) с помощью леммы 4.3 при $d = 3$ получаем утверждение Θ_3 теоремы 2.2. В

случае 2 б) с помощью леммы 4.3 при $d = 4$ получаем утверждения Θ_4^+ и Θ_4^- теоремы 2.2. В случае 3 с помощью леммы 4.4 получаем утверждение Ξ_4 теоремы 2.2.

Лежандровы подмногообразия L_ξ из исходного типичного семейства, которые пересекают Λ в точках из $\Lambda_2^0 \times \mathbb{R}^{m-2}$, образуют семейство размерности $\dim X - 3$ и отсутствуют, если $\dim X \leq 2$. Обозначим через ℓ точку пересечения L_ξ и $\Lambda_2^0 \times \mathbb{R}^{m-2}$ и выберем в её окрестности координаты $p = (p, q, r_1, \dots, r_{m-2})$, $x = (x, y, z_1, \dots, z_{m-2})$, v , в которых

$$\Lambda = \Lambda_2 \times \mathbb{R}^{m-2} = \{2p \ln q + x = p^2 + qy = v + p^2/2 = r_1 = \dots = r_{m-2} = 0\},$$

$$\theta = p dx/2 - x dp/2 - dv.$$

Росток L_ξ в точке ℓ задаётся ростком производящей функции $w \in \mathfrak{m}_{p_I, x_J}^2 \subset \mathcal{E}_{p_I, x_J}$, поскольку $\ell \in L_\xi$, т. е. $0 \in \mathcal{L}_{p_I, x_J}[w]$ (здесь \mathfrak{m}_{p_I, x_J} — максимальный идеал в алгебре \mathcal{E}_{p_I, x_J} ростков гладких функций от p_I и x_J в нуле). Возможны следующие случаи.

1. При $\dim X = 3$ или 4 росток L_ξ трансверсален плоскостям $p = q = r_1 = \dots = r_{m-2}$ и $p = y = r_1 = \dots = r_{m-2}$. Тогда $p_I = (p, q, r_1, \dots, r_{m-2})$, $J = \emptyset$ и $\partial_q^2 w(0) \neq 0$.
2. При $\dim X = 4$ росток L_ξ трансверсален плоскости $p = q = r_1 = \dots = r_{m-2}$ и не трансверсален плоскости $p = y = r_1 = \dots = r_{m-2}$. Тогда $p_I = (p, q, r_1, \dots, r_{m-2})$, $J = \emptyset$ и $\partial_q^2 w(0) = 0$.
3. При $\dim X = 4$ росток L_ξ трансверсален плоскости $p = y = r_1 = \dots = r_{m-2}$ и не трансверсален плоскости $p = q = r_1 = \dots = r_{m-2}$. Тогда $p_I = (p, r_1, \dots, r_{m-2})$, $x_J = (y)$ и $\partial_y^2 w(0) = 0$.

Воспользовавшись теоремой 1.9, получаем, что росток в точке ℓ пары (Λ, L_ξ) эквивалентен ростку в нуле надстройки над одной из следующих пар:

1. $(\Lambda_2, \mathcal{L}_{p,q}[w])$, $w \in \mathfrak{m}_{p,q}^2$, $\partial_q^2 w(0) \neq 0$ при $\dim X = 3$ или 4;
2. $(\Lambda_2, \mathcal{L}_{p,q}[w])$, $w \in \mathfrak{m}_{p,q}^2$, $\partial_q^2 w(0) = 0$ при $\dim X = 4$;
3. $(\Lambda_2, \mathcal{L}_{p,y}[w])$, $w \in \mathfrak{m}_{p,y}^2$, $\partial_y^2 w(0) = 0$ при $\dim X = 4$.

В случае 1 с помощью леммы 4.5 получаем утверждения Π_3^+ и Π_3^- теоремы 2.2. В случае 2 с помощью леммы 4.6 получаем утверждение Φ_4 теоремы 2.2. В случае 3 с помощью леммы 4.7 получаем утверждение Ψ_4 теоремы 2.2.

Теорема 2.2 доказана.

4.4. Доказательство теоремы 2.3

Теорема 2.3 следует из теоремы 2.2 и теоремы версальности 2.13.

Во всех случаях теоремы 2.2 выпишем инфинитезимально версальные деформации указанных в ней пар в виде (Λ', L'_\star) , где

$$\Theta_2: \Lambda' = \Lambda_1, L'_\star = \mathcal{L}_p[\eta_1 + \eta_2 p], \eta_1, \eta_2 \text{ — параметры};$$

$$\Theta_3: \Lambda' = \Lambda_1, L'_\star = \mathcal{L}_x[x^3 + \eta_1 + \eta_2 x + \eta_3 x^2], \eta_1, \eta_2, \eta_3 \text{ — параметры};$$

$$\Theta_4^\pm: \Lambda' = \Lambda_1, L'_\star = \mathcal{L}_x[\pm x^4 + \eta_1 + \eta_2 x + \eta_3 x^2 + \eta_4 x^3], \eta_1, \dots, \eta_4 \text{ — параметры};$$

$$\Xi_4: \Lambda' = \Lambda_1 \times \mathbb{R}, L'_\star = \mathcal{L}_{p,y}[y^3 + \eta_1 + \eta_2 p + \eta_3 y + \eta_4 p y], \eta_1, \dots, \eta_4 \text{ — параметры};$$

$$\Pi_3^\pm: \Lambda' = \Lambda_2, L'_\star = \mathcal{L}_{p,q}[\alpha p q \pm q^2/2 + \eta_1 + \eta_2 p + \eta_3 q], \eta_1, \eta_2, \eta_3, \alpha \text{ — параметры};$$

$$\Phi_4: \Lambda' = \Lambda_2, L'_\star = \mathcal{L}_{p,q}[p q + \alpha q^3 + \eta_1 + \eta_2 p + \eta_3 q + \eta_4 q^2], \eta_1, \dots, \eta_4, \alpha \text{ — параметры};$$

$$\Psi_4: \Lambda' = \Lambda_2, L'_\star = \mathcal{L}_{p,y}[p y + \alpha y^3 + \eta_1 + \eta_2 p + \eta_3 y + \eta_4 y^2], \eta_1, \dots, \eta_4, \alpha \text{ — параметры}.$$

По теореме версальности 2.13 росток семейства пар (Λ, L_\star) в точке $\ell \times \xi_0$ стабильно эквивалентен ростку семейства пар (Λ', L'_\star) , индуцированного из инфинитезимально версальной деформации (Λ', L'_\star) приведённого списка с помощью отображения $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^\mu$, где \mathbb{R}^μ — пространство параметров рассматриваемой версальной деформации, а сами параметры мы обозначаем η_1, \dots, η_μ или $\eta_1, \dots, \eta_{\mu-1}, \alpha$. (Индекс в названии особенности — это $\dim \eta$, а α — непрерывный инвариант пары при $\eta = 0$.)

Иными словами, $L'_\xi = L''_{\varphi(\xi)}$, причём отображение φ — общего положения, а точка ξ_0 удовлетворяет условию $\varphi(\xi_0) \in \{\eta = 0\}$, которое может выполняться, только если $\dim \eta \leq \dim X$ (поскольку отображение общего положения трансверсально подмногообразию $\{\eta = 0\}$).

В случае $\Theta_2 \varphi(\xi_0) = 0$ и отображение φ — полного ранга в точке ξ_0 . Поэтому $\dim X \geq 2$ и, переходя к новым координатам ξ в окрестности точки ξ_0 , приводим отображение φ к виду

$$\varphi : \xi \mapsto (\xi_1, \xi_2).$$

В случае $\Theta_3 \varphi(\xi_0) = 0$ и отображение φ — полного ранга в точке ξ_0 . Поэтому $\dim X \geq 3$ и, переходя к новым координатам ξ в окрестности точки ξ_0 , приводим отображение φ к виду

$$\varphi : \xi \mapsto (\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

В случаях Θ_4^\pm и $\Xi_4 \varphi(\xi_0) = 0$ и отображение φ — полного ранга в точке ξ_0 . Поэтому $\dim X \geq 4$ и, переходя к новым координатам ξ в окрестности точки ξ_0 , приводим отображение φ к виду

$$\varphi : \xi \mapsto (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4).$$

В случае Π_3^\pm при $\dim X = 3$ отображение φ трансверсально прямой $\{\eta = 0\}$, пересекающей его образ в точке $\varphi(\xi_0) = (0, 0, 0, a)$, где $a \neq 0$, так как φ — общего положения. Согласно теореме 2.2 можно считать, что $a > 0$. Переходя к новым координатам ξ в окрестности точки ξ_0 , приводим отображение φ к виду

$$\varphi : \xi \mapsto (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \bar{a}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)), \quad \bar{a}(0) = a > 0.$$

В случае Π_4^\pm при $\dim X = 4$ отображение φ трансверсально прямой $\{\eta = 0\}$, прообраз которой — гладкая кривая $\gamma = \varphi^{-1}(\{\eta = 0\})$. В общей точке $\xi_0 \in \gamma$ отображение φ регулярно и $\varphi(\xi_0) = (0, 0, 0, a)$. Согласно теореме 2.2 можно считать, что $a \geq 0$. Переходя к новым координатам ξ в окрестности точки ξ_0 , приводим отображение φ к виду

$$\varphi : \xi \mapsto (\xi_1, \xi_2, \xi_3, a + \xi_4), \quad a \geq 0.$$

В изолированной точке $\xi_0 \in \gamma$ отображение φ может иметь складку, причём $\varphi(\xi_0) = (0, 0, 0, a)$, где $a \neq 0$, так как φ — общего положения. Согласно теореме 2.2 можно считать, что $a > 0$. Переходя к новым координатам ξ в окрестности

точки ξ_0 , приводим отображение φ к виду

$$\varphi : \xi \mapsto (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \bar{a}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \pm \xi_4^2), \quad \bar{a}(0) = a > 0.$$

В случае Φ_4 и Ψ_4 при $\dim X = 4$ отображение φ трансверсально прямой $\{\eta = 0\}$, пересекающей его образ в точке $\varphi(\xi_0) = (0,0,0,0,a)$, где $a \neq 0$, так как φ — общего положения. Переходя к новым координатам ξ в окрестности точки ξ_0 , приводим отображение φ к виду

$$\varphi : \xi \mapsto (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \bar{a}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)), \quad \bar{a}(0) = a \neq 0.$$

Теорема 2.3 доказана.

ГЛАВА 3

Выпуклые оболочки трёхмерных гиперповерхностей

В настоящей главе изучаются типичные особенности выпуклой оболочки гладкой компактной гиперповерхности без края, вложенной в четырёхмерное аффинное пространство. Оказывается, что граница выпуклой оболочки является непрерывно дифференцируемым фронтом трёхмерного стратифицированного лежандрова подмногообразия с четырьмя возможными особенностями R'_1 , R'_2 , R'_3 и V'_3 . Пользуясь этим фактом и разработанным в главе 1 методом, мы находим две ранее неизвестные нормальные формы \mathcal{R}_3 и \mathcal{V}_3 выпуклых оболочек, границы которых представляют собой фронты особенностей R'_3 и V'_3 соответственно.

Выпуклая оболочка общей гладкой компактной поверхности без края в трёхмерном пространстве может иметь особенности лишь двух видов — \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 в наших обозначениях. Эти особенности, показанные на рис. 3.2, были найдены В. М. Закалюкиным в [35]. Особенности выпуклой оболочки гладкой гиперповерхности в четырёхмерном пространстве исследовались В. Д. Седых в [47], [46], [48], [49]. В частности, в [48] были найдены нормальные формы \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 выпуклых оболочек, приходящие из предыдущей размерности. С нашей точки зрения их границы являются фронтами особенностей R'_1 и R'_2 .

Особенности выпуклых оболочек встречаются в задачах выпуклого анализа и оптимизации. Например, в теории оптимального управления известна процедура релаксации, при которой множество допустимых скоростей управляемой системы заменяется на его выпуклую оболочку. Особенности последней появля-

ются при описании зоны локальной транзитивности исходной управляемой системы.

Типичные особенности границы зоны локальной транзитивности исследовались в работах [38], [39], [31]. В частности, в первой из них полностью разобран случай трёхмерной управляемой системы, допустимые скорости которой ограничены компактной поверхностью без края.

Оказывается, что все типичные особенности выпуклой оболочки появляются среди типичных особенностей зоны локальной транзитивности исходной управляемой системы, но не исчерпывают их. Таким образом, в настоящей главе для четырёхмерной управляемой системы, допустимые скорости которой ограничены гладкой компактной трёхмерной гиперповерхностью без края, описаны типичные особенности зоны локальной транзитивности, но лишь частично. Задача классификации всех её типичных особенностей остаётся открытой.

Результаты этой главы опубликованы в работах автора [17] и [59].

1 Фронты лежандровых подмногообразий R'_3 и V'_3

1.1. Лежандровы подмногообразия R'_3 и V'_3

Рассмотрим в аффинном пространстве \mathbb{R}^3 с координатами (x, y, z) следующие подмножества:

- полупространство $R_1 = \{x \geq 0\}$;
- двугранный угол $R_2 = \{x \geq 0, y \geq 0\}$;
- октант $R_3 = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$;
- тело

$$V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid t^4 + xt^2 + yt + z + x^2/4 \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}\},$$

ограниченное оборванным ласточкиным хвостом ∂V_3 (ласточкиным хвостом без пирамиды) и состоящее из неотрицательных приведённых многочленов четвёртой степени. Тело $V_3 = V_3^3 \cup V_3^2 \cup V_3^1$ является объединением

1. своей трёхмерной открытой части

$$V_3^3 = \{x > -2\tau^2, y = -4\tau^3 - 2x\tau, z > 3\tau^4 + x\tau^2 - x^2/4\},$$

2. двумерной гладкой части границы

$$V_3^2 = \{x > -2\tau^2, y = -4\tau^3 - 2x\tau, z = 3\tau^4 + x\tau^2 - x^2/4\}$$

3. и луча углов

$$V_3^1 = \{x = -2\tau^2, y = 0, z = 0\} = \{x \leq 0, y = 0, z = 0\};$$

в этих формулах τ — вещественный параметр.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Мы рассматриваем ласточкин хвост с выпрямленной линейной самопересечением. Можно было использовать и его стандартную форму — без члена $x^2/4$.

Для каждого из этих подмножеств рассмотрим стратифицированное лежандрово подмногообразие в контактном пространстве $J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, состоящее из 1-струй функций, неотрицательных на данном подмножестве, причём струя берётся в точке этого подмножества, где функция принимает нулевое значение:

$$C' = \{j_{x_0}^1 f \in J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \mid x_0 \in C, f(x_0) = 0, f(x) \geq 0 \forall x \in C, f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)\},$$

где $C = R_1, R_2, R_3$ или V_3 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Мы говорим, что трёхмерное лежандрово многообразие имеет в некоторой своей точке особенность R'_1, R'_2, R'_3 или V'_3 , если его росток в этой точке с точностью до контактного диффеоморфизма является ростком в нуле стратифицированного лежандрова многообразия R'_1, R'_2, R'_3 или $V'_3 \subset J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ соответственно.

Эти особенности лежандровых многообразий следующим образом примыкают друг к другу:

$$\begin{array}{ccccccc} R'_0 & \leftarrow & R'_1 & \leftarrow & R'_2 & \leftarrow & R'_3 \\ & & & & \uparrow & & \\ & & & & V'_3 & & \end{array},$$

где индексы равны коразмерностям стратов лежандрова многообразия, состоящих из тех точек, в которых оно имеет указанные особенности.

Граница выпуклой оболочки типичной гладкой трёхмерной гиперповерхности является фронтом лежандрова подмногообразия с особенностями R'_1 , R'_2 , R'_3 и V'_3 , что подробно описано в настоящей главе. Нормальные формы границы выпуклой оболочки, являющиеся фронтами подмногообразий R'_1 и R'_2 исследованы в [48]. Поэтому в настоящей главе мы интересуемся только подмногообразиями R'_3 и V'_3 .

Лежандровы многообразия R'_3 и V'_3 в координатах. В координатах $(p, q, r; x, y, z, u)$ на $J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ стратифицированные лежандровы подмногообразия R'_1 , R'_2 и R'_3 имеют вид:

$$R'_1 = \{px = q = r = u = 0, p \geq 0, x \geq 0\},$$

$$R'_2 = \{px = qy = r = u = 0, p \geq 0, x \geq 0, q \geq 0, y \geq 0\},$$

$$R'_3 = \{px = qy = rz = u = 0, p \geq 0, x \geq 0, q \geq 0, y \geq 0, r \geq 0, z \geq 0\}.$$

Для дальнейшего нам понадобятся явные формулы для образующих идеала

$$\mathfrak{h}_{R'_3} = (px, qy, rz, u), \quad (3.1)$$

состоящего из ростков гамильтонианов контактных векторных полей, которые касаются всех стратов R'_3 .

Стратифицированное лежандрово многообразие V'_3 представляет собой объединение замыканий трёх гладких лежандровых подмногообразий, заданных следующими уравнениями и неравенствами (τ — вещественный параметр):

1. $(x, y, z) \in V'_3$,

$$p = q = r = u = 0;$$

$$2. (x, y, z) \in V_3^2, \quad x > -2\tau^2, \quad y = -4\tau^3 - 2x\tau, \quad z = 3\tau^4 + x\tau^2 - x^2/4, \\ p = r\tau^2 + rx/2, \quad q = r\tau, \quad r > 0, \quad u = 0;$$

$$3. (x, y, z) \in V_3^1, \quad x < 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \\ p = 0, \quad 2q^2 < -r^2x, \quad r > 0, \quad u = 0.$$

Первое и третье из этих замыканий продолжаются до гладких многообразий, а второе — до неприводимого алгебраического подмногообразия \mathfrak{V}_3 , которое в параметрическом виде задаётся уравнениями

$$y = -4\tau^3 - 2x\tau, \quad z = 3\tau^4 + x\tau^2 - x^2/4, \quad p = r\tau^2 + rx/2, \quad q = r\tau, \quad u = 0,$$

а в неявном — как множество нулей следующих многочленов:

$$\begin{aligned} & 32x^3y^2 + 64x^2z^2 + 144xy^2z - 27y^4 + 256z^3, \\ h_1 &= 2px + 3qy + 4rz, \\ h_2 &= 3py + 4qz - 2rxy, \\ h_3 &= 16pz - 8qxy - 8rxz - 3ry^2, \\ h_4 &= p^2 + qry + r^2z, \\ h_5 &= 4pq + r^2y, \\ & 2pr - 2q^2 - r^2x, \\ & pry - 4q^2y - 4qz, \\ & p^2r - 4pq^2 + r^3z, \\ h_6 &= u, \end{aligned} \tag{3.2}$$

и имеет неизолированные особенности при $p = q = r = u = 0, x = -6\tau^2, y = 8\tau^2, z = -12\tau^2$, расположенные вдоль ребра возврата ласточкина хвоста. (Этот факт нам не понадобится.)

Однако, нам потребуется наблюдение, что гамильтонианы h_1, \dots, h_6 , приведённые в (3.2), обращаются в нуль на V_3' , а соответствующие контактные векторные поля касаются всех стратов V_3' :

$$h_1, \dots, h_6 \in \mathfrak{h}_{V_3'}. \tag{3.3}$$

Это наблюдение проверяется явно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Над полем \mathbb{C} комплексных чисел объединение вышеупомянутого алгебраического лежандрова подмногообразия \mathfrak{V}_3 и гладкого

$$p = q = r = u = 0$$

можно задать производящим семейством:

$$\mathcal{F} = 0, \quad \partial_\tau \mathcal{F} = 0, \quad \varkappa_1 = \partial_{\xi_1} \mathcal{F}, \quad \varkappa_2 = \partial_{\xi_2} \mathcal{F}, \quad \varkappa_3 = \partial_{\xi_3} \mathcal{F},$$

где $\varkappa_1 d\xi_1 + \varkappa_2 d\xi_2 + \varkappa_3 d\xi_3 - d\xi_4 = 0$ — контактная структура,

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}(\tau^4 + \xi_1 \tau^2 + \xi_2 \tau + \xi_3)^2 - \xi_4,$$

$$\varkappa = (p - rx/2, q, r), \quad \xi = (x, y, r + x^2/4 + z, u + r^2/2).$$

Росток в нуле лежандрова проектирования $(\varkappa, \xi) \mapsto \xi$ этого объединения устойчив по критерию из [41] и эквивалентен ростку любого типичного лежандрова проектирования. Эту эквивалентность мы не доказываем.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Лежандрово подмногообразие \mathfrak{V}_3 естественным образом включается в серию лежандровых подмногообразий \mathfrak{V}_μ , описанную в [59]. Подмногообразия \mathfrak{V}_μ при $\mu \geq 3$ имеют неизолированные особенности и, по видимому, ранее в приложениях не встречались. При $\mu = 2$ эта конструкция даёт хорошо известный двумерный раскрытый зонтик Уитни с изолированной особенностью.

1.2. Производящие функции

Рассмотрим контактное пространство $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ с координатами $(p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, u)$ и контактной структурой $du = p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n$. Пусть I и J — такие множества индексов, что $I \cap J = \emptyset$ и $I \cup J = \{1, \dots, n\}$. Функция w от n переменных p_I, x_J определяет лежандрово подмногообразие

$$\mathcal{L}_{p_I, x_J}[w] = \{p_J = \partial_{x_J} w, x_I = -\partial_{p_I} w, u = w - p_I \partial_{p_I} w\}.$$

Функция w называется *производящей функцией* лежандрова подмногообразия $\mathcal{L}_{p_I, x_J}[w]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. У одного и того же ростка лежандрова подмногообразия может быть несколько (вплоть до 2^n) ростков производящих функций.

1.3. Нормальные формы пар

Пусть R'_3 и V'_3 — стратифицированные лежандровы подмногообразия в $J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, описанные выше, а L — типичное лежандрово подмногообразие, проходящее через начало координат $p = q = r = x = y = z = u = 0$.

ТЕОРЕМА 1.6. *Росток L в начале координат R'_3 -эквивалентен ростку в начале координат лежандрова подмногообразия одного из восьми видов*

$$\mathcal{L}_{x,y,z}[w_2 \pm xyz],$$

где

$$w_2 = \pm(x^2 + y^2 \pm z^2) + a_1xy + a_2xz + a_3yz$$

— квадратичная форма одного из четырёх указанных видов, ограничения которой на все координатные подпространства невырождены, т. е. все диагональные миноры матрицы которой не равны нулю.

Росток L в начале координат V'_3 -эквивалентен ростку в начале координат одного из четырёх лежандровых подмногообразий

$$\mathcal{L}_{p,q,z}[\pm q^2 \pm z^2].$$

Кроме того:

$$\mathcal{L}_{p,q,z}[\pm q^2 \pm z^2] \sim_{V'_3} \mathcal{L}_{x,y,z}[x^2 \mp y^2 \pm z^2].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. **Случай R'_3 .** Росток типичного лежандрова подмногообразия L , проходящего через начало координат, задаётся производящим ростком $w \in \mathfrak{m}_{x,y,z}^2$:

$$L = \mathcal{L}_{x,y,z}[w] = \{p = \partial_x w, q = \partial_y w, r = \partial_z w, u = w\}.$$

Разложим производящий росток на однородные составляющие:

$$w = w_2 + w_3 + \dots,$$

где ограничения квадратичной формы

$$w_2 = \epsilon_1 x^2/2 + \epsilon_2 y^2/2 + \epsilon_3 z^2/2 + a_1 xy + a_2 xz + a_3 yz$$

на все координатные подпространства (три одномерных, три двумерных и одно трёхмерное) невырождены вследствие типичности исходного лежандрова подмногообразия. В частности, $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \neq 0$.

Воспользуемся теперь методом, разработанным в главе 1. Для этого введём веса квазиоднородности

$$\deg p = \deg q = \deg r = \deg x = \deg y = \deg z = 1, \quad \deg u = 2.$$

Тогда согласно (3.1)

$$\mathfrak{h}'_{R'_3} = (px, qy, rz, u),$$

т. е. контактные векторные поля с гамильтонианами px , qy , rz и u сохраняют стратифицированное лежандрово подмногообразие R'_3 и обращаются в нуль в начале координат. Далее:

$$\begin{aligned} px[w] &= x\partial_x w = x\partial_x w_2 \pmod{\mathfrak{m}_{x,y,z}^3}, & x\partial_x w_2 &= x(\epsilon_1 x + a_1 y + a_2 z), \\ qy[w] &= y\partial_y w = y\partial_y w_2 \pmod{\mathfrak{m}_{x,y,z}^3}, & y\partial_y w_2 &= y(a_1 x + \epsilon_2 y + a_3 z), \\ rz[w] &= z\partial_z w = z\partial_z w_2 \pmod{\mathfrak{m}_{x,y,z}^3}, & z\partial_z w_2 &= z(a_2 x + a_3 y + \epsilon_3 z). \end{aligned}$$

Обозначим через

$$\mathcal{P}_{x,y,z}^d \cong \mathfrak{m}_{x,y,z}^d / \mathfrak{m}_{x,y,z}^{d+1}$$

пространство многочленов степени d от переменных x , y , z . Тогда из условий невырожденности формы w_2 следует, что

$$\mathcal{P}_{x,y,z}^2 = \langle xy, xz, yz \rangle_{\mathbb{R}} + \langle x\partial_x w_2, y\partial_y w_2, z\partial_z w_2 \rangle_{\mathbb{R}},$$

$$\mathcal{P}_{x,y,z}^3 = \langle xyz \rangle_{\mathbb{R}} + \mathcal{P}_{x,y,z}^1 \cdot \langle x\partial_x w_2, y\partial_y w_2, z\partial_z w_2 \rangle_{\mathbb{R}},$$

$$\mathcal{P}_{x,y,z}^4 = \mathcal{P}_{x,y,z}^2 \cdot \langle x\partial_x w_2, y\partial_y w_2, z\partial_z w_2 \rangle_{\mathbb{R}}. \quad (3.4)$$

Действуя теперь на $\mathcal{L}_{x,y,z}[w]$ контактными векторными полями с гамильтонианами px , qy и rz , приводим w_2 к виду с $\epsilon_1 = \pm 2$, $\epsilon_2 = \pm 2$, $\epsilon_3 = \pm 2$, но при этом остальные коэффициенты a_1 , a_2 , a_3 и кубическая форма w_3 меняются. Делая, если нужно, перестановку координат, получаем:

$$w_2 = \pm(x^2 + y^2 \pm z^2) + a_1xy + a_2xz + a_3yz.$$

Далее, действуя контактными векторными полями с гамильтонианами px^2 , pxy , pxz , qxy , qy^2 , qyz , rxz , ryz и rz^2 , приводим w_3 к виду $dxyz$, где $d \neq 0$ вследствие типичности исходного лежандрова подмногообразия; квадратичная форма w_2 при этом не меняется.

Воспользуемся теперь гамильтонианом $h = px + qy + rz - 2u$, для которого:

$$h[w_2 + w_3] = w_3.$$

Поэтому с его помощью можно привести $w_3 = dxyz$ к виду $\pm xyz$, не меняя w_2 .

Воспользовавшись леммой Накаямы, из (3.4) получаем

$$\mathfrak{m}_{x,y,z}^4 = \mathfrak{m}_{x,y,z}^2 \cdot (x\partial_x w, y\partial_y w, z\partial_z w),$$

откуда

$$\mathfrak{m}_{x,y,z}^4 \subset \mathfrak{m}_{x,y,z} \cdot \mathfrak{h}'_{R'_3}[w],$$

поскольку

$$\mathfrak{h}'_{R'_3}[w] = (x\partial_x w, y\partial_y w, z\partial_z w, w).$$

Утверждение теоремы для стратифицированного лежандрова подмногообразия R'_3 теперь следует из теоремы 1.20 о достаточной струе при $z_0 = w_2 + w_3$ и $k = 3$.

Случай V'_3 . Росток типичного лежандрова подмногообразия L , проходящего через начало координат, задаётся производящим ростком $w \in \mathfrak{m}_{p,q,z}^2$:

$$L = \mathcal{L}_{p,q,z}[w] = \{x = -\partial_p w, y = -\partial_q w, r = \partial_z w, u = w - p\partial_p w - q\partial_q w\}.$$

Рассмотрим квадратичную часть производящего ростка:

$$w = w_2 \pmod{\mathfrak{m}_{p,q,z}^3}, \quad w_2 = \epsilon_1 p^2/2 + \epsilon_2 q^2/2 + \epsilon_3 z^2/2 + a_1 pq + a_2 pz + a_3 qz,$$

где $\epsilon_2 \epsilon_3 \neq 0$ вследствие типичности исходного лежандрова подмногообразия.

Снова воспользуемся методом, разработанным в главе 1. Для этого введём веса квазиоднородности

$$\deg p = \deg q = \deg r = \deg x = \deg y = \deg z = 1, \quad \deg u = 2.$$

Тогда согласно (3.3)

$$\mathfrak{h}'_{V'_3} \supset (h_1, \dots, h_6),$$

т. е. контактные векторные поля с гамильтонианами

$$\begin{aligned} h_1 &= 2px + 3qy + 4rz, \\ h_2 &= 3py + 4qz - 2rxy, \\ h_3 &= 16pz - 8qxy - 8rxz - 3ry^2, \\ h_4 &= p^2 + qry + r^2z, \\ h_5 &= 4pq + r^2y, \\ h_6 &= u, \end{aligned}$$

из (3.2) сохраняют стратифицированное лежандрово подмногообразие V'_3 и обращаются в нуль в начале координат. Далее:

$$\begin{aligned} h_1[w] &= -2\epsilon_1 p^2 - 5a_1 pq + 2a_2 pz - 3\epsilon_2 q^2 + a_3 qz + 4\epsilon_3 z^2 + \dots, \\ h_2[w] &= -3a_1 p^2 - 3\epsilon_2 pq - 3a_3 pz + 4qz + \dots, \\ h_3[w] &= 16pz + \dots, \\ h_4[w] &= p^2 + \dots, \\ h_5[w] &= 4pq + \dots, \\ h_6[w] &= -\frac{\epsilon_1}{2} p^2 - a_1 pq - \frac{\epsilon_2}{2} q^2 + \frac{\epsilon_3}{2} z^2 + \dots, \end{aligned}$$

где многочотия обозначают ростки из $\mathfrak{m}_{p,q,z}^3$. Согласно этим формулам классы указанных шести ростков порождают $\mathfrak{m}_{p,q,z}^2/\mathfrak{m}_{p,q,z}^3$ как линейное пространство, по-

сколькxу $\epsilon_2\epsilon_3 \neq 0$. Значит, мы можем привести w_2 к одному из двух видов:

$$\tilde{\epsilon}_2 q^2 + \tilde{\epsilon}_3 z^2 \quad \text{или} \quad -p^2/4 + \tilde{\epsilon}_2 q^2/4 + \tilde{\epsilon}_3 z^2,$$

где

$$\tilde{\epsilon}_2 = \text{sgn } \epsilon_2, \quad \tilde{\epsilon}_3 = \text{sgn } \epsilon_3.$$

Кроме того, по лемме Накаямы указанные шесть ростков порождают $\mathfrak{m}_{p,q,z}^2$ как $\mathcal{E}_{p,q,z}$ -модуль, и поэтому $\mathfrak{h}'_{V'_3}[w] = \mathfrak{m}_{p,q,z}^2$. Таким образом, $w \sim_{V'_3} w_2$ по теореме 1.20 о достаточной струе при $z_0 = w_2$ и $k = 2$.

Для завершения доказательства осталось заметить, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{p,q,z}[-p^2/4 + \tilde{\epsilon}_2 q^2/4 + \tilde{\epsilon}_3 z^2] &= \\ &= \{x = p/2, y = -\tilde{\epsilon}_2 q/2, r = 2\tilde{\epsilon}_3 z, u = p^2/4 - \tilde{\epsilon}_2 q^2/4 + \tilde{\epsilon}_3 z^2\} = \\ &= \{p = 2x, q = -2\tilde{\epsilon}_2 y, r = 2\tilde{\epsilon}_3 z, u = x^2 - \tilde{\epsilon}_2 y^2 + \tilde{\epsilon}_3 z^2\} = \\ &= \mathcal{L}_{x,y,z}[x^2 - \tilde{\epsilon}_2 y^2 + \tilde{\epsilon}_3 z^2]. \end{aligned}$$

□

1.4. Нормальные формы семейств пар

Пусть R'_3 и V'_3 — стратифицированные лежандровы подмногообразия в $J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, описанные выше, L_\star — типичное семейство гладких лежандровых подмногообразий L_ξ , гладко зависящих от параметра $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in X$ — точки четырёхмерного многообразия X , а L_{ξ_0} — лежандрово этого семейства, проходящее через начало координат $p = q = r = x = y = z = u = 0$.

ТЕОРЕМА 1.7. *Росток семейства пар (R'_3, L_\star) в точке $0 \times \xi_0$ индуцированно эквивалентен росту в начале координат семейства пар вида $(R'_3, \mathcal{L}_{x,y,z}[W])$, где*

$$W = \pm (x^2 + y^2 \pm z^2) + \bar{a}_1 xy + \bar{a}_2 xz + \bar{a}_3 yz \pm xyz + \xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 z + \xi_4,$$

$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ — гладкие функции от параметра ξ , а все диагональные миноры квадратичной формы $\pm (x^2 + y^2 \pm z^2) + \bar{a}_1(0)xy + \bar{a}_2(0)xz + \bar{a}_3(0)yz$ от переменных (x, y, z) не равны нулю.

Росток семейства пар (V'_3, L_*) в точке $0 \times \xi_0$ индуцированно эквивалентен ростку в начале координат одному из четырёх семейств пар вида

$$(V'_3, \mathcal{L}_{p,q,z} [\pm q^2 \pm z^2 + \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 z + \xi_4]),$$

которые индуцированно эквивалентны семействам пар

$$(V'_3, \mathcal{L}_{x,y,z} [x^2 \mp y^2 \pm z^2 + \xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 z + \xi_4])$$

соответственно.

Доказательство. Теорема 1.7 следует из теоремы 1.6 и теоремы версальности 2.13.

Случай R'_3 . Рассмотрим пару из теоремы 1.6:

$$(R'_3, \mathcal{L}_{x,y,z} [w_2 \pm xyz]),$$

где

$$w_2 = \pm(x^2 + y^2 \pm z^2) + a_1 xy + a_2 xz + a_3 yz$$

— квадратичная форма, все диагональные миноры матрицы которой не равны нулю. Инфинитезимально версальная деформация этой пары имеет вид $(R'_3, \mathcal{L}_{x,y,z} [W'])$, где

$$W' = \pm(x^2 + y^2 \pm z^2) + \alpha_1 xy + \alpha_2 xz + \alpha_3 yz \pm xyz + \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 z + \eta_4,$$

а $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \in \mathbb{R}^7$ — параметры. По теореме версальности 2.13 росток семейства пар (R'_3, L_*) в точке $0 \times \xi_0$ эквивалентен ростку семейства пар, индуцированного из указанной инфинитезимально версальной деформации с помощью отображения $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^7$ пространств параметров. По условию, точка ξ_0 удовлетворяет условию $\varphi(\xi_0) \in \{\eta = 0\}$, а φ — отображение общего положения и поэтому трансверсально плоскости $\{\eta = 0\}$. Поэтому, переходя к новым координатам ξ' в окрестности точки ξ_0 , мы можем привести отображение φ к виду

$$\varphi : \xi' \mapsto (\bar{a}_1(\xi'), \bar{a}_2(\xi'), \bar{a}_3(\xi'), \xi'),$$

где $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ — такие гладкие функции от параметра ξ' , что диагональные миноры квадратичной формы $\pm(x^2 + y^2 \pm z^2) + \bar{a}_1(0)xy + \bar{a}_2(0)xz + \bar{a}_3(0)yz$ от переменных (x, y, z) не равны нулю.

Случай V'_3 . Рассмотрим пару из теоремы 1.6:

$$\mathcal{L}_{p,q,z} [\pm q^2 \pm z^2].$$

Инфинитезимально версальная деформация этой пары имеет вид $(V'_3, \mathcal{L}_{p,q,z}[W'])$, где

$$W' = \pm q^2 \pm z^2 + \eta_1 p + \eta_2 q + \eta_3 z + \eta_4,$$

а $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \in \mathbb{R}^4$ — параметры. По теореме версальности 2.13 росток семейства пар (V'_3, L_*) в точке $0 \times \xi_0$ эквивалентен ростку семейства пар, индуцированного из указанной инфинитезимально версальной деформации с помощью отображения $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^4$ пространств параметров. По условию, точка ξ_0 удовлетворяет условию $\varphi(\xi_0) = 0$, а φ — отображение общего положения и поэтому имеет полный ранг. Поэтому, переходя к новым координатам ξ' в окрестности точки ξ_0 , мы можем привести отображение φ к виду $\varphi : \xi' \mapsto \xi'$. \square

1.5. Нормальные формы C^1 -фронтов

Типичные особенности непрерывно дифференцируемых фронтов (или короче C^1 -фронтов) лежандровых подмногообразий R'_3 и V'_3 описываются теоремой 1.8, являющейся следствием теоремы 1.7.

ТЕОРЕМА 1.8. *Существует такое натуральное d , что для ростка в нуле любого типичного лежандрова расслоения $\pi : J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ выполняются следующие утверждения:*

Если фронт $\pi(R'_3)$ — росток C^1 -подмногообразия, то в подходящих гладких координатах $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ на базе расслоения он задаётся уравнением

$$\min_{(x,y,z) \in R_3} W(x,y,z; \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = 0,$$

где

$$W = (x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2 + \bar{a}_1 xy + \bar{a}_2 xz + \bar{a}_3 yz \pm xyz - \xi_4,$$

$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ — многочлены от $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ такие, что квадратичная форма

$$x^2 + y^2 + z^2 + \bar{a}_1(0)xy + \bar{a}_2(0)xz + \bar{a}_3(0)yz$$

от переменных (x, y, z) положительно определена, а степень многочленов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ не превосходит числа d .

Если фронт $\pi(V'_3)$ — росток C^1 -подмногообразия, то в подходящих гладких координатах $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ на базе расслоения он задаётся уравнением

$$\xi_4 = \min_{(x,y,z) \in V_3} \{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2\}$$

и представляет собой график стандартного евклидова расстояния до тела $V_3 \subset \mathbb{R}^3$.

Доказательство. В случае R_3 фронт состоит из замыканий 8 трёхмерных стратов, примыкающих друг к другу вдоль 12 двумерных стратов. Замыкания трёхмерных стратов диффеоморфны октантам в \mathbb{R}^3 , а замыкания двумерных — квадрантам в \mathbb{R}^2 . Трёхмерные страты являются проекциями лежандровых стратов R'_3 , заданных наборами уравнений и неравенств, получающимися из следующего с помощью указанных замен:

$$u = 0, \quad p = q = r = 0, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0, \quad p \leftrightarrow x, \quad q \leftrightarrow y, \quad r \leftrightarrow z,$$

Двумерные страты являются проекциями стратов R'_3 , заданных наборами уравнений и неравенств, получающимися из следующего с помощью тех же замен и одновременных перестановок координатных троек (p, q, r) и (x, y, z) :

$$u = 0, \quad p = x = 0, \quad q = r = 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

В окрестности каждой точки двумерного страта фронт диффеоморфен цилиндру над одной из кривой:

$$\eta = \operatorname{sgn} \xi \sqrt{|\xi|} \quad \eta = \pm \sqrt{\xi}.$$

В первом случае фронт локально является C^1 -подмногообразием, а во втором — нет и мы говорим, что соответствующая пара лежандровых подмногообразий *складывается*.

Рассмотрим теперь три из вышеприведённых лежандровых стратов R'_3 , которые выделяются следующими наборами уравнений:

$$\begin{aligned} u &= x = y = z = 0, \\ u &= p = y = z = 0, \\ u &= p = q = z = 0, \\ u &= p = q = r = 0; \end{aligned}$$

и фронт из теоремы 1.7, заданный семейством

$$W = \pm(x^2 + y^2 \pm z^2) + \bar{a}_1xy + \bar{a}_2xz + \bar{a}_3yz \pm xyz + \xi_1x + \xi_2y + \xi_3z + \xi_4.$$

Пусть

$$w_2 = \pm(x^2 + y^2 \pm z^2) + \bar{a}_1(0)xy + \bar{a}_2(0)xz + \bar{a}_3(0)yz.$$

Если первый главный минор матрицы квадратичной формы w_2 отрицателен, то складывается пара из первого и второго стратов. Если первый и второй главные миноры матрицы квадратичной формы w_2 имеют разные знаки, то складывается пара из второго и третьего стратов. Если второй и третий главные миноры матрицы квадратичной формы w_2 имеют разные знаки, то складывается пара из третьего и четвёртого стратов.

Итак, квадратичная форма w_2 положительно определена. Делая теперь нужную замену ξ , приводим W к виду, указанному в формулировке теоремы 1.8.

Особенность V'_3 примыкает к R'_2 , и подмножество V'_3 в окрестности точек луча $x < 0, y = z = 0$ диффеоморфно цилиндру над подмножеством R'_2 . Применяя для этого цилиндра те же рассуждения, что и выше для октанта R'_3 , получаем, что форма $\mp y^2 \pm z^2$ из теоремы 1.7 положительно определена, иначе пары некоторых стратов будут складываться. Снова делая нужную замену ξ , приводим W к виду, указанному в формулировке теоремы 1.8.

Осталось показать, что функции \bar{a}_1, \bar{a}_2 и \bar{a}_3 можно сделать многочленами степени не выше d , сохраняя росток фронта с точностью до диффеоморфизмов.

Обозначим через \mathcal{E}_ξ алгебру ростков в нуле гладких функций от переменных $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ и рассмотрим в \mathcal{E}_ξ -модуле

$$\mathfrak{P} = \langle xy, xz, yz, xyz \rangle_{\mathcal{E}_\xi}$$

подмодуль \mathfrak{R} , порождённый следующими восемью многочленами:

$$\begin{aligned} & 3\xi_3xy + 2\xi_2xz + \xi_1yz + xyz, \quad \xi_2xy + \xi_3xz, \quad \xi_1xy + \xi_3yz, \quad \xi_1xz + \xi_2yz, \\ & (\xi_4 - \xi_3^2)xy + \xi_3xyz, \quad (\xi_4 - \xi_2^2)xz + \xi_2xyz, \quad (\xi_4 - \xi_1^2)yz + \xi_1xyz, \quad \xi_4xyz. \end{aligned}$$

Согласно нижеследующей лемме 1.9 фактор-модуль $\mathfrak{P}/\mathfrak{R}$ является конечномерным векторным пространством над \mathbb{R} . Пусть

$$\phi_1, \dots, \phi_N \in \langle xy, xz, yz \rangle_{\mathcal{E}_\xi}$$

— одночлены, классы смежности которых образуют базис линейного пространства $\mathfrak{P}/\mathfrak{R}$. (Такой базис существует из-за наличия среди порождающих подмодуля \mathfrak{R} многочлена с единичным коэффициентом при xyz .)

Докажем, что функции \bar{a}_1 , \bar{a}_2 и \bar{a}_3 можно привести к такому виду, что выполняется равенство:

$$\bar{a}_1xy + \bar{a}_2xz + \bar{a}_3yz = \sum_{j=1}^N b_j\phi_j, \quad b_j \in \mathbb{R},$$

сохраняя росток фронта с точностью до диффеоморфизмов.

Для этого мы действуем на W заменами переменных (x, ξ) , где $x = (x, y, z)$, сохраняющими цилиндр над R_3 , проектирование $(x, \xi) \mapsto \xi$ и начало координат $x = 0, \xi = 0$. Кроме того, будем умножать W на любую положительную функцию от переменных (x, ξ) . При этих преобразованиях фронт переходит в диффеоморфный, и а сами они образуют хорошую геометрическую подгруппу \mathcal{G} группы \mathcal{H} -эквивалентности (см. пп. 2.4, 2.5 главы 2 в [2]), для которой справедлива теорема о конечной определённости.

Алгебра Ли группы \mathcal{G} представляет собой полупрямое произведение алгебры векторных полей указанного ниже вида и алгебры функций:

$$\mathfrak{g} = \mathcal{E}_{x,\xi} \langle x\partial_x, y\partial_y, z\partial_z \rangle + \mathfrak{m}_\xi \langle \partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_2}, \partial_{\xi_3}, \partial_{\xi_4} \rangle + \mathcal{E}_{x,\xi}.$$

Касательное пространство к орбите ростка W — это образ W при естественном действии на него алгебры Ли \mathfrak{g} :

$$T\mathcal{G}(W) = \mathfrak{g}(W) = \mathcal{E}_{x,\xi} \langle x\partial_x W, y\partial_y W, z\partial_z W, W \rangle + \mathcal{E}_\xi \langle \partial_\xi W \rangle.$$

Введём веса квазиоднородности

$$\deg x = \deg y = \deg z = \deg \xi_1 = \deg \xi_2 = \deg \xi_3 = 1, \quad \deg \xi_4 = 2$$

и рассмотрим первые два члена в разложении W по степеням квазиоднородности

$$W_2 = (x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2 + a_1xy + a_2xz + a_3yz - \xi_4,$$

$$W_3^\pm = (b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2 + b_{13}\xi_3)xy + (b_{21}\xi_1 + b_{22}\xi_2 + b_{23}\xi_3)xz + \\ + (b_{31}\xi_1 + b_{32}\xi_2 + b_{33}\xi_3)yz \pm xyz.$$

Обозначим через \mathfrak{s}_{W_2} стационарную подалгебру ростка W_2 в алгебре \mathfrak{g} и рассмотрим \mathcal{E}_ξ -подмодуль

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{g}(W_2) + \mathfrak{s}_{W_2}(W_3^\pm).$$

Согласно методу спектральных последовательностей (см. п. 3.9 главы 1 в [2]), нам достаточно доказать, что классы смежности одночленов ϕ_1, \dots, ϕ_N порождают фактор-модуль $\mathcal{E}_{x,\xi}/\mathfrak{E}$ как линейное пространство над \mathbb{R} :

$$\mathcal{E}_{x,\xi}/\mathfrak{E} = \langle [\phi_1], \dots, [\phi_N] \rangle_{\mathbb{R}}.$$

(Все элементы \mathfrak{E} можно убить допустимыми преобразованиями.) Для этого прежде всего заметим, что

$$(x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + \xi_1\partial_{\xi_1} + \xi_2\partial_{\xi_2} + \xi_3\partial_{\xi_3} + 2\xi_4\partial_{\xi_4})W_2 - 2W_2 = 0,$$

поэтому

$$W_3^\pm = (x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + \xi_1\partial_{\xi_1} + \xi_2\partial_{\xi_2} + \xi_3\partial_{\xi_3} + 2\xi_4\partial_{\xi_4})W_3^\pm - 2W_3^\pm \in \mathfrak{s}_{W_2}(W_3^\pm).$$

Таким образом, достаточно доказать, что при типичных W_2 и W_3^\pm :

$$\mathcal{E}_{x,\xi}/\mathfrak{E}' = \langle [\phi_1], \dots, [\phi_N] \rangle_{\mathbb{R}}, \quad (3.5)$$

где

$$\mathfrak{E}' = \mathcal{E}_{x,\xi} \langle x\partial_x W_2, y\partial_y W_2, z\partial_z W_2, W_2 \rangle + \mathcal{E}_\xi \langle \partial_\xi W_2, W_3^\pm \rangle,$$

поскольку

$$\mathcal{E}_\xi \langle W_3^\pm \rangle \subset \mathfrak{s}_{W_2}(W_3^\pm), \quad \mathfrak{E}' \subset \mathfrak{E}.$$

Равенство (3.5) достаточно доказать для каких-нибудь W_2 и W_3^\pm . Действительно, множество пар W_2 и W_3^\pm , при которых пространство \mathfrak{E}' имеет конечную коразмерность, открыто по Зарисскому, а значит оно открыто и всюду плотно, если не является пустым. Пусть

$$W_2 = (x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2 - \xi_4,$$

$$W_3^\pm = \pm(3\xi_3xy + 2\xi_2xz + \xi_1yz + xyz).$$

Тогда

$$\mathfrak{E}' = \mathcal{E}_{x,\xi} \langle x^2 - x\xi_1, y^2 - y\xi_2, z^2 - z\xi_3, W_2 \rangle + \mathcal{E}_\xi \langle 1, x, y, z, W_3^\pm \rangle.$$

Рассмотрим два \mathcal{E}_ξ -модуля:

$$\mathfrak{Q}' = \mathcal{E}_{x,\xi} \langle x^2 - x\xi_1, y^2 - y\xi_2, z^2 - z\xi_3 \rangle + \mathcal{E}_\xi \langle 1, x, y, z \rangle,$$

$$\mathfrak{K}' = \mathcal{E}_\xi \langle xW_2, yW_2, zW_2, xyW_2, xzW_2, yzW_2, xyzW_2, W_3^\pm \rangle.$$

Нам нужно включение:

$$\mathfrak{Q}' + \mathfrak{K}' \subset \mathfrak{E}'. \quad (3.6)$$

По подготовительной теореме Мальгранжа–Вейерштрасса ([22], 6.5, стр. 73; [28], теорема 3.6, стр. 158) \mathcal{E}_ξ -модуль $\mathcal{E}_{x,\xi}/\mathfrak{Q}'$ порождён своими элементами $[xy]$, $[xz]$,

$[yz]$ и $[xyz]$. В этом модуле классы порождающих элементов \mathcal{E}_ξ -модуля \mathfrak{R}' удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{pmatrix} -[xW_2] \\ -[yW_2] \\ -[zW_2] \\ -[xyW_2] \\ -[xzW_2] \\ -[yzW_2] \\ -[xyzW_2] \\ \pm[W_3^\pm] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_2 & \xi_3 & & \\ \xi_1 & & \xi_3 & \\ & \xi_1 & \xi_2 & \\ \xi_4 - \xi_3^2 & & & \xi_3 \\ & \xi_4 - \xi_2^2 & & \xi_2 \\ & & \xi_4 - \xi_1^2 & \xi_1 \\ & & & \xi_4 \\ 3\xi_3 & 2\xi_2 & \xi_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [xy] \\ [xz] \\ [yz] \\ [xyz] \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Таким образом:

$$\mathcal{E}_{x,\xi} / (\mathfrak{Q}' + \mathfrak{R}') = \langle [\phi_1], \dots, [\phi_N] \rangle_{\mathbb{R}}$$

по построению одночленов ϕ_1, \dots, ϕ_N , поскольку соотношения модуля \mathfrak{R} леммы 1.9 — это классы порождающих элементов модуля \mathfrak{R}' согласно формуле (3.7). Теперь включение (3.6) влечёт равенство (3.5). \square

ЛЕММА 1.9. *Фактор-модуль $\mathfrak{P}/\mathfrak{R}$ является конечномерным линейным пространством над \mathbb{R} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что подмодуль \mathfrak{R} модуля

$$\mathfrak{P} = \langle xy, xz, yz, xyz \rangle_{\mathcal{E}_\xi}$$

порождён следующими восемью многочленами:

$$\begin{aligned} & 3\xi_3xy + 2\xi_2xz + \xi_1yz + xyz, & \xi_2xy + \xi_3xz, & \xi_1xy + \xi_3yz, & \xi_1xz + \xi_2yz, \\ & (\xi_4 - \xi_3^2)xy + \xi_3xyz, & (\xi_4 - \xi_2^2)xz + \xi_2xyz, & (\xi_4 - \xi_1^2)yz + \xi_1xyz, & \xi_4xyz. \end{aligned}$$

Запишем их как матрицу:

$$\begin{pmatrix} \xi_2 & \xi_3 & & & & & & \\ \xi_1 & & & & \xi_3 & & & \\ & \xi_1 & & \xi_2 & & & & \\ \xi_4 - \xi_3^2 & & & & & & \xi_3 & \\ & \xi_4 - \xi_2^2 & & & & & \xi_2 & \\ & & & \xi_4 - \xi_1^2 & \xi_1 & & & \\ & & & & & & \xi_4 & \\ 3\xi_3 & 2\xi_2 & \xi_1 & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Миноры M_{2368} , M_{1358} , M_{1248} , M_{4567} указанной 8×4 -матрицы являются многочленами и не обращаются в нуль при $\xi \in \mathbb{C}^4 \setminus 0$.

Действительно, для указанных миноров справедливы формулы:

$$M_{2368} = \begin{vmatrix} \xi_1 & & \xi_3 \\ & \xi_1 & \xi_2 \\ -3\xi_1\xi_3 & -2\xi_1\xi_2 & \xi_4 - 2\xi_1^2 \end{vmatrix} = \xi_1^2(-2\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 3\xi_3^2 + \xi_4),$$

$$M_{1358} = \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 & \\ & \xi_1 & \xi_2 \\ -3\xi_2\xi_3 & \xi_4 - 3\xi_2^2 & -\xi_1\xi_2 \end{vmatrix} = -\xi_2^2(\xi_1^2 - 3\xi_2^2 + 3\xi_3^2 + \xi_4),$$

$$M_{1248} = \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 & \\ \xi_1 & & \xi_3 \\ \xi_4 - 4\xi_3^2 & -2\xi_2\xi_3 & -\xi_1\xi_3 \end{vmatrix} = \xi_3^2(\xi_1^2 + 2\xi_2^2 - 4\xi_3^2 + \xi_4),$$

$$M_{4567} = \xi_4(\xi_4 - \xi_1^2)(\xi_4 - \xi_2^2)(\xi_4 - \xi_3^2).$$

Последний минор обращается в нуль при $\xi_4 = 0$, $\xi_4 = \xi_1^2$, $\xi_4 = \xi_2^2$ или $\xi_4 = \xi_3^2$. Подставим поочерёдно эти выражения в первые три минора. В каждом из четырёх случаев полученные три многочлена обращаются в нуль только при $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 =$

0, поскольку все диагональные миноры матриц

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

не равны нулю.

Таким образом, подмодуль \mathfrak{K} модуля \mathfrak{F} имеет конечную коразмерность как линейное подпространство над \mathbb{R} . В самом деле, он содержит подмодуль

$$\langle xy, xz, yz, xyz \rangle_{\mathfrak{J}},$$

где идеал

$$\mathfrak{J} = (M_{2368}, M_{1358}, M_{1248}, M_{4567}) \subset \mathcal{E}_{\xi},$$

порождённый вышеприведёнными минорами, имеет конечную коразмерность как линейное подпространство над \mathbb{R} :

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_{\xi}/\mathfrak{J},$$

поскольку их общий нуль изолирован в \mathbb{C}^4 . \square

2 Особенности выпуклых оболочек

2.1. Введение

Терминология. *Выпуклая оболочка* подмножества аффинного пространства — это пересечение всех содержащих его замкнутых полупространств. Если рассматриваемое подмножество не содержится ни в каком замкнутом полупространстве, то её выпуклая оболочка представляет собой всё пространство.

Граница выпуклой оболочки компактной гладкой гиперповерхности без края может иметь особенности. Например, особенности границы выпуклой оболочки общей замкнутой кривой на плоскости исчерпываются разрывами второй производной (см. рис. 3.1).

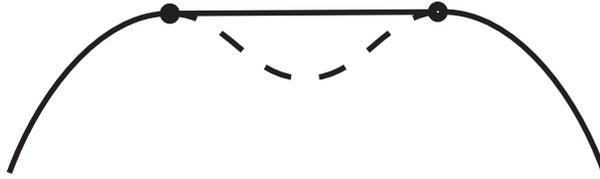


Рис. 3.1: Особенности выпуклой оболочки общей кривой на плоскости

Особенностью выпуклой оболочки мы называем её росток в особой точке границы. Как обычно, *общие* гиперповерхности — это вложения, образующие открытое всюду плотное множество в снабжённом C^∞ -топологией пространстве всех рассматриваемых вложений. Иначе говоря, мы интересуемся лишь теми особенностями выпуклой оболочки, которые не устранимы малым шевелением исходной гиперповерхности.

Касательная гиперплоскость, от которой гиперповерхность лежит по одну сторону, называется *опорной*. Опорная гиперплоскость называется *неособой*, если она имеет с гиперповерхностью только одну общую точку — точку невырожденного касания. Все остальные опорные гиперплоскости называются *особыми*. Например, особые опорные гиперплоскости к общей кривой на плоскости исчерпываются прямыми двойного невырожденного касания. Особенности выпуклой оболочки гладкой компактной гиперповерхности без края могут возникать только на её особых опорных гиперплоскостях.

Термин «гладкий» всегда означает «бесконечно гладкий». Термин «общий» употребляется для гладких отображений и означает, что данное утверждение справедливо лишь для некоторого открытого всюду плотного множества в снабжённом C^∞ -топологией пространстве всех рассматриваемых отображений. Термин «типичный» употребляется для точек на многообразиях и означает, что данное утверждение справедливо лишь для некоторого открытого всюду плотного множества точек.

Трёхмерное пространство. Выпуклая оболочка общей гладкой компактной поверхности без края в трёхмерном пространстве может иметь особенности лишь двух видов — простейшие и угловые в нашей терминологии. Нормальная форма угловой особенности содержит числовой *модуль* (непрерывный инвариант) относительно диффеоморфизмов. Эти особенности, показанные на рис. 3.2, были

найлены в работе [35], на результатах которой мы сейчас остановимся более подробно.

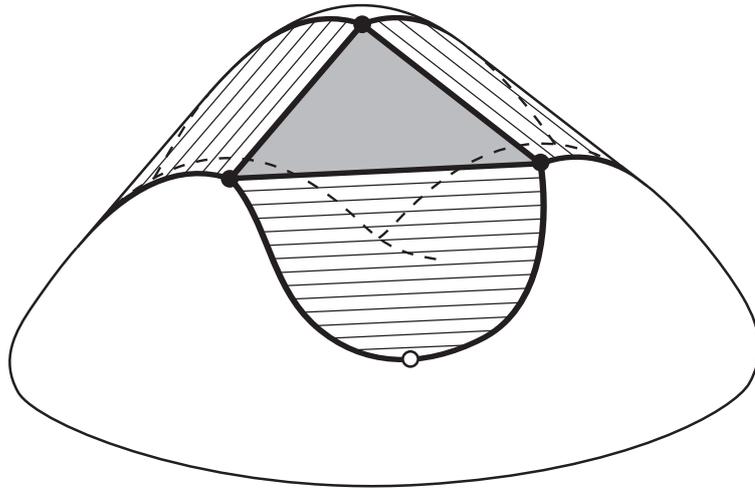


Рис. 3.2: Особенности выпуклой оболочки общей поверхности

Типичная особая опорная гиперплоскость к общей поверхности в трёхмерном пространстве имеет две (и только две) точки невырожденного касания с поверхностью (A_1^2 -плоскость). Отдельные же особые опорные гиперплоскости могут иметь либо три точки невырожденного касания с поверхностью, которые не лежат на одной прямой, либо одну точку вырожденного касания A_3 . Такие гиперплоскости мы называем A_1^3 - и A_3 -плоскостями соответственно.

Отрезок, соединяющий точки касания поверхности и её опорной A_1^2 -плоскости, называется *опорным*. Он целиком лежит на границе выпуклой оболочки исходной поверхности. Во внутренних точках опорного отрезка граница выпуклой оболочки является гладкой, а в окрестностях его концов — диффеоморфна цилиндру над кривой с особенностью, изображенной на рис. 3.1. Такие особенности выпуклой оболочки мы называем *простейшими* и обозначаем через \mathcal{R}_1 .

Треугольник с вершинами в точках касания поверхности и её опорной A_1^3 -плоскости называется *опорным*. В его окрестности граница выпуклой оболочки состоит из самого опорного треугольника, к сторонам которого примыкают три гладкие полуповерхности, сотканые из опорных отрезков, а к вершинам — три куска исходной поверхности. Выпуклая оболочка имеет простейшие особенности во внутренних точках сторон опорного треугольника, а в окрестности каждой его вершины она диффеоморфна подграфику квадрата расстояния до угла величины γ , где $0 < \gamma < \pi$ — единственный модуль в нормальной форме, зависящий не толь-

ко от угла при вершине опорного треугольника, но и от самой поверхности. Такие особенности выпуклой оболочки мы называем *угловыми*. Заметим, что здесь вместо подграфика квадрата расстояния можно рассматривать и его надграфик — они диффеоморфны при замене γ на $\pi - \gamma$.

Наконец, в любой *опорной* A_3 -точке (точке касания с опорной A_3 -плоскостью) выпуклая оболочка общей поверхности вновь имеет простейшую особенность. А именно, в окрестности такой точки граница выпуклой оболочки состоит из куска исходной поверхности и примыкающей к нему гладкой полуповерхности, сотканной из вырождающихся в точку опорных отрезков.

Четырёхмерное пространство. Особенности выпуклой оболочки общей гладкой гиперповерхности, лежащей в четырёхмерном пространстве, исследовались в работах [48] и [49]. В первой из них получены нормальные формы особенностей выпуклых оболочек в случае, когда опорная гиперплоскость касается исходной гиперповерхности одним из тех способов, которые были описаны выше для трёхмерного пространства. Таким образом, простейшие и угловые особенности выпуклых оболочек возникают и в четырёхмерном пространстве.

Во внутренних точках опорных отрезков A_1^2 -плоскостей граница выпуклой оболочки является гладкой, а в их концах имеет простейшие особенности. Сами же опорные отрезки целиком лежат на границе выпуклой оболочки исходной гиперповерхности.

Во внутренних точках опорных треугольников A_1^3 -плоскостей граница выпуклой оболочки является гладкой, а во внутренних точках их сторон имеет простейшие особенности. Сами опорные треугольники целиком лежат на границе выпуклой оболочки исходной гиперповерхности. В окрестности же каждой из их вершин наша выпуклая оболочка диффеоморфна криволинейному цилиндру над рассмотренной ранее угловой особенностью с $\gamma(\xi_3) = \gamma_0 + \xi_3$, $\gamma(\xi_3) = \gamma_0 + \xi_3^2$ или $\gamma(\xi_3) = \gamma_0 - \xi_3^2$, где $0 < \gamma_0 < \pi$ — единственный модуль в каждой из трёх указанных нормальных форм, а ξ_3 — координата вдоль образующей цилиндра. Такие особенности выпуклой оболочки мы тоже называем *угловыми*, а обозначаем через \mathcal{R}_2^0 , \mathcal{R}_2^+ и \mathcal{R}_2^- соответственно.

Наконец, в опорных A_3 -точках выпуклая оболочка общей гиперповерхности вновь имеет простейшие особенности.

Однако, у трёхмерной гиперповерхности среди её опорных гиперплоскостей могут встречаться новые для нас A_1^4 - и A_1A_3 -плоскости, которые нельзя устранить её малым шевелением. Первая из этих плоскостей имеет четыре не лежащие в одной плоскости точки невырожденного касания с исходной гиперповерхностью, а вторая — одну точку невырожденного касания и одну точку касания A_3 .

Тетраэдр с вершинами в точках касания гиперповерхности и её опорной A_1^4 -плоскости называется *опорным*. В его окрестности граница выпуклой оболочки состоит из самого опорного тетраэдра, к граням которого примыкают четыре гладких страта, сотканных из опорных треугольников, к ребрам — шесть гладких стратов, сотканных из опорных отрезков, а к вершинам — четыре куска исходной гиперповерхности. Таким образом, в рассматриваемом случае особые точки границы выпуклой оболочки делят её на 15 ($1 + 4 + 6 + 4$) стратов так, как показано на рис. 3.3 слева.

Чтобы представлять себе выпуклую оболочку в четырёхмерном пространстве, удобно аффинно проектировать её на опорную гиперплоскость к исходной гиперповерхности. Тогда граница выпуклой оболочки локально является графиком непрерывно дифференцируемой функции (см., например, [35]), типичные особенности которой — разрывы второй производной. В окрестности опорного тетраэдра общей трёхмерной гиперповерхности точки этих разрывов образуют 28 гладких стратов, которые и изображены на рис. 3.3 слева.

Согласно [48], во внутренних точках граней опорного тетраэдра выпуклая оболочка общей гладкой трёхмерной гиперповерхности имеет простейшие особенности, а во внутренних точках его ребер — угловые. В настоящей главе найдена нормальная форма ростка выпуклой оболочки в вершине опорного тетраэдра, содержащая три гладкие функции. Эту особенность мы обозначаем через \mathcal{R}_3 . В [17] доказано, что на самом деле функциональных инвариантов она не содержит и вышеупомянутые три функции можно заменить многочленами, ненулевые коэффициенты которых являются числовыми инвариантами. Однако точное их число не найдено, известно только, что оно заведомо не меньше девяти, но, по всей видимости, намного больше.

Кроме того, мы изучаем особенности выпуклой оболочки в единственном оставшемся неисследованном случае, когда общая гиперповерхность имеет опор-

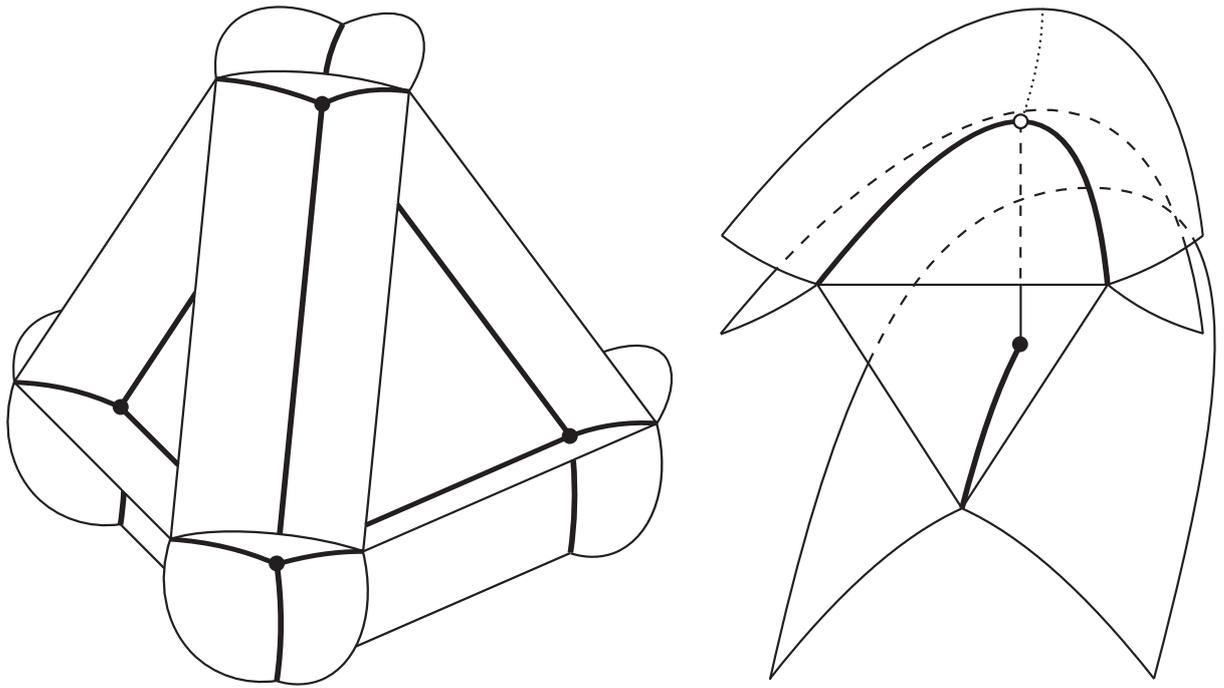


Рис. 3.3: Особенности выпуклой оболочки общей трёхмерной гиперповерхности в окрестности опорного тетраэдра и в окрестности опорного A_1A_3 -отрезка

ную A_1A_3 -плоскость. Отрезок, соединяющий их точки касания, мы называем *опорным A_1A_3 -отрезком*. Он целиком принадлежит выпуклой оболочке исходной гиперповерхности. Согласно нашим результатам, выпуклая оболочка общей гладкой трёхмерной гиперповерхности во внутренних точках её опорного A_1A_3 -отрезка имеет простейшие особенности, а в конце A_3 — угловую особенность \mathcal{R}_2^0 . В конце же A_1 опорного A_1A_3 -отрезка у выпуклой оболочки возникает ещё одна новая особенность, которую мы обозначаем через \mathcal{V}_3 . Эта особенность не содержит модулей и диффеоморфна своей нормальной форме — подграфику квадрата расстояния до той компоненты дополнения к ласточкиному хвосту, которая состоит из многочленов, не имеющих вещественных корней.

В окрестности опорного A_1A_3 -отрезка граница выпуклой оболочки общей гладкой гиперповерхности разбивается своими особыми точками на пять стратов, четыре из которых продолжаются до гладких, а пятый является негладким — явление, которое ранее не встречалось. Проекция особых точек границы выпуклой оболочки на опорную A_1A_3 -плоскость изображена на рис. 3.3 справа. Она состоит из трёх гладких полуповерхностей, оборванного ласточкина хвоста и половины зонтика Уитни. Сам опорный A_1A_3 -отрезок лежит на зонтике Уитни, а из его конца A_3 выходит гладкая кривая, состоящая из опорных A_3 -точек и выделенная на

рис. 3.3 точками. Заметим, что нормализующие диффеоморфизмы, вообще говоря, не сохраняют ни опорный A_1A_3 -отрезок, ни кривую опорных A_3 -точек.

Внутри оборванного ласточкина хвоста граница выпуклой оболочки представляет собой исходную гиперповерхность. Внутри зонтика Уитни лежит гладкий страт, сотканный из опорных треугольников, которые вырождаются в опорный A_1A_3 -отрезок. Страт, граничащий с этими двумя, является негладким и соткан из опорных отрезков. К нему прилегает ещё один кусок исходной гиперповерхности, ограниченный двумя полуповерхностями. Оставшийся гладкий страт тоже ограничен двумя полуповерхностями и соткан из опорных отрезков, вырождающихся в опорные A_3 -точки.

В [49] объединение оборванного ласточкина хвоста и половины зонтика Уитни, линии самопересечений которых совпадают, а касательные конусы трансверсальны, названо *парусником*. Там же установлено, что проекция особых точек границы выпуклой оболочки на опорную A_1A_3 -плоскость к общей гиперповерхности в окрестности точки касания A_1 является парусником, а все парусники локально диффеоморфны друг другу. Согласно нашим результатам, в этом случае сама выпуклая оболочка приводится к указанной выше локальной нормальной форме, которая тоже не содержит модулей.

Итак, в окрестности типичной точки границы выпуклая оболочка общей гладкой трёхмерной компактной гиперповерхности без края диффеоморфна замкнутому полупространству. Точки границы, в которых выпуклая оболочка имеет простейшие особенности \mathcal{R}_1 , образуют гладкую двумерную поверхность. Наконец, угловые особенности \mathcal{R}_2^0 возникают вдоль гладких кривых, а особенности \mathcal{R}_2^+ , \mathcal{R}_2^- , \mathcal{R}_3 и \mathcal{V}_3 — в отдельных точках границы выпуклой оболочки.

Высшие размерности. Согласно [45], начиная с пятимерного пространства выпуклая оболочка может иметь функциональные модули, не устранимые малым шевелением исходной компактной гиперповерхности без края. Например, они возникают как соотношения между несколькими числовыми модулями (которые уже имеются в четырёхмерном пространстве) вдоль линий, образованных вершинами опорных тетраэдров.

Расположение материала. В параграфе 2.2 мы даём необходимые определения, а в параграфе 2.3 строго формулируем результаты (теоремы 2.6 и 2.7), изложенные в настоящем введении. Теорема 2.7 является следствием теоремы 1.8

из предыдущего раздела и теоремы 2.10, сформулированной в параграфе 2.4 и доказанной в параграфах 2.5 и 2.6.

Теорема 2.10 утверждает, что граница выпуклой оболочки общей гладкой компактной трёхмерной гиперповерхности без края является фронтом лежандрова многообразия, которое может иметь лишь перечисленные стандартные особенности: R'_1 , R'_2 , R'_3 и V'_3 , нормальные формы которых не содержат непрерывных инвариантов. Особенности R'_1 возникают на гладких двумерных поверхностях, особенности R'_2 — вдоль гладких кривых, а особенности R'_3 и V'_3 — в отдельных точках лежандрова многообразия.

2.2. Выпуклые оболочки и опорные симплексы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Выпуклая оболочка* $[C]$ подмножества C аффинного пространства — это пересечение всех содержащих его замкнутых полупространств. (Если рассматриваемое подмножество не содержится ни в каком замкнутом полупространстве, то её выпуклая оболочка представляет собой всё аффинное пространство.) В частности, выпуклая оболочка — это замкнутое подмножество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. *Опорной гиперплоскостью* к подмножеству аффинного пространства называется всякая гиперплоскость, от которой данное подмножество лежит по одну сторону, и с которой оно имеет хотя бы одну общую точку.

Если наше подмножество — гладкое многообразие, то среди его опорных гиперплоскостей выделяются так называемые $A_{l_1} \dots A_{l_m}$ -плоскости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. *Опорная гиперплоскость* к гладкому многообразию называется $A_{l_1} \dots A_{l_m}$ -плоскостью (l_1, \dots, l_m — положительные нечётные числа), если:

- 1) она имеет с данным многообразием m точек касания A_{l_1}, \dots, A_{l_m} соответственно;
- 2) эти точки касания являются вершинами $(m - 1)$ -мерного симплекса, который называется *опорным симплексом* $A_{l_1} \dots A_{l_m}$ -плоскости или *опорным* $A_{l_1} \dots A_{l_m}$ -симплексом.

Опорная A_1 -плоскость называется *неособой*. Остальные опорные гиперплоскости называются *особыми*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Если $l_1 = \dots = l_m = 1$, то вместо $A_1 \dots A_1$ мы пишем A_1^m .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Гладкое k -мерное многообразие имеет с гиперповерхностью точку касания A_l (l — натуральное), если сужение на него какого-нибудь локального уравнения данной гиперповерхности в подходящих локальных координатах имеет вид $\pm \xi_1^{l+1} \pm \xi_2^2 \pm \dots \pm \xi_k^2$.

Согласно [35], если $k = 1$ или $n \leq 7$, то граница выпуклой оболочки общего гладкого компактного k -мерного подмногообразия без края в n -мерном аффинном пространстве состоит из опорных $A_{l_1} \dots A_{l_m}$ -симплексов, где $l_1 + \dots + l_m \leq n$. В частности, в рассматриваемом случае $n = 4$ она состоит из опорных A_1 -точек, опорных A_1^2 -отрезков, опорных A_1^3 -треугольников, опорных A_1^4 -тетраэдров, опорных A_3 -точек и опорных $A_1 A_3$ -отрезков.

2.3. Классификация особенностей выпуклых оболочек

Простейшая особенность \mathcal{R}_1 . Росток выпуклой оболочки в четырёхмерном пространстве имеет *особенность \mathcal{R}_1* , если в подходящих гладких координатах $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ он совпадает с ростком в начале координат множества, заданного неравенством

$$\min_{x \geq 0} \{x^2 + \xi_1 x\} \geq \xi_4.$$

Угловая особенность \mathcal{R}_2 . Росток выпуклой оболочки в четырёхмерном пространстве имеет *особенность $\mathcal{R}_2^0, \mathcal{R}_2^+$ или \mathcal{R}_2^-* , если в подходящих гладких координатах $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ он совпадает с ростком в начале координат множества, заданного неравенством

$$\min_{x, y \geq 0} \{x^2 + y^2 + \bar{a}(\xi_3)xy + \xi_1 x + \xi_2 y\} \geq \xi_4,$$

где $\bar{a}(\xi_3) = a + \xi_3, a + \xi_3^2$ или $a - \xi_3^2$ соответственно и $|a| < 2$.

Особенность \mathcal{R}_3 . Росток выпуклой оболочки в четырёхмерном пространстве имеет *особенность \mathcal{R}_3* , если в подходящих гладких координатах $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ он совпадает с ростком в начале координат множества, заданного неравенством

$$\min_{x, y, z \geq 0} W(x, y, z; \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \geq 0,$$

где

$$W = (x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2 + \bar{a}_1 xy + \bar{a}_2 xz + \bar{a}_3 yz \pm xyz - \xi_4,$$

$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ — многочлены от $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, а квадратичная форма

$$x^2 + y^2 + z^2 + \bar{a}_1(0)xy + \bar{a}_2(0)xz + \bar{a}_3(0)yz$$

от переменных (x, y, z) положительно определена.

Особенность \mathcal{V}_3 . Росток выпуклой оболочки в четырёхмерном пространстве имеет особенность \mathcal{V}_3 , если в подходящих гладких координатах $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ он совпадает с ростком в начале координат множества, заданного неравенством

$$\min_{(x,y,z) \in V_3} \{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2\} \geq \xi_4$$

и являющегося подграфиком стандартного евклидова расстояния до тела

$$V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid t^4 + xt^2 + yt + z + x^2/4 \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}\},$$

ограниченного оборванным ласточкиным хвостом и состоящего из неотрицательных приведённых многочленов четвёртой степени.

Примыкания особенностей. Особенности выпуклых оболочек следующим образом примыкают друг к другу:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \mathcal{R}_2^\pm & & \\ & & & & \downarrow & & \\ \mathcal{R}_0 & \leftarrow & \mathcal{R}_1 & \leftarrow & \mathcal{R}_2^0 & \leftarrow & \mathcal{R}_3, \\ & & & & \uparrow & & \\ & & & & \mathcal{V}_3 & & \end{array}$$

где через \mathcal{R}_0 обозначен росток замкнутого полупространства в точке его границы.

Формулировки результатов. Следующая теорема доказана в [48] и [17].

ТЕОРЕМА 2.6. *Выпуклая оболочка общей гладкой компактной гиперповерхности без края, лежащей в четырёхмерном аффинном пространстве, имеет особенности*

\mathcal{R}_0 в опорных A_1 -точках, во внутренних точках опорных A_1^2 -отрезков, во внутренних точках опорных A_1^3 -треугольников и во внутренних точках опорных A_1^4 -тетраэдров;

\mathcal{R}_1 в концах опорных A_1^2 -отрезков, во внутренних точках сторон опорных A_1^3 -треугольников, во внутренних точках граней опорных A_1^4 -тетраэдров и во внутренних точках опорных A_1A_3 -отрезков;

\mathcal{R}_2^0 в типичных вершинах опорных A_1^3 -треугольников, в типичных внутренних точках ребер опорных A_1^4 -тетраэдров и в вершинах A_3 опорных A_1A_3 -отрезков;

\mathcal{R}_2^\pm в оставшемся конечном числе вершин опорных A_1^3 -треугольников и в оставшемся конечном числе внутренних точек ребер опорных A_1^4 -тетраэдров.

Основная теорема 2.7 настоящей главы завершает эту классификацию.

ТЕОРЕМА 2.7. *Выпуклая оболочка общей гладкой компактной гиперповерхности без края, лежащей в четырёхмерном аффинном пространстве, имеет особенности*

\mathcal{R}_3 в вершинах опорных A_1^4 -тетраэдров;

\mathcal{V}_3 в вершинах A_1 опорных A_1A_3 -отрезков.

Теорема 2.7 непосредственно следует из теорем 2.10 и 1.8 настоящей главы.

2.4. Особенности лежандровых многообразий

Пусть X — гладкое многообразие, а $\xi \in X$ — любая его точка. Коориентированным контактным элементом многообразия X называется всякое замкнутое линейное полупространство в касательном пространстве $T_\xi X$. Точка ξ называется точкой приложения контактного элемента.

Хорошо известно, что в пространстве ST^*X всех коориентированных контактных элементов многообразия X имеется естественная контактная структура (поле гиперплоскостей, удовлетворяющее условию максимальной неинтегрируемости): контактный элемент разрешается двигать так, чтобы его граница содержала вектор скорости его точки приложения. Касательные к этому полю мно-

гообразия максимально возможной размерности (равной $\dim X - 1$) называются *лежандровыми*.

В дальнейшем нам будет удобно реализовать аффинное пространство как открытую полусферу в евклидовом пространстве на единицу большей размерности и работать со всей сферой, которая имеет естественную проективную структуру: подпространства, проходящие через её центр высекают на ней плоскости различных размерностей. Каждая из гиперплоскостей делит нашу сферу на два полупространства, и приведённые выше определения выпуклой оболочки подмножества аффинного пространства и опорной гиперплоскости дословно переносятся на подмножества сферы.

А именно, *выпуклая оболочка* подмножества сферы — это пересечение всех содержащих его замкнутых полупространств. (Если рассматриваемое подмножество не содержится ни в каком замкнутом полупространстве, то её выпуклая оболочка представляет собой всю сферу.) В частности, выпуклая оболочка — это замкнутое подмножество. *Опорной гиперплоскостью* к подмножеству сферы называется всякая гиперплоскость, от которой данное подмножество лежит по одну сторону, и с которой оно имеет хотя бы одну общую точку.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Коориентированные контактные элементы сферы (или аффинного пространства) естественно отождествляются с парами, каждая из которых состоит из замкнутого полупространства и лежащей на его границе точки приложения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Коориентированный контактный элемент называется *опорным* к подмножеству C аффинного пространства или сферы, если он состоит из содержащего C замкнутого полупространства и лежащей на его границе точки из C . Все опорные к C элементы образуют множество C^{sup} .

ТЕОРЕМА 2.10. Пусть $M \subset S^4$ — гладкая компактная гиперповерхность без края общего положения, $[M] \subset S^4$ — её выпуклая оболочка, $[M]^{\text{sup}} \subset ST^*S^4$ — множество всех опорных к $[M]$ коориентированных контактных элементов, а $\pi : ST^*S^4 \rightarrow S^4$ — естественное проектирование.

Тогда $[M]^{\text{sup}}$ — стратифицированное лежандрово подмногообразие, которое может иметь лишь определённые выше особенности R'_1 , R'_2 , R'_3 и V'_3 . При этом:

1) лежандрово многообразие $[M]^{\text{sup}}$ является гладким над опорными A_1 -точками, над внутренними точками опорных A_1^2 -отрезков, над внутренними точками A_1^3 -треугольников и над внутренними точками A_1^4 -тетраэдров гиперповерхности M ;

2) особенности R'_1 возникают над концами опорных A_1^2 -отрезков, над внутренними точками сторон опорных A_1^3 -треугольников, над внутренними точками граней опорных A_1^4 -тетраэдров и над внутренними точками опорных A_1A_3 -отрезков гиперповерхности M ;

3) особенности R'_2 возникают над вершинами опорных A_1^3 -треугольников, над внутренними точками ребер опорных A_1^4 -тетраэдров и над вершинами A_3 опорных A_1A_3 -отрезков гиперповерхности M ;

4) особенности R'_3 возникают над вершинами опорных A_1^4 -тетраэдров гиперповерхности M ;

5) особенности V'_3 возникают над вершинами A_1 опорных A_1A_3 -отрезков гиперповерхности M .

2.5. Двойственность

Все замкнутые полупространства сферы $\mathbb{S} = S^n$ образуют двойственную сферу \mathbb{S}^* . Каждая точка ξ исходной сферы \mathbb{S} канонически отождествляется с замкнутым полупространством двойственной сферы \mathbb{S}^* , состоящим из точек, которые являются замкнутыми полупространствами исходной сферы \mathbb{S} и содержат точку ξ . Иначе говоря, сама сфера \mathbb{S} является двойственной к сфере \mathbb{S}^* .

Кроме того, канонически отождествляются между собой и пространства $ST^*\mathbb{S}$ и $ST^*\mathbb{S}^*$ координированных контактных элементов к двойственным сферам \mathbb{S} и \mathbb{S}^* . А именно, с учётом замечания 2.8 каждое из них естественно отождествляется с подмногообразием

$$E^{2n-1} = \{(\xi, \rho) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S}^* \mid \xi \in \partial\rho\} = \{(\xi, \rho) \in \mathbb{S}^{**} \times \mathbb{S}^* \mid \partial\xi \ni \rho\}.$$

Естественные контактные структуры при таком отождествлении совпадают, поэтому в дальнейшем мы эти пространства не различаем и всегда имеем в виду

естественные отождествления:

$$E^{2n-1} = ST^*\mathbb{S} = ST^*\mathbb{S}^*.$$

Для любого подмножества $C \subset \mathbb{S}$ обозначим через $C^* \subset \mathbb{S}^*$ — *двойственное* ему подмножество, состоящее из всех содержащих его замкнутых полупространств. В частности, замкнутые полупространства двойственны точкам, а точки — замкнутым полупространствам. Кроме того, подмножество, двойственное к двойственному, совпадает с выпуклой оболочкой исходного: $C^{**} = [C]$. (Этот факт нам не понадобится, и мы его не доказываем.)

ЛЕММА 2.11. Пусть $C \subset \mathbb{S}$ — подмножество сферы, $[C] \subset \mathbb{S}$ — его выпуклая оболочка, $C^* \subset \mathbb{S}^*$ — подмножество, двойственное к C , а $[C]^{\text{sup}}, C^{*\text{sup}} \subset E^{2n-1}$ — подмножества всех коориентированных контактных элементов, опорных к $[C]$ и C^* соответственно. Тогда $[C]^{\text{sup}} = C^{*\text{sup}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коориентированный контактный элемент, состоящий из точки $\xi \in \mathbb{S}$ и полупространства $\rho \subset \mathbb{S}$, является опорным к $[C] \subset \mathbb{S}$ тогда и только тогда, когда $\xi \in [C]$ и $\rho \supset [C]$ (определение 2.9). Но $\xi \in [C]$ равносильно $\xi \supset C^*$, где ξ рассматривается как полупространство в \mathbb{S}^* ; а $\rho \supset [C]$ равносильно $\rho \in C^*$, где ρ рассматривается как точка в \mathbb{S}^* (определение 2.1). Утверждения $\rho \in C^*$ и $\xi \supset C^*$ означают, что контактный элемент, состоящий из точки $\rho \in \mathbb{S}^*$ и полупространства $\xi \subset \mathbb{S}^*$, является опорным к C^* (определение 2.9). \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.12. Пусть $\xi \in C \subset X$ — некоторая точка подмножества C гладкого многообразия X . Введем на X какую-нибудь риманову метрику и выпустим из точки ξ кривую, обладающую следующим свойством: расстояние от точки на ней до подмножества C есть бесконечно малая порядка выше первого при стремлении рассматриваемой точки к началу кривой. Конус, лежащий в касательном пространстве $T_\xi X$ и состоящий из лучей, касательных ко всем таким кривым, называется *касательным* к подмножеству C в точке ξ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.13. Коориентированный контактный элемент называется *инфинитезимально опорным* к подмножеству C гладкого многообразия, если он приложен в одной из точек $\xi \in C$ и содержит конус, касательный к C в точке ξ . Все инфинитезимально опорные к C элементы образуют множество C^{isup} .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.14. Множество элементов, инфинитезимально опорных к подмножеству многообразия, функториально относительно его диффеоморфизмов. (Что, вообще говоря, неверно для множеств опорных элементов.)

ЛЕММА 2.15. Пусть $C \subset \mathbb{S}$ — подмножество сферы, $C^* \subset \mathbb{S}^*$ — подмножество, двойственное к C , $C^{*\text{sup}} \subset E^{2n-1}$ — подмножество всех коориентированных контактных элементов, опорных к C^* , а $C^{*\text{isup}} \subset ST^*\mathbb{S}^*$ — подмножество всех коориентированных контактных элементов, инфинитезимально опорных к C^* . Тогда $C^{*\text{sup}} = C^{*\text{isup}}$ с учётом отождествления $E^{2n-1} = ST^*\mathbb{S}^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что C^* выпукло, т. е. кратчайшая дуга, соединяющая две любые его точки, не являющиеся диаметрально противоположными, лежит в C^* . Действительно, рассмотрим две не диаметрально противоположные точки $\xi, \eta \in \mathbb{S}^*$ как замкнутые полупространства в \mathbb{S} . Их границы не совпадают, поскольку ξ и η не диаметрально противоположны. Тогда любое замкнутое полупространство из соединяющей их кратчайшей дуги содержит пересечение ξ и η . Если же $\xi, \eta \in C^*$, то $\xi, \eta \supset C$. Поэтому любое замкнутое полупространство из соединяющей их кратчайшей дуги тоже содержит C . Следовательно, вся дуга лежит в C^* . Итак, C^* выпукло.

Докажем теперь равенство $C^{*\text{sup}} = C^{*\text{isup}}$. В самом деле, включение $C^{*\text{sup}} \subset C^{*\text{isup}}$ очевидно. Рассмотрим коориентированный контактный элемент e , состоящий из замкнутого полупространства $\rho \subset \mathbb{S}^*$ и точки приложения $\xi \in \mathbb{S}^*$. Пусть $e \notin C^{*\text{sup}}$. Если $\xi \notin C^*$, то по определению $e \notin C^{*\text{isup}}$. Если же $\xi \in C^*$, то вне замкнутого полупространства ρ найдется точка $\eta \in C^*$. Точка, диаметрально противоположная к ξ , лежит в ρ и поэтому не совпадает с η . Но по предыдущему кратчайшая дуга, соединяющая точки ξ и η , целиком лежит в выпуклом множестве C^* . Значит, касательный к ней в точке ξ луч лежит в конусе, касательном к C^* в точке ξ . Но $\eta \notin \rho$, и поэтому соответствующее ρ полупространство в $T^*\mathbb{S}^*$ не содержит этот луч. Итак, $e \notin C^{*\text{isup}}$, что доказывает включение $C^{*\text{sup}} \supset C^{*\text{isup}}$. \square

2.6. Доказательство теоремы 2.10

Теорема 2.10 доказана в [48] и [17]. Здесь мы докажем только пункты 4) и 5), т. е. исследуем особенности стратифицированного лежандрова подмногообразия

M^{sup} , возникающие над вершинами опорных A_1^4 -тетраэдров и над вершинами A_1 опорных A_1A_3 -отрезков гиперповерхности M .

Согласно леммам 2.11 и 2.15, $[M]^{\text{sup}} = M^{*\text{sup}} = M^{*\text{isup}}$.

Случай A_1^4 . Пусть $O \subset S^4$ — замкнутое полупространство, содержащее гиперповерхность $M \subset S^4$ и ограниченное опорной к ней A_1^4 -плоскостью.

Согласно хорошо известным результатам теории особенностей, существует локальный диффеоморфизм

$$S^{4*} \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad O \mapsto 0,$$

переводящий росток подмножества M^* в росток полуцилиндра над подмножеством R_3 , определённым в параграфе 1.1:

$$(M^*, O) \rightarrow (R_3 \times \mathbb{R}_-, 0),$$

где

$$R_3 \times \mathbb{R}_- = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 \mid (x, y, z) \in R_3, u \leq 0\}.$$

Индукцированный локальный диффеоморфизм

$$ST^*S^4 \rightarrow ST^*\mathbb{R}^4$$

переводит $[M]^{\text{sup}} = M^{*\text{isup}}$ в $(R_3 \times \mathbb{R}_-)^{\text{isup}}$. В частности, четыре коориентированных контактных элемента, состоящие из полупространства O и точек касания A_1 , переходят в коориентированные контактные элементы $dx \geq 0$, $dy \geq 0$, $dz \geq 0$, $du \leq 0$, приложенные в нуле.

Рассмотрим аффинную окрестность элемента $du \leq 0$, состоящую из коориентированных контактных элементов вида

$$du \leq p dx + q dy + r dz$$

и очевидным образом отождествляемую с пространством $J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Пересечение этой окрестности и подмножества $(R_3 \times \mathbb{R}_-)^{\text{isup}}$ совпадает со стратифицированным лежандровым подмногообразием R'_3 .

Случай A_1A_3 . Пусть $O \subset S^4$ — замкнутое полупространство, содержащее гиперповерхность $M \subset S^4$ и ограниченное опорной к ней A_1A_3 -плоскостью, а A_1 и A_3 — точки касания этой плоскости с M (типов A_1 и A_3 соответственно).

Согласно хорошо известным результатам теории особенностей, существует локальный диффеоморфизм

$$S^{4*} \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad O \mapsto 0,$$

переводящий росток подмножества M^* в росток полуцилиндра над подмножеством V_3 , определённым в параграфе 1.1:

$$(M^*, O) \rightarrow (V_3 \times \mathbb{R}_-, 0),$$

где

$$V_3 \times \mathbb{R}_- = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 \mid (x, y, z) \in V_3, u \leq 0\}.$$

Индукцированный локальный диффеоморфизм

$$ST^*S^4 \rightarrow ST^*\mathbb{R}^4$$

переводит $[M]^{\text{sup}} = M^{*\text{isup}}$ в $(V_3 \times \mathbb{R}_-)^{\text{isup}}$. В частности, коориентированный контактный элемент, состоящий из полупространства O и точки касания A_1 , переходит в коориентированный контактный элемент $du \leq 0$, приложенный в нуле, а коориентированный контактный элемент, состоящий из полупространства O и точки касания A_3 , переходит в коориентированный контактный элемент $dz \geq 0$, приложенный в нуле.

Рассмотрим аффинную окрестность элемента $du \leq 0$, состоящую из коориентированных контактных элементов вида

$$du \leq p dx + q dy + r dz$$

и очевидным образом отождествляемую с пространством $J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Пересечение этой окрестности и подмножества $(V_3 \times \mathbb{R}_-)^{\text{isup}}$ совпадает со стратифицированным лежандровым подмногообразием V'_3 .

ГЛАВА 4

Неявные обыкновенные дифференциальные уравнения и быстро-медленные системы

В настоящей главе идеи, изложенные в главе 1, и их обобщения применяются к исследованию особенностей, встречающихся в типичных однопараметрических семействах неявных дифференциальных уравнений и быстро-медленных систем.

В первом разделе получена формальная классификация типичных конечных точек неявных обыкновенных дифференциальных уравнений, основанная на следующем наблюдении: критерий А. Б. Гивентала [27] устойчивости ростка лежандрова отображения в простейшем случае трёхмерного контактного пространства эффективно работает не только для лежандровой кривой, но и для обычной поверхности, в том числе особой.

Наша формальная классификация состоит из трёх нормальных форм, каждая из которых содержит числовой инвариант, и применима также для быстро-медленных систем с двумя медленными переменными и одной быстрой. В качестве её приложения получены формальные нормальные формы вырожденных линейных уравнений смешанного типа с частными производными второго порядка, встречающихся в типичных однопараметрических семействах таких уравнений на плоскости.

Во втором разделе изучается одна из перестроек графика первого интеграла в типичном однопараметрическом семействе быстро-медленных систем с двумя медленными переменными и одной быстрой. Первый интеграл — это многозначная функция медленных переменных, а его график — это особая поверхность в

трёхмерном пространстве, испытывающая перестройки при изменении внешнего параметра, от которого зависит система.

Мы находим нормальную форму и приводим рисунки типичной перестройки графика первого интеграла, описывающей взаимодействие ласточкиного хвоста и сложенного зонтика Уитни. Для этого мы явно находим векторные поля, касательные к трёхмерному фронту S_3^1 (см. [27]) декартова произведения двумерного раскрытого зонтика Уитни на прямую. Описанная перестройка не встречается на графиках первых интегралов в типичных однопараметрических семействах неявных дифференциальных уравнений.

Результаты этой главы опубликованы в работах автора [21] и [20], а в статье [62] дана классификация всех простых устойчивых проектирований лагранжева раскрытого зонтика Уитни и цилиндров над ним.

С современной точки зрения, восходящей к Пуанкаре, неявное обыкновенное дифференциальное уравнение и быстро-медленная система с двумя медленными переменными и одной быстрой описываются (возможно особой) поверхностью \mathcal{S} в трёхмерном пространстве, снабжённом распределением плоскостей, которое в случае неявного уравнения задаёт контактную структуру, а в случае быстро-медленной системы может вырождаться. Плоскости этого распределения высекают на поверхности \mathcal{S} поле направлений, которое имеет особые точки, если касательная плоскость к \mathcal{S} либо не определена, либо совпадает с плоскостью из распределения.

Трёхмерное пространство с лежащей в нём поверхностью \mathcal{S} проектируется на фазовую плоскость, представляющую собой плоскость независимой и зависимой переменных исходного уравнения или плоскость медленных переменных исходной быстро-медленной системы. Слои проектирования всегда касаются распределения плоскостей, а интегральные кривые поля направлений на поверхности \mathcal{S} проектируются в фазовые траектории, которые и являются предметом изучения. При этом гладкий первый интеграл поля направлений на поверхности \mathcal{S} определяет многозначный первый интеграл на фазовой плоскости, линии уровня которого — изучаемые фазовые траектории.

Если поверхность \mathcal{S} гладкая и общего положения, то (согласно теории Уитни) критические точки её проектирования образуют гладкую кривую, состоящую из линий складок и точек сборок. Там, где на поверхности \mathcal{S} определено поле

направлений, а распределение плоскостей контактно, траектории имеют полукубические точки возврата на проекции линии складки. С точностью до диффеоморфизма их фазовый портрет описывается локальной нормальной формой, полученной М. Чибрарио в [65]. При этом график типичного первого интеграла имеет ребро возврата.

В некоторых изолированных точках на линиях складок поле направлений не определено, поскольку плоскость из распределения касается поверхности \mathcal{S} . Тогда на фазовой плоскости появляются сложенные седла, узлы и фокусы — проекции лежащих на линии складок одноимённых особых точек поля направлений. Локальные гладкие нормальные формы их фазовых портретов, содержащие по одному числовому инварианту, получены А. А. Давыдовым в статье [29]. В ней изучены сложенные особые точки, в окрестности каждой из которых поле направлений на поверхности \mathcal{S} приводится диффеоморфизмом к своей линейной части. Если это условие не выполняется, то особая точка содержит резонансы — гладкие нормальные формы типичных сложенных седел и узлов с резонансами найдены в [32]. (У фокусов резонансов нет.)

Фазовый портрет в окрестности типичной точки сборки (в ней поле направлений определено) изучался в [63], [29] и [74]. В частности, Дж. У. Брюс в [63] показал, что график его типичного первого интеграла диффеоморфен ласточкину хвосту, а А. А. Давыдов в [29] нашёл для него функциональный модуль с точностью даже до непрерывной орбитальной эквивалентности.

Наконец, в типичном случае распределение плоскостей может вырождаться в некоторых изолированных точках линий складок. Этот случай был изучен В. И. Арнольдом и А. А. Давыдовым в статьях [13] и [30], где была найдена гладкая локальная нормальная форма фазового портрета.

Перестройка графика первого интеграла, изучаемая во втором разделе настоящей главы, происходит, когда распределение плоскостей вырождается в точке сборки.

Приведённый список статей ни в коем случае не претендует на полноту — работ по этой тематике очень много. Более полная библиография и более подробное описание полученных результатов даны в обзоре [43]. Там, например, обсуждаются аналогичные задачи о линейных уравнениях в частных производных вто-

рого порядка и метриках переменной сигнатуры на плоскости, которые естественно приводят к бинарным обыкновенным дифференциальным уравнениям.

1 Конические точки уравнений и систем

1.1. Введение

Неявное обыкновенное дифференциальное уравнение¹ — это поверхность нулевого уровня функции на трёхмерном пространстве, образованном значениями независимой переменной, зависимой переменной и её производной. Для функции общего положения эта поверхность гладкая, однако в типичном однопараметрическом семействе она может становиться особой при изолированных значениях параметра, испытывая с изменением параметра перестройку, изображённую на рисунке 4.1. В сам момент перестройки перестраивающаяся поверхность имеет коническую особую точку. В настоящем разделе получена формальная классификация неявного уравнения в такой конической особой точке с точностью до замен независимой и зависимой переменных.

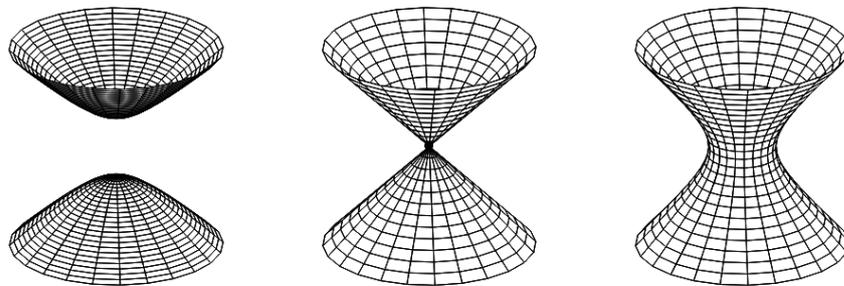


Рис. 4.1: Появление конической точки при перестройке неявного уравнения

Наша формальная классификация состоит из трёх нормальных форм, содержащих по одному числовому инварианту и приведённых в теореме 1.4. Их фазовые портреты приведены на рисунках 4.2, на которых сплошные линии изображают решения неявного уравнения, а двойные — проекции линий складок. Эти рисунки заимствованы из статьи [64], где получена дискретная топологическая

¹Кроме поверхностей, все объекты этого раздела (многообразия, функции, уравнения, диффеоморфизмы, семейства, замены, векторные поля) предполагаются бесконечно гладкими. Поверхности могут быть особыми.

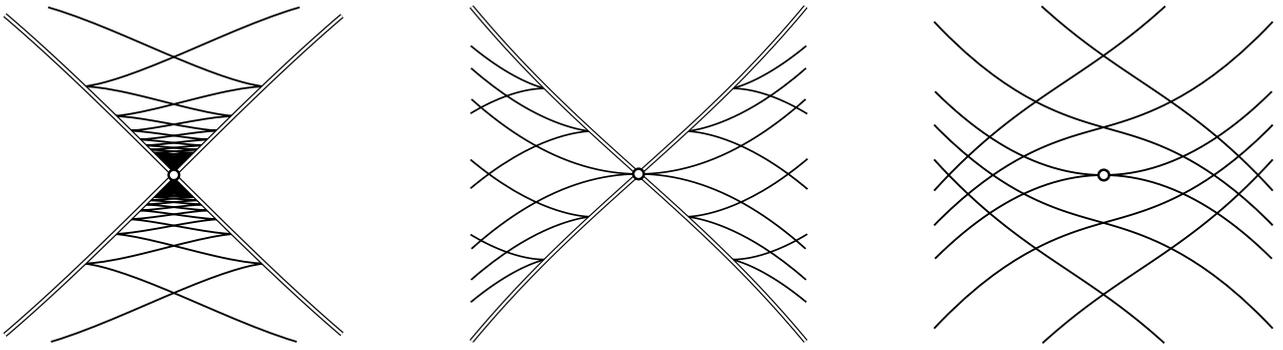


Рис. 4.2: Фазовые портреты конических точек неявного уравнения

классификация перестроек фазовых портретов в типичных семействах неявных уравнений, зависящих от одного параметра.

С современной точки зрения, восходящей к Пуанкаре, неявное обыкновенное дифференциальное уравнение задаёт поверхность в трёхмерном пространстве касательных направлений, приложенных к точкам данного двумерного многообразия, называемого фазовым. Эта поверхность проектируется на фазовое многообразие при естественном отображении забывания производной, переводящем направление в точку его приложения. Простейшие типичные критические точки этого проектирования называются складками и образуют на поверхности гладкую линию складок. Кроме того, рассматриваемое пространство направлений снабжено естественным полем контактных плоскостей, строящихся по правилу: сдвигать точку приложения можно только в указанном направлении. Контактные плоскости высекают на нашей поверхности поле направлений, интегральные кривые которого при забывании производной проектируются в решения исходного дифференциального уравнения, в типичном случае имеющие полукубические точки возврата на проекции линии складки. Это явление описывается нормальной формой Чибрарио [65]. Вообще говоря, в некоторых точках на линии складок поле направлений не определено, поскольку контактная плоскость касается поверхности уравнения. Именно так в теории неявного дифференциального уравнения появляются сложные седла, узлы и фокусы — лежащие на линии складок одноимённые особые точки поля направлений. Гладкие нормальные формы типичных сложных седел, узлов и фокусов, содержащие по одному числовому инварианту, получены А. А. Давыдовым в [29].

Диффеоморфизмы трёхмерного пространства направлений, которые сохраняют естественное поле контактных плоскостей, называются контактными. Два неявных уравнения называются *контактно эквивалентными*, если они переводятся друг в друга контактным диффеоморфизмом, и *орбитально эквивалентными*, если они переводятся друг в друга диффеоморфизмом фазового многообразия. Контактная эквивалентность слабее орбитальной, а для приложений нужна именно последняя. С другой стороны, контактную эквивалентность обычно получить проще, поскольку по относительной теореме Дарбу [15] она равносильна орбитальной эквивалентности полей направлений, высекаемых контактными плоскостями на поверхностях, определяемых уравнениями.

Оказывается, что для уравнений, квадратичных по производной, орбитальная классификация сводится к контактной в следующем смысле. А именно, согласно теореме 1.11 настоящего раздела деформация квадратичного по производной уравнения в классе его контактной эквивалентности приводит к уравнению, локально орбитально эквивалентному исходному. Другими словами, при локальной классификации относительно орбитальной эквивалентности какого-то типа уравнений, квадратичных по производной, не может появиться новых непрерывных инвариантов по сравнению с локальной классификацией относительно контактной эквивалентности (хотя новые дискретные инварианты вполне могут возникнуть). Аналогичная теорема 1.14 справедлива и для семейств уравнений.

Несмотря на то, что ещё в 1988 году аналогичная теорема для многомерных лежандровых подмногообразий была доказана А. Б. Гивенталем [27], её вариант для поверхности в трёхмерном контактном пространстве до сих пор не был ни сформулирован, ни доказан. Это тем более странно, что вышеописанное отсутствие новых непрерывных инвариантов по сравнению с контактной эквивалентностью наблюдается при классификации квадратичных по производной уравнений во всех решённых задачах и выглядит несколько загадочным. В частности, наша теорема 1.11 даёт новое доказательство теоремы о нормальных формах сложенных особых точек, первоначально полученной в статье [29] совсем другим методом.

В. И. Арнольду принадлежит следующая формальная классификация типичных конических точек дифференциальных уравнений с точностью до контактной эквивалентности [10]. А именно, в окрестности типичной конической точки

дифференциальное уравнение приводится к одной из двух нормальных форм — эллиптической или гиперболической, интегральные кривые которых изображены на рисунке 4.3. Обе упомянутые нормальные формы содержат по одному числовому инварианту и приведены в теореме 1.7 настоящего раздела.

Наша классификация конических точек неявных дифференциальных уравнений получается соединением формальной контактной классификации В. И. Арнольда и теоремы 1.11 о сведении орбитальной классификации к контактной. При этом в гиперболическом случае получается не одна, а две нормальные формы относительно орбитальной эквивалентности, что демонстрирует вышеупомянутую возможность появления новых дискретных инвариантов при сведении орбитальной эквивалентности к контактной.

Связь неявных обыкновенных дифференциальных уравнений с уравнениями смешанного типа на плоскости вкратце изложена в параграфе 1.5 настоящего раздела. Там же приведена теорема 1.15 о нормальных формах вырожденного уравнения смешанного типа, являющаяся следствием основной теоремы 1.4 о конических точках неявного дифференциального уравнения. В параграфе 1.4 приведены явные формулы для интегральных кривых нормальных форм В. И. Арнольда при нулевом значении входящего в них числового инварианта.

1.2. Формулировки результатов

Кроме поверхностей, все объекты (многообразия, функции, уравнения, диффеоморфизмы, семейства, замены, векторные поля) предполагаются бесконечно гладкими. Поверхности могут быть особыми.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Неявное обыкновенное дифференциальное уравнение — это поверхность вида $f = 0$, где вещественнозначная функция f определена на открытом подмножестве пространства направлений PTX , приложенных к двумерному многообразию X , называемому фазовым. Если вместо функции f берётся её росток в точке, где она обращается в нуль, то запись вида $f = 0$ называется ростком неявного обыкновенного дифференциального уравнения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Два неявных обыкновенных дифференциальных уравнения $f_0 = 0$ и $f_1 = 0$ (или их ростки) называются *орбитально эквивалентными*, если функции f_0 и f_1 (или их ростки) переводятся друг в друга диффеоморфиз-

мом (или его ростком) фазового многообразия X и умножением на всюду ненулевую функцию (или её росток). Если же они переводятся друг в друга контактным диффеоморфизмом PTX (или его ростком), сохраняющим естественное поле контактных плоскостей в PTX , и умножением на всюду ненулевую функцию (или её росток), то уравнения называются *контактно эквивалентными*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Орбитальная эквивалентность уравнений и ростков — это их контактная эквивалентность, сохраняющая естественное расслоение $PTX \rightarrow X$ забывания производной.

В локальных координатах (x, y) на фазовом многообразии X в окрестности не параллельного оси y направления любое уравнение записывается в обычной форме $f(x, y, p) = 0$, где $p = dy/dx$. В этих координатах контактные плоскости записываются в хорошо известной канонической форме $dy = p dx$, а расслоение забывания производной принимает вид $(x, y, p) \mapsto (x, y)$. Имея в виду локальную природу всех последующих теорем, в дальнейшем мы используем этот координатный подход.

Основным результатом настоящего раздела является следующая формальная классификация вырожденных неявных дифференциальных уравнений, встречающихся в типичных однопараметрических семействах, с точностью до орбитальной эквивалентности. Как обычно, *типичность* объекта означает его принадлежность к некоторому подмножеству, открытому всюду плотно в тонкой топологии Уитни (см., например, [14], гл. I, § 2, стр. 33).

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть f — типичная гладкая функция, a_0 — её невырожденная критическая точка, не являющаяся локальным экстремумом. Тогда росток в точке a_0 дифференциального уравнения $f(x, y, y') - f(a_0) = 0$ формально орбитально эквивалентен одной из 3-х нормальных форм

$$y'^2 + x^2 = z^2 + cz^3, \quad -y'^2 + x^2 = z^2 + cz^3, \quad y'^2 - x^2 = z^2 + cz^3, \quad \text{где } z = y - \frac{1}{2}xy'.$$

При замене $y \mapsto -y$ число c меняет знак, но его модуль является непрерывным инвариантом.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Для аналитического уравнения $f = 0$ приводящие ряды, как правило, расходятся.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. Теорема 1.4 останется верной, если в её нормальных формах z заменить на y . Нормальные формы с z хоть и несколько сложнее, чем с y , но зато легче интегрируются из-за наличия у них однопараметрических групп симметрий — см. параграф 1.4 настоящего раздела.

В следующей теореме 1.7, принадлежащей В. И. Арнольду (см. теорему 2 в [10]), приведена формальная классификация вырожденных неявных дифференциальных уравнений, встречающихся в типичных однопараметрических семействах, с точностью до контактной эквивалентности.

ТЕОРЕМА 1.7. Пусть f — типичная гладкая функция, a_0 — её невырожденная критическая точка, не являющаяся локальным экстремумом. Тогда росток в точке a_0 дифференциального уравнения $f(x, y, p) - f(a_0) = 0$ формально контактно эквивалентен одной из 2-х нормальных форм

$$p^2 \pm x^2 = z^2 + cz^3, \quad \text{где } z = y - \frac{1}{2}xp.$$

При замене $(x, y, p) \mapsto (x, -y, -p)$ число c меняет знак, но его модуль является непрерывным инвариантом.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.8. Для аналитической функции f приводящие ряды, как правило, расходятся.

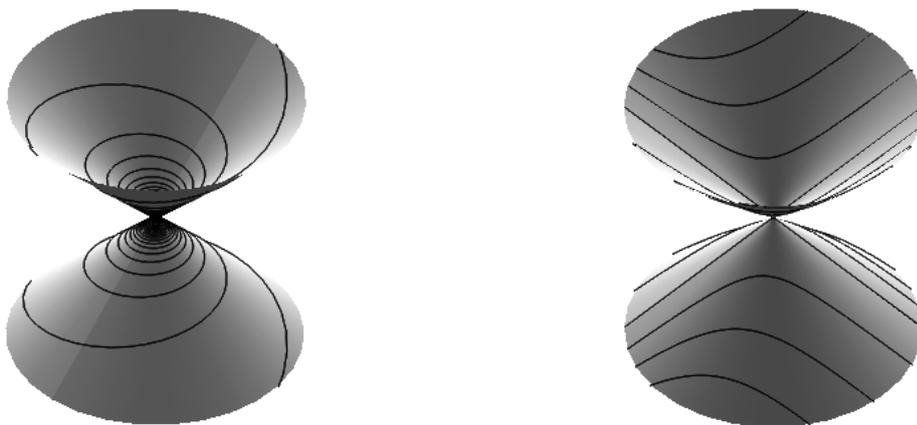


Рис. 4.3: Интегральные кривые конических точек неявного уравнения

В настоящем разделе доказывается, что при деформации в классе контактной эквивалентности квадратичного по производной ростка уравнения (и семей-

ства уравнений) получают ростки, орбитально эквивалентные исходному. Отсюда с помощью теоремы 1.7 В. И. Арнольда вытекает наша основная классификационная теорема 1.4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Росток неявного дифференциального уравнения $f(x, y, p) = 0$ называется *квадратичным по производной*, если его ограничение на слой отображения забывания производной $(x, y, p) \mapsto (x, y)$ имеет порядок 2 в его точке приложения a_0 : $f(a_0) = \partial_p f(a_0) = 0$ и $\partial_p^2 f(a_0) \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.10. Деформация объекта — это семейство объектов, зависящих от одного дополнительного вещественного параметра, обозначаемого ниже через t и принимающего значения на содержащем нуль интервале; при $t = 0$ соответствующий объект семейства совпадает с исходным.

ТЕОРЕМА 1.11. *Любая деформация в классе контактной эквивалентности квадратичного по производной ростка неявного дифференциального уравнения, при которой он остаётся квадратичным по производной, оставляет его в том же классе орбитальной эквивалентности.*

Имеется аналогичная теория для семейств неявных уравнений $F(x, y, y', \lambda) = 0$, в которой уравнения и их эквивалентности предполагаются зависящими от l параметров $\lambda \in \mathbb{R}^l$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12. Два семейства неявных обыкновенных дифференциальных уравнения $F_0(x, y, p, \lambda) = 0$ и $F_1(x, y, p, \lambda) = 0$ (или их ростки) называются *орбитально эквивалентными*, если функции F_0 и F_1 (или их ростки) переводятся друг в друга заменами переменных $x \mapsto X(x, y, \lambda)$, $y \mapsto Y(x, y, \lambda)$, зависящими от параметров, и умножением на всюду ненулевую функцию (или её росток). Если же они переводятся друг в друга зависящими от параметров заменами переменных $x \mapsto X(x, y, p, \lambda)$, $y \mapsto Y(x, y, p, \lambda)$, $p \mapsto P(x, y, p, \lambda)$, сохраняющими поле контактных плоскостей, и умножением на всюду ненулевую функцию (или её росток), то семейства $F_0(x, y, p, \lambda) = 0$ и $F_1(x, y, p, \lambda) = 0$ (или их ростки) называются *контактно эквивалентными*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.13. Орбитальная эквивалентность семейств уравнений и ростков — это их контактная эквивалентность, сохраняющая расслоение $(x, y, p) \mapsto (x, y)$ забывания производной.

ТЕОРЕМА 1.14. *Любая деформация в классе контактной эквивалентности квадратичного по производной ростка семейства неявных дифференциальных уравнений, при которой он остаётся квадратичным по производной, оставляет его в том же классе орбитальной эквивалентности.*

1.3. Доказательства

Основная теорема 1.4 настоящего раздела доказывается с помощью теоремы 1.7 В. И. Арнольда и теоремы 1.11 следующим образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Росток типичного вырожденного уравнения принадлежит к классу контактной эквивалентности одного из двух типов, описанных в теореме 1.7. В каждом из этих двух случаев заменим контактную эквивалентность на орбитальную с помощью теоремы 1.11 так, как это описано ниже. Для этого нам понадобится следующее наблюдение. А именно, группа ростков в нуле диффеоморфизмов, сохраняющих поле контактных плоскостей и точку приложения ростка, состоит из двух связных компонент. Одна из них — это связная компонента Γ_0 тождественного диффеоморфизма, а вторая — связная компонента преобразования $(x, z, p) \mapsto (x, -z, -p)$ в координатах теоремы 1.7, которое меняет знак c .

Зафиксируем c и рассмотрим класс формальной контактной эквивалентности относительно группы Γ_0 нормальной формы $p^2 + x^2 = z^2 + cz^3$ теоремы 1.7. Этот класс связан и состоит только из квадратичных по производной ростков, поскольку отображение забывания производной хоть и меняется при контактной эквивалентности, но его ядро в нуле обязательно лежит в контактной плоскости $dz = 0$, расположенной по отношению к конусу $p^2 + x^2 = z^2 + cz^3$ так, как показано на рисунке 4.4 а). Согласно теореме 1.11 все ростки этого класса орбитально эквивалентны друг другу.

Снова зафиксируем c и рассмотрим класс формальной контактной эквивалентности относительно группы Γ_0 нормальной формы $p^2 - x^2 = z^2 + cz^3$ теоремы 1.7. Этот класс состоит не только из квадратичных по производной ростков, поскольку ядро в нуле отображения забывания производной уже может касаться конуса $p^2 - x^2 = z^2 + cz^3$, хотя и лежит в контактной плоскости $dz = 0$, расположенной, как показано на рисунках 4.4 б) и 4.4 в). На них изображены два возмож-

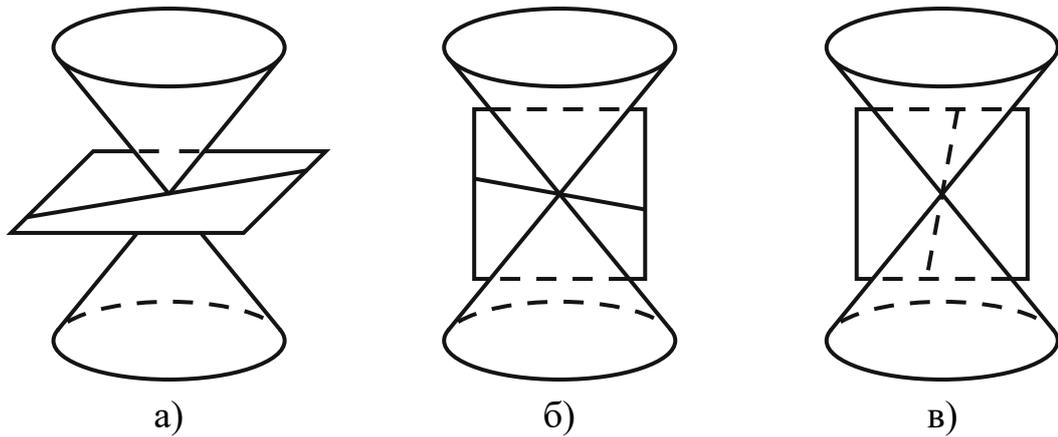


Рис. 4.4: Вырожденное уравнение, контактная плоскость и ядро забывания производной

ных случая расположения ядра и конуса при условии, что они не касаются друг друга. Согласно рисункам 4.4 б) и 4.4 в) квадратичные по производной ростки из нашего класса образуют две связные компоненты, в каждой из которых все ростки орбитально эквивалентны по теореме 1.11. Эти две компоненты переводятся друг в друга контактным преобразованием $(x, z, p) \mapsto (-p, z, x)$ из группы Γ_0 . Поэтому в этом случае одна Γ_0 -нормальная форма расщепляется на две $\pm(p^2 - x^2) = z^2 + cz^3$, не являющимися орбитально эквивалентными друг другу. \square

Теорема 1.7 доказана в [10] (см. теорему 2). Докажем теорему 1.11.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.11. Рассмотрим квадратичный по производной росток в точке a_0 неявного дифференциального уравнения $f(x, y, p) = 0$, т. е. $f(a_0) = \partial_p f(a) = 0$ и $\partial_p^2 f(a_0) \neq 0$, и деформацию ростка тождественного отображения $g_0 : (x, y, p) \mapsto (x, y, p)$, состоящую из ростков в точке a_0 диффеоморфизмов g_t , сохраняющих поле контактных плоскостей $dy = p dx$. Ростки с точками приложения $g_t a_0$ неявных дифференциальных уравнений $f_t = 0$, где $f_t = f \circ g_t^{-1}$, контактно эквивалентны друг другу по определению. Пусть ещё все они квадратичны по производной p ; достаточно доказать, что тогда все ростки уравнений $f_t = 0$ орбитально эквивалентны друг другу при достаточно малых t . Орбитальная эквивалентность ростков $f_t = 0$ при всех t следует из последнего факта благодаря связности интервала, на котором определена деформация: отношение орбитальной эквивалентности ростков $f_t = 0$ разбивает значения t на непересекающиеся открытые множества.

Без ограничения общности можно считать, что точка $g_t a_0$ находится в начале координат (x, y, p) при всех t , поскольку этого всегда можно добиться орбитальной эквивалентностью, зависящей от t . Пусть $v_t(g_t a) = \frac{d}{dt} g_t a$, где $a = (x, y, p)$, — контактное векторное поле, вообще говоря, зависящее от t , по которому однозначно восстанавливается деформация g_t . Векторное поле v_t , в свою очередь, однозначно восстанавливается по своей производящей функции $k_t(a) = \alpha(v_t(a))$, где $\alpha = p dx - dy$ — контактная 1-форма, по следующим известным формулам:

$$\dot{x} = \partial_p k_t, \quad \dot{y} = p \partial_p k_t - k_t, \quad \dot{p} = -p \partial_y k_t - \partial_x k_t. \quad (4.1)$$

Рассмотрим гомологическое уравнение

$$k_t = \varphi_t + p \psi_t + \theta_t f_t, \quad \varphi_t, \psi_t \in \mathcal{E}_{t,x,y}, \quad \theta_t \in \mathcal{E}_{t,x,y,p} \quad (4.2)$$

относительно неизвестных ростков φ_t , ψ_t и θ_t , где через \mathcal{E}_* обозначены алгебры ростков функций в нуле от указанных вместо знака $*$ переменных. Оно разрешимо согласно подготовительной теореме Мальгранжа–Вейерштрасса ([22], 6.5, стр. 73; [28], теорема 3.6, стр. 158), применённой к отображению $\pi : (t, x, y, p) \mapsto (t, x, y)$ и к фактор-алгебре $\mathfrak{f} = \mathcal{E}_{t,x,y,p}/(f_t)$, где (f_t) — идеал, порождённый ростком $f_t \in \mathcal{E}_{t,x,y,p}$. В самом деле, фактор-алгебра \mathfrak{f} конечно порождена (классом [1]) как модуль над $\mathcal{E}_{t,x,y,p}$ и является также $\mathcal{E}_{t,x,y}$ -модулем в силу естественного гомоморфизма $\pi^* : \mathcal{E}_{t,x,y} \rightarrow \mathcal{E}_{t,x,y,p}$. Пусть $\mathfrak{m}_{t,x,y}$ — максимальный идеал в $\mathcal{E}_{t,x,y}$. Тогда векторное пространство $\mathfrak{f}/\mathfrak{m}_{t,x,y}\mathfrak{f} = \mathcal{E}_p/(f(0,0,p))$ над $\mathbb{R} \cong \mathcal{E}_{t,x,y}/\mathfrak{m}_{t,x,y}$ порождено классами [1] и [p] вследствие условия квадратичности исходного ростка f по p . Следовательно, по вышеупомянутой теореме Мальгранжа–Вейерштрасса ростки 1 и p порождают \mathfrak{f} как $\mathcal{E}_{t,x,y}$ -модуль, откуда и следует разрешимость нашего гомологического уравнения (4.2).

Пусть теперь w_t — росток контактного векторного поля с производящей функцией $\varphi_t + p \psi_t$. Докажем, что при любых t в начале координат поле w_t обращается в нуль. Обозначим через ϵ идеал в $\mathcal{E}_{t,x,y,p}$, порождённый ростками p^2 , px , x^2 , y и состоящий из ростков. Согласно формулам (4.1), росток контактного векторного поля обращается в нуль в начале координат тогда и только тогда, когда росток его производящей функции принадлежит идеалу ϵ . Предположим от противного, что $\varphi_t + p \psi_t \notin \epsilon$. Тогда и $\theta_t f_t \notin \epsilon$, что следует из гомологического

уравнения (4.2), поскольку $k_t \in \mathfrak{e}$, так как $v_t(0) = 0$. Раскладывая теперь ростки, входящие в гомологическое уравнение (4.2), в ряды Тейлора по x , y и p с коэффициентами из \mathcal{E}_t , получаем следующее. Свободный член и коэффициент при p в разложении f_t обращаются в нуль, поскольку росток f_t квадратичен по p . Поэтому ни коэффициент при x в разложении f_t , ни свободный член в разложении θ_t не обращаются в нуль, иначе $\theta_t f_t \in \mathfrak{e}$. Далее, согласно гомологическому уравнению (4.2) коэффициент при p^2 в разложении k_t не равен нулю, поскольку росток f_t квадратичен по p , а свободный член в разложении θ_t не обращается в нуль по только что доказанному. Итак, $k_t \in \mathfrak{e}$, причём коэффициент при p^2 не равен нулю, а $f_t \in \phi_t x + \mathfrak{e}$, где $\phi_t \in \mathcal{E}_t$ — ненулевой росток. Но согласно формулам (4.1):

$$v_t(f_t) \in \phi_t \dot{x} + v_t(\mathfrak{e}) = \phi_t \partial_p k_t + v_t(\mathfrak{e}) \subseteq \phi_t \partial_p k_t + \mathfrak{e},$$

откуда немедленно следует, что коэффициент при p в разложении производной $v_t(f_t)$ (ростка f_t вдоль контактного векторного поля v_t с производящей функцией k_t) не обращается в нуль. Однако, росток f_t квадратичен по p , значит, коэффициент при p в разложении $\partial_t f_t$ равен нулю, откуда следует обращение в нуль коэффициента при p в разложении производной $v_t(f_t)$, так как $\partial_t f_t + v_t(f_t) = 0$, поскольку $f_t \circ g_t$ не зависит от t по условию. Полученное противоречие доказывает требуемое обращение в нуль: $w_t(0) = 0$.

Итак, контактное векторное поле w_t задаёт деформацию h_t тождественного диффеоморфизма $h_0 : (x, y, p) \mapsto (x, y, p)$ окрестности нуля в классе диффеоморфизмов, оставляющих нуль на месте и сохраняющих поле контактных плоскостей. Кроме того, диффеоморфизмы h_t сохраняют расслоение $(x, y, p) \mapsto (x, y)$ забывания производной в силу линейности производящей функции $\varphi_t + p\psi_t$ по p .

Для завершения доказательства покажем, что при любом t построенный диффеоморфизм h_t переводит росток $f = f_0$ в росток $f_t = f \circ g_t^{-1}$, умноженный на росток ненулевой функции ω_t : $(f_t \omega_t) \circ h_t = f$. Геометрически это означает, что росток поверхности $f = 0$ переводится при действии диффеоморфизма h_t в тот же самый росток поверхности $f_t = 0$, что и при действии диффеоморфизма g_t . Это действительно так, поскольку разность векторных полей v_t и w_t , задающих деформации g_t и h_t соответственно, касается поверхности $f_t = 0$ при любом t . В

самом деле, согласно гомологическому уравнению (4.2) производящая функция этой разности равна $\theta_t f_t$ и обращается в нуль на поверхности $f_t = 0$.

Повторим последнее рассуждение более формально. Согласно формулам (4.1) $v_t(f_t) - w_t(f_t) = \varrho_t f_t$, где ϱ_t — производная f_t вдоль контактного векторного поля с производящей функцией θ_t , поскольку $\theta_t f_t$ — производящая функция контактного векторного поля $v_t - w_t$ в силу гомологического уравнения (4.2). Кроме того, $\partial_t f_t + v_t(f_t) = 0$, поскольку $f_t \circ g_t$ не зависит от t по условию. Соединяя эти два равенства, получаем: $\partial_t f_t + w_t(f_t) + \varrho_t f_t = 0$. Найдём росток функции ω_t из дифференциального уравнения с частными производными $\partial_t(\ln \omega_t) + w_t(\ln \omega_t) = \varrho_t$ и начального условия $\omega_0 \equiv 1$. Тогда $\partial_t(\omega_t f_t) + w_t(\omega_t f_t) = 0$, где слева написана полная производная ростка $\omega_t f_t$ вдоль траекторий поля w_t . Поэтому $(\omega_t f_t) \circ h_t$ не зависит от t , откуда следует, что $(\omega_t f_t) \circ h_t = (\omega_0 f_0) \circ h_0 = f$.

Итак, при каждом t построенный диффеоморфизм h_t осуществляет орбитальную эквивалентность между ростками уравнений $f = 0$ и $f_t = 0$. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.14. Это доказательство получается из предыдущего формальным добавлением новых переменных λ .

Рассмотрим квадратичный по производной p росток в точке A_0 семейства неявных дифференциальных уравнений $F(x, y, p, \lambda) = 0$, т. е. $F(A_0) = \partial_p F(A_0) = 0$ и $\partial_p^2 F(A_0) \neq 0$, и деформацию тождественного отображения $G_0 : (x, y, p, \lambda) \mapsto (x, y, p, \lambda)$, состоящую из диффеоморфизмов вида $G_t : (x, y, p, \lambda) \mapsto (X_t(x, y, p, \lambda), Y_t(x, y, p, \lambda), P_t(x, y, p, \lambda), \lambda)$, сохраняющих поле плоскостей $dy = p dx$ и не меняющих параметров λ . Ростки с точками приложения $G_t A_0$ семейств неявных дифференциальных уравнений $F_t = 0$, где $F_t = F \circ G_t^{-1}$, контактно эквивалентны друг другу по определению. Как и в доказательстве предыдущей теоремы 1.11, достаточно доказать, они ещё и орбитально эквивалентны друг другу при достаточно малых значениях t . Опять-таки, орбитальная эквивалентность ростков $F_t = 0$ при всех t следует из последнего факта благодаря связности интервала, на котором определена деформация: отношение орбитальной эквивалентности ростков $F_t = 0$ разбивает значения t на непересекающиеся открытые множества.

Без ограничения общности можно считать, что точка $G_t A_0$ находится в начале координат (x, y, p, λ) при всех t , поскольку этого всегда можно добиться сдвигом параметров и орбитальной эквивалентностью, зависящей от t и λ . Пусть $V_t(G_t A) = \frac{d}{dt} G_t A$, где $A = (x, y, p, \lambda)$, — векторное поле, которое восстанавливает

ливается по своей производящей функции K_t по формулам: $\dot{x} = \partial_p K_t$, $\dot{y} = p \partial_p K_t - K_t$, $\dot{p} = -p \partial_y K_t - \partial_x K_t$, $\dot{\lambda} = 0$.

Рассмотрим гомологическое уравнение

$$K_t = \Phi_t + p \Psi_t + \Theta_t F_t, \quad \Phi_t, \Psi_t \in \mathcal{E}_{t,x,y,\lambda}, \quad \Theta_t \in \mathcal{E}_{t,x,y,p,\lambda} \quad (4.3)$$

относительно неизвестных ростков Φ_t , Ψ_t и Θ_t . Оно разрешимо согласно подготовительной теореме Мальгранжа–Вейерштрасса, применённой к отображению $(t,x,y,p,\lambda) \mapsto (t,x,y,\lambda)$ и к фактор-алгебре $\mathcal{E}_{t,x,y,p,\lambda}/(F_t)$.

Пусть теперь W_t — векторное поле с производящей функцией $\Phi_t + p \Psi_t$. Равенство $W_t(0) = 0$ следует из равенства $w_t(0) = 0$, полученного в доказательстве предыдущей теоремы 1.11, если положить $\lambda = 0$ в гомологическом уравнении (4.3), сведя его к прежнему гомологическому уравнению (4.2). Поэтому векторное поле W_t задаёт деформацию H_t тождественного диффеоморфизма $H_0 : (x,y,p,\lambda) \mapsto (x,y,p,\lambda)$ окрестности нуля в классе диффеоморфизмов, оставляющих нуль на месте и сохраняющих поле плоскостей $dy = p dx$. Кроме того, диффеоморфизмы H_t не меняют параметров и сохраняют расслоение $(x,y,p,\lambda) \mapsto (x,y,\lambda)$ в силу линейности производящей функции $\Phi_t + p \Psi_t$ по p .

Доказательство того факта, что при любом t построенный диффеоморфизм H_t переводит росток $F = F_0$ в росток $F_t = F \circ G_t^{-1}$, умноженный на росток ненулевой функции, повторяет соответствующий фрагмент предыдущего доказательства. А именно, геометрически это означает, что росток поверхности $F = 0$ переводится при действии диффеоморфизма H_t в тот же самый росток поверхности $F_t = 0$, что и при действии диффеоморфизма G_t . Это действительно так, поскольку разность векторных полей V_t и W_t , задающих деформации G_t и H_t соответственно, касается поверхности $F_t = 0$ при любом t . В самом деле, согласно гомологическому уравнению (4.3) производящая функция этой разности равна $\Theta_t F_t$ и обращается в нуль на поверхности $F_t = 0$.

Итак, при каждом t построенный диффеоморфизм H_t осуществляет орбитальную эквивалентность между ростками семейств уравнений $F = 0$ и $F_t = 0$.

□

1.4. Явное интегрирование при $c = 0$

Поля направлений, отсекаемых контактными плоскостями в нормальных формах В. И. Арнольда из теоремы 1.7, интегрируются из-за инвариантности относительно поворотов или квазиповоротов вокруг оси z . А именно, поле контактных плоскостей и нормальная форма $p^2 + x^2 = z^2 + cz^3$ инвариантны относительно преобразований $(p, x, z) \mapsto (p \cos \beta - x \sin \beta, p \sin \beta + x \cos \beta, z)$, а поле контактных плоскостей и нормальная форма $p^2 - x^2 = z^2 + cz^3$ — относительно преобразований $(p, x, z) \mapsto (p \operatorname{ch} \beta + x \operatorname{sh} \beta, p \operatorname{sh} \beta + x \operatorname{ch} \beta, z)$. Ниже явно выписаны (как функции параметра τ) их интегральные кривые при $c = 0$.

1. $p^2 + x^2 = z^2$:

$$(p, x, z) = \frac{2}{\tau} (\cos(\tau + \beta), \sin(\tau + \beta), -1);$$

2. $p^2 - x^2 = z^2$:

$$(p, x, z) = (\pm x, x, 0) \quad \text{или} \quad \frac{2}{\tau} (\operatorname{ch}(\tau + \beta), \operatorname{sh}(\tau + \beta), -1).$$

1.5. Уравнения смешанного типа на плоскости

Результаты о нормальной форме неявного дифференциального уравнения находят естественное применение в теории линейного уравнения второго порядка с частными производными на плоскости. В настоящем параграфе мы вкратце опишем эту связь.

Рассмотрим линейное уравнение с частными производными на плоскости с координатами x и y с неизвестной функцией $\psi(x, y)$:

$$\alpha(x, y)\psi_{xx} + 2\beta(x, y)\psi_{xy} + \gamma(x, y)\psi_{yy} = \sigma(x, y, \psi, \psi_x, \psi_y).$$

Задача состоит в том, чтобы упростить левую часть уравнения, называемую *главной*, с помощью замены координат $x \mapsto X(x, y)$, $y \mapsto Y(x, y)$, не обращая внимания на его правую часть σ . Согласно общей теории, для решения этой задачи

нужно приводить не само уравнение, а уравнение характеристик

$$\alpha dy^2 - 2\beta dx dy + \gamma dx^2 = 0,$$

которое можно переписать в наших предыдущих обозначениях в виде неявного обыкновенного дифференциального уравнения $\alpha p^2 - 2\beta p + \gamma = 0$.

Хорошо известно, что в окрестности точки, где левая часть уравнения характеристик знакоопределена ($\alpha\gamma - \beta^2 > 0$), исходное уравнение с частными производными приводится к виду $\psi_{xx} + \psi_{yy} = \tilde{\sigma}$ и называется эллиптическим (имеет эллиптический тип). В окрестности же точки, где левая часть уравнения характеристик невырождена и не знакоопределена ($\alpha\gamma - \beta^2 < 0$), исходное уравнение с частными производными приводится к виду $\psi_{xx} - \psi_{yy} = \tilde{\sigma}$ и называется гиперболическим (имеет гиперболический тип). Исходное уравнение имеет в точке смешанный тип, если в любой её окрестности оно имеет точки как эллиптического, так и гиперболического типов.

Если уравнение характеристик приводится к нормальной форме Чибрарио $p^2 + x = 0$, то исходное уравнение приводится к уравнению Трикоми $\psi_{xx} + x\psi_{yy} = \tilde{\sigma}$, вообще говоря, с нетривиальной правой частью $\tilde{\sigma}$. Классическое уравнение Трикоми $\psi_{xx} + x\psi_{yy} = 0$ — это простейшее уравнение смешанного типа. Нормальные формы сложенных особых точек $p^2 + kx^2 + y = 0$, содержащие вещественный инвариант k и полученные в [29], дают более сложные нормальные формы линейного уравнения смешанного типа $\psi_{xx} + (kx^2 + y)\psi_{yy} = \tilde{\sigma}$. Однако, при некоторых значениях k , называемых *резонансными* и образующих счётное множество, нормальные формы ещё сложнее — они найдены в [32]. Локальная классификация линейного уравнения с типичными коэффициентами на этом заканчивается — любая его точка является одной из следующих: эллиптической, гиперболической, Чибрарио–Трикоми, сложенным узлом, сложенным фокусом или сложенным седлом, при этом сложенные узлы и седла могут содержать резонансы.

В типичных однопараметрических семействах линейных уравнений возможны более сложные вырождения. Бесконечно гладкие нормальные формы некоторых из них исследованы в статье [33]. Теорема 1.4 (см. замечание 1.6 к ней) настоящего раздела влечёт следующий результат о формальных нормаль-

ных формах вырожденных линейных уравнений на плоскости, встречающихся в их типичных однопараметрических семействах.

ТЕОРЕМА 1.15. *Рассмотрим дифференциальное уравнение с частными производными*

$$\alpha(x,y)\psi_{xx} + 2\beta(x,y)\psi_{xy} + \gamma(x,y)\psi_{yy} = \sigma(x,y,\psi,\psi_x,\psi_y),$$

коэффициенты α , β и γ которого — ростки в точке O гладких функции от (x,y) , удовлетворяющие условиям:

1. *хотя бы один из коэффициентов α , β , γ в точке O не обращается в нуль;*
2. *определитель $\det = \alpha\gamma - \beta^2$ в точке O принимает нулевое критическое значение, т. е. $\det(O) = \det_x(O) = \det_y(O) = 0$;*
3. *второй дифференциал определителя в точке O — невырожденная квадратичная форма*

$$Q = \frac{1}{2}\det_{xx}(O) dx^2 + \det_{xy}(O) dx dy + \frac{1}{2}\det_{yy}(O) dy^2.$$

Тогда:

1. *если Q не знакоопределена, но её ограничение на (одномерное) ядро формы $\alpha dy^2 - 2\beta dx dy + \gamma dx^2$ в точке O положительно определено, то исходное уравнение приводится к формальной нормальной форме*

$$\psi_{xx} + (x^2 - y^2 - cy^3)\psi_{yy} = \tilde{\sigma};$$

2. *если Q не знакоопределена, но её ограничение на (одномерное) ядро формы $\alpha dy^2 - 2\beta dx dy + \gamma dx^2$ в точке O отрицательно определено, то исходное уравнение приводится к формальной нормальной форме*

$$\psi_{xx} - (x^2 - y^2 - cy^3)\psi_{yy} = \tilde{\sigma};$$

3. если Q отрицательно определена, то исходное уравнение приводится к формальной нормальной форме

$$\psi_{xx} - (x^2 + y^2 + cy^3)\psi_{yy} = \tilde{\sigma}.$$

2 Перестройки первых интегралов

2.1. Введение

Сложенный зонтик Уитни — это особенность поверхности, изображённая на рис. 4.5 слева и возникающая на графике первого интеграла быстро-медленной

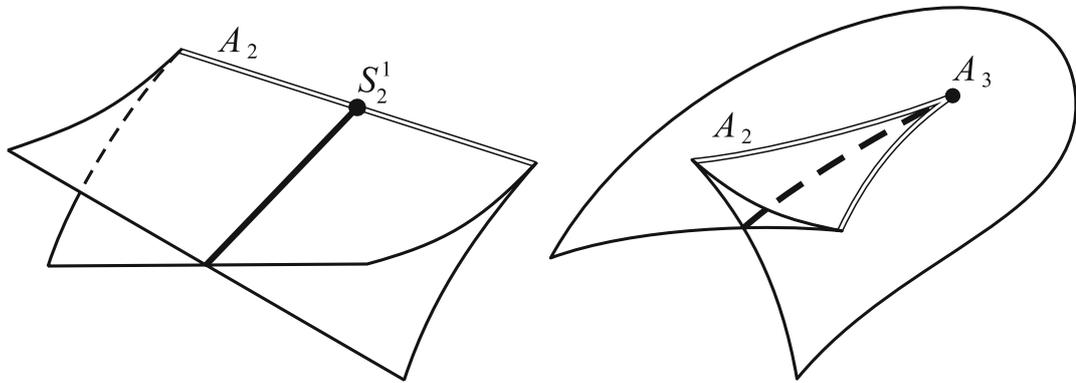


Рис. 4.5: Сложенный зонтик Уитни и ласточкин хвост

системы с двумя медленными переменными в отдельных точках линии складки медленного подмногообразия. В точке сборки график типичного первого интеграла имеет особенность ласточкин хвост, изображённую на рис. 4.5 справа. Поведение фазовых кривых на плоскости медленных переменных в окрестности сложенного зонтика Уитни подробно изучено в [13] и [30], а ласточкиного хвоста — в [63], [29] и [74].

В настоящем разделе получена нормальная форма перестройки фронта S_3^1 цилиндра над раскрытым зонтиком Уитни, которая изображена на рис. 4.6 и описывает взаимодействие ласточкиного хвоста и сложенного зонтика Уитни. Её испытывает график первого интеграла при изменении параметра в типичном однопараметрическом семействе быстро-медленных систем с двумя медленными переменными и одной быстрой. Согласно нашим результатам, при перестройке S_3^1

сложенный зонтик Уитни проходит через ласточкин хвост, который после этого переворачивается. В процессе участвует ещё одна точечная особенность — самопересечение ребра возврата A_2 с гладкой частью; правда, в отличие от ласточкиного хвоста и сложенного зонтика Уитни, эта особенность локально приводима. Изменением фазового портрета на плоскости медленных переменных мы не интересуемся из-за его заведомой сложности — дело в том, что уже в окрестности ласточкиного хвоста такой фазовый портрет имеет функциональный модуль с точностью даже до непрерывной орбитальной эквивалентности [29].

Кроме описываемой перестройки S_3^1 график первого интеграла может испытывать и другие типичные перестройки. Возможно, например, появление (или исчезновение) пары сложенных зонтиков Уитни, что происходит в двух типичных вариантах; эти перестройки исследованы в [68], где найдены нормальные формы для семейств их фазовых портретов. Также возможно и появление (или исчезновение) пары ласточкиных хвостов тремя типичными способами — эти перестройки хорошо известны в теории фронтов, их рисунки опубликованы, например, в [11] (перестройки 1, 2 и 5 на рис. 36, стр. 35); однако, семейства их фазовых портретов на плоскости медленных переменных содержат функциональные модули.

Все упомянутые перестройки (взаимодействие ласточкиного хвоста и сложенного зонтика Уитни, а также появление или исчезновение двух ласточкиных хвостов или двух сложенных зонтиков Уитни) составляют данную в теореме 4 статьи [40] полную классификацию типичных перестроек поверхностей уровня первого интеграла при изменении его значения в типичной быстро-медленной системе уже с тремя (а не двумя) медленными переменными; более того, вместо быстро-медленной системы можно рассматривать систему из двух обыкновенных неявных дифференциальных уравнений с двумя зависимыми и одной независимой переменными. Однако, в [40] вместо одной нормальной формы перестройки S_3^1 (которая там обозначается как $I_{2,1}$) приведено целых четыре, отсутствуют рисунки перестроек, а доказательство самой теоремы 4 чересчур схематично. В настоящем разделе эти пробелы ликвидированы. В частности, согласно нашим результатам все четыре нормальные формы перестройки $I_{2,1}$ из работы [40] эквивалентны друг другу (следствие 2.3 теоремы 2.2).

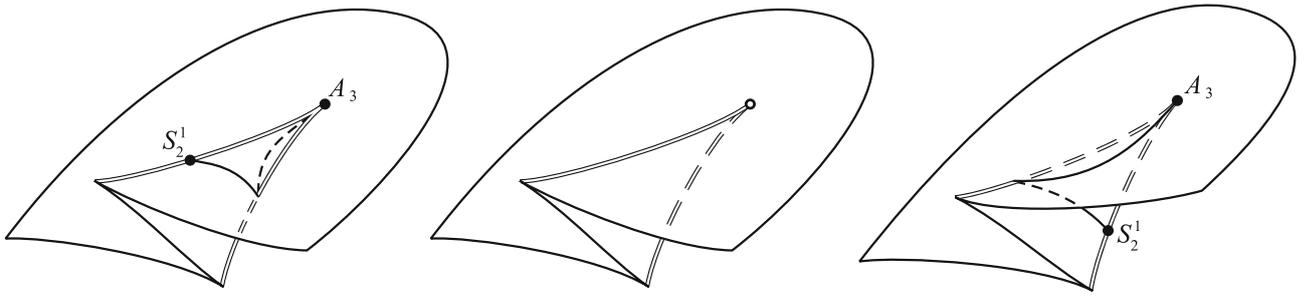


Рис. 4.6: Перестройка S_3^1 — взаимодействие ласточкина хвоста и сложенного зонтика Уитни

2.2. Формулировки результатов

Мы рассматриваем гладкую быстро-медленную систему с одной быстрой переменной $s \in \mathbb{R}$ и двумя медленными $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\varepsilon \dot{s} = F_\lambda(s, x, y), \quad \dot{x} = X_\lambda(s, x, y), \quad \dot{y} = Y_\lambda(s, x, y), \quad \varepsilon \ll 1,$$

гладко зависящую от параметра $\lambda \in \mathbb{R}$. Мы предполагаем, что при любом значении параметра в каждой точке трёхмерного пространства быстрых и медленных переменных определено поле плоскостей, порождённое векторами $(\dot{s}, \dot{x}, \dot{y}) = (1, 0, 0)$ и $(\dot{s}, \dot{x}, \dot{y}) = (0, X_\lambda, Y_\lambda)$, медленное многообразие

$$\mathcal{S}_\lambda = \{(s, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid F_\lambda(s, x, y) = 0\}$$

является гладким, и описанное поле плоскостей его не касается. В этом случае оно высекает на медленном многообразии гладкое неособое поле направлений, интегральные кривые которого при естественном проектировании $\pi : (s, x, y) \mapsto (x, y)$ переходят в фазовые кривые на плоскости медленных переменных. Гладкий первый интеграл поля направлений на медленном многообразии при проектировании π переходит в многозначный первый интеграл медленного движения, линии уровня которого — это фазовые кривые на плоскости медленных переменных.

Для типичной быстро-медленной системы проекция $\pi_{\mathcal{S}_\lambda} : \mathcal{S}_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^2$ медленного многообразия на плоскость медленных переменных имеет лишь особенности Уитни — складки и сборки, а вышеописанное поле скоростей вырождается в изолированных точках линии складки. (Вырождения поля скоростей — это точки, где

оно не является максимально неинтегрируемым, т. е. нули 3-формы $\alpha \wedge d\alpha$, если поле плоскостей — это поле ядер ненулевой 1-формы α .) Хорошо известно, что в типичном случае в точках сборки график первого интеграла медленного движения имеет особенность ласточкин хвост A_3 , в точках вырождения поля плоскостей на линии складки — сложенный зонтик Уитни S_2^1 , а в остальных точках на этой линии — ребро возврата A_2 . В координатах сложенный зонтик Уитни можно задать уравнением $u^2 = x^2y^3$ или параметрически $y = s^2, u = s^3x$ с параметром s ; ласточкин хвост — это поверхность, состоящая из многочленов $s^4 + xs^2 + ys - u$, имеющих кратный вещественный корень s , которую можно задать параметрически: $y = -4s^3 - 2xs, u = -3s^4 - xs^2$.

Однако, в типичном однопараметрическом семействе быстро-медленных систем при отдельных значениях параметра точка вырождения поля плоскостей, двигаясь по линии складки, может попасть в точку сборки. Будем называть такую сборку *вырожденной*. Основным результатом настоящего раздела является следующая

ТЕОРЕМА 2.1. *В окрестности точки (λ_*, x_*, y_*) вырожденной сборки типичного семейства быстро-медленных систем график типичного семейства их первых интегралов приводится к локальной нормальной форме*

$$\{u = I_{2,1}(\lambda - \lambda_*, x, y)\}$$

гладкой заменой координат (x, y, u) , гладко зависящей от параметра λ (который сам не меняется). Многозначная функция $I_{2,1}$ определяется формулами:

$$I_{2,1}(\lambda, x, y) = \left\{ u \in \mathbb{R} \mid \exists s \in \mathbb{R} : s^3 + xs + y = 0, u = F_2 \right\},$$

где

$$F_2 = \int (s^3 + xs + y)(s + \lambda) ds = \frac{s^5}{5} + \frac{\lambda s^4}{4} + \frac{xs^3}{3} + \frac{(\lambda x + y)s^2}{2} + \lambda ys.$$

Эта теорема — следствие теоремы 3 из [40] и следующей теоремы о нормальной форме перестройки двумерных сечений фронта S_3^1 .

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\tau : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция такая, что $\tau(0) = 0$ и $\partial_\lambda \tau(0) \neq 0$. Тогда в окрестности начала координат она приводится к нормальной форме $\tau_0(\lambda, x, y, u) = \lambda$ диффеоморфизмом, сохраняющим фронт

$$S_3^1 = \{u = I_{2,1}(\lambda, x, y)\}$$

вместе с началом координат.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Все четыре нормальные формы, полученные в теореме 4 статьи [40] для перестройки $I_{2,1}$ поверхности уровня типичного интеграла быстрого-медленной с тремя медленными переменными λ , x и y , эквивалентны друг другу и более простой: $I_{2,1}(\lambda, x, y) + \lambda$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Для фронта S_3^1 все типичные функции τ с условием $\tau(0) = 0$ эквивалентны друг другу и имеют одну и ту же нормальную форму в отличие от ласточкиного хвоста и сложенного зонтика Уитни. Хорошо известно, что для них имеются уже по две не эквивалентных друг другу нормальных формы: в вышеупомянутых координатах это $\tau_0(x, y, u) = \pm x$ (ласточкин хвост) и $\tau_0(x, y, u) = \pm(x + y)$ (сложенный зонтик Уитни).

2.3. Доказательства

ЛЕММА 2.5. Векторные поля

$$v_1 := \lambda \partial_\lambda + 2x \partial_x + 3y \partial_y + 5u \partial_u,$$

$$v_2 := (15\lambda^2 + 4x) \partial_\lambda + 9y \partial_x - 2x^2 \partial_y + (15\lambda u + 2\lambda xy - 3y^2) \partial_u,$$

$$v_3 := 4(6y + \lambda x) \partial_\lambda - 180\lambda y \partial_x + (120u + 4xy + 30\lambda x^2) \partial_y - 3(20xu + 7\lambda y^2 + 10\lambda^2 xy) \partial_u,$$

$$v_4 := (120u - 450\lambda^3 x - 128\lambda x^2 + 180\lambda^2 y + 16xy) \partial_\lambda - \\ - (240xu + 8x^2 y + 135\lambda y^2) \partial_y + 9(13\lambda xy^2 - 50\lambda^2 xu - 3y^3 + 10x^2 u) \partial_u$$

касаются фронта S_3^1 и обращаются в нуль в начале координат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пространстве \mathbb{R}^7 введем контактную структуру $\alpha = \varkappa d\lambda + p dx + q dy - du$ и рассмотрим алгебраическое лежандрово подмногообразие

$$\Lambda = \left\{ (\lambda, x, y, u) \in \mathbb{R}^4 \mid \exists s \in \mathbb{R} : s^3 + xs + y = 0, \right. \\ \left. u = F_2, \varkappa = \partial_\lambda F_2, p = \partial_x F_2, q = \partial_y F_2 \right\}.$$

Непосредственно проверяется, что функции $\alpha(v_1), \dots, \alpha(v_4)$ обращаются в нуль на лежандровом подмногообразии Λ . Следовательно, контактные векторные поля V_1, \dots, V_4 с этими производящими функциями касаются лежандрова подмногообразия Λ . Но при проектировании $(\varkappa, p, q, \lambda, x, y, u) \mapsto (\lambda, x, y, u)$ лежандрово подмногообразие Λ переходит во фронт S_3^1 , а векторные поля V_1, \dots, V_4 — в v_1, \dots, v_4 . \square

ЛЕММА 2.6. *Рассмотрим производные $v_1\tau, \dots, v_4\tau$ функции τ вдоль векторных полей v_1, \dots, v_4 . Если $\partial_\lambda\tau(0) \neq 0$, то линейные части функций $v_1\tau, \dots, v_4\tau$ линейно независимы в начале координат.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения $A = \partial_\lambda\tau(0)$, $B = \partial_x\tau(0)$, $C = \partial_y\tau(0)$, $D = \partial_u\tau(0)$ и, используя лемму 2.5, вычислим явно линейные члены указанных функций в начале координат:

$$\begin{aligned} v_1\tau &= A\lambda + 2Bx + 3Cy + 5Du + \dots \\ v_2\tau &= 4Ax + 9By + \dots \\ v_3\tau &= 24Ay + 120Cu + \dots \\ v_4\tau &= 120Au + \dots \end{aligned}$$

По условию $A \neq 0$. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Преобразование

$$(\lambda, x, y, u) \mapsto (-\lambda, x, -y, -u), \quad s \mapsto -s$$

сохраняет фронт S_3^1 и меняет знак $\partial_\lambda\tau(0)$.

Если же $\partial_\lambda\tau(0) > 0$, воспользуемся гомотопическим методом. А именно, соединим функции $\tau_0 = \lambda$ и $\tau_1 = \tau$ гомотопией $\tau_t = (1-t)\lambda + t\tau$, для которой $\partial_\lambda\tau_t > 0$, если $t \in [0, 1]$. Найдем теперь семейство локальных диффеоморфизмов g_t , сохраняющих фронт S_3^1 вместе с началом координат и переводящих τ_t в τ_0 :

$\tau_t(g_t\xi) = \tau_0(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^4$. Искомое семейство диффеоморфизмов является решением $\eta = g_t\xi$ дифференциального уравнения $\dot{\eta} = v_t(\eta)$, в котором гладкое семейство v_t векторных полей определено в окрестности отрезка $[0,1] \times \{0\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$, удовлетворяет гомологическому уравнению $v_t\tau_t = \lambda - \tau$, так как $\partial_t\tau_t = \tau - \lambda$, касается фронта S_3^1 и обращается в нуль в начале координат. Согласно лемме 2.5 семейство векторных полей с такими свойствами можно выбрать в виде

$$v_t = f_t^1 \cdot v_1 + \dots + f_t^4 \cdot v_4,$$

где f_t^1, \dots, f_t^4 — гладкие функции на окрестности отрезка $[0,1] \times \{0\}$, удовлетворяющие гомологическому уравнению

$$f_t^1 \cdot v_1\tau_t + \dots + f_t^4 \cdot v_4\tau_t = \lambda - \tau.$$

Последнее уравнение разрешимо, поскольку гладкие функции $v_1\tau, \dots, v_4\tau$ на пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$ сами обращаются в нуль во всех точках $(t,0)$ прямой $\mathbb{R} \times \{0\}$, их дифференциалы линейно независимы во всех точках $(t,0)$ отрезка $[0,1] \times \{0\}$ согласно лемме 2.6, а функция $\lambda - \tau$ по условию обращается в нуль во всех точках $(t,0)$ прямой $\mathbb{R} \times \{0\}$. \square

Заключение

В диссертации разработан оригинальный метод приведения фронта стратифицированного лежандрова подмногообразия к локальной нормальной форме, основанный на представлении лежандрова расслоения с помощью семейства производящих функций, на пространстве которых действует группа контактных диффеоморфизмов, сохраняющих исходное стратифицированное лежандрово подмногообразие.

С его помощью получены новые классификационные и общие результаты о фронтах, встречающихся в различных задачах теории дифференциальных уравнений и оптимизации. Этот метод может найти применение к аналогичным задачам и в других областях, поскольку он универсален и эффективно работает для широкого класса стратифицированных лежандровых подмногообразий.

Результаты диссертации о нормальных формах фронтов могут быть использованы при исследованиях распространения волн в неоднородных анизотропных средах и особенностей множеств достижимости управляемых систем. Классификация типичных особенностей выпуклых оболочек может найти применение для описания зон транзитивности в теории оптимального управления, а также в задачах оптимизации и выпуклого анализа.

Автор выражает глубокую благодарность научному консультанту доктору физико-математических наук, профессору Алексею Александровичу Давыдову за постоянную поддержку и внимание к работе.

Список литературы

1. *Аграчев А. А., Сачков Ю. Л.* Геометрическая теория управления. — Москва, Физматлит, 2004.
2. *Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко, О. В.* Особенности. I. Локальная и глобальная теория // *Динамические системы – 6*. Т. 6. — М.: ВИНТИ, 1988. — (Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления).
3. *Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко, О. В.* Особенности. II. Классификация и приложения // *Динамические системы – 8*. Т. 39. — М.: ВИНТИ, 1989. — (Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления).
4. *Арнольд В. И.* Особенности гладких отображений // *УМН*. — 1968. — Т. 23, 1(139). — С. 3—44.
5. *Арнольд В. И.* Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности // *Функц. анализ и его прил.* — 1972. — Т. 6, № 4. — С. 3—25.
6. *Арнольд В. И.* Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют // *УМН*. — 1978. — Т. 33, 5(203). — С. 91—105.
7. *Арнольд В. И.* Лагранжевы многообразия с особенностями, асимптотические лучи и раскрытый ласточкин хвост // *Функц. анализ и его прил.* — 1981. — Т. 15, № 4. — С. 1—14.
8. *Арнольд В. И.* Особенности в вариационном исчислении // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат.* Т. 22. — М. : ВИНТИ, 1983. — С. 3—55.

9. *Арнольд В. И.* Особенности систем лучей // УМН. — 1983. — Т. 38, 2(230). — С. 77—147.
10. *Арнольд В. И.* О поверхностях, определяемых гиперболическими уравнениями // Матем. заметки. — 1988. — Т. 44, № 1. — С. 3—18.
11. *Арнольд В. И.* Теория катастроф. — Москва : Наука, 1990.
12. *Арнольд В. И.* Особенности каустик и волновых фронтов. — Москва : Фазис, 1996.
13. *Арнольд В. И.* Контактная структура, релаксационные колебания и особые точки неявных дифференциальных уравнений // В. И. Арнольд «Избранное—60». — М. : Фазис, 1997. — С. 391—396.
14. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. Т. I. — М.: Наука, 1982.
15. *Арнольд В. И., Гивенталь А. Б.* Симплектическая геометрия // Динамические системы—4. Т. 4. — М. : ВИНТИ, 1985. — С. 5—135. — (Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления).
16. *Богаевский И. А.* Особенности распространения коротких волн на плоскости // Матем. сб. — 1995. — Т. 186, № 11. — С. 35—52.
17. *Богаевский И. А.* Особенности выпуклых оболочек трёхмерных гиперповерхностей // Тр. МИАН. — 1998. — Т. 221. — С. 81—100.
18. *Богаевский И. А.* Каустики внутреннего рассеяния // Тр. МИАН. — 2009. — Т. 267. — С. 7—13.
19. *Богаевский И. А.* Перестройки фронтов внутреннего рассеяния // Доклады Академии наук. — 2011. — Т. 436, № 2. — С. 155—158.
20. *Богаевский И. А.* Взаимодействие сложенного зонтика Уитни и ласточкина хвоста в быстро-медленных системах // Тр. МИАН. — 2012. — Т. 278. — С. 29—33.
21. *Богаевский И. А.* Неявные обыкновенные дифференциальные уравнения: перестройки и усиление эквивалентности // Изв. РАН. Сер. матем. — 2014. — Т. 78, № 6. — С. 5—20.

22. *Брёкер Т., Ландер Л.* Дифференцируемые ростки и катастрофы. — М.: Мир, 1977. — Перевод с английского.
23. *Вершик А. М., Гершкович В. Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // *Динамические системы—7*. Т. 16. — ВИНТИ, 1987. — С. 5—85. — (Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления).
24. *Гивенталь А. Б.* Многообразия многочленов, имеющих корень фиксированной кратности, и обобщенное уравнение Ньютона // *Функц. анализ и его прил.* — 1982. — Т. 16, № 1. — С. 13—18.
25. *Гивенталь А. Б.* Лагранжевы многообразия с особенностями и неприводимые sl_2 -модули // *УМН.* — 1983. — Т. 38, 6(234). — С. 109—110.
26. *Гивенталь А. Б.* Лагранжевы вложения поверхностей и раскрытый зонтик Уитни // *Функц. анализ и его прил.* — 1986. — Т. 20, № 3. — С. 35—41.
27. *Гивенталь А. Б.* Особые лагранжевы многообразия и их лагранжевы отображения // *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения*. Т. 33. — М.: ВИНТИ, 1988. — С. 55—112.
28. *Голубицкий М., Гийемин В.* Устойчивые отображения и их особенности. — М.: Мир, 1977. — Перевод с английского.
29. *Давыдов А. А.* Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности его особой точки // *Функц. анализ и его прил.* — 1985. — Т. 19, № 2. — С. 1—10.
30. *Давыдов А. А.* Нормальная форма медленных движений уравнения релаксационного типа и расслоения биномиальных поверхностей // *Матем. сб.* — 1987. — Т. 132(174), № 1. — С. 131—139.
31. *Давыдов А. А., Закалюкин В. М.* Управляемость нелинейных систем: типичные особенности и их устойчивость // *УМН.* — 2012. — Т. 67, № 2. — С. 65—92.
32. *Давыдов А. А., Росалес-Гонсалес Э.* Полная классификация типичных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными на плоскости // *Доклады Академии наук.* — 1996. — Т. 350, № 2. — С. 151—154.

33. *Давыдов А. А., Чинь Тхи Зуен Л.* Нормальные формы семейств линейных уравнений смешанного типа вблизи нерезонансных сложенных особых точек // УМН. — 2010. — Т. 65, 5(395). — С. 189—190.
34. *Закалюкин В. М.* О лагранжевых и лежандровых особенностях // Функц. анализ и его прил. — 1976. — Т. 10, № 1. — С. 26—36.
35. *Закалюкин В. М.* Особенности выпуклых оболочек гладких многообразий // Функцион. анализ и его прил. — 1977. — Т. 11, № 3. — С. 76—77.
36. *Закалюкин В. М.* Перестройки фронтов, каустик, зависящих от параметра, версальность отображении // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Т. 22. — М. : ВИНТИ, 1983. — С. 56—93.
37. *Закалюкин В. М.* Одно обобщение лагранжевых триад // УМН. — 1986. — Т. 41, 4(250). — С. 180.
38. *Закалюкин В. М., Курбацкий А. Н.* Особенности огибающих семейств плоскостей в теории управления // Тр. МИАН. — 2008. — Т. 262. — С. 73—86.
39. *Закалюкин В. М., Курбацкий А. Н.* Выпуклые оболочки поверхностей с краем и углами и особенности зоны транзитивности в \mathbb{R}^3 // Тр. МИАН. — 2010. — Т. 268. — С. 284—303.
40. *Закалюкин В. М., Ремизов А. О.* Лежандровы особенности в системах неявных обыкновенных дифференциальных уравнений и быстро-медленных динамических системах // Тр. МИАН. — 2008. — Т. 261. — С. 140—153.
41. *Закалюкин В. М., Робертс Р. М.* Об устойчивых лагранжевых многообразиях с особенностями // Функц. анализ и его прил. — 1992. — Т. 26, № 3. — С. 28—34.
42. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика VIII. Электродинамика сплошных сред. — Москва : Наука, 1992.
43. *Ремизов А. О.* Многомерная конструкция Пуанкаре и особенности поднятых полей для неявных дифференциальных уравнений // Оптимальное управление. Т. 19. — М. : РУДН, 2006. — С. 131—170. — (СМФН).

44. *Самойленко А. М.* Об эквивалентности гладкой функции полиному Тэйлора в окрестности критической точки конечного типа // Функц. анализ и его прил. — 1968. — Т. 2, № 4. — С. 63—69.
45. *Седых В. Д.* Функциональные модули особенностей выпуклых оболочек многообразий коразмерностей 1 и 2 // Мат. сб. — 1982. — Т. 119 (161), 2 (10). — С. 233—247.
46. *Седых В. Д.* Выпуклые оболочки и преобразование Лежандра // Сиб. мат. журн. — 1983. — Т. 24, № 6. — С. 122—134.
47. *Седых В. Д.* Особенности выпуклых оболочек // Сиб. мат. журн. — 1983. — Т. 24, № 3. — С. 158—175.
48. *Седых В. Д.* Стабилизация особенностей выпуклых оболочек // Мат. сб. — 1988. — Т. 135 (177), № 4. — С. 514—519.
49. *Седых В. Д.* Склейка ласточкиного хвоста и зонтика Уитни в четырёхмерной управляемой системе // Труды ГАНГ им. И.М.Губкина. — 1997. — С. 58—68.
50. *Тюрина Г. Н.* Локально полууниверсальные плоские деформации изолированных особенностей комплексных пространств // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1969. — Т. 33, № 5. — С. 1026—1058.
51. *Щербак И. Г.* Фокальное множество поверхности с краем и каустики групп, порожденных отражениями B_k , C_k , F_4 // Функц. анализ и его прил. — 1984. — Т. 18, № 1. — С. 90—91.
52. *Щербак О. П.* Особенности семейства эвольвент в окрестности точки перегиба кривой и группа H_3 , порожденная отражениями // Функц. анализ и его прил. — 1983. — Т. 17, № 4. — С. 70—72.
53. *Щербак О. П.* Волновые фронты и группы отражений // УМН. — 1988. — Т. 43, 3(261). — С. 125—160.
54. *Agrachev A. A.* Exponential mappings for contact sub-Riemannian structures // J. Dynamical and Control Systems. — 1996. — Vol. 2. — P. 321—358.
55. *Arnold V. I.* On the interior scattering of waves, defined by hyperbolic variational principles // J. Geom. Phys. — 1988. — Vol. 5, no. 3. — P. 305—315.

56. *Arnold V. I.* Transformation of waves defined by hyperbolic variational principles // Singularities of Caustics and Wave Fronts. — Dordrecht : Springer Netherlands, 1990. — P. 219–240.
57. *Artin M.* On the solutions of analytic equations // Invent. Math. — 1968. — Vol. 5. — P. 277–291.
58. *Bogaevsky I. A.* Singularities of short linear waves on the plane // The Arnold–Gelfand Mathematical Seminars / ed. by V. I. Arnold [et al.]. — Boston, MA : Birkhäuser Boston, 1997. — P. 107–112. — MR 1429888, zbMATH 0873.58011.
59. *Bogaevsky I. A.* Singularities of convex hulls as fronts of Legendre varieties // Banach Center Publ. — 1999. — Vol. 50. — P. 61–74. — MR 1739655, zbMATH 0963.58016.
60. *Bogaevsky I. A.* New singularities and perestroikas of fronts of linear waves // Moscow Math. J. — 2003. — Vol. 3, no. 3. — P. 807–821. — MR 2078561, zbMATH 1063.580280.
61. *Bogaevsky I. A.* Sub-Lorentzian structures in \mathbb{R}^4 : left-invariance and conformal normal forms // Journal of Dynamical and Control Systems. — 2018. — Vol. 24, no. 3. — P. 371–389. — MR 3799734.
62. *Bogaevsky I. A., Ishikawa G.* Lagrange mappings of the first open Whitney umbrella // Pacific J. Math. — 2002. — Vol. 203, no. 1. — P. 115–138. — MR 1895928, zbMATH 1065.58030.
63. *Bruce J. W.* A note on first order differential equations of degree greater than one and wavefront evolution // Bull. London Math. Soc. — 1984. — Vol. 16. — P. 139–144.
64. *Bruce J. W., Fletcher G. J., Tari F.* Bifurcations of implicit differential equations // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics. — 2000. — Vol. 130, no. 3. — P. 485–506.
65. *Cibrario M.* Sulla riduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto // Rendiconti del R. Istituto Lombardo, Ser. II. — 1932. — Vol. 65. — P. 889–906.

66. *Damon J.* The unfolding and determinacy theorems for subgroups of \mathcal{A} and \mathcal{K} // Singularities, Part 1. Vol. 40 / ed. by P. Orlik. — Providence, Rhode Island : AMS, 1984. — P. 233–254. — (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics).
67. *Damon J.* The unfolding and determinacy theorems for subgroups of \mathcal{A} and \mathcal{K} . — 1984. — (Memoirs of the American Mathematical Society ; 306).
68. *Davydov A. A.* Whitney umbrella and slow-motion bifurcations of relaxation-type equations // Journal of Mathematical Sciences. — 2005. — Vol. 126, no. 4. — P. 1251–1258.
69. *Grochowski M.* Normal forms of germs of contact sub-Lorentzian structures on \mathbb{R}^3 . Differentiability of the sub-Lorentzian distance function // Journal of Dynamical and Control Systems. — 2003. — Vol. 9, no. 4. — P. 531–547.
70. *Grochowski M.* Reachable sets for the Heisenberg sub-Lorentzian structure on \mathbb{R}^3 . An estimate for the distance function // Journal of Dynamical and Control Systems. — 2006. — Vol. 12, no. 2. — P. 145–160.
71. *Grochowski M.* Properties of reachable sets in the sub-Lorentzian geometry // Journal of Geometry and Physics. — 2009. — Vol. 59, no. 7. — P. 885–900.
72. *Grochowski M.* Reachable sets for contact sub-Lorentzian structures on \mathbb{R}^3 . Application to control affine systems on \mathbb{R}^3 with a scalar input // Journal of Mathematical Sciences. — 2011. — Vol. 177, no. 3. — P. 383–394.
73. *Grochowski M., Medvedev A., Warhurst B.* 3-dimensional left-invariant sub-Lorentzian contact structures // Differential Geometry and its Applications. — 2016. — Vol. 49. — P. 142–166.
74. *Hayakawa A., Ishikawa G., Izumiya S., Yamaguchi K.* Classification of generic integral diagrams and first order ordinary differential equations // Internat. J. Math. — 1994. — Vol. 5. — P. 447–489.
75. *Ishikawa G.* Symplectic and Lagrange stabilities of open Whitney umbrellas // Invent. math. — 1996. — Vol. 126, no. 2. — P. 215–234.
76. *Ishikawa G.* Determinacy, transversality and Lagrange stability // Banach Center Publ. — 1999. — Vol. 50. — P. 123–135.

77. *Janeczko S.* Generating families for images of Lagrangian submanifolds and open swallowtails // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. — 1986. — Vol. 100, no. 1. — P. 91–107.
78. *Khesin B.* Singularities of light hypersurfaces and structure of hyperbolicity sets for systems of partial differential equations // *Theory of Singularities and its Applications*. Vol. 1 / ed. by V. I. Arnold. — AMS, 1990. — P. 105–118. — (Adv. Soviet Math.)
79. *Korolko A., Markina I.* Nonholonomic Lorentzian geometry on some \mathbb{H} -type groups // *Journal of Geometric Analysis*. — 2009. — Vol. 19, no. 4. — P. 864–889.
80. *Levinson N.* Transformation of an analytic function of several variables to a canonical form // *Duke Math. J.* — 1961. — Sept. — Vol. 28, no. 3. — P. 345–353.
81. *Martinet J.* Deploiements versels des applications differentiables et classification des applications stables // *Singularités d'Applications Différentiables*. Vol. 535 / ed. by O. Burchard, F. Ronga. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1976. — P. 1–44. — (Lecture Notes in Mathematics).
82. *Mather J. N.* Stability of C^∞ mappings: VI. The nice dimensions // *Proceedings of Liverpool Singularities — Symposium I*. Vol. 192 / ed. by C. Wall. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1971. — P. 207–253. — (Lecture Notes in Mathematics).
83. *Mather J. N.* Stability of C^∞ mappings, III: Finitely determined map-germs // *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*. — 1968. — Dec. — Vol. 35, no. 1. — P. 127–156.
84. *Mather J. N.* Stability of C^∞ mappings: I. The division theorem // *Annals of Mathematics*. — 1968. — Vol. 87, no. 1. — P. 89–104.
85. *Mather J. N.* Stability of C^∞ mappings, IV: Classification of stable germs by \mathbb{R} -algebras // *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*. — 1969. — Jan. — Vol. 37, no. 1. — P. 223–248.
86. *Mather J. N.* Stability of C^∞ mappings: II. Infinitesimal stability implies stability // *Annals of Mathematics*. — 1969. — Vol. 89, no. 2. — P. 254–291.

87. *Mather J. N.* Stability of C^∞ mappings: V. Transversality // *Advances in Mathematics*. — 1970. — Vol. 4, no. 3. — P. 301–336.
88. *Nguyen huu Duc, Nguyen tien Dai.* Stabilité de l'interaction géométrique entre deux composantes holonomes simples // *C. R. Acad. Sci. Paris, Série A*. — 1980. — Vol. 291. — P. 113–116.
89. *Scherback I.* Boundary fronts and caustics and their metamorphoses // *Singularities*. Vol. 201 / ed. by J.-P. Brasselet. — Cambridge : Cambridge University Press, 1994. — P. 363–374. — (London Mathematical Society, Lecture Note Series).
90. *Tougeron J.-C.* Idéaux de fonctions différentiables // Thèse. — Univ. de Rennes, 1967.
91. *Tougeron J.-C.* Idéaux et fonctions différentiables // *Ann. Inst. Fourier*. — 1968. — Vol. 18, no. 1. — P. 177–240.
92. *Tudorovskiy T., Reijnders K. J. A., Katsnelson M. I.* Chiral tunneling in single-layer and bilayer graphene // *Physica Scripta*. — 2012. — Vol. 2012, T146. — P. 014010.