

Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи



Устинов Никита Сергеевич

ПОЛУЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ЛАПЛАСИАНАМИ

Специальность 01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические
системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Назаров Александр Ильич

Санкт-Петербург — 2021

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Предварительные сведения	19
1.1 Обозначения	19
1.2 Определения и основные понятия	21
1.3 Известные утверждения о дробных лапласианах	27
Глава 2. Множественность положительных решений краевых задач с дробными лапласианами Дирихле в кольце большого радиуса	30
2.1 Постановка задачи	30
2.2 (m, k) -радиальные функции	31
2.3 Общие оценки норм в $\tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)$	32
2.4 Оценка энергии для (m, k) -радиальных функций	34
2.5 Теоремы существования и множественности	40
Глава 3. Разрешимость полулинейной задачи Неймана с критической правой частью	44
3.1 Постановка задачи	44
3.2 Начало доказательства теоремы 3.1 — принцип концентрации-компактности	45
3.3 Доказательство лемм 3.1–3.3	48
3.4 Окончание доказательства теоремы 3.1 — построение пробной функции	52
Глава 4. Качественные свойства решений полулинейной задачи Неймана	59
4.1 Постановка задачи	59
4.2 Локальное исследование функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$	61
4.3 Глобальное исследование функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$	64
4.4 Доказательство неравенства (4.7)	68

Глава 5. Разрешимость задачи Дирихле, порожденной	
 дробным неравенством Харди—Соболева	73
5.1 Постановка задачи	73
5.2 Недостижимость константы $\mathcal{S}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D}$ в случае $\mathbf{0}_n \in \Omega$	75
5.3 Оценки функций Грина для задачи в $\mathbb{R}_+^n$	78
5.4 Достижимость точной константы $\mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D}$	80
5.5 Свойства минимайзеров $\Phi(y)$ и $\mathcal{W}(Y)$	86
5.6 Достижимость точной константы $\mathcal{S}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D}$	94
5.7 Доказательство оценки (5.44)	99
5.8 Доказательство оценки (5.45)	102
Заключение	108
Список публикаций автора по теме диссертации	110
Публикации в рецензируемых изданиях	110
Тезисы докладов	110
Список литературы	111

Введение

Актуальность темы исследования.

Полулинейные уравнения — классический объект теории дифференциальных уравнений в частных производных. Вопросы существования (см. [16; 20; 26; 32; 41—44; 59—62; 70; 71; 83]) или несуществования решений (см. [17; 76; 77; 91; 101; 107]), их качественных свойств (см. [28; 37; 45; 47; 58; 81; 96]) привлекают большое внимание исследователей с начала второй половины XX века. В последние несколько десятилетий многократно возрос интерес к нелокальным уравнениям с операторами дробного порядка, простейшими примерами которых являются дробные лапласианы (см. [15; 19; 33; 48; 73; 74; 78; 79; 111]).

Бурное развитие этой области может объясняться как развитием самостоятельной теории уравнений в частных производных, так и запросом на соответствующий аппарат с точки зрения прикладных задач: классические уравнения в частных производных не позволяют описывать сложные нелокальные взаимодействия, поэтому для реализации таких моделей используются нелокальные операторы. Примеры математических моделей, основанных на операторах дробного порядка, можно обнаружить в различных областях науки: задачи с тонкими препятствиями, математическая биология, гидрогеология, физика частиц, случайные процессы со скачками (“полеты Леви”), задачи оптимизации, минимальные поверхности, исследования в области полупроводников, изучение фазовых переходов, законы сохранения, финансовые модели и др. (см. [13; 18; 23; 25; 30; 46; 49; 80; 84]).

Степень разработанности темы исследования.

История дробных производных берет свое начало еще в XVII веке. Первым упоминанием понятия о дробной производной принято считать переписку Лопиталья с одним из создателей классического анализа Лейбницем в 1695 году. В письме к Лейбницу Лопиталь интересовался следующим вопросом: что может означать производная порядка $1/2$? В ответном письме [55] Лейбниц предположил тесную связь между производными и расходящимися рядами. В том же 1695 году Лейбниц в письме к Бернулли [56] отмечает, что можно распространить классическую формулу $\frac{d^n e^{mx}}{dx^n} = m^n e^{mx}$ на случай нецелых n и попробовать с ее помощью определить дробную производную. Наконец, первым полновесным результатом в теории дробных производных можно считать

работу Эйлера [35] первой половины XVIII века, в которой на основе Гамма-функции определяется дробная производная от степени.

Дальнейшие результаты теории дробного исчисления и выделение его в самостоятельный раздел математического анализа относятся к XIX – началу XX века. В это время появляется множество работ с разнообразными дробными производными и дифференциалами: это производные Римана–Лиувилля, Грюнвальда–Летникова, Сони́на–Летникова, Вейля, Фурье, Рисса, Адамара, Эрдейи–Кобера, Маршо. Со второй половины XX века дробные производные становятся все более популярным объектом для исследований, и ряд классических дробных производных дополнили производные Джрбашяна–Капуто, Дэвисона–Эссекса, Гилфера, Канавати, Капуто–Катугампола, Капуто–Ортигейры, Катугампола, Коимбры, Колванкара–Гангала, Коссара, Мачадо, Миллера–Росса, Олдхе́ма–Спанье, Ослера, Рисса–Капуто, Умари, Чена, Чена–Мачадо, Янга и др. В 1987 году была выпущена первая полноценная монография по теории дробных производных [108], однако уже после ее выхода в свет появилось множество новых определений.

С развитием теории дробных операторов связано развитие теории пространств дробной гладкости. Эти пространства впервые возникли в работах Баби́ча и Слободецкого [87] и Ароншайна [14] как пространства следов, потом были разработаны Гальярдо [38] и Слободецким [109] в гильбертовом случае и Бесовым [88; 89] в общем случае. Нынешняя литература по дробным пространствам Соболевского типа весьма обширна.

В отличие от классического оператора Лапласа, дробный лапласиан в области можно определить несколькими естественными способами: в литературе известны по меньшей мере два дробных лапласиана Дирихле (спектральный и суженный (restricted); см., например, [64]) и не менее трех дробных лапласианов Неймана (спектральный, суженный и полусуженный (semirestricted); см., например, [68]). Однако в случае, когда область совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$, эти определения дают один и тот же оператор: в [54] было сформулировано 10 различных определений дробного лапласиана в $\mathbb{R}^n$ и была показана их эквивалентность. В диссертации рассматриваются уравнения с дробными лапласианами трех видов: спектральным лапласианом Дирихле, суженным лапласианом Дирихле и спектральным лапласианом Неймана.

Эффект множественности решений краевых задач для полулинейных уравнений был впервые открыт Коффманом [29]: при $n = 2$ задача

$$-\Delta u = |u|^{q-2}u \quad \text{в} \quad \mathbb{K}_r^n = \mathbb{B}_{r+1}^n \setminus \overline{\mathbb{B}_r^n}, \quad u|_{\partial\mathbb{K}_r^n} = 0$$

имеет любое наперед заданное число различных (здесь и далее: *не получающихся друг из друга поворотом*) положительных решений для $q > 2$ и достаточно больших r . В работе Ли [57] аналогичный результат был получен для $n \geq 4$ при $2 < q < 2_{n,1}^* = \frac{2n}{(n-2)_+}$, а также рассматривался вопрос существования нерадиальных решений при $q \geq 2_{n,1}^*$. Множественность решений для случая $n = 3$ была получена Бьеном [21]. В дальнейшем в работах Назарова [103] и Колоницкого [95] похожие результаты были получены для уравнения с p -лапласианом.

В отличие от уравнений с докритической нелинейностью в правой части, в критическом случае теорема существования решения нетривиальна, поскольку вложение соответствующего энергетического пространства в пространство Лебега не является компактным. Таким образом, вопрос существования решений в задачах с критической нелинейностью всегда зависит от специфики задачи (в частности, от геометрии области) и требует отдельного рассмотрения.

Классическими работами о разрешимости задачи Неймана с критическим ростом правой части

$$-\Delta u + u = |u|^{2_{n,1}^*-2}u, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{x \in \partial\Omega} = 0,$$

являются работы Адимурти и Манчини [12] и Ванга [86]: при $n \geq 3$ в $\mathcal{C}^2$ -гладкой ограниченной области Ω задача имеет положительное решение с минимальной энергией. В работе Демьянова и Назарова [93] аналогичный результат был получен для задачи с p -лапласианом в левой части. Вопрос о постоянстве построенного решения с минимальной энергией в зависимости от размера области Ω был изучен в работе Назарова и Щегловой [106].

Для задачи Дирихле с критической правой частью типа Харди–Соболева

$$\Delta u = \frac{|u|^{2_{n,1}^*-2}u}{|x|^{(1-\sigma)2_{n,\sigma}^*}}, \quad u|_{x \in \partial\Omega} = 0$$

разрешимость были установлена Госсубом и Кангом [41], Госсубом и Робером [42; 43] и, при менее ограничительных условиях, Демьяновым и Назаровым [92]. Также отметим работы Эгнелла [34] и Назарова [102], в которых была

получена разрешимость задачи в конусе в $\mathbb{R}^n$ с лапласианом и p -лапласианом соответственно.

Цели и задачи. Основной целью работы является изучение условий существования и качественных свойств решений полулинейных уравнений с различными дробными лапласианами. Задача состоит в получении теорем множественности для уравнений с дробными лапласианами и докритическими и критическими показателями в правой части, а также достаточно общих условий существования решений и условий постоянства и непостоянства решений с минимальной энергией.

Научная новизна. Выносимые на защиту положения являются новыми и получены автором самостоятельно.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты представляют интерес для специалистов по теории уравнений в частных производных и теории случайных процессов.

Методология и методы исследования. При доказательстве основных результатов данной диссертации были использованы: метод обобщенного гармонического продолжения для дробных лапласианов в области [82]; метод (m, k) -разложений и априорные оценки решений из классов с различными симметриями; принцип симметричной критичности Пале [71]; модификация принципа концентрации–компактности Лионса [59–62] для дробных лапласианов; метод построения специальных пробных функций; модификация тождества Похожаева [107] для дробных лапласианов.

Положения, выносимые на защиту.

1. Показано, что для задачи $(-\Delta)^s u = |u|^{q-2}u$ с дробным лапласианом Дирихле (спектральным или суженным) имеет место эффект множественности решений в кольцах большого радиуса.
2. Доказано существование решений с минимальной энергией в C^2 -гладкой ограниченной области Ω для критической задачи Неймана $(-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u + u = |u|^{2_{n,s}^*-2}u$ при $2s > 1$.
3. Получены условия постоянства и непостоянства решений с минимальной энергией для задачи Неймана $(-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u + u = |u|^{q-2}u$ в зависимости от размера липшицевой области Ω .
4. Исследована разрешимость задачи со спектральным дробным лапласианом Дирихле $(-\Delta_\Omega^D)_{Sp}^s u = |x|^{(\sigma-s)2_{n,\sigma}^*}u^{2_{n,\sigma}^*-1}$.

Степень достоверности и апробация. Все результаты диссертации снабжены подробными доказательствами и опубликованы в ведущих научных изданиях. Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- School and Workshop «PDEs and Applications», Università Federico II, Naples, Italy (2016).
- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, Россия (2016, 2018; 2020, онлайн).
- Seminar «Nonlinear Dynamics», Freie Universität Berlin, Berlin, Germany, chair: B. Fiedler (2016).
- International Conference on PDEs «Silkroad Mathematics Center Series International Conferences», Beijing, China (2017).
- Общегородской семинар по математической физике им. В. И. Смирнова, Санкт-Петербург, Россия, рук.: А. И. Назаров, Т. А. Суслина (2017, 2018).
- Международная конференция «Singular Problems, Blow-up, and Regimes with Peaking in Nonlinear PDEs», Москва, Россия (2019).
- Финал двадцать третьего Конкурса Мёбиуса, Москва, Россия (2019).
- Семинар по вариационному исчислению, ПОМИ РАН, Санкт-Петербург, Россия, рук.: А. И. Назаров, В. Г. Осмоловский (2019, 2020).
- Seminar on nonlinear problems of PDE and mathematical physics, RUDN, Moscow, chair: A. E. Shishkov (2020, online).
- Семинар по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям, РУДН, Москва, рук.: А. Л. Скубачевский (2021, онлайн).

Публикации. Результаты данной диссертации опубликованы в работах [1–5], [6–11]. Работы [3–5] опубликованы в журналах из перечня ВАК. Работы [1; 2] опубликованы в изданиях, удовлетворяющих достаточному условию включения в перечень ВАК: издание “Transactions of the American Mathematical Society” и переводная версия второго издания “Journal of Mathematical Sciences” входят в систему цитирования Scopus.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, содержащих 24 параграфа, заключения и списка литературы. Общий объем работы составляет 120 страниц. Список литературы содержит 113 наименований.

Во введении описаны актуальность темы исследования и степень ее разработанности, поставлены цели и задачи, аргументирована научная новизна, достоверность, теоретическая и практическая значимость результатов, перечислены использованные методы, выносимые на защиту положения, публикации и доклады по теме диссертации, кратко изложена структура работы.

В главе 1 даются основные определения и понятия, связанные с различными дробными лапласианами.

Определение 1. Пространства Соболева–Слободецкого $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{H}^s(\Omega)$ и $\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)$ (см. [109]; также [110, §2.3.3, 4.2.1, 4.2.3, 4.3.2]) при $s > 0$ определяются как (здесь $\mathcal{F}u$ — это преобразование Фурье функции u)

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L_2(\mathbb{R}^n) \mid \|u\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)}^2 := \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2s}) \cdot |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\};$$

$$\mathcal{H}^s(\Omega) = \{u|_{\Omega} : u \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)\}; \quad \tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega) = \{u \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) \mid \text{supp}(u) \subset \bar{\Omega}\}.$$

Определение 2. Дробный лапласиан $(-\Delta)^s$ в $\mathbb{R}^n$ на классе гладких финитных функций задается формулой

$$(-\Delta)^s u := \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \mathcal{F}u(\xi)), \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

а на пространстве $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$ восстанавливается по квадратичной форме

$$\langle (-\Delta)^s u, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi. \quad (1)$$

Определение 3. Суженный (restricted) дробный лапласиан Дирихле $(-\Delta_\Omega^D)^s_R$ — это самосопряженный оператор, восстановленный по квадратичной форме (1) с областью определения $\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)$:

$$\langle (-\Delta_\Omega^D)^s_R u, u \rangle := \langle (-\Delta)^s u, u \rangle \quad \text{при } u \in \tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega).$$

Определение 4. Спектральный дробный лапласиан Дирихле $(-\Delta_\Omega^D)^s_{Sp}$ — это s -тая степень оператора Лапласа с условием Дирихле в области Ω в смысле спектральной теории. Его квадратичная форма в ограниченной области Ω равна

$$\langle (-\Delta_\Omega^D)^s_{Sp} u, u \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{D,j}^s \cdot \langle u, \varphi_{D,j} \rangle^2,$$

где $\lambda_{D,j}$ и $\varphi_{D,j}$ — собственные числа и ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции задачи Дирихле для оператора Лапласа соответственно.

Определение 5. Спектральный дробный лапласиан Неймана $(-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s$ — это s -ая степень оператора Лапласа с условием Неймана в области Ω в смысле спектральной теории. Его квадратичная форма в ограниченной липшицевой области Ω равна

$$\langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u, u \rangle := \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_{N,j}^s \cdot \langle u, \varphi_{N,j} \rangle^2,$$

где $\lambda_{N,j}$ и $\varphi_{N,j}$ — собственные числа и ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции задачи Неймана для оператора Лапласа соответственно (напомним, что в случае условия Неймана $\lambda_{N,1} = 0$ для собственной функции $\varphi_{N,1} \equiv C$).

При $s \in (0, 1)$ дробные лапласианы $(-\Delta_\Omega^D)_R^s$, $(-\Delta_\Omega^D)_{Sp}^s$ и $(-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s$ могут быть получены с помощью обобщенного гармонического продолжения.

Определение 6. Продолжением Каффарелли–Сильвестра [24] называется решение w_R задачи

$$\mathcal{L}_s[w](x, t) \equiv -\operatorname{div}(t^{1-2s} \nabla w(x, t)) = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+; \quad w|_{t=0} = u$$

с конечной энергией

$$\mathcal{E}_{s, \mathbb{R}^n}[w] := C_s \cdot \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} t^{1-2s} |\nabla w(x, t)|^2 dx dt \quad \text{при} \quad C_s := \frac{4^s \Gamma(1+s)}{2s \cdot \Gamma(1-s)}.$$

Оно существует, единственно, и для достаточно гладких u

$$(-\Delta_\Omega^D)_R^s u(x) = C_s \cdot \frac{\partial w_R^D}{\partial \mathbf{v}_s}(x, 0) := -C_s \cdot \lim_{t \rightarrow 0_+} t^{1-2s} \partial_t w_R(x, t).$$

Определение 7. Продолжением Стинга–Торреа [82] для оператора $(-\Delta_\Omega^D)_{Sp}^s$ называется решение w_{Sp}^D задачи

$$\mathcal{L}_s[w](x, t) \equiv -\operatorname{div}(t^{1-2s} \nabla w(x, t)) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+; \quad w|_{t=0} = u; \quad w|_{x \in \partial\Omega} = 0$$

с конечной энергией

$$\mathcal{E}_{s, \Omega}[w] := C_s \cdot \int_0^\infty \int_{\Omega} t^{1-2s} |\nabla_X w(x, t)|^2 dx dt.$$

Оно существует, единственно, и для достаточно гладких u

$$(-\Delta_\Omega^D)_{Sp}^s u(x) = C_s \cdot \frac{\partial w_{Sp}^D}{\partial \mathbf{v}_s}(x, 0).$$

Определение 8. Продолжением Стинга—Торреа [82] для оператора $(-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s$ называется единственное решение w_{Sp}^N задачи

$$\mathcal{L}_s[w](x, t) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+; \quad w|_{t=0} = u; \quad \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \Big|_{x \in \partial\Omega} = 0$$

с конечной энергией $\mathcal{E}_{s,\Omega} [w_{Sp}^N]$, и для достаточно гладких u

$$(-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u(x) = C_s \cdot \frac{\partial w_{Sp}^N}{\partial \mathbf{v}_s}(x, 0).$$

В параграфе 1.3 сформулированы и доказаны следующие утверждения:

Лемма 1 (Неравенства Фридрихса). При $s \in (0, 1)$ для любой функции $u \in \tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)$ выполнены неравенства

$$\langle (-\Delta_\Omega^D)_R^s u, u \rangle \geq \lambda_{D,1}^s \cdot \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad \text{и} \quad \langle (-\Delta_\Omega^D)_{Sp}^s u, u \rangle \geq \lambda_{D,1}^s \cdot \|u\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Лемма 2 (Замена $u \rightarrow |u|$ уменьшает норму; [67, теорема 3]). Пусть $s \in (0, 1)$. Тогда преобразование $u \rightarrow |u|$ не выводит функцию u за пределы соответствующего пространства, и выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \langle (-\Delta_\Omega^D)_R^s u, u \rangle &\geq \langle (-\Delta_\Omega^D)_R^s |u|, |u| \rangle \quad \text{для} \quad u \in \tilde{\mathcal{D}}^s(\Omega); \\ \langle (-\Delta_\Omega^D)_{Sp}^s u, u \rangle &\geq \langle (-\Delta_\Omega^D)_{Sp}^s |u|, |u| \rangle \quad \text{для} \quad u \in \tilde{\mathcal{D}}^s(\Omega); \\ \langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u, u \rangle &\geq \langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s |u|, |u| \rangle \quad \text{для} \quad u \in \mathcal{D}^s(\Omega). \end{aligned}$$

Кроме того, если функция u меняет знак в области Ω , то знак в соответствующем неравенстве строгий.

Лемма 3 (Принцип максимума; [27, лемма 2.6], [52, теорема 2.5], [69, предложение A.1]). Пусть $s \in (0, 1)$ и $u \in \tilde{\mathcal{D}}^s(\Omega)$ или $u \in \mathcal{D}^s(\mathbb{R}^n)$, $u \not\equiv 0$. Если выполнено $(-\Delta_\Omega^D)_R^s u \geq 0$ или $(-\Delta_\Omega^D)_{Sp}^s u \geq 0$ (в смысле обобщенных функций), то $u > 0$ на любом компактном подмножестве $K \subset \Omega$.

Далее под **решениями задач** мы всегда будем понимать **слабые (вариационные) решения**.

В главе 2 исследуется множественность положительных решений для уравнений с дробными лапласианами Дирихле в кольце единичной ширины $\mathbb{K}_r^n = \mathbb{B}_{r+1}^n \setminus \overline{\mathbb{B}_r^n}$:

$$(-\Delta_{\mathbb{K}_r^n}^D)_R^s u = |u|^{q-2} u, \quad u \in \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n); \quad (2)$$

$$(-\Delta_{\mathbb{K}_r^n}^D)_{Sp}^s u = |u|^{q-2} u, \quad u \in \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n) \quad (3)$$

при $n \neq 3$, $s \in (0,1)$ и $2 < q < 2_{n,s}^* = \frac{2n}{(n-2s)_+}$.

Для получения эффекта множественности используется подход Ли [57], впоследствии усовершенствованный Назаровым [103]. Этот подход основан на методе (m,k) -разложений и оценок энергии минимайзеров по (m,k) -инвариантным подпространствам. Минимайзеры по таким подпространствам являются положительными решениями уравнений (2) и (3), что обеспечивается принципом симметричной критичности Пале [71].

Определение 9. Пусть $\mathcal{G}$ — замкнутая подгруппа ортогональной группы $\mathbb{O}(n)$. Тогда $\mathfrak{L}_{\mathcal{G}}^s$ и $L_{q,\mathcal{G}}(\mathbb{K}_r^n)$ — это подпространства функций из $\tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)$ и $L_q(\mathbb{K}_r^n)$, инвариантных относительно $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_{\mathcal{G}}^s &:= \left\{ u \in \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n) \mid u(x) = u(gx), \forall g \in \mathcal{G} \right\}; \\ L_{q,\mathcal{G}}(\mathbb{K}_r^n) &:= \{ u \in L_q(\mathbb{K}_r^n) \mid u(x) = u(gx), \forall g \in \mathcal{G} \}.\end{aligned}$$

Определение 10. Допустимым (m,k) -разложением пространства $\mathbb{R}^n$ мы будем называть разложение $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^m)^l \oplus \mathbb{R}^k$, где

$$ml + k = n; \quad m \geq 2; \quad k = 0 \quad \text{или} \quad k \geq m; \quad l, m \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Функция $u(x)$ называется (m,k) -радиальной, если она радиальна по каждой из $l + 1$ составляющих и инвариантна относительно всех перестановок l переменных размерности m . Группу, порождающую пространство (m,k) -радиальных функций, мы обозначим $\mathcal{G}_{m,k}$.

Определим функционалы $\mathcal{J}_R[u]$ и $\mathcal{J}_{Sp}[u]$:

$$\mathcal{J}_R[u] := \frac{\langle (-\Delta_{\mathbb{K}_r^n}^D)_R^s u, u \rangle}{\|u\|_{L_q(\mathbb{K}_r^n)}^2}; \quad \mathcal{J}_{Sp}[u] := \frac{\langle (-\Delta_{\mathbb{K}_r^n}^D)_{Sp}^s u, u \rangle}{\|u\|_{L_q(\mathbb{K}_r^n)}^2}.$$

Лемма 4 (Принцип симметричной критичности). Пусть $\mathcal{G}$ — замкнутая подгруппа $\mathbb{O}(n)$, для которой вложение $\mathfrak{L}_{\mathcal{G}}^s \hookrightarrow L_q(\mathbb{K}_r^n)$ компактно. Тогда минимайзеры функционалов $\mathcal{J}_R[u]$ и $\mathcal{J}_{Sp}[u]$ по подпространству $\mathfrak{L}_{\mathcal{G}}^s$ существуют и являются положительными решениями задач (2) и (3).

В параграфе 2.4 получены оценки на энергию минимайзеров по подпространствам (m,k) -радиальных функций. В частности, доказаны следующие утверждения:

Лемма 5 (Уровень энергии для радиальных функций). При $n \geq 2$ для всех $q \in [2, 2_{1,s}^*]$ выполнена оценка

$$\min_{u_r \in \mathfrak{L}_{\mathbb{O}(n)}^s} \mathcal{J}_{Sp}[u_r] \geq \min_{u_r \in \mathfrak{L}_{\mathbb{O}(n)}^s} \mathcal{J}_R[u_r] \stackrel{r}{\asymp} r^{(n-1)(1-\frac{2}{q})}, \quad r \rightarrow \infty.$$

Лемма 6 (Уровень энергии для $(2, n-2)$ -радиальных функций). При $n \geq 4$ выполнены следующие оценки при $r \rightarrow \infty$:

$$\min_{u_r \in \mathfrak{L}_{\mathbb{O}(2) \times \mathbb{O}(n-2)}^s} \mathcal{J}_R[u_r] \stackrel{r}{\asymp} r^{1-\frac{2}{q}} \quad \text{и} \quad \min_{u_r \in \mathfrak{L}_{\mathbb{O}(2) \times \mathbb{O}(n-2)}^s} \mathcal{J}_{Sp}[u_r] \stackrel{r}{\asymp} r^{1-\frac{2}{q}}.$$

Леммы 5 и 6 показывают, что при больших r минимайзеры по подпространству $\mathfrak{L}_{\mathbb{O}(2) \times \mathbb{O}(n-2)}^s$ не являются радиальными.

Основные результаты главы 2 следующие:

Теорема 1 (Существование радиального решения). При $q \in [1, 2_{1,s}^*)$, $q \neq 2$, у каждой из задач (2) и (3) существует положительное радиальное решение.

Теорема 2 (Существование (m, k) -радиальных решений). При $n \geq 4$ и $q \in (2, 2_{n-m+1,s}^*)$ существует такой радиус r_0 , что для всех $r > r_0$ в кольце $\mathbb{K}_r^n$ для каждой из задач (2) и (3) существует положительное (m, k) -радиальное решение (при различных m решения различны).

Теорема 3 (Эффект множественности). Пусть $n \neq 3$, $q \in (2, 2_{n,s}^*)$ и N — некоторое натуральное число. Тогда существует такое $r_1(N)$, что при любом $r \geq r_1$ у каждой из задач (2) и (3) существует не менее N не совмещающихся поворотом положительных решений.

В главе 3 получено существование решений с минимальной энергией в C^2 -гладкой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ для задачи Неймана с критической правой частью

$$(-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u + u = |u|^{2_{n,s}^*-2} u, \quad (4)$$

где $s \in (1/2, 1)$ и $u \in \mathcal{H}^s(\Omega)$.

Решение задачи (4) с минимальной энергией — это (с точностью до домножения на константу) минимайзер функционала $\mathcal{I}_{s, 2_{n,s}^*, \Omega}^{Sp, N}[u]$:

$$\mathcal{I}_{s, 2_{n,s}^*, \Omega}^{Sp, N}[u] := \frac{\langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u, u \rangle + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|u\|_{L_{2_{n,s}^*}(\Omega)}^2}, \quad \mathcal{S}_{s, \Omega}^{Sp, N} := \inf_{u \in \mathcal{H}^s(\Omega)} \mathcal{I}_{s, 2_{n,s}^*, \Omega}^{Sp, N}[u]. \quad (5)$$

Доказательство существования получается как развитие подхода из работ Адимурти и Манчини [12], Ванга [86] и Демьянова и Назарова [93]. В параграфе 3.2 модификацией предельного принципа концентрации–компактности Лионса [59; 60] для нелокального оператора $(-\Delta_\Omega^N)_{S_p}^s$ (с использованием продолжений Стинга-Торреа) мы получаем альтернативу: в пространстве мер $\mathcal{M}(\bar{\Omega})$ для минимизирующей последовательности $u_k(x)$ для функционала (5) может иметь место либо **концентрация** в точке x_0 (в этом случае $|u_k|^{2_{n,s}^*} \xrightarrow{\mathcal{M}(\bar{\Omega})} \delta(x_0)$), либо **компактность** (в этом случае $|u_k|^{2_{n,s}^*} \xrightarrow{\mathcal{M}(\bar{\Omega})} |u|^{2_{n,s}^*}$).

Далее, в параграфе 3.2 также показано, что в случае **компактности** для предельной функции u выполнено равенство $\mathcal{I}_{s,2_{n,s}^*,\Omega}^{Sp,N}[u] = \mathcal{S}_{s,\Omega}^{Sp,N}$. Другими словами, в случае **компактности** функция u минимизирует функционал (5), и, после домножения на подходящую константу, является решением задачи (4) с минимальной энергией.

В параграфе 3.3 доказана справедливость следующей леммы:

Лемма 7. *В случае **концентрации** выполнено неравенство $\mathcal{S}_{s,\Omega}^{Sp,N} \geq \mathcal{S}_{s,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,N}$.*

Параграф 3.4 посвящен построению пробной функции $\check{u} \in \mathcal{H}^s(\Omega)$, для которой при $n \geq 3$ и $2s > 1$ выполнено неравенство

$$\mathcal{I}_{s,2_{n,s}^*,\Omega}^{Sp,N}[\check{u}] < \mathcal{S}_{s,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,N}.$$

Согласно лемме 7, существование такой функции исключает возможность **концентрации** и доказывает основное утверждение главы 3:

Теорема 4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ — $\mathcal{C}^2$ -гладкая ограниченная область, и $2s > 1$. Тогда задача (4) имеет неотрицательное нетривиальное решение с минимальной энергией.*

В главе 4 изучается постоянство решений с минимальной энергией для полулинейной задачи Неймана в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с липшицевой границей при $n \geq 1$:

$$(-\Delta_\Omega^N)_{S_p}^s u + u = |u|^{q-2}u, \quad u \in \mathcal{H}^s(\Omega), \quad s \in (0, 1). \quad (6)$$

Эта задача обобщает задачу (4): показатель q в правой части не обязан быть критическим; допустимы показатели

$$q \in \begin{cases} [1, 2_{n,s}^*] & \text{при } n \geq 2 \text{ или } n = 1, s < \frac{1}{2}; \\ [1, \infty) & \text{при } n = 1, s = \frac{1}{2}; \\ [1, \infty] & \text{при } n = 1, s > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

По аналогии с функционалом (5), определяется функционал $\mathcal{I}_{s,q,\Omega}^{Sp,N}[u]$, порождаемый теоремой вложения $\mathcal{H}^s(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$:

$$\inf_{u \in \mathcal{H}^s(\Omega)} \mathcal{I}_{s,q,\Omega}^{Sp,N}[u] := \inf_{u \in \mathcal{H}^s(\Omega)} \frac{\langle (-\Delta_\Omega^N)^s_{Sp} u, u \rangle + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|u\|_{L_q(\Omega)}^2} > 0. \quad (7)$$

Поскольку при $q \in [1, 2_{n,s}^*)$ вложение компактно, у функционала $\mathcal{I}_{s,q,\Omega}^{Sp,N}[u]$ существует минимайзер, который является решением с минимальной энергией для задачи (6). При $q = 2_{n,s}^*$ существование решения с минимальной энергией в $\mathcal{C}^2$ -гладкой ограниченной области Ω при $n \geq 3$ и $2s > 1$ обеспечивается теоремой 4.

Очевидно, что функция $u = \mathbf{1}$ (тождественно равная единице) является решением задачи (6), поскольку $(-\Delta_\Omega^N)^s_{Sp} \mathbf{1} = 0$. Главный вопрос, на который отвечает глава 4, таков: *совпадает ли решение $u = \mathbf{1}$ с решением с минимальной энергией?*

В локальном случае $s = 1$ ответ на этот вопрос был получен в работе Назарова и Щегловой [106]. Оказывается, что постоянство решения с минимальной энергией определяется формой и размером области Ω . Более того, оказывается, что исходный вопрос удобно переформулировать с использованием дополнительного параметра ε : будем считать, что область Ω имеет единичный объем, и рассмотрим вложения (7) для семейства областей $\Omega_\varepsilon := \{\varepsilon x \mid x \in \Omega\}$. Положим $u_\varepsilon(y) := u(\varepsilon^{-1}y)$, тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u] &:= \frac{\mathcal{I}_{s,q,\Omega_\varepsilon}^{Sp,N}[u_\varepsilon]}{\varepsilon^{n-2s-\frac{2n}{q}}} = \frac{\varepsilon^{n-2s} \langle (-\Delta_\Omega^N)^s_{Sp} u, u \rangle + \varepsilon^n \|u\|_{L_2(\Omega)}^2}{\varepsilon^{n-2s-\frac{2n}{q}} \varepsilon^{\frac{2n}{q}} \|u\|_{L_q(\Omega)}^2} \\ &= \frac{\langle (-\Delta_\Omega^N)^s_{Sp} u, u \rangle + \varepsilon^{2s} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|u\|_{L_q(\Omega)}^2}, \end{aligned}$$

и легко видеть, что вопрос о постоянстве решения с минимальной энергией для задачи (6) в области Ω_ε эквивалентен вопросу о постоянстве минимайзера функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon$ с параметром ε .

Основные результаты, полученные в главе 4, таковы:

Теорема 5. 1. При $q \in [1, 2]$ для любого $\varepsilon > 0$ функция **1** является единственным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$;

2. Если же $q \in (2, 2_{n,s}^*]$, то:

- при $\varepsilon < \varepsilon_s(q) := [\lambda_{N,2}^s/(q-2)]^{1/(2s)}$ (напомним, что $\lambda_{N,2}$ — первое ненулевое собственное число оператора Лапласа с условием Неймана) функция **1** дает локальный минимум функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$, а при всех $\varepsilon > \varepsilon_s(q)$ не дает;
- существует непрерывная, монотонно убывающая функция $\mathcal{E}_s(q) > 0$, такая, что при $\varepsilon \leq \mathcal{E}_s(q)$ функция **1** дает глобальный минимум функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$, а при $\varepsilon > \mathcal{E}_s(q)$ не дает.

Для построенных функций очевидно неравенство $\mathcal{E}_s(q) \leq \varepsilon_s(q)$. В локальном случае $s = 1$ известны следующие результаты: при $n = 1$ выполнено $\mathcal{E}_1(q) = \varepsilon_1(q)$ (см. работы Назарова [104; 105]), а при $n \geq 2$ существуют как области с $\mathcal{E}_1(q) < \varepsilon_1(q)$ (см. работу Назарова и Щегловой [106]), так и области с $\mathcal{E}_1(q) = \varepsilon_1(q)$ (см. работу Щегловой [112], посвященную решениям в тонких цилиндрах).

В параграфе 4.2 доказана следующая теорема:

Теорема 6. Пусть $s < n/2$, $q = 2_{n,s}^*$ и $\varepsilon = \varepsilon_s(2_{n,s}^*)$. Тогда функция **1** не является глобальным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,2_{n,s}^*}^\varepsilon[u]$ в кубе $(0,1)^n$.

Из этой теоремы следует, что при q , близких к $2_{n,s}^*$ снизу, для куба $(0,1)^n$ выполнено неравенство $\mathcal{E}_s(q) < \varepsilon_s(q)$.

В главе 5 найдены достаточные условия существования решений с минимальной энергией в $\mathcal{C}^1$ -гладкой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ для задачи Дирихле с критической особенностью типа Харди–Соболева в правой части при $n \geq 2$ и $0 < \sigma < s < 1$:

$$(-\Delta_\Omega^D)_s^p u(x) = \frac{u^{2_{n,\sigma}^*-1}(x)}{|x|^{(s-\sigma)2_{n,\sigma}^*}} \quad \text{в } \Omega, \quad u \in \tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega). \quad (8)$$

Решение задачи (8) с минимальной энергией — это (с точностью до домножения на константу) минимайзер функционала $\mathcal{I}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D}[u]$:

$$\mathcal{I}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D}[u] := \frac{\langle (-\Delta_\Omega^D)_s^p u, u \rangle}{\| |x|^{\sigma-s} u \|_{L_{2_{n,\sigma}^*}(\Omega)}^2}, \quad \mathcal{S}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D} := \inf_{u \in \tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)} \mathcal{I}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D}[u].$$

Если $\mathbf{0}_n \notin \overline{\Omega}$, то соответствующее вложение компактно, и задача (8) имеет решение с минимальной энергией. В дальнейшем мы будем считать, что $\mathbf{0}_n \in \overline{\Omega}$.

В параграфе 5.2 доказана теорема:

Теорема 7. *Выполнены следующие утверждения:*

1. Если $\mathbf{0}_n \in \Omega$, то задача (8) не имеет решений с минимальной энергией.
2. Для звездных относительно $\mathbf{0}_n$ областей Ω задача (8) не имеет неотрицательных решений.

Для доказательства этого результата устанавливается нелокальный аналог тождества Похожаева [107] для лапласиана $(-\Delta_\Omega^D)_{S_p}^s$.

Параграф 5.4 посвящен следующему результату:

Теорема 8. *В $\mathbb{R}_+^n$ задача (8) имеет решение с минимальной энергией.*

В параграфе 5.5 обсуждаются свойства полученного решения $\Phi(y)$ и его продолжения Стингга–Торреа $\mathcal{W}(Y)$. Основной результат заключается в следующем:

Лемма 8. *Выполнены следующие оценки:*

$$\Phi(y) \leq \frac{Cy_n}{1 + |y|^{n-2s+2}}, \quad y \in \mathbb{R}_+^n; \quad \mathcal{W}(Y) \leq \frac{Cy_n}{1 + |Y|^{n-2s+2}}, \quad Y \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+;$$

$$\mathcal{V}(y) := C_s \cdot \int_0^\infty z^{1-2s} |\nabla_Y \mathcal{W}(Y)|^2 dz \leq \frac{C}{1 + |y|^{2n-2s+2}}, \quad y \in \mathbb{R}_+^n,$$

где константы C зависят от n, s, σ и выбора решения Φ .

Доказательство существования решений с минимальной энергией в задаче (8) для ограниченной области Ω похоже на рассуждение из главы 3. Модификацией локально–компактного принципа концентрации–компактности Лионса [61; 62] для нелокального оператора $(-\Delta_\Omega^D)_{S_p}^s$ (с использованием продолжений Стингга–Торреа) мы получаем альтернативу: имеет место либо **концентрация** в начале координат $\mathbf{0}_n$, либо **компактность**.

В параграфе 5.6 показывается, что в случае **компактности** выполнено равенство $\mathcal{I}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D}[u] = \mathcal{S}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D}$, и функция $u(x)$ является решением с минимальной энергией для задачи (8).

В параграфе 5.6 также объясняется, что в случае **концентрации** имеет место неравенство $\mathcal{S}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D} \geq \mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D}$. Таким образом, как и в главе 3, для завершения доказательства достаточно исключить возможность **концентрации**, построив пробную функцию $\tilde{\Phi}_\varepsilon(x)$, для которой

$$\mathcal{I}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D}[\tilde{\Phi}_\varepsilon(x)] < \mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D}. \quad (9)$$

Для ее построения требуется наложить условия на границу $\partial\Omega$: параметризуем ее в окрестности начала координат $\mathbf{0}_n$ уравнением $x_n = F(x')$. Следуя работе Демьянова и Назарова [92], предположим, что:

- граница **вогнута в среднем** в нуле: при малых $\tau > 0$ выполнено

$$f(\tau) := \frac{1}{|\mathbb{S}_\tau^{n-2}|} \int_{\mathbb{S}_\tau^{n-2}} F(y') dy' < 0. \quad (10)$$

- функция f имеет **регулярное поведение** в нуле порядка $\alpha \in [1, n - 2s + 3)$: при любом $d > 0$ выполнено

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(d\tau)}{f(\tau)} = d^\alpha. \quad (11)$$

- выполнено **условие**

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\tau \cdot \int_{\mathbb{S}_\tau^{n-2}} |\nabla_{y'} F(y')|^2 dy'}{|\mathbb{S}_\tau^{n-2}| \cdot f(\tau)} = 0. \quad (12)$$

Пробная функция $\tilde{\Phi}_\varepsilon(x)$ строится на основе решения $\Phi(y)$ задачи (8) в $\mathbb{R}_+^n$, существование которого было доказано в теореме 8. Из условий (10)–(12) и оценок решения $\Phi(y)$ из Леммы 8, в параграфах 5.7 и 5.8 для функции $\tilde{\Phi}_\varepsilon(x)$ доказывается справедливость неравенства (9).

Таким образом, доказан основной результат главы 5:

Теорема 9. *Пусть граница $\partial\Omega$ удовлетворяет условиям (10)–(12). Тогда задача (8) имеет положительное решение с минимальной энергией в области Ω .*

В заключении перечисляются основные результаты диссертации, а также предлагаются возможные направления для дальнейшей работы.

Результаты, изложенные в диссертации, получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований: результаты из глав 2 и 5 получены в рамках проекта 17-01-00678А, а результаты из глав 3 и 4 получены в рамках проекта 20-01-00630А.

Глава 1. Предварительные сведения

1.1 Обозначения

В диссертации используются следующие обозначения:

- n — размерность пространства, s и σ — числа, являющиеся параметрами задач.
- $2_s^* \equiv 2_{n,s}^* := \frac{2n}{(n-2s)_+}$ — предельный показатель вложения Соболева.
- $\mathbb{R}_+^n := \{x \equiv (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ — полупространство, $\mathbf{0}_n$ — начало координат.
- $\mathbb{B}_r^n(x), \mathbb{S}_r^{n-1}(x) \subset \mathbb{R}^n$ — шар и сфера радиуса r с центром в точке x соответственно.
- $\mathbb{K}_{r,h}^n(x) := \mathbb{B}_{r+h}^n(x) \setminus \overline{\mathbb{B}_r^n(x)}$ — кольцо радиуса r и ширины h с центром в точке x .
- Для краткости обозначим $\mathbb{B}_r := \mathbb{B}_r^n(\mathbf{0}_n)$, $\mathbb{S}_r := \mathbb{S}_r^{n-1}(\mathbf{0}_n)$, $\mathbb{K}_r^n := \mathbb{K}_{r,1}^n(\mathbf{0}_n)$, $\mathbb{B}_r^+ := \mathbb{B}_r \cap \mathbb{R}_+^n$, $\mathbb{K}_{r,h}^+ := \mathbb{K}_{r,h}^n(\mathbf{0}_n) \cap \mathbb{R}_+^n$ и $\mathbb{K}_r^+ := \mathbb{K}_{r,1}^+$.
- $\omega_{n-1} := |\mathbb{S}_1^{n-1}| = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.
- $\varphi_r(x)$ — гладкая функция-срезка

$$\varphi_r(x) := \begin{cases} 1, & |x| < r/2 \\ 0, & |x| > r \end{cases}, \quad |\nabla_x \varphi_r(x)| \leq Cr^{-1}. \quad (1.1)$$

- Запись $a = o_\varepsilon(b)$ означает, что величина a/b стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ или $\varepsilon \rightarrow \infty$. Аналогично, запись $a = O_\varepsilon(b)$ означает, что величина a/b ограничена сверху при $\varepsilon \rightarrow 0$ или $\varepsilon \rightarrow \infty$.
- Запись $a \stackrel{\varepsilon}{\asymp} b$ означает, что выполнена оценка $C_1 b \leq a \leq C_2 b$ с константами, не зависящими от ε .
- $\mathfrak{K}_s(\tau)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода. Для нее выполнены следующие асимптотики (см., напр., [82, (3.7)]):

$$\mathfrak{K}_s(\tau) \sim \Gamma(s) 2^{s-1} \tau^{-s} \quad \text{при } \tau \rightarrow 0; \quad (1.2)$$

$$\mathfrak{K}_s(\tau) \sim \left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^{1/2} e^{-\tau} (1 + O_\tau(\tau^{-1})) \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

- Через C мы будем обозначать константы, зависящие только от параметров n , s и σ , значение которых для нас несущественно; в случае

зависимости константы от дополнительного параметра мы будем указывать его в скобках.

- Через $\lceil x \rceil$ и $\lfloor x \rfloor$ мы будем обозначать верхнюю и нижнюю целые части числа x соответственно.
- Для функции $f \in L_1(\Omega)$ функция $\bar{f}$ определяется равенством

$$\bar{f}(x) := f(x) - |\Omega|^{-1} \cdot \int_{\Omega} f(x) dx, \quad \int_{\Omega} \bar{f}(x) dx = 0. \quad (1.4)$$

- Если функция $w(x, t)$ в $\Omega \times \mathbb{R}_+$ является продолжением функции $u(x)$ в Ω (т.е. $w(x, 0) = u(x)$), то мы используем обозначение $X \equiv (x, t)$.
- Для функции $u(x)$ в $\mathbb{R}_+^n$ и ее продолжения $w(x, t)$ в $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+$ определим нечетные продолжения по переменной x_n :

$$\text{при } x_n \geq 0 : \quad u_{\text{odd}}(x) := u(x', x_n), \quad w_{\text{odd}}(x, t) := w(x', x_n, t);$$

$$\text{при } x_n \leq 0 : \quad u_{\text{odd}}(x) := -u(x', -x_n), \quad w_{\text{odd}}(x, t) := -w(x', -x_n, t).$$

- Пусть граница области $\partial\Omega$ содержит начало координат $\mathbf{0}_n$ и является $\mathcal{C}^1$ -гладкой в его окрестности $\mathbb{B}_\varepsilon$. Параметризуем ее графиком функции $x_n = F(x')$, $F \in \mathcal{C}^1$: имеем $F(\mathbf{0}_{n-1}) = 0$, $\nabla_{x'} F(\mathbf{0}_{n-1}) = \mathbf{0}_{n-1}$ при $|x| < \varepsilon$. Построим преобразование координат $\Theta_1(x)$, распрямляющее границу области Ω в окрестности нуля:

$$\Theta_1(x) := (x', x_n - F(x')) = x - F(x')e_n, \quad (1.5)$$

точка $x \in \partial\Omega \cap \mathbb{B}_\varepsilon$ переходит в точку с нулевой последней координатой. Обратная замена имеет вид $\Theta_1^{-1}(x) = (x', x_n + F(x'))$, и якобианы обеих замен единичны. На основе $\Theta_1(x)$ определим замены переменных $\Theta_\varepsilon(x)$ и $\Theta_\varepsilon(x, t)$:

$$\Theta_\varepsilon(x) := \Theta_1(x)/\varepsilon, \quad \Theta_\varepsilon(x, t) := [\Theta_\varepsilon(x), t/\varepsilon] = [(x - F(x')e_n)/\varepsilon, t/\varepsilon]. \quad (1.6)$$

Эти замены распрямляют границу, растягивая ее с коэффициентом ε^{-1} : якобианы этих замен равны ε^{-n} и ε^{-n-1} соответственно.

1.2 Определения и основные понятия

Пусть $s > 0$, определим пространства Соболева–Слободецкого $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{H}^s(\Omega)$ и $\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)$ (см. [109]; также [110, §2.3.3, 4.2.1, 4.2.3, 4.3.2]):

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L_2(\mathbb{R}^n) \mid \|u\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)}^2 := \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2s}) \cdot |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\};$$

$$\mathcal{H}^s(\Omega) = \{u|_{\Omega} : u \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)\};$$

$$\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega) = \{u \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) \mid \text{supp}(u) \subset \bar{\Omega}\},$$

где преобразование Фурье $\mathcal{F}$ задается формулой

$$\mathcal{F}u(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} u(x) dx.$$

Дробный лапласиан $(-\Delta)^s$ в $\mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$(-\Delta)^s u := \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \mathcal{F}u(\xi)), \quad u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

а его квадратичная форма имеет вид

$$\langle (-\Delta)^s u, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi. \quad (1.7)$$

При $s \in (0,1)$ дробный лапласиан в $\mathbb{R}^n$ допускает представление через гиперсингулярный интеграл (см., напр., [99]):

$$(-\Delta)^s u(x) = C_{n,s} \cdot \text{P. V.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy \quad \text{с} \quad C_{n,s} = \frac{s 2^{2s} \Gamma((n+2s)/2)}{\pi^{n/2} \Gamma(1-s)},$$

и поэтому квадратичную форму (1.7) можно записать в виде

$$\langle (-\Delta)^s u, u \rangle = \frac{C_{n,s}}{2} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dy dx.$$

Стандартная норма в пространстве $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством

$$\|u\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)}^2 := \langle (-\Delta)^s u, u \rangle + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2. \quad (1.8)$$

Норма в пространстве $\mathcal{H}^s(\Omega)$ — это инфимум-норма по всем продолжениям:

$$\|u\|_{\mathcal{H}^s(\Omega)}^2 := \inf_{\tilde{u} \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n), \tilde{u}|_{\Omega} = u} \|\tilde{u}\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)}^2. \quad (1.9)$$

Норма в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)$ индуцируется нормой в $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$, однако в силу неравенства Фридрикса (см. §1.3, предложение 1.1) в ограниченной области Ω стандартной нормой в $\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)$ можно считать

$$\|u\|_{\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)}^2 := \langle (-\Delta)^s u, u \rangle. \quad (1.10)$$

Отметим также, что пространство $\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)$ может быть определено как замыкание пространства $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ по норме (1.10). Однако (см. [110, теорема 4.3.2/1]) пространство $\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)$ совпадает с замыканием $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ по норме (1.9) в $\mathcal{H}^s(\Omega)$ только при $s - 1/2 \notin \mathbb{Z}$, а для $s - 1/2 \in \mathbb{Z}$ является подпространством этого замыкания.

При $s < n/2$ для дробного лапласиана в $\mathbb{R}^n$ имеют место дробное неравенство Харди

$$\langle (-\Delta)^s u, u \rangle \geq \mathcal{S}_{s,0,\mathbb{R}^n} \cdot \| |x|^{-s} u \|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2, \quad (1.11)$$

и дробное неравенство Соболева (см. [94, теорема 1.2, (22)])

$$\langle (-\Delta)^s u, u \rangle \geq \mathcal{S}_{s,s,\mathbb{R}^n} \cdot \|u\|_{L_{2^*}(\mathbb{R}^n)}^2. \quad (1.12)$$

Используя неравенство Гельдера, получаем дробное неравенство Харди—Соболева в $\mathbb{R}^n$:

$$\langle (-\Delta)^s u, u \rangle \geq \mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}^n} \cdot \| |x|^{\sigma-s} u \|_{L_{2_\sigma}(\mathbb{R}^n)}^2. \quad (1.13)$$

Точная константа $\mathcal{S}_{s,0,\mathbb{R}^n}$ в неравенстве (1.11) была получена в работе [51], и хорошо известно (см. [50]), что даже в локальном случае (при $s = 1$) она не достигается. В работе [31] было показано, что константа $\mathcal{S}_{s,s,\mathbb{R}^n}$ достигается на единственной функции (с точностью до гомотетий, домножений на константу и переносов)

$$\Phi_{s,a}(x) := (a^2 + |x|^2)^{\frac{2s-n}{2}} \quad \text{с} \quad \mathcal{S}_{s,s,\mathbb{R}^n} = 2^{2s} \pi^s \frac{\Gamma(n/2 + s)}{\Gamma(n/2 - s)} \left[\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} \right]^{2s/n}. \quad (1.14)$$

Значение точной константы $\mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}^n}$ при произвольном $\sigma \in (0, s)$ неизвестно.

Пользуясь неравенством (1.12), при $s < n/2$ определим пространства $\mathcal{D}^s(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}^s(\Omega)$ и $\tilde{\mathcal{D}}^s(\Omega)$ с нормой, индуцированной квадратичной формой $\langle (-\Delta)^s u, u \rangle$:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^s(\mathbb{R}^n) &:= \{u \in L_{2^*}(\mathbb{R}^n) \mid \langle (-\Delta)^s u, u \rangle < \infty\}; \\ \mathcal{D}^s(\Omega) &:= \{u \in L_{2^*}(\Omega) \mid \langle (-\Delta)^s u, u \rangle < \infty\}; \\ \tilde{\mathcal{D}}^s(\Omega) &:= \{u \in \mathcal{D}^s(\mathbb{R}^n) \mid u \equiv 0 \text{ на } \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}\}.\end{aligned}$$

Пространство $\mathcal{D}^s(\mathbb{R}^n)$ является областью определения квадратичной формы $\langle (-\Delta)^s u, u \rangle$ и совпадает с замыканием пространства $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по ней. Пространство $\tilde{\mathcal{D}}^s(\Omega)$ также совпадает с замыканием $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ по форме $\langle (-\Delta)^s u, u \rangle$. Из определения очевидно, что $\tilde{\mathcal{D}}^s(\mathbb{R}_+^n) \cap L_2(\mathbb{R}_+^n) = \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{R}_+^n)$, а в ограниченной области $\mathcal{D}^s(\Omega) \equiv \mathcal{H}^s(\Omega)$ и $\tilde{\mathcal{D}}^s(\Omega) \equiv \tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)$.

Суженный дробный лапласиан Дирихле $(-\Delta_\Omega^D)^s_R$ — самосопряженный оператор, восстановленный по квадратичной форме (1.7) с областью определения $\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)$:

$$\langle (-\Delta_\Omega^D)^s_R u, u \rangle := \langle (-\Delta)^s u, u \rangle \quad \text{при } u \in \tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega). \quad (1.15)$$

Спектральный дробный лапласиан Дирихле $(-\Delta_\Omega^D)^s_{Sp}$ определяется как s -тая степень оператора Лапласа с условием Дирихле в области Ω в смысле спектральной теории. Это самосопряженный оператор, восстановленный по квадратичной форме: в случае $\Omega = \mathbb{R}^n$ она совпадает с квадратичной формой (1.7) (т.е. спектральный лапласиан $(-\Delta_\Omega^D)^s_{Sp}$ совпадает с дробным лапласианом $(-\Delta)^s$ в $\mathbb{R}^n$); в случае $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ она равна

$$\langle (-\Delta_\Omega^D)^s_{Sp} u, u \rangle := \int_{\mathbb{R}_+^n} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}_{odd} u(\xi)|^2 d\xi,$$

где преобразование $\mathcal{F}_{odd}$ задается формулой

$$\mathcal{F}_{odd} u(\xi) := \frac{2}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-i\xi' \cdot x'} \sin(x_n \xi_n) dx;$$

в случае ограниченных Ω она равна

$$\langle (-\Delta_\Omega^D)^s_{Sp} u, u \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{D,j}^s \cdot \langle u, \varphi_{D,j} \rangle^2, \quad (1.16)$$

где $\lambda_{D,j}$ и $\varphi_{D,j}$ — собственные числа и ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции задачи Дирихле для оператора Лапласа соответственно.

Спектральный дробный лапласиан Неймана $(-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s$ определяется аналогичным образом: это s -ая степень оператора Лапласа с условием Неймана в области Ω в смысле спектральной теории. Его квадратичная форма в случае $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ равна

$$\langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u, u \rangle := \int_{\mathbb{R}_+^n} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}_{ev} u(\xi)|^2$$

где преобразование $\mathcal{F}_{ev}$ задается формулой

$$\mathcal{F}_{ev} u(\xi) := \frac{2}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}_+^n} u(x) e^{-i\langle \xi', x' \rangle} \cos(x_n \xi_n) dx;$$

а в случае ограниченной липшицевой области Ω квадратичная форма равна

$$\langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u, u \rangle := \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_{N,j}^s \cdot \langle u, \varphi_{N,j} \rangle^2, \quad (1.17)$$

где $\lambda_{N,j}$ — собственные числа, а $\varphi_{N,j}$ — ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции задачи Неймана для оператора Лапласа (напомним, что в случае условия Неймана $\lambda_{N,1} = 0$ для собственной функции $\varphi_{N,1} = C$).

Подчеркнем, что все введенные выше операторы при $s \notin \mathbb{N}$ являются нелокальными.

Хорошо известно (см., напр., [64, лемма 1]), что в ограниченной области Ω при $s \in [0, 1]$ область определения квадратичной формы (1.16) совпадает с $\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)$. В силу неравенства Фридрихса (см. §1.3, предложение 1.1) в $\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)$ можно задать эквивалентные (1.10) нормы

$$\langle (-\Delta_\Omega^D)_{R}^s u, u \rangle \equiv \|u\|_{\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)}^2 \asymp \langle (-\Delta_\Omega^D)_{Sp}^s u, u \rangle. \quad (1.18)$$

Областью определения квадратичной формы $\langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u, u \rangle$ является пространство $\mathcal{D}^s(\Omega)$. В случае ограниченной области Ω норму в этом пространстве удобно определить равенством

$$\|u\|_{\mathcal{D}^s(\Omega)}^2 \equiv \|u\|_{\mathcal{H}^s(\Omega)}^2 := \langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u, u \rangle + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (1.19)$$

Такая норма эквивалентна стандартной норме (1.9) (доказательство этого факта практически дословно повторяет доказательство [64, лемма 1]).

Неравенство Соболева (1.12) при $s < n/2$ обеспечивает непрерывность вложения $\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega) \hookrightarrow L_{2^*}(\Omega)$, поэтому в ограниченной области Ω вложение $\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$ компактно при $q < 2^*_s$. Более того, оказывается, что выполнены неравенства

$$\langle (-\Delta_\Omega^D)_R^s u, u \rangle \geq \mathcal{S}_{s,s,\mathbb{R}^n} \cdot \|u\|_{L_{2^*}(\Omega)}^2 \quad \text{и} \quad \langle (-\Delta_\Omega^D)_{Sp}^s u, u \rangle \geq \mathcal{S}_{s,s,\mathbb{R}^n} \cdot \|u\|_{L_{2^*}(\Omega)}^2, \quad (1.20)$$

и константа $\mathcal{S}_{s,s,\mathbb{R}^n}$ является точной для обоих неравенств: для лапласиана $(-\Delta_\Omega^D)_R^s$ точная константа не зависит от области (поэтому совпадает с константой в $\mathbb{R}^n$), а равенство точных констант для неравенств (1.20) было получено при $s = 2$ в [85] и [40], при $s \in \mathbb{N}$ в [39], при $s \in (0,1)$ в [64] и для произвольного $s \in (0, n/2)$ в [67].

Напомним, что при $s \in (0,1)$ дробные лапласианы $(-\Delta_\Omega^D)_R^s$, $(-\Delta_\Omega^D)_{Sp}^s$ и $(-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s$ могут быть получены с помощью обобщенного отображения Дирихле-в-Нейман из пространств более высоких размерностей. Суженный дробный лапласиан Дирихле $(-\Delta_\Omega^D)_R^s$ может быть получен посредством продолжения Каффарелли–Сильвестра [24] (далее, **КС-продолжение**): решение w_R задачи

$$\mathcal{L}_s[w](X) \equiv -\operatorname{div}(t^{1-2s} \nabla_X w(x,t)) = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+; \quad w|_{t=0} = u \quad (1.21)$$

с конечной энергией

$$\mathcal{E}_{s,\mathbb{R}^n}[w] := C_s \cdot \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} t^{1-2s} |\nabla_X w(x,t)|^2 dx dt \quad \text{при} \quad C_s := \frac{4^s \Gamma(1+s)}{2s \Gamma(1-s)} \quad (1.22)$$

существует, единственно, и для достаточно гладких u

$$(-\Delta_\Omega^D)_R^s u(x) = C_s \cdot \frac{\partial w_R^D}{\partial \nu_s}(x,0) := -C_s \cdot \lim_{t \rightarrow 0_+} t^{1-2s} \partial_t w_R(x,t).$$

Кроме того, w_R можно получить как минимайзер функционала (1.22) по пространству

$$\mathfrak{W}_{s,R}^D(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+) := \{w(X) \mid \mathcal{E}_{s,\mathbb{R}^n}[w] < \infty, w|_{t=0} = u\},$$

и несложно показать, что квадратичная форма (1.15) выражается через (1.22):

$$\langle (-\Delta_\Omega^D)_R^s u, u \rangle = \mathcal{E}_{s,\mathbb{R}^n}[w_R]. \quad (1.23)$$

Также, в работах [24] и [22, замечание 3.10] для задачи

$$(-\Delta)^s u(x) = h(x) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n$$

были получены функции Грина, восстанавливающие КС-продолжение по исходным функциям:

$$w(X) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\Gamma}_s(x - \xi, t) u(\xi) d\xi, \quad \text{где} \quad \tilde{\Gamma}_s(X) := \frac{\hat{C}_{n,s} t^{2s}}{(x^2 + t^2)^{\frac{n+2s}{2}}}, \quad (1.24)$$

$$w(X) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}_s(x - \xi, t) h(\xi) d\xi, \quad \text{где} \quad \tilde{G}_s(X) := \frac{\tilde{C}_{n,s}}{(x^2 + t^2)^{\frac{n-2s}{2}}}. \quad (1.25)$$

Спектральный дробный лапласиан Дирихле $(-\Delta_\Omega^D)_{Sp}^s$ может быть получен посредством продолжения Стинга—Торреа [82] (далее, **СТ-продолжение**): решение w_{Sp}^D задачи

$$\mathcal{L}_s[w](X) \equiv -\operatorname{div}(t^{1-2s} \nabla_X w(x, t)) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+; \quad w|_{t=0} = u; \quad w|_{x \in \partial\Omega} = 0 \quad (1.26)$$

с конечной энергией

$$\mathcal{E}_{s,\Omega}[w] := C_s \cdot \int_0^\infty \int_\Omega t^{1-2s} |\nabla_X w(x, t)|^2 dx dt \quad (1.27)$$

существует, единственно, и для достаточно гладких u

$$(-\Delta_\Omega^D)_{Sp}^s u(x) = C_s \cdot \frac{\partial w_{Sp}^D}{\partial \mathbf{v}_s}(x, 0). \quad (1.28)$$

Продолжение w_{Sp}^D также является минимайзером функционала (1.27) по пространству

$$\mathfrak{W}_{s,Sp}^D(\Omega \times \mathbb{R}_+) := \{w(X) \mid \mathcal{E}_{s,\Omega}[w] < \infty, w|_{t=0} = u, w|_{x \in \partial\Omega} = 0\},$$

и имеет место (см., напр., [66, (2.6)]) равенство

$$\langle (-\Delta_\Omega^D)_{Sp}^s u, u \rangle = \mathcal{E}_{s,\Omega}[w_{Sp}^D]. \quad (1.29)$$

Спектральный дробный лапласиан Неймана $(-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s$ также получается посредством СТ-продолжения: граничное условие Дирихле на боковой границе цилиндра в задаче (1.26) заменяется на условие Неймана

$$\mathcal{L}_s[w](X) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+; \quad w|_{t=0} = u; \quad \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \Big|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad (1.30)$$

у этой задачи существует единственное решение w_{Sp}^N с конечной энергией $\mathcal{E}_{s,\Omega} [w_{Sp}^N]$, и для достаточно гладких u выполнено

$$(-\Delta_{\Omega}^N)_{Sp}^s u(x) = C_s \cdot \frac{\partial w_{Sp}^N}{\partial \mathbf{v}_s}(x, 0).$$

Аналогично, w_{Sp}^N можно получить как минимайзер функционала (1.27) на пространстве

$$\mathfrak{W}_{s,Sp}^N(\Omega \times \mathbb{R}_+) := \{w(X) \mid \mathcal{E}_{s,\Omega}[w] < \infty, w|_{t=0} = u\}$$

(накладывая условие Неймана здесь не требуется, поскольку оно является естественным граничным условием), и выполнено равенство

$$\langle (-\Delta_{\Omega}^N)_{Sp}^s u, u \rangle = \mathcal{E}_{s,\Omega} [w_{Sp}^N]. \quad (1.31)$$

Функции из пространств $\mathfrak{W}_{s,R}^D$, $\mathfrak{W}_{s,Sp}^D$ и $\mathfrak{W}_{s,Sp}^N$ мы будем называть **допустимыми** продолжениями функции u . Очевидно, что энергия (1.22) (или (1.27)) любого допустимого продолжения не меньше энергии соответствующего КС-продолжения (СТ-продолжения).

Напомним определение дробного s -преобразования Кельвина в пространстве $\mathfrak{W}_{s,R}^D(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$:

$$w^*(X) := \frac{1}{|X|^{n-2s}} w\left(\frac{X}{|X|^2}\right) \quad \forall X \equiv (x, t) \in [\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+] \setminus \{\mathbf{0}_{n+1}\}.$$

Для этого преобразования имеют место следующие формулы (см., напр., [36, предложение 2.6]):

$$\begin{cases} \mathcal{L}_s[w^*](X) = |X|^{-n-2s-2} \mathcal{L}_s[w]\left(\frac{X}{|X|^2}\right) & \forall X \equiv (x, t) \in [\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+] \setminus \{\mathbf{0}_{n+1}\}, \\ \frac{\partial w^*}{\partial \mathbf{v}_s}(x, 0) \equiv |x|^{-n-2s} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{v}_s}\left(\frac{x}{|x|^2}, 0\right) & \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}. \end{cases} \quad (1.32)$$

1.3 Известные утверждения о дробных лапласианах

Предложение 1.1 (Неравенства Фридрихса). При $s \in (0, 1)$ для любой функции $u \in \tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)$ выполнены неравенства

$$\langle (-\Delta_{\Omega}^D)_R^s u, u \rangle \geq \lambda_{D,1}^s \cdot \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad \text{и} \quad \langle (-\Delta_{\Omega}^D)_{Sp}^s u, u \rangle \geq \lambda_{D,1}^s \cdot \|u\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (1.33)$$

Доказательство. Неравенство для лапласиана $(-\Delta_\Omega^D)_{S^p}^s$ следует из (1.16):

$$\langle (-\Delta_\Omega^D)_{S^p}^s u, u \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{D,j}^s \cdot \langle u, \varphi_{D,j} \rangle^2 \geq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{D,1}^s \cdot \langle u, \varphi_{D,j} \rangle^2 = \lambda_{D,1}^s \cdot \|u\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Неравенство для лапласиана $(-\Delta_\Omega^D)_R^s$ достаточно доказывать для функций $u \in C_0^\infty(\Omega)$ (такие функции плотны в $\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)$). Для них выполнено локальное неравенство Фридрихса:

$$\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq \lambda_{D,1} \cdot \|u\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (1.34)$$

Определим норму в $\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)$, зависящую от параметра $\varepsilon > 0$ и эквивалентную норме (1.8):

$$\|u\|_{\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega), \varepsilon}^2 := \int_{\mathbb{R}^n} (\varepsilon + |\xi|)^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi.$$

Рассмотрим оператор вложения $\mathbf{A}$ и его сопряженный $\mathbf{A}^*$ (их нормы равны):

$$\mathbf{A} : \tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \quad \text{и} \quad \mathbf{A}^* : L_2(\Omega) \rightarrow (\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega))'$$

Норма в сопряженном пространстве $(\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega))'$ задается формулой

$$\|v\|_{(\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega))', \varepsilon}^2 := \int_{\mathbb{R}^n} (\varepsilon + |\xi|)^{-2s} |\mathcal{F}v(\xi)|^2 d\xi,$$

и в силу неравенства Гельдера имеем

$$\begin{aligned} \|v\|_{(\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega))', \varepsilon}^2 &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\varepsilon + |\xi|)^{-2} |\mathcal{F}v(\xi)|^2 d\xi \right)^s \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}v(\xi)|^2 d\xi \right)^{1-s} \\ &= \|v\|_{(\tilde{\mathcal{H}}^1(\Omega))', \varepsilon}^{2s} \|v\|_{L_2(\Omega)}^{2-2s}. \end{aligned}$$

Используя локальное неравенство Фридрихса (1.34), получаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\| &= \sup_{u \in \tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)} \frac{\|u\|_{L_2(\Omega)}}{\|u\|_{\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega), \varepsilon}} = \sup_{v \in (\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega))'} \frac{\|v\|_{(\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega))', \varepsilon}}{\|v\|_{L_2(\Omega)}} \leq \sup_{v \in (\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega))'} \frac{\|v\|_{(\tilde{\mathcal{H}}^1(\Omega))', \varepsilon}^s \|v\|_{L_2(\Omega)}^{1-s}}{\|v\|_{L_2(\Omega)}} \\ &\leq \sup_{v \in (\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega))'} \left(\frac{\|v\|_{(\tilde{\mathcal{H}}^1(\Omega))', \varepsilon}}{\|v\|_{L_2(\Omega)}} \right)^s = \sup_{u \in \tilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)} \left(\frac{\|u\|_{L_2(\Omega)}}{\|u\|_{\tilde{\mathcal{H}}^1(\Omega), \varepsilon}} \right)^s \leq \lambda_{D,1}^{-\frac{s}{2}}, \end{aligned}$$

откуда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\varepsilon + |\xi|)^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi = \|u\|_{\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega), \varepsilon}^2 \geq \lambda_{D,1}^s \cdot \|u\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

и требуемое неравенство получается предельным переходом $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

Предложение 1.2 ([67, теорема 3]). Пусть $s \in (0,1)$. Тогда преобразование $u \rightarrow |u|$ не выводит функцию u за пределы соответствующего пространства, и выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \langle (-\Delta_\Omega^D)^s_R u, u \rangle &\geq \langle (-\Delta_\Omega^D)^s_R |u|, |u| \rangle \quad \text{для } u \in \tilde{\mathcal{D}}^s(\Omega); \\ \langle (-\Delta_\Omega^D)^s_{Sp} u, u \rangle &\geq \langle (-\Delta_\Omega^D)^s_{Sp} |u|, |u| \rangle \quad \text{для } u \in \tilde{\mathcal{D}}^s(\Omega); \\ \langle (-\Delta_\Omega^N)^s_{Sp} u, u \rangle &\geq \langle (-\Delta_\Omega^N)^s_{Sp} |u|, |u| \rangle \quad \text{для } u \in \mathcal{D}^s(\Omega). \end{aligned}$$

Кроме того, если функция u меняет знак в области Ω , то знак в соответствующем неравенстве строгий.

Доказательство. В [67, теорема 3] были доказаны первые два утверждения; третье утверждение доказывается аналогично: для удобства читателя приведем его краткое доказательство. Для функций u и $|u|$ рассмотрим их СТ-продолжения w_u и $w_{|u|}$. Очевидно, что $|w_u|$ является допустимым продолжением функции $|u|$, поэтому, с учетом (1.31), имеем

$$\langle (-\Delta_\Omega^N)^s_{Sp} u, u \rangle = \mathcal{E}_{s,\Omega} [w_u] = \mathcal{E}_{s,\Omega} [|w_u|] \geq \mathcal{E}_{s,\Omega} [w_{|u|}] = \langle (-\Delta_\Omega^N)^s_{Sp} |u|, |u| \rangle. \quad (1.35)$$

Теперь предположим, что u меняет знак. Тогда функция w_u также меняет знак, и потому функция $|w_u|$ обращается в ноль внутри цилиндра $\Omega \times \mathbb{R}_+$. По принципу максимума $|w_u|$ не является решением задачи (1.30), и неравенство (1.35) будет строгим. ■

Предложение 1.3 ([64, теорема 2]). Пусть $s \in (0,1)$ и $u \in \tilde{\mathcal{D}}^s(\Omega)$, $u \not\equiv 0$. Если $\tilde{\mathcal{D}}^s(\Omega) \neq \mathcal{D}^s(\mathbb{R}^n)$, то выполнено неравенство

$$\langle (-\Delta_\Omega^D)^s_{Sp} u, u \rangle > \langle (-\Delta_\Omega^D)^s_R u, u \rangle.$$

Предложение 1.4 ([27, лемма 2.6], [52, теорема 2.5], [69, предложение А.1]). Пусть $s \in (0,1)$ и $u \in \tilde{\mathcal{D}}^s(\Omega)$ или $u \in \mathcal{D}^s(\mathbb{R}^n)$, $u \not\equiv 0$. Если выполнено $(-\Delta_\Omega^D)^s_R u \geq 0$ или $(-\Delta_\Omega^D)^s_{Sp} u \geq 0$ (в смысле обобщенных функций), то $u > 0$ на любом компактном подмножестве $K \subset \Omega$.

Предложение 1.5 ([65, замечание 5]). Пусть $u \in \tilde{\mathcal{D}}^s(\Omega)$, и область Ω содержит начало координат $\mathbf{0}_n$. Для семейства функций $u_\rho(x) := \rho^{\frac{n-2s}{2}} u(\rho x)$ выполнено равенство

$$\langle (-\Delta_\Omega^D)^s_R u, u \rangle = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \langle (-\Delta_\Omega^D)^s_{Sp} u_\rho, u_\rho \rangle.$$

Глава 2. Множественность положительных решений краевых задач с дробными лапласианами Дирихле в кольце большого радиуса

2.1 Постановка задачи

Данная глава посвящена исследованию множественности положительных решений для уравнений с дробными лапласианами Дирихле в кольцах единичной ширины $\mathbb{K}_r^n$:

$$(-\Delta_{\mathbb{K}_r^n}^D)_R^s u = |u|^{q-2}u, \quad u \in \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n); \quad (2.1)$$

$$(-\Delta_{\mathbb{K}_r^n}^D)_{S_p}^s u = |u|^{q-2}u, \quad u \in \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n) \quad (2.2)$$

при $n \neq 3$, $s \in (0,1)$ и $q \in (2, 2_s^*)$. Напомним, что под решениями уравнений (2.1) и (2.2) мы понимаем обобщенные решения: для любых $h \in \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)$ выполнены тождества

$$\langle (-\Delta_{\mathbb{K}_r^n}^D)_R^s u, h \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} \operatorname{Re}(\mathcal{F}u \overline{\mathcal{F}h}) d\xi = \int_{\mathbb{K}_r^n} |u|^{q-2}uh dx, \quad (2.3)$$

$$\langle (-\Delta_{\mathbb{K}_r^n}^D)_{S_p}^s u, h \rangle \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{D,j}^s \langle u, \varphi_{D,j} \rangle \langle h, \varphi_{D,j} \rangle = \int_{\mathbb{K}_r^n} |u|^{q-2}uh dx \quad (2.4)$$

соответственно.

Глава имеет следующую структуру: в §2.2 даются основные определения, специфичные для текущей главы. В §2.3 доказаны вспомогательные леммы, с помощью которых в §2.4 получаются оценки энергии при $r \rightarrow \infty$ на подпространствах (m,k) -радиальных функций. Наконец, в §2.5 доказан основной результат — эффект множественности:

Теорема 2.1. *Пусть $n \neq 3$, $s \in (0,1)$, $q \in (2, 2_s^*)$ и N — некоторое натуральное число. Тогда существует такое $r_1(N)$, что при любом $r \geq r_1$ у каждой из задач (2.1) и (2.2) существует не менее N не совмещающихся поворотом положительных решений.*

Функцию с носителем в кольце $\mathbb{K}_r^n$ мы будем обозначать u_r , подчеркивая зависимость от r . Как отмечалось ранее (см. (1.18)), квадратичные формы $[u]_{R, \tilde{H}^s(\Omega)}^2 := \langle (-\Delta_{\Omega}^D)_R^s u, u \rangle$ и $[u]_{S_p, \tilde{H}^s(\Omega)}^2 := \langle (-\Delta_{\Omega}^D)_{S_p}^s u, u \rangle$ задают нормы в $\tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)$, эквивалентные стандартной.

2.2 (m, k) -радиальные функции

Пусть $\mathcal{G}$ — замкнутая подгруппа ортогональной группы $\mathbb{O}(n)$. Обозначим через $\mathfrak{L}_{\mathcal{G}}^s$ подпространство функций из $\tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)$, инвариантных относительно $\mathcal{G}$:

$$\mathfrak{L}_{\mathcal{G}}^s := \left\{ u \in \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n) \mid u(x) = u(gx), \forall g \in \mathcal{G} \right\}.$$

Аналогично определим подпространство функций $L_{q, \mathcal{G}}(\mathbb{K}_r^n)$:

$$L_{q, \mathcal{G}}(\mathbb{K}_r^n) = \{ u \in L_q(\mathbb{K}_r^n) \mid u(x) = u(gx), \forall g \in \mathcal{G} \}.$$

Мы будем придерживаться обозначений, введенных в работе [103]: **допустимым (m, k) -разложением** пространства $\mathbb{R}^n$ мы будем называть разложение $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^m)^l \oplus \mathbb{R}^k$, где

$$ml + k = n; \quad m \geq 2; \quad k = 0 \quad \text{или} \quad k \geq m; \quad l, m \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Например, для $\mathbb{R}^7$ допустимыми разложениями будут

$$\mathbb{R}^7 = (\mathbb{R}^2)^2 \oplus \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{R}^7 = (\mathbb{R}^2)^1 \oplus \mathbb{R}^5, \quad \mathbb{R}^7 = (\mathbb{R}^3)^1 \oplus \mathbb{R}^4, \quad \mathbb{R}^7 = (\mathbb{R}^7)^1.$$

В оценках, содержащих допустимые (m, k) -разложения, точки пространства $\mathbb{R}^n$ мы будем обозначать x , точки пространства $\mathbb{R}^m$ — y , точки пространства $\mathbb{R}^k$ — z . Таким образом, $x = (y_1, \dots, y_l, z)$ (в случае $k = 0$ координата z отсутствует). В сферических координатах $x = (r_x, \theta_x)$, $y = (r_y, \theta_y)$ и $z = (r_z, \theta_z)$, поэтому $x = (r_{y_1}, \dots, r_{y_l}, r_z, \theta_{y_1}, \dots, \theta_{y_l}, \theta_z)$. Мы будем называть функцию **(m, k) -радиальной**, если она зависит только от $r_{y_1}, \dots, r_{y_l}, r_z$ и инвариантна относительно всех перестановок $y_1, \dots, y_l$. Группу, порождающую пространство (m, k) -радиальных функций, мы обозначим $\mathcal{G}_{m, k}$.

Определим функционалы $\mathcal{J}_R[u]$ и $\mathcal{J}_{Sp}[u]$:

$$\mathcal{J}_R[u] := \frac{[u]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)}^2}{\|u\|_{L_q(\mathbb{K}_r^n)}^2} \equiv \frac{\langle (-\Delta_{\mathbb{K}_r^n}^D)_R^s u, u \rangle}{\|u\|_{L_q(\mathbb{K}_r^n)}^2}; \quad \mathcal{J}_{Sp}[u] := \frac{[u]_{Sp, \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)}^2}{\|u\|_{L_q(\mathbb{K}_r^n)}^2} \equiv \frac{\langle (-\Delta_{\mathbb{K}_r^n}^D)_{Sp}^s u, u \rangle}{\|u\|_{L_q(\mathbb{K}_r^n)}^2}.$$

Лемма 2.1. Пусть $\mathcal{G}$ — замкнутая подгруппа $\mathbb{O}(n)$, для которой вложение $\mathfrak{L}_{\mathcal{G}}^s \hookrightarrow L_q(\mathbb{K}_r^n)$ компактно. Тогда минимайзеры функционалов $\mathcal{J}_R[u]$ и $\mathcal{J}_{Sp}[u]$ по подпространству $\mathfrak{L}_{\mathcal{G}}^s$ существуют и, с точностью до домножения на константу, являются положительными решениями задач (2.1) и (2.2).

Доказательство. Функционалы $\mathcal{J}_R[u]$ и $\mathcal{J}_{Sp}[u]$ инвариантны относительно домножения u на константу, поэтому можно считать $V[u] := \|u\|_{L_q(\mathbb{K}_r^n)}^q = 1$. Минимизация функционалов $\mathcal{J}_R[u]$ и $\mathcal{J}_{Sp}[u]$ эквивалентна минимизации норм $W_R[u] := [u]_{R, \tilde{H}^s(\mathbb{K}_r^n)}^2$ и $W_{Sp}[u] := [u]_{Sp, \tilde{H}^s(\mathbb{K}_r^n)}^2$ по слабо замкнутой в $\mathfrak{L}_G^s$ (ввиду компактности вложения) поверхности уровня $V[u] = 1$. Существование следует из общей теоремы о существовании минимайзера у слабо полунепрерывного снизу коэрцитивного функционала на слабо замкнутом множестве (см., напр., [97, теорема 26.8]). Уравнения Эйлера имеют вид

$$\exists \alpha_1, \alpha_2 : DW_R[u_R^*, h] = \alpha_1 DV[u_R^*, h], \quad DW_{Sp}[u_{Sp}^*, h] = \alpha_2 DV[u_{Sp}^*, h] \quad \forall h \in \mathfrak{L}_G^s. \quad (2.5)$$

Поскольку функционалы $\mathcal{J}_R[u]$ и $\mathcal{J}_{Sp}[u]$ инвариантны под действием компактной замкнутой группы Ли $\mathcal{G}$, равенства (2.5) для всех $h \in \mathfrak{L}_G^s$ обеспечивают равенства (2.5) для всех $h \in \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)$ согласно принципу симметричной критичности [71, теорема 1.1]. После домножения на подходящие константы, (2.5) совпадает с (2.3) и (2.4).

Для завершения доказательства остается показать положительность полученных минимайзеров. Их неотрицательность обеспечивается предложением 1.2, а из неотрицательности минимайзеров следует их положительность из предложения 1.4. ■

Замечание 2.1. При $q < 2_s^*$ условия леммы 2.1 выполнены для любой замкнутой подгруппы $\mathcal{G} \subset \mathcal{O}(n)$ ввиду компактности вложения $\tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n) \hookrightarrow L_q(\mathbb{K}_r^n)$.

2.3 Общие оценки норм в $\tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)$

Лемма 2.2. В кольце $\mathbb{K}_r^n$ выполнены неравенства

$$\langle (-\Delta_{\mathbb{K}_r^n}^D)_R^s u, u \rangle \geq \|u\|_{L_2(\mathbb{K}_r^n)}^2 \quad \text{и} \quad \langle (-\Delta_{\mathbb{K}_r^n}^D)_{Sp}^s u, u \rangle \geq \|u\|_{L_2(\mathbb{K}_r^n)}^2. \quad (2.6)$$

Доказательство. Следует из неравенств Фридрихса (1.33) и неравенства $\lambda_{D,1} > 1$, справедливого для кольца единичной ширины $\mathbb{K}_r^n$. ■

Лемма 2.3. Для любой функции $u \in \tilde{\mathcal{H}}^1(\mathbb{K}_r^n)$ при $s \in (0, 1)$ выполнены неравенства

$$[u]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)} \leq \|u\|_{\tilde{\mathcal{H}}^1(\mathbb{K}_r^n)} \quad \text{и} \quad [u]_{Sp, \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)} \leq \|u\|_{\tilde{\mathcal{H}}^1(\mathbb{K}_r^n)}.$$

Доказательство. Оба неравенства следуют из неравенства Гельдера и соответствующих неравенств Фридрихса (2.6) при $s = 1$:

$$\begin{aligned} [u]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)}^2 &\equiv \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi \right)^{1-s} \times \\ &\times \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi \right)^s = \|u\|_{L_2(\mathbb{K}_r^n)}^{2-2s} \cdot \|u\|_{\tilde{\mathcal{H}}^1(\mathbb{K}_r^n)}^{2s} \leq \|u\|_{\tilde{\mathcal{H}}^1(\mathbb{K}_r^n)}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [u]_{Sp, \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)}^2 &\equiv \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{D,j}^s \cdot \langle u, \varphi_{D,j} \rangle^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle u, \varphi_{D,j} \rangle^2 \right)^{1-s} \times \\ &\times \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{D,j} \cdot \langle u, \varphi_{D,j} \rangle^2 \right)^s = \|u\|_{L_2(\mathbb{K}_r^n)}^{2-2s} \cdot \|u\|_{\tilde{\mathcal{H}}^1(\mathbb{K}_r^n)}^{2s} \leq \|u\|_{\tilde{\mathcal{H}}^1(\mathbb{K}_r^n)}^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Лемма 2.4. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $s := m + \delta$, $\delta \in [0, 1]$. Тогда для функций $u \in \tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)$, $v \in C^{m+1}(\bar{\Omega})$ выполнено $uv \in \tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)$, а норма оценивается как

$$[uv]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)} \leq C[u]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)} \cdot \|v\|_{C^m(\bar{\Omega})}^{1-\delta} \|v\|_{C^{m+1}(\bar{\Omega})}^{\delta}. \quad (2.7)$$

Доказательство. Утверждение для целых $s = m$ следует из очевидного неравенства

$$\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha(uv)\|_{L_2(\Omega)} \leq C \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|v\|_{C^m(\bar{\Omega})}.$$

Утверждение для нецелых s (т.е. для $\delta > 0$) получается интерполяцией: из неравенства выше имеем (здесь $\tilde{\mathcal{H}}^0(\Omega) \equiv L_2(\Omega)$)

$$\begin{aligned} [uv]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^m(\Omega)} &\leq C[u]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^m(\Omega)} \|v\|_{C^m(\bar{\Omega})} \\ [uv]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^{m+1}(\Omega)} &\leq C[u]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^{m+1}(\Omega)} \|v\|_{C^{m+1}(\bar{\Omega})}, \end{aligned}$$

поэтому оператор домножения на функцию v непрерывен в пространствах $\tilde{\mathcal{H}}^m(\Omega)$ и $\tilde{\mathcal{H}}^{m+1}(\Omega)$. Согласно [110, теорема 4.3.2/2], имеем

$$[\tilde{\mathcal{H}}^m(\Omega), \tilde{\mathcal{H}}^{m+1}(\Omega)]_\delta = \tilde{\mathcal{H}}^{m+\delta}(\Omega), \quad (2.8)$$

откуда следует непрерывность оператора домножения на функцию v в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}^{m+\delta}(\Omega)$, а интерполяционное неравенство для нормы этого оператора совпадает с (2.7). ■

Замечание 2.2. При $s \in [0, 1]$ утверждение леммы 2.4 справедливо и для нормы $[u]_{S_p, \tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)}$.

Лемма 2.5. Пусть $u_i(x) \in \tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)$ при $i = 1, \dots, k$, а $U(x)$ — их сумма:

$$U(x) = u_1(x) + \dots + u_k(x).$$

Выполнены неравенства:

$$[U]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)}^2 \leq k \sum_{i=1}^k [u_i]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)}^2 \quad \text{и} \quad [U]_{S_p, \tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)}^2 \leq k \sum_{i=1}^k [u_i]_{S_p, \tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)}^2.$$

Доказательство. Очевидное следствие неравенства о среднем арифметическом и среднем квадратическом. ■

2.4 Оценка энергии для (m, k) -радиальных функций

Напомним, что через $\mathbb{K}_r^1$ мы обозначаем кольцо в $\mathbb{R}^1$, то есть выполнено $\mathbb{K}_r^1 \equiv [-r-1, -r] \cup [r, r+1]$. Следующая лемма посвящена изучению свойств нормы $[u]_{R, \tilde{H}^s(\mathbb{K}_r^1)}$ для специального семейства одномерных функций $v_r(x)$:

Лемма 2.6. Пусть $g \in \tilde{\mathcal{H}}^s[0, 1]$ и $\tilde{g}(x) := g(-x)$. Определим семейство функций v_r :

$$v_r(x) := g(x-r) + \tilde{g}(x+r). \quad (2.9)$$

При $r \rightarrow \infty$ имеют место соотношения

$$[v_r]_{R, \tilde{H}^s(\mathbb{K}_r^1)}^2 = 2 \cdot [g]_{R, \tilde{H}^s[0, 1]}^2 + o_r(1); \quad (2.10)$$

$$[v_r |x|^a]_{R, \tilde{H}^s(\mathbb{K}_r^1)} \stackrel{r}{\asymp} r^a \cdot [v_r]_{R, \tilde{H}^s(\mathbb{K}_r^1)} \quad \text{при всех } a > 0. \quad (2.11)$$

Доказательство. Справедливость соотношения (2.10) обеспечивается цепочкой равенств

$$\begin{aligned} [v_r]_{R, \tilde{H}^s(\mathbb{K}_r^1)}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}v_r|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}g \cdot e^{-i\xi r} + \mathcal{F}\tilde{g} \cdot e^{i\xi r}|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}g|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}\tilde{g}|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2s} (\mathcal{F}g \overline{\mathcal{F}\tilde{g}} e^{-2i\xi r} + \overline{\mathcal{F}g} \mathcal{F}\tilde{g} e^{2i\xi r}) d\xi \\ &\stackrel{*}{=} [g]_{R, \tilde{H}^s[0, 1]}^2 + [\tilde{g}]_{R, \tilde{H}^s[-1, 0]}^2 + o_r(1) = 2 \cdot [g]_{R, \tilde{H}^s[0, 1]}^2 + o_r(1) \end{aligned}$$

(равенство $(*)$ следует из леммы Римана—Лебега).

Докажем оценку (2.11): требуется показать, что выполнены оценки

$$C_0 r^a \cdot [v_r]_{R, \tilde{H}^s(\mathbb{K}_r^1)} \geq [v_r |x|^a]_{R, \tilde{H}^s(\mathbb{K}_r^1)} \geq C_1 r^a \cdot [v_r]_{R, \tilde{H}^s(\mathbb{K}_r^1)}$$

с константами C_0 и C_1 , не зависящими от r . Они обе следуют из неравенства (2.7): левая часть оценки получается при $u = v_r$ и $v = |x|^a$, а правая часть получается при $u = v_r |x|^a$ и $v = |x|^{-a}$:

$$\begin{aligned} [v_r |x|^a]_{R, \tilde{H}^s(\mathbb{K}_r^1)} &\leq C_0 [v_r]_{R, \tilde{H}^s(\mathbb{K}_r^1)} \cdot \|r^a\|_{C^m(\mathbb{K}_r^1)} = C_0 r^a \cdot [v_r]_{R, \tilde{H}^s(\mathbb{K}_r^1)}; \\ [v_r |x|^a]_{R, \tilde{H}^s(\mathbb{K}_r^1)} &\geq \frac{[v_r]_{R, \tilde{H}^s(\mathbb{K}_r^1)}}{C \| |x|^{-a} \|_{C^m(\mathbb{K}_r^1)}} \geq C_1 [v_r]_{R, \tilde{H}^s(\mathbb{K}_r^1)} r^a. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Полученные соотношения позволяют оценить функционал $\mathcal{J}_R$ на подпространстве радиальных функций: любая радиальная функция может быть отождествлена с функцией на прямой, которая, в свою очередь, порождает семейство функций (2.9) с некоторой функцией g .

Теорема 2.2. Пусть $v_r \in \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^1)$ — семейство функций (2.9). Восстановим семейство радиальных функций $u_r \in \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)$ по формуле $u_r(x) := v_r(|x|)$. Тогда для $q \in [2, 2_{1,s}^*]$

$$\mathcal{J}_R[u_r] = \frac{[u_r]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)}^2}{\|u_r\|_{L_q(\mathbb{K}_r^n)}^2} \underset{r}{\asymp} \frac{r^{n-1} [v_0]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^s[0,1]}^2}{r^{2(n-1)/q} \|v_0\|_{L_q[0,1]}^2} \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

Доказательство. Запишем норму функции u_r в виде (обозначим $\varepsilon_r := 1/\sqrt{r}$)

$$[u_r]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u_r|^2 d\xi = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} \left(\int_r^{r+1} v_r(\tau) \int_{\mathbb{S}_1^{n-1}} e^{-i\tau|\xi|(\sigma, \theta_\xi)} d\sigma d\tau \right)^2 d\xi.$$

Из [90, §2.3, (3)] следует, что имеет место представление

$$\int_{\mathbb{S}_1^{n-1}} e^{-i|y|(\sigma, \theta)} d\sigma = \frac{(2\pi)^{n/2}}{|y|^{(n-2)/2}} \cdot \mathfrak{J}_{\frac{n-2}{2}}(|y|), \quad \theta \in \mathbb{S}_1^{n-1},$$

откуда имеем

$$[u_r]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)}^2 = \left(\int_0^{\varepsilon_r} + \int_{\varepsilon_r}^\infty \right) t^{1+2s} \left(\int_r^{r+1} \tau^{n/2} v_r(\tau) \mathfrak{J}_{\frac{n-2}{2}}(\tau t) d\tau \right)^2 dt =: I_1 + I_2.$$

Покажем, что $I_1 = o_r(r^{n-1})$:

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \int_0^{\varepsilon_r} t^{1+2s} \left(\int_r^{r+1} \tau^{n/2} v_r(\tau) \mathfrak{J}_{\frac{n-2}{2}}(\tau t) d\tau \right)^2 dt \leq C \varepsilon_r^{2+2s} \cdot \left(\int_r^{r+1} v_r(\tau) \tau^{n/2} d\tau \right)^2 \\ &\leq C r^{n-1-s} \cdot \|v_r\|_{L_2(\mathbb{K}_r^1)}^2 \leq C r^{n-1-s} \cdot \|v_0\|_{L_2[0,1]}^2 = o_r(r^{n-1}). \end{aligned}$$

Оценим теперь I_2 . Функция Бесселя первого рода раскладывается в асимптотический ряд при $t \rightarrow \infty$ с остатком $|R_N(t)| \leq C t^{-2N-\frac{1}{2}}$ (см. [90, с. 199]):

$$\mathfrak{J}_{\frac{n-2}{2}}(t) = \sum_{k=0}^N [A_k(t) + B_k(t)] + R_N(t) \quad (2.13)$$

где $A_k(t) := \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cdot t^{-2k} \cos(t - \frac{n-1}{4}\pi)$ и $B_k(t) := \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cdot t^{-2k-1} \sin(t - \frac{n-1}{4}\pi)$.

Поскольку для $t > \varepsilon_r$ и $\tau \in \text{supp}(v_r)$ выполнено $\tau t \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$, разложение (2.13) применимо. Определим функции $\mathfrak{A}_k(t)$, $\mathfrak{B}_k(t)$ и $\mathfrak{R}_N(t)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_k &:= \int_r^{r+1} \tau^{n/2} v_r(\tau) A_k(\tau t) d\tau, \quad \mathfrak{B}_k := \int_r^{r+1} \tau^{n/2} v_r(\tau) B_k(\tau t) d\tau, \\ \mathfrak{R}_N &:= \int_r^{r+1} \tau^{n/2} v_r(\tau) R_N(\tau t) d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место представление

$$I_2 = \int_{\varepsilon_r}^{\infty} t^{1+2s} \left(\sum_{k=0}^N [\mathfrak{A}_k(t) + \mathfrak{B}_k(t)] + \mathfrak{R}_N(t) \right)^2 dt.$$

В качестве первого приближения к I_2 используем член с $\mathfrak{A}_0(t)$:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon_r}^{\infty} \mathfrak{A}_0^2(t) t^{1+2s} dt &= C \int_{\varepsilon_r}^{\infty} t^{1+2s} \left(\int_r^{r+1} \tau^{n/2} v_r(\tau) \sqrt{\frac{2}{\pi \tau t}} \cos(\tau t - \frac{n-1}{4}\pi) d\tau \right)^2 dt \\ &= C \int_{\varepsilon_r}^{\infty} t^{2s} \left(\int_r^{r+1} \tau^{(n-1)/2} v_r(\tau) \cos(\tau t - \frac{n-1}{4}\pi) d\tau \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Пусть $t_* := t + \frac{(n-1)\pi}{4\tau}$. Очевидно, при $t > \varepsilon_r$ выполнено $t_* = t + o_r(t)$, поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon_r}^{\infty} \mathfrak{A}_0^2(t) t^{1+2s} dt &\stackrel{r}{\asymp} \int_{\varepsilon_r - \frac{n-1}{4r}\pi}^{\infty} t_*^{2s} \left(\int_r^{r+1} \tau^{(n-1)/2} v_r(\tau) \cos(\tau t_*) d\tau \right)^2 dt_* \\ &\stackrel{r}{\asymp} \int_{-\infty}^{+\infty} |t_*|^{2s} \left(\int_r^{r+1} \tau^{(n-1)/2} v_r(\tau) \cos(\tau t_*) d\tau \right)^2 dt_* + o_r(r^{n-1}). \end{aligned}$$

Используя лемму 2.6, получаем, что

$$\int_{\varepsilon_r}^{\infty} \mathfrak{A}_0^2(t) t^{1+2s} dt \stackrel{r}{\asymp} [v_r |x|^{(n-1)/2}]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^1)}^2 \stackrel{r}{\asymp} r^{n-1} [v_r]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^1)}^2 \stackrel{r}{\asymp} r^{n-1} [v_0]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^s[0,1]}^2.$$

Поскольку $\sin(\tau t - \frac{n-1}{4}\pi) = \cos(\tau t - \frac{n+1}{4}\pi)$, то аналогичным образом можно оценить энергию, связанную с $\mathfrak{A}_k$ и $\mathfrak{B}_k$ при $k \leq N = \lceil s+1 \rceil$. Асимптотики этих членов будут степенями r с меньшими показателями, то есть $o_r(r^{n-1})$. Наконец, оценка остатка $R_N(t)$ позволяет оценить член с $\mathfrak{R}_N$:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon_r}^{\infty} \mathfrak{R}_N^2(t) t^{1+2s} dt &\leq C \int_{\varepsilon_r}^{\infty} t^{-2} \left(\int_r^{r+1} \tau^{\frac{n-1}{2} - \lceil s+1 \rceil} |v_t(\tau)| d\tau \right)^2 dt \\ &\leq C r^{n-1-2s-2+\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^1 |v_0(\tau)| d\tau \right)^2 = o_r(r^{n-1}) \cdot \|v_0\|_{L_2[0,1]}^2. \end{aligned}$$

Итоговый результат получается из следующей цепочки:

$$I_2 \stackrel{r}{\asymp} \int_{\varepsilon_r}^{\infty} t^{1+2s} \left(\sum_{k=0}^N [\mathfrak{A}_k^2(t) + \mathfrak{B}_k^2(t)] + \mathfrak{R}_N^2(t) \right) dt \stackrel{r}{\asymp} r^{n-1} \cdot [v_0]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^s[0,1]}^2. \quad \blacksquare$$

Следствие 2.1. Минимум функционала $\mathcal{J}_R$ по подпространству радиальных функций при $r \rightarrow \infty$ эквивалентен $r^{(n-1)(1-\frac{2}{q})}$ для всех $q \in [2, 2_{1,s}^*]$:

$$\min_{u_r \in \mathfrak{L}_{\mathbb{O}(n)}^s} \mathcal{J}_R[u_r] \stackrel{r}{\asymp} r^{(n-1)(1-\frac{2}{q})}. \quad (2.14)$$

Доказательство. Оценка сверху очевидно следует из эквивалентности (2.12). Оценка снизу следует из (2.12) и непрерывности вложения $\tilde{\mathcal{H}}^s[0,1] \hookrightarrow L_q[0,1]$. \blacksquare

Наша ближайшая цель — получить двухстороннюю оценку энергии по подпространствам $\mathfrak{L}_{\mathcal{G}}^s$. Следующая теорема дает оценку снизу для подпространства (m, k) -радиальных функций:

Теорема 2.3. Пусть $u_r(x) \in \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)$ — (m, k) -радиальная функция с $m \neq n$. Тогда при $q \in [2, 2_{n-m+1, s}^*]$ выполнены неравенства

$$[u_r]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)}^2 \geq Cr^{(m-1)(1-\frac{2}{q})} \cdot \|u_r\|_{L_q(\mathbb{K}_r^n)}^2 \quad \text{и} \quad [u_r]_{S_p, \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)}^2 \geq Cr^{(m-1)(1-\frac{2}{q})} \cdot \|u_r\|_{L_q(\mathbb{K}_r^n)}^2. \quad (2.15)$$

Доказательство. Пусть T_0 — тождественный оператор на пространстве $L_{2, \mathcal{G}_{m, k}}$:

$$T_0 : L_{2, \mathcal{G}_{m, k}}(\mathbb{K}_r^n) \rightarrow L_{2, \mathcal{G}_{m, k}}(\mathbb{K}_r^n).$$

Его норма равна единице. Пусть T_1 — оператор вложения пространства $\mathfrak{L}_{\mathcal{G}_{m, k}}^1$ в пространство $L_{p, \mathcal{G}_{m, k}}(\mathbb{K}_r^n)$ при $p \in [2, \frac{2(n-m+1)}{(n-m-1)_+}]$

$$T_1 : \mathfrak{L}_{\mathcal{G}_{m, k}}^1 \rightarrow L_{p, \mathcal{G}_{m, k}}(\mathbb{K}_r^n).$$

Для произвольного (m, k) -разложения существует такое C_0 , что для любого $v \in \mathfrak{L}_{\mathcal{G}_{m, k}}^1$ выполнено неравенство (см. [57] при $m = 2, k = n - 2$ и [103] в общем случае):

$$[v]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^1(\mathbb{K}_r^n)}^2 \geq C_0 r^{(m-1)(1-\frac{2}{p})} \|v\|_{L_p(\mathbb{K}_r^n)}^2$$

Таким образом, оператор T_1 непрерывен и его норма оценивается как

$$\|T_1\| = \sup_{v \in \mathfrak{L}_{\mathcal{G}_{m, k}}^1} \frac{\|T_1 v\|_{L_p(\mathbb{K}_r^n)}}{\|v\|_{\mathfrak{L}_{\mathcal{G}_{m, k}}^1}} \leq C_0^{-\frac{1}{2}} r^{(m-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}.$$

Пространства $\tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)$ образуют интерполяционную шкалу (см. (2.8)):

$$[\tilde{\mathcal{H}}^k(\mathbb{K}_r^n), \tilde{\mathcal{H}}^{k+1}(\mathbb{K}_r^n)]_{\delta} = \tilde{\mathcal{H}}^{k+\delta}(\mathbb{K}_r^n).$$

Пространства Лебега $L_p(\mathbb{K}_r^n)$ также образуют интерполяционную шкалу: для показателей, связанных соотношением $\frac{1}{p} = \frac{1-\delta}{p_0} + \frac{\delta}{p_1}$, имеем

$$[L_{p_0}(\mathbb{K}_r^n), L_{p_1}(\mathbb{K}_r^n)]_{\delta} = L_p(\mathbb{K}_r^n).$$

Обозначим через $\mathfrak{G}(y)$ орбиту точки y под действием группы $\mathcal{G}$; на ней есть мера Хаара μ_y , инвариантная относительно действия группы. Построим проекторы

в пространства $\mathcal{G}_{m,k}$ -инвариантных функций при помощи усреднения по мере Хаара: разложим функцию h в сумму функций h_1 и h_2

$$h_1(y) := \frac{1}{\mu_y(\mathfrak{G}(y))} \int_{\mathfrak{G}(y)} h d\mu_y, \quad h_2(y) := h(y) - h_1(y), \quad \int_{\mathfrak{G}(y)} h_2 d\mu_y = 0. \quad (2.16)$$

Легко видеть, что функция h_1 $\mathcal{G}_{m,k}$ -инвариантна, и формулами (2.16) определяются непрерывные проекторы из пространств $L_{p_0}(\mathbb{K}_r^n)$ и $L_{p_1}(\mathbb{K}_r^n)$ в пространства $L_{p_0, \mathcal{G}_{m,k}}(\mathbb{K}_r^n)$ и $L_{p_1, \mathcal{G}_{m,k}}(\mathbb{K}_r^n)$ соответственно. Подпространство $L_{p_0, \mathcal{G}_{m,k}}(\mathbb{K}_r^n)$ является дополняемым, поэтому в силу [110, теорема 1.17.1.1] выполнено

$$[L_{p_0, \mathcal{G}_{m,k}}(\mathbb{K}_r^n), L_{p_1, \mathcal{G}_{m,k}}(\mathbb{K}_r^n)]_\delta = L_{p, \mathcal{G}_{m,k}}(\mathbb{K}_r^n).$$

Аналогичным образом, формулой (2.16) определяется непрерывный проектор из пространства $L_2(\mathbb{K}_r^n)$ в $L_{2, \mathcal{G}_{m,k}}(\mathbb{K}_r^n)$ (также непрерывный как проектор из $\tilde{\mathcal{H}}^1(\mathbb{K}_r^n)$ в $\mathfrak{L}_{\mathcal{G}_{m,k}}^1$), пространство дополняемо и

$$[L_{2, \mathcal{G}_{m,k}}(\mathbb{K}_r^n), \mathfrak{L}_{\mathcal{G}_{m,k}}^1]_\delta = \mathfrak{L}_{\mathcal{G}_{m,k}}^\delta.$$

Проинтерполируем оператор вложения (между операторами T_0 и T_1)

$$T_s : \mathfrak{L}_{\mathcal{G}_{m,k}}^s \rightarrow L_{q, \mathcal{G}_{m,k}}(\mathbb{K}_r^n) \quad \text{при} \quad \frac{1}{q} = \frac{s}{p} + \frac{1-s}{2}, \quad (2.17)$$

норма этого оператора оценивается из интерполяционного неравенства

$$\|T_s\| \leq \|T_0\|^{1-s} \|T_1\|^s \leq C_0^{-\frac{s}{2}} r^{(m-1)(\frac{s}{p} - \frac{s}{2})} = C_0^{-\frac{s}{2}} r^{(m-1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{2})}. \quad (2.18)$$

При $p \in \left[2, \frac{2(n-m+1)}{(n-m-1)_+}\right]$ показатель q пробегает отрезок $[2, 2_{n-m+1,s}^*]$, неравенство (2.18) дает оценку на интерполяционную норму (совпадающую со стандартной нормой в $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$)

$$\|u_r\|_{\tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)}^2 \geq C_0^s r^{(m-1)(1-\frac{2}{q})} \|u_r\|_{L_q(\mathbb{K}_r^n)}^2.$$

Из неравенства Фридрихса (2.6) и предложения 1.3 получаем требуемое:

$$2[u_r]_{S_p, \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)}^2 \geq 2[u_r]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)}^2 \geq \|u_r\|_{\tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)}^2 \geq C r^{(m-1)(1-\frac{2}{q})} \|u_r\|_{L_q(\mathbb{K}_r^n)}^2. \quad \blacksquare$$

Замечание 2.3. Условие $m \neq n$ существенно используется в доказательстве: при $m = n$ предельный показатель q равен $2_{1,s}^* \equiv \frac{2}{1-2s}$, и даже в случае $s < \frac{1}{2}$ его не получить из интерполяции в пространствах Лебега $L_p(\mathbb{K}_r^n)$ — равенство (2.17) обеспечивает показатели $q \leq \frac{2}{1-s} < 2_{1,s}^*$. Однако, как показывает теорема 2.2, в случае $m = n$ утверждение теоремы остается верным.

Оказывается, что оценка энергии (2.15) по подпространству $\mathfrak{L}_{\mathcal{G}_{m,k}}^1$, полученная в предыдущей теореме, является точной:

Теорема 2.4. *При $q \in [2, 2_{n-m+1,s}^*]$ для любого радиуса r существует такая (m,k) -радиальная функция $\tilde{u}_r$, что выполнены неравенства*

$$[\tilde{u}_r]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)}^2 \leq Cr^{(m-1)(1-\frac{2}{q})} \cdot \|\tilde{u}_r\|_{L_q(\mathbb{K}_r^n)}^2 \quad \text{и} \quad [\tilde{u}_r]_{Sp, \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)}^2 \leq Cr^{(m-1)(1-\frac{2}{q})} \cdot \|\tilde{u}_r\|_{L_q(\mathbb{K}_r^n)}^2. \quad (2.19)$$

Доказательство. Согласно работам [57] (при $m = 2, k = n - 2$ и при $m = n$) и [103] (для произвольных (m, k) -разложений) существует такая $\tilde{u}_r \in \mathfrak{L}_{\mathcal{G}_{m,k}}^1$, для которой при $q \in \left[2, \frac{2(n-m+1)}{(n-m-1)_+}\right]$ выполнено неравенство

$$[\tilde{u}_r]_{\tilde{\mathcal{H}}^1(\mathbb{K}_r^n)}^2 \leq Cr^{(m-1)(1-\frac{2}{q})} \|\tilde{u}_r\|_{L_q(\mathbb{K}_r^n)}^2.$$

Поскольку $[2, 2_{n-m+1,s}^*] \subset \left[2, \frac{2(n-m+1)}{(n-m-1)_+}\right]$, утверждение следует из леммы 2.3:

$$[\tilde{u}_r]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)}^2 \leq [\tilde{u}_r]_{Sp, \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)}^2 \leq [\tilde{u}_r]_{\tilde{\mathcal{H}}^1(\mathbb{K}_r^n)}^2 \leq Cr^{(m-1)(1-\frac{2}{q})} \|\tilde{u}_r\|_{L_q(\mathbb{K}_r^n)}^2. \quad \blacksquare$$

Следствие 2.2. *При $n \geq 4$ выполнены следующие оценки*

$$\min_{u_r \in \mathfrak{L}_{\mathbb{O}(2) \times \mathbb{O}(n-2)}^s} \mathcal{J}_R[u_r] \asymp r^{1-\frac{2}{q}} \quad \text{и} \quad \min_{u_r \in \mathfrak{L}_{\mathbb{O}(2) \times \mathbb{O}(n-2)}^s} \mathcal{J}_{Sp}[u_r] \asymp r^{1-\frac{2}{q}}. \quad (2.20)$$

Доказательство. При $n \geq 4$ функции из пространств $\mathfrak{L}_{\mathbb{O}(2) \times \mathbb{O}(n-2)}^s$ являются $(2, n-2)$ -радиальными, и оценки следуют из неравенств (2.15) и (2.19). $\blacksquare$

2.5 Теоремы существования и множественности

Теорема 2.2 дает двухстороннюю оценку на норму $[u_r]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)}$ радиальной функции u_r через норму сужения в $\tilde{\mathcal{H}}^s[0,1]$. Таким образом, пространство $\mathfrak{L}_{\mathbb{O}(n)}^s$ с нормой $[u_r]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)}$ компактно вкладывается в $L_q(\mathbb{K}_r^n)$ при всех $q \in [1, 2_{1,s}^*]$. Аналогичный результат для $\mathfrak{L}_{\mathbb{O}(n)}^s$ с нормой $[u_r]_{Sp, \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)}$ следует из эквивалентности норм. Из утверждения леммы 2.1 следует теорема:

Теорема 2.5 (Существование радиального решения). *При $q \in [1, 2_{1,s}^*]$, $q \neq 2$ у каждой из задач (2.1) и (2.2) существует положительное радиальное решение.*

Пусть $n \geq 4$. Рассмотрим допустимое (m, k) -разложение. Из теоремы 2.3 следует, что вложение $\mathfrak{L}_{\mathcal{G}_{m,k}}^s \hookrightarrow L_q(\mathbb{K}_r^n)$ для нормы $[u_r]_{R, \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)}$ непрерывно при $q = 2_{n-m+1,s}^*$, откуда следует компактность этого вложения при $q \in [1, 2_{n-m+1,s}^*)$. Как и в предыдущем рассуждении, утверждение для нормы $[u_r]_{Sp, \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)}$ следует из эквивалентности норм, а лемма 2.1 гарантирует существование обобщенного (m, k) -радиального решения $u_r \in \mathfrak{L}_{\mathcal{G}_{m,k}}^s$. При $q > 2$ и больших r минимумы функционалов $\mathcal{J}_R$ и $\mathcal{J}_{Sp}$ по подпространствам $\mathfrak{L}_{\mathbb{O}(n)}^s$ и $\mathfrak{L}_{\mathcal{G}_{m,k}}^s$ различны в силу оценок (2.14), (2.15) и (2.19). Это означает, что построенное решение не является радиальным, и доказана теорема:

Теорема 2.6 (Существование (m, k) -радиальных решений). *При $n \geq 4$ и $q \in (2, 2_{n-m+1,s}^*)$ существует такой радиус r_0 , что для всех $r > r_0$ в кольце $\mathbb{K}_r^n$ для каждой из задач (2.1) и (2.2) существует положительное (m, k) -радиальное решение (при различных m решения различны).*

Замечание 2.4. *Поскольку $2_{n-m+1,s}^* > 2_{n,s}^*$, теорема 2.6 обеспечивает существование нерадиального решения для супер-критических показателей q . Максимальный показатель получается при наибольшем допустимом m , то есть $m = \lfloor n/2 \rfloor$.*

Докажем теперь основную теорему о множественности:

Доказательство теоремы 2.1. Рассмотрим семейство групп $\mathcal{T}_\ell \times \mathbb{O}(n-2)$, $\ell \in [1 : N]$, где $\mathcal{T}_\ell \subset \mathbb{O}(2)$ — группа поворотов на углы, кратные $2\pi/\ell$. Минимайзеры по инвариантным подпространствам $\mathfrak{L}_{\mathcal{T}_\ell \times \mathbb{O}(n-2)}^s$ являются обобщенными решениями задач (2.1) и (2.2) при $q < 2_s^*$.

Рассмотрим положительную функцию $\eta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{B}_{1/2})$:

$$\eta(x) = \eta(y, z) = \eta(|y|, |z|), \quad y \in \mathbb{R}^2, z \in \mathbb{R}^{n-2}, \quad |y| + |z| \leq 1/2.$$

Обозначим через y_i^0 вершины правильного ℓ -угольника на плоскости с центром в начале координат и $y_1^0 := (r + 1/2, 0)$. Определим функцию u_ℓ равенством

$$u_\ell(y, z) := \sum_{k=1}^{\ell} \eta(y - y_i^0, z).$$

Лемма 2.5 обеспечивает неравенства $\mathcal{J}_R[u_\ell] < C$ и $\mathcal{J}_{Sp}[u_\ell] < C$ при больших r с константой, не зависящей от r . Из оценок (2.20) существует такой уровень r_1 ,

что при любом $r > r_1$ минимумы функционалов $\mathcal{J}_R$ и $\mathcal{J}_{S_p}$ по подпространству $\mathfrak{L}_{\mathbb{O}(2) \times \mathbb{O}(n-2)}^s$ больше C ; таким образом, минимайзеры по подпространствам $\mathfrak{L}_{\mathcal{T}_\ell \times \mathbb{O}(n-2)}^s$ при $\ell = 1, \dots, N$ отличаются от минимайзера в $\mathfrak{L}_{\mathbb{O}(2) \times \mathbb{O}(n-2)}^s$. Остается показать, что эти минимайзеры попарно различны.

Свойство инвариантности функции u под действием группы $\mathcal{T}_\ell \times \mathbb{O}(n-2)$ переносится на КС-продолжение (СТ-продолжение): если $\tilde{w}(x, t)$ — продолжение функции $u(x)$, то $\tilde{w}(gx, t)$ — продолжение функции $u(gx) \equiv u(x), \forall g \in \mathcal{T}_\ell$. Это продолжения одной и той же функции, в силу единственности они совпадают:

$$\tilde{w}(x, t) = \tilde{w}(gx, t), \quad \forall g \in \mathcal{T}_\ell \times \mathbb{O}(n-2).$$

Таким образом, продолжение является минимайзером функционала энергии $\mathcal{E}_{s, \mathbb{K}_r^n}(w)$ по подпространству $\mathcal{T}_\ell \times \mathbb{O}(n-2)$ -инвариантных функций в соответствующем пространстве $\mathfrak{W}_s$. Пусть $\ell_1, \ell_2 \in 1, \dots, N$, $\ell_1 > \ell_2$, рассмотрим два случая:

Первый случай (ℓ_1 делится на ℓ_2). Пусть u_{ℓ_1} и u_{ℓ_2} — минимайзеры по $\mathfrak{L}_{\mathcal{T}_{\ell_1} \times \mathbb{O}(n-2)}^s$ и $\mathfrak{L}_{\mathcal{T}_{\ell_2} \times \mathbb{O}(n-2)}^s$ с единичной нормой в $L_q(\mathbb{K}_r^n)$, им соответствуют продолжения w_{ℓ_1} и w_{ℓ_2} . Определим функцию $v := u_{\ell_1}(\tau_y, \frac{\ell_2}{\ell_1} \theta_y, z)$: очевидно, $v \in \mathfrak{L}_{\mathcal{T}_{\ell_2} \times \mathbb{O}(n-2)}^s$, $\|v\|_{L_q(\mathbb{K}_r^n)} = 1$ и функция $w := w_{\ell_1}(\tau_y, \frac{\ell_2}{\ell_1} \theta_y, z, t)$ является допустимым продолжением v . Имеем

$$\begin{aligned} [u_{\ell_2}]_{\tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)}^2 / (C_s \omega_{n-3}) &\leq [v]_{\tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)}^2 / (C_s \omega_{n-3}) \leq \mathcal{E}_{s, \mathbb{K}_r^n}(w) / (C_s \omega_{n-3}) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty t^{1-2s} \tau_y |z|^{n-3} (w_{\tau_y}^2 + \tau_y^{-2} w_{\theta_y}^2 + w_z^2 + w_t^2) dz d\theta_y d\tau_y dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty t^{1-2s} \tau_y |z|^{n-3} ((w_{\ell_1})_{\tau_y}^2 + \tau_y^{-2} \frac{\ell_2^2}{\ell_1^2} (w_{\ell_1})_{\theta_y}^2 + (w_{\ell_1})_z^2 + (w_{\ell_1})_t^2) dz d\theta_y d\tau_y dt \\ &\stackrel{*}{<} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty t^{1-2s} \tau_y |z|^{n-3} ((w_{\ell_1})_{\tau_y}^2 + \tau_y^{-2} (w_{\ell_1})_{\theta_y}^2 + (w_{\ell_1})_z^2 + (w_{\ell_1})_t^2) dz d\theta_y d\tau_y dt \\ &= \mathcal{E}_{s, \mathbb{K}_r^n}(w_{\ell_1}) / (C_s \omega_{n-3}) = [u_{\ell_1}]_{\tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}_r^n)}^2 / (C_s \omega_{n-3}), \end{aligned}$$

неравенство (*) строгое, поскольку при $r \geq r_1$ функция u_{ℓ_1} не принадлежит подпространству $\mathfrak{L}_{\mathbb{O}(2) \times \mathbb{O}(n-2)}^s$. Таким образом, энергии у u_{ℓ_1} и u_{ℓ_2} различны, и эти минимайзеры не могут совпадать.

Второй случай (ℓ_1 не делится на ℓ_2). Если минимайзеры по $\mathfrak{L}_{\mathcal{T}_{\ell_1} \times \mathbb{O}(n-2)}^s$ и $\mathfrak{L}_{\mathcal{T}_{\ell_2} \times \mathbb{O}(n-2)}^s$ совпадают, то этот минимайзер принадлежит $\mathfrak{L}_{\mathcal{T}_{\text{НОК}(\ell_1, \ell_2)} \times \mathbb{O}(n-2)}^s$. Применяя утверждение первого случая к числам ℓ_1 и $\text{НОК}(\ell_1, \ell_2)$, получаем требуемое. ■

Замечание 2.5. Для оператора Лапласа и p -лапласиана теорема 2.1 справедлива и в случае $n = 3$. Известные доказательства этих утверждений требуют более продвинутых методов изучения концентрации решений, поэтому для дробных лапласианов Дирихле вопрос множественности при $n = 3$ остается открытым.

Глава 3. Разрешимость полулинейной задачи Неймана с критической правой частью

3.1 Постановка задачи

Данная глава посвящена вопросу существования решений с минимальной энергией в $\mathcal{C}^2$ -гладкой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ для задачи

$$(-\Delta_\Omega^N)^s_{Sp} u + u = |u|^{2^*_s-2} u, \quad (3.1)$$

где $s \in (0, 1)$ и $u \in \mathcal{H}^s(\Omega)$.

Решение задачи (3.1) с минимальной энергией — это (с точностью до домножения на константу) минимайзер функционала $\mathcal{I}_{s,2^*_s,\Omega}^{Sp,N}[u]$:

$$\mathcal{I}_{s,2^*_s,\Omega}^{Sp,N}[u] := \frac{\|u\|_{\mathcal{H}^s(\Omega)}^2}{\|u\|_{L_{2^*_s}(\Omega)}^2} \equiv \frac{\langle (-\Delta_\Omega^N)^s_{Sp} u, u \rangle + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|u\|_{L_{2^*_s}(\Omega)}^2}, \quad \mathcal{S}_{s,\Omega}^{Sp,N} := \inf_{u \in \mathcal{H}^s(\Omega)} \mathcal{I}_{s,2^*_s,\Omega}^{Sp,N}[u]. \quad (3.2)$$

В силу неоднородности $\mathcal{I}_{s,2^*_s,\Omega}^{Sp,N}[u]$ при гомотетиях, в пространстве (при $\Omega = \mathbb{R}^n$) или полупространстве (при $\Omega = \mathbb{R}_+^n$) инфимум в (3.2) не достигается, поэтому решений с минимальной энергией у задачи (3.1) не существует. Однако неравенство Соболева (1.12) показывает, что

$$\mathcal{S}_{s,\mathbb{R}^n} := \mathcal{S}_{s,s,\mathbb{R}^n} \equiv \min_{u \in \mathcal{D}^s(\mathbb{R}^n)} \frac{\langle (-\Delta)^s u, u \rangle}{\|u\|_{L_{2^*_s}(\mathbb{R}^n)}^2} > 0,$$

и этот минимум достигается на единственной (здесь и далее в этой главе: *с точностью до гомотетий, домножений на константу и переносов*) функции $\Phi_{s,a}(x)$, см. (1.14). Более того, в полупространстве $\mathbb{R}_+^n$ имеет место соотношение (см. [68, теорема 1.2])

$$\mathcal{S}_{s,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,N} = \min_{u \in \mathcal{D}^s(\mathbb{R}_+^n)} \frac{\langle (-\Delta_{\mathbb{R}_+^n}^N)^s_{Sp} u, u \rangle}{\|u\|_{L_{2^*_s}(\mathbb{R}_+^n)}^2} \quad \text{с} \quad \mathcal{S}_{s,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,N} = 2^{-\frac{2s}{n}} \mathcal{S}_{s,\mathbb{R}^n}, \quad (3.3)$$

а минимайзер, как и в $\mathbb{R}^n$, единственен и равен $\Phi_{s,a}(x)$. В частности, $\Phi_{s,a}(x)$ (после домножения на подходящую константу) является решением с минимальной энергией для уравнения

$$(-\Delta_{\mathbb{R}_+^n}^N)^s_{Sp} u = |u|^{2^*_s-2} u \quad \text{в} \quad \mathbb{R}_+^n.$$

В настоящей главе получен следующий результат:

Теорема 3.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ — C^2 -гладкая ограниченная область, и $2s > 1$. Тогда задача (3.1) имеет неотрицательное нетривиальное решение с минимальной энергией.*

Замечание 3.1. *Мы полагаем, что условия теоремы 3.1 являются точными, однако этот вопрос остается открытым. Для других определений дробного лапласиана Неймана (см., напр., [68]) аналогичные задачи не рассматривались.*

Глава имеет следующую структуру: в §3.2 мы начинаем доказательство теоремы 3.1 и выводим существование решения с минимальной энергией в случае компактности из трех вспомогательных лемм. Доказательства этих лемм приведены в §3.3. В §3.4 мы строим пробную функцию, существование которой исключает возможность случая концентрации, что и доказывает теорему 3.1 полностью.

3.2 Начало доказательства теоремы 3.1 — принцип концентрации-компактности

Напомним, что в ограниченной области Ω областью определения формы $\langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u, u \rangle$ является пространство $\mathcal{H}^s(\Omega)$ с нормой (1.19)

$$\|u\|_{\mathcal{H}^s(\Omega)}^2 := \langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u, u \rangle + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Также заметим, что решения с минимальной энергией в задаче (3.1) можно считать неотрицательными. Действительно, как показывает предложение 1.2, замена $u \rightarrow |u|$ уменьшает значение функционала $\mathcal{I}_{s,2_s^*,\Omega}^{Sp,N}[u]$.

Доказательство теоремы 3.1. Поскольку вложение $\mathcal{H}^s(\Omega) \hookrightarrow L_{2_s^*}(\Omega)$ является критическим, оно требует модификации предельного случая принципа концентрации-компактности П.–Л. Лионса [59; 60]. Рассмотрим минимизирующую последовательность $u_k(x)$ для функционала (3.2): согласно предложению 1.2 можно считать, что $u_k(x) \geq 0$ и $\|u_k\|_{L_{2_s^*}(\Omega)} = 1$. По функциям u_k

построим СТ-продолжения $w_k(X)$ и определим функции $U_k(x)$ формулой

$$U_k(x) := C_s \int_0^\infty t^{1-2s} |\nabla_X w_k(X)|^2 dt. \quad (3.4)$$

Поскольку последовательность $\{u_k\}$ ограничена в $\mathcal{H}^s(\Omega)$, функции w_k ограничены по норме, порождаемой квадратичной формой $\mathcal{E}_{s,\Omega}[w] + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$, а функции U_k и $|u_k|^{2_s^*}$ ограничены в $L_1(\Omega)$. Не умаляя общности, можно считать, что:

- $u_k \rightharpoonup u$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$; отсюда следует, что $u_k \rightarrow u$ в $L_2(\Omega)$;
- $\nabla_X w_k \rightharpoonup \nabla_X w$ в $L_2(\Omega \times \mathbb{R}_+, t^{1-2s})$ (это соотношение определяет w с точностью до константы);
- $|u_k|^{2_s^*} \rightharpoonup \mu$ и $U_k \rightarrow \mathcal{M}$ в пространстве мер на $\overline{\Omega}$.

Из построения u_k и U_k следует, что выполнена цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 1 d\mathcal{M} + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} [\|U_k\|_{L_1(\Omega)} + \|u_k\|_{L_2(\Omega)}^2] \\ &= \mathcal{S}_{s,\Omega}^{Sp,N} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_{L_{2_s^*}(\Omega)}^2 = \mathcal{S}_{s,\Omega}^{Sp,N} \cdot \left(\int_{\Omega} 1 d\mu \right)^{2/2_s^*}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Следующие утверждения доказаны в §3.3:

Лемма 3.1. *Произвольную константу в определении w можно выбрать так, что функция w является СТ-продолжением функции u .*

Лемма 3.2. *Для мер μ и $\mathcal{M}$ справедливы соотношения:*

$$\mu = |u|^{2_s^*} + \sum_{j \in J} \alpha_j \delta_{x_j}; \quad \alpha_j \geq 0; \quad (3.6)$$

$$\mathcal{M} \geq U + \sum_{j \in J} \beta_j \delta_{x_j}; \quad \beta_j \geq \mathcal{S}_{s,\Omega}^{Sp,N} \cdot \alpha_j^{2/2_s^*}, \quad (3.7)$$

где $j \in J$ — не более чем счетный набор индексов, δ_{x_j} — дельта-функции в точках $x_j \in \overline{\Omega}$, а функция U получается из w по формуле (3.4).

Неравенство (3.7), равенство (1.31) и лемма 3.1 показывают, что выполнено соотношение

$$\int_{\Omega} 1 d\mathcal{M} \geq \|U\|_{L_1(\Omega)} + \mathcal{S}_{s,\Omega}^{Sp,N} \cdot \sum_{j \in J} \alpha_j^{2/2_s^*} = \langle (-\Delta_{\Omega}^N)_{Sp}^s u, u \rangle + \mathcal{S}_{s,\Omega}^{Sp,N} \cdot \sum_{j \in J} \alpha_j^{2/2_s^*}$$

откуда, с учетом (3.2), получаем оценку на левую часть (3.5)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 1d\mathcal{M} + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 &\geq \langle (-\Delta_{\Omega}^N)^s_{Sp} u, u \rangle + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \mathcal{S}_{s,\Omega}^{Sp,N} \cdot \sum_{j \in J} \alpha_j^{2/2_s^*} \\ &\geq \mathcal{S}_{s,\Omega}^{Sp,N} \cdot \left(\|u\|_{L_{2_s^*}(\Omega)}^2 + \sum_{j \in J} \alpha_j^{2/2_s^*} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Отсюда, преобразуя правую часть (3.5) с учетом (3.6), получаем

$$\mathcal{S}_{s,\Omega}^{Sp,N} \cdot \left(\|u\|_{L_{2_s^*}(\Omega)}^{2_s^*} + \sum_{j \in J} \alpha_j \right)^{2/2_s^*} \geq \mathcal{S}_{s,\Omega}^{Sp,N} \cdot \left(\|u\|_{L_{2_s^*}(\Omega)}^2 + \sum_{j \in J} \alpha_j^{2/2_s^*} \right). \quad (3.9)$$

Эта оценка может быть выполнена только в том случае, если в ее правой части есть ровно одно ненулевое слагаемое, а сама оценка обращается в равенство. Таким образом, у нас есть два варианта:

1 (*Компактность*). Все α_j равны нулю: будучи частью (3.9), оценка (3.8) также вырождается в равенство и $\mathcal{I}_{s,2_s^*,\Omega}^{Sp,N}[u] = \mathcal{S}_{s,\Omega}^{Sp,N}$, поэтому u минимизирует функционал $\mathcal{I}_{s,2_s^*,\Omega}^{Sp,N}[u]$ и, после домножения на подходящую константу, является решением задачи (3.1) с минимальной энергией.

2 (*Концентрация*). Есть ровно одно ненулевое слагаемое α_j : можно считать, что $\alpha_0 = 1$ и $u \equiv 0$.

Доказательство следующего утверждения также содержится в §3.3:

Лемма 3.3. *В случае концентрации выполнено неравенство*

$$\mathcal{S}_{s,\Omega}^{Sp,N} \geq \min \left(\mathcal{S}_{s,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,N}, \mathcal{S}_{s,\mathbb{R}^n} \right). \quad (3.10)$$

Замечание 3.2. *Правая часть (3.10) равна $\mathcal{S}_{s,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,N}$, как показывает (3.3).*

Таким образом, теорема 3.1 будет доказана, если мы построим пробную функцию $\check{u} \in \mathcal{H}^s(\Omega)$, для которой выполнено неравенство

$$\mathcal{I}_{s,2_s^*,\Omega}^{Sp,N}[\check{u}] < \mathcal{S}_{s,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,N}. \quad (3.11)$$

Такая функция будет построена в §3.4. ■

3.3 Доказательство лемм 3.1–3.3

Доказательство леммы 3.1. Напомним, что функция w определялась сходимостью $\nabla_X w_k \rightarrow \nabla_X w$ в $L_2(\Omega \times \mathbb{R}_+, t^{1-2s})$, где w_k являются СТ-продолжениями функций u_k . Для самих функций u_k выполнено $u_k \rightarrow u$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$, и, следовательно, $u_k \rightarrow u$ в $L_2(\Omega)$.

Для функции $u \in \mathcal{H}^s(\Omega)$ обозначим ее СТ-продолжение через $\tilde{w}$. Это продолжение может быть разложено в ряд Фурье по собственным функциям задачи Неймана для оператора Лапласа (см. [82, (3.1)–(3.8)]):

$$\tilde{w}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i(t) \varphi_{N,i}(x) \quad \text{с} \quad d_i(t) := \langle u, \varphi_{N,i} \rangle \cdot \mathfrak{Q}_s(\lambda_{N,i}^{1/2} t), \quad \mathfrak{Q}_s(\tau) := \tau^s \frac{2^{1-s}}{\Gamma(s)} \mathfrak{K}_s(\tau). \quad (3.12)$$

Пользуясь асимптотиками (1.2) и (1.3) для $\mathfrak{K}_s(\tau)$, получаем оценку

$$\mathfrak{Q}_s(\tau) \leq C \cdot \min(1, \tau^{-1}), \quad (3.13)$$

поэтому при любом $i \geq 2$ выполнено

$$\|\mathfrak{Q}_s(\lambda_{N,i}^{1/2} t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^2 \leq \int_0^1 \mathfrak{Q}_s^2(\lambda_{N,i}^{1/2} t) dt + C \int_1^{\infty} \lambda_{N,i}^{-1} t^{-2} dt \leq C(\lambda_{N,2}). \quad (3.14)$$

Пусть $\delta < 1$. Покажем, что $w_k \rightarrow \tilde{w}$ в $L_2(\Omega \times [\delta, \delta^{-1}])$: из (3.12) и оценок (3.14) следует, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{w} - w_k\|_{L_2(\Omega \times [\delta, \delta^{-1}])}^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle u - u_k, \varphi_{N,i} \rangle^2 \cdot \|\mathfrak{Q}_s(\lambda_{N,i}^{1/2} t)\|_{L_2[\delta, \delta^{-1}]}^2 \\ &\leq (C(\delta) + C(\lambda_{N,2})) \cdot \|u - u_k\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

С другой стороны, пользуясь разложением (1.4), запишем w_k как сумму ортогональных в $L_2(\Omega \times [\delta, \delta^{-1}])$ слагаемых:

$$w_k = \bar{w}_k + c_k, \quad \bar{w}_k := w_k - (\delta^{-1} - \delta)|\Omega|^{-1} \cdot \int_{\delta}^{\delta^{-1}} \int_{\Omega} w_k dX.$$

Поскольку $\nabla_X w_k \rightarrow \nabla_X w$ в $L_2(\Omega \times [\delta, \delta^{-1}])$, получаем сходимость $\bar{w}_k \rightarrow \bar{w}$ в $W_2^1(\Omega \times [\delta, \delta^{-1}])$. Отсюда следует сходимость $\bar{w}_k \rightarrow \bar{w}$ в $L_2(\Omega \times [\delta, \delta^{-1}])$, что влечет $w = \tilde{w} + C$. ■

Доказательство леммы 3.2. Основано на предельном случае принципа Лионса [59; 60] и проводится аналогично [113, теорема 1.4.2]. Разберем два случая: $u \equiv 0$ и $u \not\equiv 0$.

1. Пусть $u \equiv 0$. Воспользуемся представлением (1.4): пусть $u_k := \bar{u}_k + c_k$. Поскольку $u_k \rightarrow u \equiv 0$ сильно в $L_2(\Omega)$, из равенства

$$\|u_k\|_{L_2(\Omega)}^2 = \|\bar{u}_k\|_{L_2(\Omega)}^2 + c_k^2 \cdot |\Omega|$$

имеем $\bar{u}_k \rightarrow 0$ в $L_2(\Omega)$ и $c_k \rightarrow 0$. Более того, для $\eta \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ и любого $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k \eta\|_{L_{2_s^*}^*(\Omega)}^{2_s^*} &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left[(1 + \varepsilon) \cdot \|\bar{u}_k \eta\|_{L_{2_s^*}^*(\Omega)}^{2_s^*} + C(\varepsilon) c_k^{2_s^*} \|\eta\|_{L_{2_s^*}^*(\Omega)}^{2_s^*} \right] \\ &= (1 + \varepsilon) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{u}_k \eta\|_{L_{2_s^*}^*(\Omega)}^{2_s^*}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Из (1.17) следует, что $\langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s \bar{u}_k, \bar{u}_k \rangle = \langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u_k, u_k \rangle$, поэтому из (3.15) при $\eta \equiv 1$ получаем

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{s, 2_s^*, \Omega}^{Sp, N}[\bar{u}_k] &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u_k, u_k \rangle + \|u_k\|_{L_2(\Omega)}^2}{(1 + \varepsilon)^{-2/2_s^*} \cdot \|u_k\|_{L_{2_s^*}^*(\Omega)}^2} \\ &= (1 + \varepsilon)^{2/2_s^*} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{s, 2_s^*, \Omega}^{Sp, N}[u_k] = (1 + \varepsilon)^{2/2_s^*} \cdot \mathcal{S}_{s, \Omega}^{Sp, N}. \end{aligned}$$

Поскольку ε произвольно, получаем, что последовательность $\{\bar{u}_k\}$ является минимизирующей. Более того, из обратного к (3.15) неравенства

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{u}_k \eta\|_{L_{2_s^*}^*(\Omega)}^{2_s^*} &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left[(1 + \varepsilon) \cdot \|u_k \eta\|_{L_{2_s^*}^*(\Omega)}^{2_s^*} + C(\varepsilon) c_k^{2_s^*} \|\eta\|_{L_{2_s^*}^*(\Omega)}^{2_s^*} \right] \\ &= (1 + \varepsilon) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k \eta\|_{L_{2_s^*}^*(\Omega)}^{2_s^*}, \end{aligned}$$

следует $|\bar{u}_k|^{2_s^*} \rightharpoonup \mu$. СТ-продолжения функций $\bar{u}_k$ имеют вид $\bar{w}_k := w_k - c_k$, и поэтому функции U_k из формулы (3.4) не меняются при замене u_k на $\bar{u}_k$.

Из того факта, что $\bar{w}_k \eta$ — допустимое продолжение $\bar{u}_k \eta$, имеем

$$\mathcal{S}_{s, \Omega}^{Sp, N} \cdot \|\bar{u}_k \eta\|_{L_{2_s^*}^*(\Omega)}^2 \leq \langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s \bar{u}_k \eta, \bar{u}_k \eta \rangle + \|\bar{u}_k \eta\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \mathcal{E}_{s, \Omega}[\bar{w}_k \eta] + \|\bar{u}_k \eta\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Из сходимости $\bar{u}_k \rightarrow 0$ в $L_2(\Omega)$ получаем

$$\begin{aligned} C_s^{-1} \mathcal{S}_{s, \Omega}^{Sp, N} \left(\int_{\Omega} \eta^{2_s^*}(x) d\mu \right)^{2/2_s^*} &\leq C_s^{-1} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{s, \Omega}[\bar{w}_k \eta] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_{\Omega} \left[t^{1-2s} |\nabla_X \bar{w}_k|^2 \eta^2 + 2t^{1-2s} \langle \nabla_x \bar{w}_k, \nabla_x \eta \rangle \bar{w}_k \eta + t^{1-2s} |\nabla_x \eta|^2 \bar{w}_k^2 \right] dX. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Предел первого слагаемого в (3.16) равен

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_\Omega t^{1-2s} |\nabla_X \bar{w}_k|^2 \eta^2 dX = C_s^{-1} \cdot \int_\Omega \eta^2(x) d\mathcal{M}.$$

Покажем, что предел третьего слагаемого в (3.16) равен нулю. Воспользуемся представлением (3.12) для $\bar{w}_k$ (здесь суммирование ведется по $i \geq 2$)

$$\bar{w}_k(X) = \sum_{i=2}^\infty d_{ik}(t) \varphi_{N,i}(x) \quad \text{с} \quad d_{ik}(t) = \langle \bar{u}_k, \varphi_{N,i} \rangle \cdot \Omega_s(\lambda_{N,i}^{1/2} t).$$

Из оценки (3.13) и того факта, что $\lambda_{N,i} \rightarrow \infty$, имеем

$$\int_\Omega \bar{w}_k^2(X) |\nabla_x \eta|^2 dx \leq C(\lambda_{N,2}) \cdot \sum_{i=2}^\infty \langle \bar{u}_k, \varphi_{N,i} \rangle^2 \cdot \min(1, t^{-2})$$

откуда получаем требуемое равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_\Omega t^{1-2s} |\nabla_x \eta|^2 \bar{w}_k^2 dX \leq C \left(\int_0^1 t^{1-2s} dt + \int_1^\infty t^{-1-2s} dt \right) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega \bar{u}_k^2 dx = 0.$$

Второе слагаемое в (3.16) оценивается через первое и третье по неравенству Коши-Буняковского-Шварца, поэтому неравенство (3.16) принимает вид

$$\mathcal{S}_{s,\Omega}^{Sp,N} \cdot \left(\int_\Omega \eta^{2^*}(x) d\mu \right)^{2/2^*} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{s,\Omega}[\bar{w}_k \eta] = \int_\Omega \eta^2(x) d\mathcal{M}. \quad (3.17)$$

Дальнейшие рассуждения совпадают с локальным случаем; приведем их полностью: аппроксимацией на любом борелевском множестве $E \subset \Omega$ получаем неравенство

$$\mathcal{S}_{s,\Omega}^{Sp,N} \cdot \mu(E)^{2/2^*} \leq \mathcal{M}(E). \quad (3.18)$$

Ввиду конечности меры $\mathcal{M}$ множество ее атомов $A := \{x \in \Omega \mid \mathcal{M}(\{x\}) > 0\}$ не более чем счетно. Обозначим множество индексов через J , тогда имеем $A = \{x_j\}_{j \in J}$, $\beta_j := \mathcal{M}(\{x_j\})$, и выполнено неравенство $\mathcal{M} \geq \sum_{j \in J} \beta_j \delta_{x_j}$. Поскольку из (3.18) следует абсолютная непрерывность μ относительно $\mathcal{M}$, имеем

$$\mu(E) = \int_E f(x) d\mathcal{M}, \quad \text{где} \quad f(x) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(\mathbb{B}_r(x))}{\mathcal{M}(\mathbb{B}_r(x))} \quad \text{для } \mathcal{M}\text{-п.в. } x \in \Omega.$$

Также в силу (3.18) получаем

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(\mathbb{B}_r(x))}{\mathcal{M}(\mathbb{B}_r(x))} \leq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{M}^{\frac{2s}{n-2s}}(\mathbb{B}_r(x))}{\mathcal{S}_{s,\Omega}^{Sp,N}} = 0 \quad \mathcal{M}\text{-п.в. на } \Omega \setminus A.$$

Для окончания доказательства обозначим $\alpha_j := \beta_j f(x_j)$, неравенства между α_j и β_j следуют из (3.18).

2. Теперь рассмотрим общий случай. Положим $\widehat{u}_k := u_k - u$, тогда теорема Брезиса–Либа (см. [113, гл.1, теорема 8]) показывает, что $|\widehat{u}_k|^{2_s^*}$ слабо сходятся к мере $\mu - |u|^{2_s^*}$ на $\overline{\Omega}$. Представление для μ получается применением п.1 для функций $\widehat{u}_k$.

Получим неравенство для меры $\mathcal{M}$. По функциям $\widehat{u}_k$ строим СТ-продолжения $\widehat{w}_k$ и функции $\widehat{U}_k(x)$ из формулы (3.4). Из леммы 3.1 следует, что $\widehat{w}_k = w_k - w$ (продолжение разности равно разности продолжений), поэтому для любой $\eta(x) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ имеем

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{U_k - \widehat{U}_k}{C_s} \cdot \eta(x) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} t^{1-2s} (|\nabla_X w_k|^2 - |\nabla_X (w_k - w)|^2) \eta(x) dX \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} t^{1-2s} (2\langle \nabla_X w_k, \nabla_X w \rangle - |\nabla_X w|^2) \eta(x) dX \stackrel{*}{=} \int_{\Omega} \frac{U}{C_s} \cdot \eta(x) dx, \end{aligned}$$

(равенство $(*)$ следует из $\nabla_X w_k \rightarrow \nabla_X w$). Используя п.1, получаем требуемое:

$$\mathcal{M} = \lim_{k \rightarrow \infty} U_k = U + \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{U}_k \geq U + \sum_{j \in J} \beta_j \delta_{x_j}. \quad \blacksquare$$

Доказательство леммы 3.3. Напомним, что $\{u_k\}$ — минимизирующая последовательность для функционала (3.2), $|u_k|^{2_s^*} \rightarrow \delta_{x_0}$ в пространстве мер на $\overline{\Omega}$, а $\mathcal{M} = \mathcal{S}_{s,\Omega}^{Sp,N} \cdot \delta_{x_0}$. В частности, это означает, что $u_k \rightarrow 0$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$, и мы находимся в условиях доказательства п.1 леммы 3.2. Поэтому $\{\overline{u}_k\}$ также является минимизирующей последовательностью для функционала (3.2). Также, далее будем считать $x_0 = \mathbf{0}_n$.

Напомним, что функция $\varphi_\varepsilon(x)$ определяется формулой (1.1). Покажем, что последовательность $\{\overline{u}_k \varphi_\varepsilon\}$ является минимизирующей. Действительно, $\|\overline{u}_k \varphi_\varepsilon\|_{L_{2_s^*}^2(\Omega)}^2 \rightarrow 1$, а для числителя функционала (3.2) из (3.17) при $\eta = \varphi_\varepsilon$ получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle (-\Delta_\Omega^N)^s \overline{u}_k \varphi_\varepsilon, \overline{u}_k \varphi_\varepsilon \rangle \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{s,\Omega}[\overline{u}_k \varphi_\varepsilon] = \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon^2(x) d\mathcal{M} = \mathcal{S}_{s,\Omega}^{Sp,N}.$$

Поскольку $\bar{u}_k \rightarrow 0$ в $L_2(\Omega)$, получаем $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{s,2_s^*,\Omega}^{Sp,N}[\bar{u}_k \varphi_\varepsilon] \leq \mathcal{S}_{s,\Omega}^{Sp,N}$, и поэтому

$$\mathcal{S}_{s,\Omega}^{Sp,N} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{s,2_s^*,\Omega}^{Sp,N}[\bar{u}_k \varphi_\varepsilon] = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\langle (-\Delta_\Omega^N)^s \bar{u}_k \varphi_\varepsilon, \bar{u}_k \varphi_\varepsilon \rangle}{\|\bar{u}_k \varphi_\varepsilon\|_{L_{2_s^*}(\Omega)}^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}_{s,\Omega}[\bar{w}_k \varphi_\varepsilon]}{\|\bar{u}_k \varphi_\varepsilon\|_{L_{2_s^*}(\Omega)}^2}.$$

Разберем два случая: $\mathbf{0}_n \in \Omega$ и $\mathbf{0}_n \in \partial\Omega$.

1. Пусть $\mathbf{0}_n \in \Omega$. Продолжим функцию $\bar{u}_k \varphi_\varepsilon$ нулем и обозначим ее КС-продолжение в $\mathbb{R}^n$ через $\dot{w}_k$. Поскольку $\bar{w}_k \varphi_\varepsilon$ является допустимым продолжением $\bar{u}_k \varphi_\varepsilon$ в $\mathbb{R}^n$, имеем

$$\mathcal{S}_{s,\Omega}^{Sp,N} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}_{s,\Omega}[\bar{w}_k \varphi_\varepsilon]}{\|\bar{u}_k \varphi_\varepsilon\|_{L_{2_s^*}(\Omega)}^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}_{s,\mathbb{R}^n}[\bar{w}_k \varphi_\varepsilon]}{\|\bar{u}_k \varphi_\varepsilon\|_{L_{2_s^*}(\mathbb{R}^n)}^2} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}_{s,\mathbb{R}^n}[\dot{w}_k]}{\|\bar{u}_k \varphi_\varepsilon\|_{L_{2_s^*}(\mathbb{R}^n)}^2} \geq \mathcal{S}_{s,\mathbb{R}^n}.$$

2. Пусть $\mathbf{0}_n \in \partial\Omega$. При малых ε воспользуемся параметризацией границы $x_n = F(x')$ и заменой переменных (1.5), распрямляющей эту границу: имеем $F \in \mathcal{C}^2$ и выполнено соотношение

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{s,\Omega}^{Sp,N} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}_{s,\Omega}[\bar{w}_k \varphi_\varepsilon]}{\|\bar{u}_k \varphi_\varepsilon\|_{L_{2_s^*}(\Omega)}^2} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{C_s \cdot \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_+^n} t^{1-2s} |\nabla_X [\bar{w}_k \varphi_\varepsilon](\Theta_1^{-1}(x), t)|^2 dX \cdot (1 + o_\varepsilon(1))}{\left(\int_{\mathbb{R}_+^n} [\bar{u}_k \varphi_\varepsilon]^{2_s^*}(\Theta_1^{-1}(x)) dx \right)^{2/2_s^*}} \end{aligned}$$

($o_\varepsilon(1)$ в числителе возникает из оценки производных $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ при замене переменных в градиенте). Ввиду того, что функция $\bar{w}_k(\Theta_1^{-1}(x), t) \cdot \varphi_\varepsilon(\Theta_1^{-1}(x))$ является допустимым продолжением функции $\bar{u}_k(\Theta_1^{-1}(x)) \cdot \varphi_\varepsilon(\Theta_1^{-1}(x))$, выполнено неравенство

$$\mathcal{S}_{s,\Omega}^{Sp,N} \geq \mathcal{S}_{s,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,N} \cdot (1 + o_\varepsilon(1)).$$

Поскольку ε может быть выбрано сколь угодно малым, лемма 3.3 доказана. $\blacksquare$

3.4 Окончание доказательства теоремы 3.1 — построение пробной функции

Для построения функции $\dot{y} \in \mathcal{H}^s(\Omega)$, удовлетворяющей (3.11), сначала получим оценки на КС-продолжение $\mathcal{W}_{s,a}(X)$ минимайзера $\Phi_{s,a}(x)$ (см. (1.14)).

Оно является решением задачи

$$-\operatorname{div}(t^{1-2s}\nabla_X\mathcal{W}_{s,a}(X))=0 \quad \text{в } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+; \quad \mathcal{W}_{s,a}|_{t=0}=\Phi_{s,a}(x), \quad (3.19)$$

а также единственным минимайзером функционала $\mathcal{E}_{s,\mathbb{R}^n}$ в $\mathfrak{W}_s(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$. Отсюда следует, что продолжение $\mathcal{W}_{s,a}(X)$ является невозрастающей функцией от $|x|$: симметризация Шварца по x не увеличивает $\mathcal{E}_{s,\mathbb{R}^n}$ (см. [53, теорема 2.31] для симметризации Штейнера; симметризация Шварца может быть получена как предел симметризаций Штейнера), а ее результат является допустимым продолжением $\Phi_{s,a}(x)$. Также отметим, что, в силу симметрии, продолжение $\mathcal{W}_{s,a}(X)$, ограниченное на $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+$, является СТ-продолжением $\Phi_{s,a}(x)$ в $\mathbb{R}_+^n$.

Лемма 3.4. *Для функций $\Phi_{s,a}(x)$ и $\mathcal{W}_{s,a}(X)$ выполнены равенства*

$$\Phi_{s,a}(ax) = a^{2s-n} \cdot \Phi_{s,1}(x) \quad \text{и} \quad \mathcal{W}_{s,a}(aX) = a^{2s-n} \cdot \mathcal{W}_{s,1}(X), \quad (3.20)$$

а также оценки (при $|x| > 1$ и $|X| > 1$ соответственно)

$$\Phi_{s,1}(x) \leq C|x|^{2s-n} \quad \text{и} \quad \mathcal{W}_{s,1}(X) \leq C|X|^{2s-n}. \quad (3.21)$$

Более того, для градиента $\nabla_X\mathcal{W}_{s,a}(X)$ выполнено равенство

$$\nabla_X\mathcal{W}_{s,a}(aX) = a^{2s-n-1} \cdot \nabla_X\mathcal{W}_{s,1}(X), \quad (3.22)$$

а при $|X| > 1$ и $2s > 1$ имеет место оценка

$$|\nabla_X\mathcal{W}_{s,1}(X)| \leq C|X|^{2s-n-1}. \quad (3.23)$$

Доказательство. Равенство (3.20) и оценка (3.21) для функции $\Phi_{s,a}$ очевидны из ее определения. Для доказательства свойств продолжения $\mathcal{W}_{s,a}$ выпишем его в явном виде: используя функцию Грина (1.25) и уравнение

$$(-\Delta)^s\Phi_{s,a}(x) = \frac{\mathcal{S}_{s,\mathbb{R}^n}}{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}^{2_s^*-2}(\mathbb{R}^n)}} \cdot \Phi_{s,a}^{2_s^*-1}(x) \quad \text{в } \mathbb{R}^n, \quad (3.24)$$

получаем

$$\mathcal{W}_{s,a}(X) = \frac{\mathcal{S}_{s,\mathbb{R}^n}}{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}^{2_s^*-2}(\mathbb{R}^n)}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}_s(x - \xi, t) \cdot \Phi_{s,a}^{2_s^*-1}(\xi) d\xi. \quad (3.25)$$

Градиент $\nabla_X \mathcal{W}_{s,a}(X)$ получается из (3.25) дифференцированием:

$$\nabla_X \mathcal{W}_{s,a}(X) = \frac{\mathcal{S}_{s,\mathbb{R}^n}}{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}^{2_s^*-2}(\mathbb{R}^n)}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_X \tilde{G}_s(x - \xi, t) \cdot \Phi_{s,a}^{2_s^*-1}(\xi) d\xi.$$

Равенства (3.20) и (3.22) для функции $\mathcal{W}_{s,a}(X)$ следуют из равенства

$$\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}^{2_s^*-2}(\mathbb{R}^n)} = a^{-2s} \cdot \|\Phi_{s,1}\|_{L_{2_s^*}^{2_s^*-2}(\mathbb{R}^n)};$$

для примера получим (3.20):

$$\mathcal{W}_{s,a}(aX) = \frac{\mathcal{S}_{s,\mathbb{R}^n} \cdot a^{2s}}{\|\Phi_{s,1}\|_{L_{2_s^*}^{2_s^*-2}(\mathbb{R}^n)}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \frac{C \cdot a^{-(n+2s)} \Phi_{s,1}^{2_s^*-1}(\xi) \cdot a^n}{(|x - \xi|^2 + t^2)^{\frac{n-2s}{2}} a^{n-2s}} d\xi = a^{2s-n} \cdot \mathcal{W}_{s,1}(X).$$

Остается получить оценки для $\mathcal{W}_{s,1}(X)$ и $\nabla_X \mathcal{W}_{s,1}(X)$. Они доказываются идентично; получим, например, оценку (3.23) для $\nabla_X \mathcal{W}_{s,1}(X)$. Поскольку для $|\nabla_X \tilde{G}_s(X)|$ выполнено очевидное неравенство

$$|\nabla_X \tilde{G}_s(X)| \leq \frac{C}{(|x|^2 + t^2)^{\frac{n-2s+1}{2}}},$$

имеем

$$|\nabla_X \mathcal{W}_{s,1}(X)| \leq \left(\int_{|\xi| \leq |X|/2} + \int_{|\xi| > |X|/2} \right) \frac{C d\xi}{(|x - \xi|^2 + t^2)^{\frac{n-2s+1}{2}} (1 + |\xi|^2)^{\frac{n+2s}{2}}} =: A_1 + A_2.$$

Оценка для A_1 следует из цепочки неравенств $\sqrt{|x - \xi|^2 + t^2} \geq |X| - |\xi| \geq \frac{|X|}{2}$:

$$A_1 \leq \frac{C}{|X|^{n-2s+1}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{n+2s}{2}}} = \frac{C}{|X|^{n-2s+1}}.$$

Оценка для A_2 следует из неравенств $3|\xi| \geq |x| + |\xi| \geq |x - \xi|$ и $2s > 1$:

$$A_2 \leq \frac{C}{|X|^{n-2s+1}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{|x - \xi|^{n-2s+1} (1 + |x - \xi|^2)^{2s-\frac{1}{2}}} = \frac{C}{|X|^{n-2s+1}}. \quad \blacksquare$$

Приступим к построению функции $\check{y}$. На границе $\mathcal{C}^2$ -гладкой области Ω всегда найдется такая точка $\tilde{x}$, что:

- область выпукла в малой окрестности $\mathbb{B}_\varepsilon(\tilde{x})$
- средняя кривизна H_0 границы $\partial\Omega$ в точке $\tilde{x}$ положительна
- область находится по одну сторону от касательной плоскости в точке $\tilde{x}$

(например, в качестве $\tilde{x}$ подходит точка касания сферы наименьшего радиуса, описанной вокруг Ω , и самой Ω). Мы будем считать, что $\tilde{x} = \mathbf{0}_n$, а ось x_n направлена вдоль внутренней нормали к $\partial\Omega$, и, таким образом, $\Omega \subset \mathbb{R}_+^n$. В таких координатах оказывается, что в качестве искомой функции $\tilde{y}$ можно взять функцию $\Phi_{s,a}(x)$ с малым параметром a .

Из уравнения (3.19) интегрированием по частям (с учетом (3.3) и (3.24)) получаем:

$$\begin{aligned} 0 = & C_s \int_0^\infty \int_\Omega \operatorname{div} (t^{1-2s} \nabla_X \mathcal{W}_{s,a}) \mathcal{W}_{s,a} dX = -C_s \int_0^\infty \int_\Omega t^{1-2s} |\nabla_X \mathcal{W}_{s,a}|^2 dX \\ & + \frac{\mathcal{S}_{s,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,N}}{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}^*(\mathbb{R}_+^n)}^{2_s^*-2}} \cdot \int_\Omega \Phi_{s,a}^{2_s^*} dx + C_s \int_0^\infty \int_{\partial\Omega} t^{1-2s} \langle \nabla_x \mathcal{W}_{s,a}, \vec{n} \rangle \cdot \mathcal{W}_{s,a} dX, \end{aligned}$$

откуда, поскольку $\mathcal{W}_{s,a}$ — допустимое продолжение $\Phi_{s,a}$ в Ω , имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{s,2_s^*,\Omega}^{Sp,N}[\Phi_{s,a}] &= \frac{\langle (-\Delta_\Omega^N)^s \Phi_{s,a}, \Phi_{s,a} \rangle + \|\Phi_{s,a}\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}(\Omega)}^2} \\ &\leq \frac{C_s \int_0^\infty \int_\Omega t^{1-2s} |\nabla_X \mathcal{W}_{s,a}|^2 dX + \|\Phi_{s,a}\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}(\Omega)}^2} \\ &= \mathcal{S}_{s,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,N} \cdot \left(\frac{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}(\Omega)}}{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}^*(\mathbb{R}_+^n)}} \right)^{2_s^*-2} + \frac{C_s \int_0^\infty \int_{\partial\Omega} t^{1-2s} \langle \nabla_x \mathcal{W}_{s,a}, \vec{n} \rangle \mathcal{W}_{s,a} dX}{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}(\Omega)}^2} + \frac{\|\Phi_{s,a}\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2_s^*}(\Omega)}^2}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

При интегрировании радиальных функций в окрестности нуля для формы объема выполнено представление (см., например, [93, §2.6])

$$dx = \frac{1}{2} (\omega_{n-1} r^{n-1} - H_0 \cdot \omega_{n-2} r^n + o(r^n)) dr.$$

Оценим каждый член в (3.26) по отдельности.

1. Сперва получим асимптотику $\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2s}^*(\Omega)}^{2_s^*}$ при малых a :

$$\begin{aligned} \|\Phi_{s,a}\|_{L_{2s}^*(\Omega)}^{2_s^*} &= \int_{\Omega} (a^2 + |x|^2)^{-n} dx = \left(\int_{\Omega \cap \mathbb{B}_{\varepsilon}} + \int_{\Omega \setminus \mathbb{B}_{\varepsilon}} \right) (a^2 + |x|^2)^{-n} dx \\ &= \int_{\Omega \cap \mathbb{B}_{\varepsilon}} (a^2 + |x|^2)^{-n} dx + C(\varepsilon) \\ &= \int_0^{\varepsilon} \frac{\omega_{n-1} r^{n-1}}{2(a^2 + r^2)^n} dr - \int_0^{\varepsilon} \frac{H_0 \cdot \omega_{n-2} r^n + o(r^n)}{2(a^2 + r^2)^n} dr + C(\varepsilon) =: B_1 - B_2 + C(\varepsilon). \end{aligned}$$

Главный член B_1 оценивается как

$$B_1 = a^{-n} \frac{\omega_{n-1}}{2} \left(\mathcal{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) - \int_{\varepsilon/a}^{\infty} \frac{r^{n-1} dr}{(1+r^2)^n} \right) = a^{-n} \frac{\omega_{n-1}}{2} \mathcal{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) - C(\varepsilon).$$

Оценка B_2 получается следующим образом:

$$\begin{aligned} B_2 &= a^{1-n} (1 + o_{\varepsilon}(1)) H_0 \frac{\omega_{n-2}}{2} \left(\mathcal{B}\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}\right) - \int_{\varepsilon/a}^{\infty} \frac{r^n dr}{(1+r^2)^n} \right) \\ &= a^{1-n} \frac{\omega_{n-1}}{2} \mathcal{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) \cdot C_1 (1 + o_{\varepsilon}(1)) - C(\varepsilon), \quad \text{где } C_1 = \frac{H_0 \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Объединяя оценки для B_1 и B_2 , мы получаем оценку нормы $\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2s}^*(\Omega)}$:

$$\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2s}^*(\Omega)}^{2_s^*} = a^{-n} \frac{\omega_{n-1}}{2} \mathcal{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) \cdot [1 - C_1 a (1 + o_{\varepsilon}(1))] + C(\varepsilon), \quad (3.27)$$

а из нее оценку первого члена в (3.26)

$$\begin{aligned} \frac{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2s}^*(\Omega)}^{2_s^*-2}}{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2s}^*(\mathbb{R}_+^n)}^{2_s^*-2}} &= \left(\frac{a^{-n} \frac{\omega_{n-1}}{2} \mathcal{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) \cdot [1 - C_1 a (1 + o_{\varepsilon}(1))] + C(\varepsilon)}{a^{-n} \frac{\omega_{n-1}}{2} \mathcal{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)} \right)^{\frac{2s}{n}} \\ &= 1 - C_2 a \cdot [1 + o_{\varepsilon}(1) + C(\varepsilon) o_a(1)] \quad \text{с константой } C_2 = \frac{2s}{n} \cdot C_1 > 0. \quad (3.28) \end{aligned}$$

2. Оценка последнего члена в (3.26) зависит от n и s . Выполнено равенство

$$\|\Phi_{s,a}\|_{L_2(\Omega)}^2 = \left(\int_{\Omega \cap \mathbb{B}_{\varepsilon}} + \int_{\Omega \setminus \mathbb{B}_{\varepsilon}} \right) (a^2 + |x|^2)^{2s-n} dx = \int_{\Omega \cap \mathbb{B}_{\varepsilon}} (a^2 + |x|^2)^{2s-n} dx + C(\varepsilon).$$

Поскольку $\Omega \cap \mathbb{B}_\varepsilon$ содержится в $\mathbb{R}_+^n \cap \mathbb{B}_\varepsilon$, первый интеграл оценивается сверху

$$\int_{\mathbb{B}_\varepsilon \cap \mathbb{R}_+^n} (a^2 + |x|^2)^{2s-n} dx = \frac{\omega_{n-1}}{2} \int_0^\varepsilon \frac{r^{n-1}}{(a^2 + r^2)^{n-2s}} dr \leq C(\varepsilon) \cdot \begin{cases} a^{4s-n} & \text{при } n > 4s, \\ |\ln(a)| & \text{при } n = 4s, \\ 1 & \text{при } n < 4s, \end{cases}$$

(заметим, что эта оценка точна по порядку), и, с учетом (3.27), имеем

$$\frac{\|\Phi_{s,a}\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2s}^*(\Omega)}^2} = \frac{\|\Phi_{s,a}\|_{L_2(\Omega)}^2}{Ca^{2s-n} \cdot [1 - Ca(1 + o_\varepsilon(1))]} \leq C(\varepsilon) \cdot \begin{cases} a^{2s} & \text{при } n > 4s, \\ a^{n-2s} |\ln(a)| & \text{при } n = 4s, \\ a^{n-2s} & \text{при } n < 4s. \end{cases} \quad (3.29)$$

3. Для оценки среднего члена в (3.26) разобьем его числитель на две части:

$$\left(\int_{\partial\Omega \cap \mathbb{B}_\varepsilon} + \int_{\partial\Omega \setminus \mathbb{B}_\varepsilon} \right) \int_0^\infty t^{1-2s} \langle \nabla_x \mathcal{W}_{s,a}, \vec{n} \rangle \cdot \mathcal{W}_{s,a} dX =: E_1 + E_2.$$

Поскольку функция $\mathcal{W}_{s,a}$ радиальна по x и убывает с ростом радиуса, а пересечение $\Omega \cap \mathbb{B}_\varepsilon$ выпукло, получаем, что нормальная производная $\langle \nabla_x \mathcal{W}_{s,a}, \vec{n} \rangle$ отрицательна при $x \in \partial\Omega \cap \mathbb{B}_\varepsilon$. Отсюда следует $E_1 \leq 0$.

Замечание 3.3. Более тонкие вычисления показывают, что $E_1 \stackrel{a}{\asymp} a^{1+2s-n}$, что после деления на $\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2s}^*(\Omega)}^2$ даст вклад порядка a в (3.26). Отрицательный член такого порядка у нас уже есть, поэтому уточнение оценки $E_1 \leq 0$ избыточно.

Для получения оценки на E_2 воспользуемся оценками (3.21) и (3.23):

$$\begin{aligned} E_2 &= \int_0^\infty \int_{\partial\Omega \setminus \mathbb{B}_\varepsilon} t^{1-2s} \langle \nabla_x \mathcal{W}_{s,a}, \vec{n} \rangle \cdot \mathcal{W}_{s,a} dS_x dt \leq \int_0^\infty \int_{\partial\Omega \setminus \mathbb{B}_\varepsilon} t^{1-2s} |\nabla_x \mathcal{W}_{s,a}| \cdot |\mathcal{W}_{s,a}| dS_x dt \\ &\leq Ca^{1-2s+n-1+1-2n+4s-1} \int_{a^{-1}(\partial\Omega \setminus \mathbb{B}_\varepsilon)} \int_0^\infty \frac{t^{1-2s}}{(|x|^2 + t^2)^{\frac{n-2s+1}{2}} (|x|^2 + t^2)^{\frac{n-2s}{2}}} dt dS_x \\ &= Ca^{2s-n} \int_{a^{-1}(\partial\Omega \setminus \mathbb{B}_\varepsilon)} |x|^{-2n+2s+1} dS_x = C \int_{\partial\Omega \setminus \mathbb{B}_\varepsilon} |x|^{-2n+2s+1} dS_x \leq C(\varepsilon). \quad (3.30) \end{aligned}$$

Из оценок (3.28), (3.29) и (3.30) следует оценка

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{s,2_s^*,\Omega}^{Sp,N}[\Phi_{s,a}] &\leq \mathcal{S}_{s,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,N} \cdot (1 - C_2 a [1 + o_\varepsilon(1) + C(\varepsilon)o_a(1)]) \\ &\quad + C(\varepsilon)a^{n-2s} + C(\varepsilon)a^{2s}(1 + o_a(1)). \end{aligned}$$

Поскольку $n \geq 3$ и $2s > 1$, имеем $\min(2s, n - 2s) > 1$, откуда следует, что при достаточно малых параметрах ε и a выполнено неравенство $\mathcal{I}_{s,2_s^*,\Omega}^{Sp,N}[\Phi_{s,a}] < \mathcal{S}_{s,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,N}$. Таким образом, неравенство (3.10) невозможно, что исключает возможность концентрации и доказывает теорему 3.1.

Глава 4. Качественные свойства решений полулинейной задачи Неймана

4.1 Постановка задачи

Данная глава посвящена качественным свойствам решений полулинейной задачи Неймана в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 1$ с липшицевой границей:

$$(-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u + u = |u|^{q-2}u, \quad u \in \mathcal{H}^s(\Omega), \quad s \in (0, 1). \quad (4.1)$$

Эта задача обобщает задачу (3.1): показатель q в правой части здесь необязательно критический; мы будем рассматривать показатели

$$q \in \begin{cases} [1, 2_s^*] & \text{при } n \geq 2 \text{ или } n = 1, s < \frac{1}{2}; \\ [1, \infty) & \text{при } n = 1, s = \frac{1}{2}; \\ [1, \infty] & \text{при } n = 1, s > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

По аналогии с функционалом $\mathcal{I}_{s, 2_s^*, \Omega}^{Sp, N}[u]$ из главы 3, определим функционал $\mathcal{I}_{s, q, \Omega}^{Sp, N}[u]$. Он порожден теоремой вложения $\mathcal{H}^s(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$:

$$\inf_{u \in \mathcal{H}^s(\Omega)} \mathcal{I}_{s, q, \Omega}^{Sp, N}[u] := \inf_{u \in \mathcal{H}^s(\Omega)} \frac{\|u\|_{\mathcal{H}^s(\Omega)}^2}{\|u\|_{L_q(\Omega)}^2} \equiv \inf_{u \in \mathcal{H}^s(\Omega)} \frac{\langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u, u \rangle + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|u\|_{L_q(\Omega)}^2} > 0. \quad (4.2)$$

Поскольку при $q \in [1, 2_s^*)$ вложение компактно, у функционала $\mathcal{I}_{s, q, \Omega}^{Sp, N}[u]$ существует минимайзер, который является решением с минимальной энергией для задачи (4.1). При $q = 2_s^*$ решение с минимальной энергией для задачи (4.1) существует в $\mathcal{C}^2$ -гладкой ограниченной области Ω при $n \geq 3$ и $q = 2_s^*$, как было доказано в теореме 3.1.

Замечание 4.1. Функция $u = \mathbf{1}$ (тождественно равная единице) является решением задачи (4.1), поскольку из (1.17) следует, что $(-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s \mathbf{1} = 0$.

Главный вопрос настоящей главы таков: *совпадают ли построенные выше решения с минимальной энергией с решением $u = \mathbf{1}$?*

Оказывается, что ответ на этот вопрос зависит от формы и размера области Ω . В дальнейшем будем считать, что область Ω имеет единичный

объем, и рассмотрим вложения (4.2) для семейства областей $\Omega_\varepsilon := \{\varepsilon x \mid x \in \Omega\}$. Положим $u_\varepsilon(y) := u(\varepsilon^{-1}y)$, тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u] &:= \frac{\mathcal{I}_{s,q,\Omega_\varepsilon}^{Sp,N}[u_\varepsilon]}{\varepsilon^{n-2s-\frac{2n}{q}}} = \frac{\varepsilon^{n-2s} \langle (-\Delta_\Omega^N)^s_{Sp} u, u \rangle + \varepsilon^n \|u\|_{L_2(\Omega)}^2}{\varepsilon^{n-2s-\frac{2n}{q}} \varepsilon^{\frac{2n}{q}} \|u\|_{L_q(\Omega)}^2} \\ &= \frac{\langle (-\Delta_\Omega^N)^s_{Sp} u, u \rangle + \varepsilon^{2s} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|u\|_{L_q(\Omega)}^2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Таким образом, вопрос о постоянстве решения с минимальной энергией для задачи (4.1) в области Ω_ε эквивалентен вопросу о постоянстве минимайзера функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon$ с параметром ε . Поскольку функционалы $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$ и $\mathcal{I}_{s,q,\Omega}^{Sp,N}[u]$ инвариантны относительно домножений u на константу, можно считать, что для минимайзера $\|u\|_{L_q(\Omega)} = 1$.

В локальном случае $s = 1$ про минимайзер функционала (4.3) известно следующее (в этом случае $\mathcal{H}^1(\Omega)$ совпадает с пространством Соболева $W_2^1(\Omega)$ со стандартной нормой):

1. Если $q \in [1, 2]$, то при любом $\varepsilon > 0$ функция **1** является единственным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{1,q}^\varepsilon[u]$;
2. Если же $q \in (2, 2_1^*]$, то:
 - при $\varepsilon > \varepsilon_1(q) := \sqrt{\lambda_{N,2}/(q-2)}$ (напомним, что $\lambda_{N,2}$ — первое ненулевое собственное число оператора Лапласа с условием Неймана) функция **1** не является *локальным* (а значит, и *глобальным*) минимайзером функционала $\mathcal{I}_{1,q}^\varepsilon[u]$ (см. [106, предложение 3.1]);
 - при $\varepsilon < \varepsilon_1(q)$ функция **1** дает *локальный* минимум функционала $\mathcal{I}_{1,q}^\varepsilon[u]$ (см. [106, предложение 3.2]);
 - существует такое $\mathcal{E}_1(q) > 0$, что при $\varepsilon \leq \mathcal{E}_1(q)$ функция **1** дает *глобальный* минимум функционала $\mathcal{I}_{1,q}^\varepsilon[u]$, а при $\varepsilon > \mathcal{E}_1(q)$ не дает (см. [106, предложения 3.5–3.7]);
 - функция $\mathcal{E}_1(q)$ непрерывна и монотонно убывает (см. [106, теорема 3.8]);
 - при $n = 1$ имеем $\mathcal{E}_1(q) = \varepsilon_1(q)$ (см. [105], а также [104]), а при $n \geq 2$ существуют как области с $\mathcal{E}_1(q) < \varepsilon_1(q)$ (см. [106, следствие 3.4] и [106, (3.6)]), так и области с $\mathcal{E}_1(q) = \varepsilon_1(q)$ (см. [112, теорема 3.1]).

В настоящей главе мы получим аналогичные результаты для функционала (4.3) при условии существования его минимайзера.

Замечание 4.2. При $q \in [1, 2]$ из неравенства Гёльдера следует, что $\|u\|_{L_q(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$, поэтому $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u] \geq \varepsilon^{2s} = \mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[\mathbf{1}]$. Поскольку для непостоянной функции $u(x)$ неравенство Гёльдера будет строгим, константа является единственным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$ при любом $s \in (0, 1]$.

Замечание 4.3. Как и в предыдущих главах, решения с минимальной энергией в задаче (4.1) можно считать неотрицательными: замена $u \rightarrow |u|$ уменьшает значение функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$, как показывает предложение 1.2.

Далее мы считаем, что $q > 2$ и все минимайзеры функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$ неотрицательны.

4.2 Локальное исследование функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$

Определим вспомогательный функционал

$$\mathcal{J}_{s,q}^\varepsilon[u] := \|u\|_{L_q(\Omega)}^2 \cdot (\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u] - \mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[\mathbf{1}]) = \langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u, u \rangle + \varepsilon^{2s} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 - \varepsilon^{2s} \|u\|_{L_q(\Omega)}^2,$$

из построения следует, что функция $\mathbf{1}$ является минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$ тогда и только тогда, когда функционал $\mathcal{J}_{s,q}^\varepsilon[u]$ неотрицателен (очевидно, что $\mathcal{J}_{s,q}^\varepsilon[\mathbf{1}] = 0$).

Исследуем неотрицательность функционала $\mathcal{J}_{s,q}^\varepsilon[u]$. Его первый дифференциал равен

$$\mathbf{D}\mathcal{J}_{s,q}^\varepsilon[u; h] = 2 \left(\langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u, h \rangle + \varepsilon^{2s} \int_\Omega u h \, dx - \varepsilon^{2s} \|u\|_{L_q(\Omega)}^{2-q} \int_\Omega u^{q-1} h \, dx \right).$$

Легко видеть, что $\mathbf{D}\mathcal{J}_{s,q}^\varepsilon[\mathbf{1}; h] \equiv 0$. Подсчитаем второй дифференциал:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2 \mathcal{J}_{s,q}^\varepsilon[u; h, h] &= 2 \langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s h, h \rangle + 2\varepsilon^{2s} \|h\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &+ 2(q-2)\varepsilon^{2s} \|u\|_{L_q(\Omega)}^{2(1-q)} \left(\int_\Omega u^{q-1} h \, dx \right)^2 - 2(q-1)\varepsilon^{2s} \|u\|_{L_q(\Omega)}^{2-q} \int_\Omega u^{q-2} h^2 \, dx. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Разложим приращение h , воспользовавшись представлением (1.4):

$$h(x) = \int_\Omega h \, dx + \bar{h}, \quad \int_\Omega \bar{h} \, dx = 0;$$

тогда при $u = \mathbf{1}$ формула (4.4) записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2 \mathcal{J}_{s,q}^\varepsilon[\mathbf{1}; h, h] &= 2 \langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s \bar{h}, \bar{h} \rangle - 2(q-2)\varepsilon^{2s} \|\bar{h}\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &= 2 \sum_{j=2}^{\infty} (\lambda_{N,j}^s - (q-2)\varepsilon^{2s}) \cdot \langle \bar{h}, \varphi_{N,j} \rangle^2. \end{aligned}$$

Положим $\varepsilon_s(q) := (\lambda_{N,2}^s / (q-2))^{1/(2s)}$ ($\varepsilon_s(q) = \varepsilon_1(q)$ при $s = 1$).

Теорема 4.1. 1. Пусть $\varepsilon > \varepsilon_s(q)$. Тогда функция $\mathbf{1}$ не является локальным (значит, и глобальным) минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$. Это утверждение выполнено и при $q = \infty$ (в этом случае $\varepsilon_s(q) = 0$).

2. Пусть $\varepsilon < \varepsilon_s(q)$. Тогда функция $\mathbf{1}$ является локальным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$.

3. Пусть $\varepsilon = \varepsilon_s(q)$ и $\int_\Omega \varphi_{N,2}^3 dx \neq 0$. Тогда функция $\mathbf{1}$ не является локальным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$. Более того, существует такое $\check{\varepsilon}(q) < \varepsilon_s(q)$, что при $\varepsilon \in (\check{\varepsilon}(q), \varepsilon_s(q)]$ функция $\mathbf{1}$ не является глобальным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$ (хотя дает локальный минимум).

Доказательство. 1. Следует из неравенства $\mathbf{D}^2 \mathcal{J}_{s,q}^\varepsilon[\mathbf{1}; \varphi_{N,2}, \varphi_{N,2}] < 0$.

2. Пусть $u \in \mathcal{H}^s(\Omega)$, $\|u - \mathbf{1}\|_{\mathcal{H}^s(\Omega)} < \frac{1}{2}$. Опять воспользуемся разложением (1.4): имеем $u = c + \bar{u}$ с константой $1/2 < c < 3/2$, и выполнено равенство

$$\mathcal{J}_{s,q}^\varepsilon[u] = \langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s \bar{u}, \bar{u} \rangle + \varepsilon^{2s} \|\bar{u}\|_{L_2(\Omega)}^2 + c^2 \varepsilon^{2s} - c^2 \varepsilon^{2s} \|\mathbf{1} + \bar{u}/c\|_{L_q(\Omega)}^2.$$

В [106, (3.5)] было показано, что

$$\|\mathbf{1} + \bar{u}/c\|_{L_q(\Omega)}^2 \leq 1 + (q-1) \|\bar{u}/c\|_{L_2(\Omega)}^2 + C(q) \|\bar{u}\|_{L_q(\Omega)}^{\min(q,3)},$$

откуда получаем неравенство

$$\mathcal{J}_{s,q}^\varepsilon[u] \geq \langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s \bar{u}, \bar{u} \rangle - (q-2)\varepsilon^{2s} \|\bar{u}\|_{L_2(\Omega)}^2 - C(q)\varepsilon^{2s} \|\bar{u}\|_{L_q(\Omega)}^{\min(q,3)}.$$

Поскольку $\langle \bar{u}, \varphi_{N,1} \rangle = 0$, из (1.17) следует, что $\langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s \bar{u}, \bar{u} \rangle \geq \lambda_{N,2}^s \|\bar{u}\|_{L_2(\Omega)}^2$; поэтому из ограниченности вложения $\mathcal{H}^s(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$ получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{s,q}^\varepsilon[u] &\geq (\lambda_{N,2}^s - (q-2)\varepsilon^{2s}) \lambda_{N,2}^{-s} \langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s \bar{u}, \bar{u} \rangle - C(q)\varepsilon^{2s} \|\bar{u}\|_{L_q(\Omega)}^{\min(q,3)} \\ &\geq \left[(\lambda_{N,2}^s - (q-2)\varepsilon^{2s}) \lambda_{N,2}^{-s} - C(s,q)\varepsilon^{2s} \langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s \bar{u}, \bar{u} \rangle^{\frac{\min(q-2,1)}{2}} \right] \langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s \bar{u}, \bar{u} \rangle. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Выражение в квадратных скобках можно сделать положительным выбором малой окрестности функции $\mathbf{1}$ (здесь $C(s, q)$ совпадает с константой из (4.5)):

$$\langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s \bar{u}, \bar{u} \rangle \leq \|u - \mathbf{1}\|_{\mathcal{H}^s(\Omega)}^2 \leq \min \left[\frac{1}{2}, \left(\frac{\lambda_{N,2}^s - (q-2)\varepsilon^{2s}}{2C(s, q)\lambda_{N,2}^s \varepsilon^{2s}} \right)^{2/\min(q-2, 1)} \right]. \quad (4.6)$$

В этой окрестности $\mathcal{J}_{s,q}^\varepsilon[u] > 0$, и утверждение п.2 доказано!

3. При $\varepsilon = \varepsilon_s(q)$ имеет место равенство $\mathbf{D}^2 \mathcal{J}_{s,q}^{\varepsilon_s}[\mathbf{1}; \varphi_{N,2}, \varphi_{N,2}] = 0$. Подсчитаем третий дифференциал: $\langle \varphi_{N,2}, \varphi_{N,1} \rangle = 0$, поэтому

$$\mathbf{D}^3 \mathcal{J}_{s,q}^{\varepsilon_s}[\mathbf{1}; \varphi_{N,2}, \varphi_{N,2}, \varphi_{N,2}] = -2(q-1)(q-2)\varepsilon^{2s} \int_{\Omega} \varphi_{N,2}^3 dx \neq 0.$$

Отсюда получаем, что функция $\mathbf{1}$ не дает локального минимума, а потому не является и глобальным минимумом. Существование $\check{\varepsilon}(q)$ следует из непрерывной зависимости функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$ от параметра ε . $\blacksquare$

Замечание 4.4. В [72] было показано, что условие $\int_{\Omega} \varphi_{N,2}^3 dx \neq 0$ выполнено для асимметричной области общего положения.

Покажем справедливость дробного аналога предложения 3.4 из [106]:

Предложение 4.1. Пусть $s < n/2$ (это ограничение существенно только в случае $n = 1$), $q = 2_s^*$ и $\varepsilon = \varepsilon_s(2_s^*)$. Тогда функция $\mathbf{1}$ не является глобальным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,2_s^*}^{\varepsilon_s}[u]$ в кубе $(0,1)^n$.

Доказательство. Известно, что для куба $(0,1)^n$ выполнено $\lambda_{N,2} = \pi^2$; поэтому

$$\mathcal{I}_{s,2_s^*}^{\varepsilon_s}[\mathbf{1}] = \varepsilon_s^{2s}(2_s^*) = \frac{\pi^{2s}(n-2s)}{4s}.$$

Построим последовательность, на которой значение функционала $\mathcal{I}_{s,2_s^*}^{\varepsilon_s}[u]$ будет меньше. Напомним, что в $\mathbb{R}^n$ справедливо дробное неравенство Соболева (1.12), и минимум достигается на функции $\Phi_{s,a}(x) := (a^2 + |x|^2)^{(2s-n)/2}$. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям из §3.4 главы 3, можно получить соотношение

$$\lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{I}_{s,2_s^*}^{\varepsilon_s, (0,1)^n}[\Phi_{s,a}] = 2^{-2s} \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{I}_{s,2_s^*}^{\varepsilon_s, (-1,1)^n}[\Phi_{s,a}] = 2^{-2s} \mathcal{S}_{s, \mathbb{R}^n},$$

и остается показать, что выполнено неравенство

$$\frac{\pi^{2s}(n-2s)}{4s} > 2^{-2s} \mathcal{S}_{s, \mathbb{R}^n} = \pi^s \frac{\Gamma((n+2s)/2)}{\Gamma((n-2s)/2)} \left[\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} \right]^{2s/n}, \quad (4.7)$$

справедливость которого доказывается в §4.4. $\blacksquare$

Замечание 4.5. В силу непрерывной зависимости функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$ от параметров q и ε , при q , близких к 2_s^* снизу, и ε , близких к $\varepsilon_s(q)$ снизу, функция **1** не дает глобального минимума этого функционала в кубе $(0,1)^n$ (хотя дает локальный минимум).

4.3 Глобальное исследование функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$

Изучим условия, при которых функция **1** дает глобальный минимум функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$.

Теорема 4.2. 1. При любом $q \in (2, 2_s^*]$ существует такое $\check{\varepsilon}(q) > 0$, что для всех $\varepsilon < \check{\varepsilon}(q)$ функция **1** является единственным глобальным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$. Если $n = 1$ и $s \geq 1/2$, то утверждение выполнено для всех $q \in (2, \infty)$.

2. При любом $\varepsilon > 0$ существует такое $\check{q}(\varepsilon) \in (2, 2_s^*]$, что для всех $q < \check{q}(\varepsilon)$ функция **1** является единственным глобальным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$. Если $n = 1$ и $s \geq 1/2$, то $\check{q}(\varepsilon) < \infty$.

3. Пусть для пары (ε_0, q_0) функция **1** не является глобальным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q_0}^{\varepsilon_0}[u]$. Тогда при $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ и $q \geq q_0$ функция **1** не является глобальным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$.

Доказательство. 1. Предположим обратное: пусть при некотором q существуют последовательность $\check{\varepsilon}_n \downarrow 0$ и последовательность непостоянных функций $\{u_n: \|u_n\|_{L_q(\Omega)} = 1\}$, для которых

$$\mathcal{I}_{s,q}^{\check{\varepsilon}_n}[u_n] \leq \check{\varepsilon}_n^{2s}, \quad \text{а значит,} \quad \langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u_n, u_n \rangle \leq \check{\varepsilon}_n^{2s} \quad \text{и} \quad \|u_n\|_{L_2(\Omega)} \leq 1. \quad (4.8)$$

Из (4.8) следует, что u_n ограничены в $\mathcal{H}^s(\Omega)$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $u_n \rightharpoonup u$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$, и в силу компактности вложения $\mathcal{H}^s(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$ имеем $u_n \rightarrow u$ в $L_2(\Omega)$. Поскольку норма в $\mathcal{H}^s(\Omega)$ слабо непрерывна снизу, получаем

$$\langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u, u \rangle + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 = \|u\|_{\mathcal{H}^s(\Omega)}^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{\mathcal{H}^s(\Omega)}^2 = \|u\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

поэтому $\langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u, u \rangle = 0$, функция u постоянна и $u_n \rightarrow u$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$. Так как $\|u\|_{L_q(\Omega)} = 1$, то $u = \mathbf{1}$.

Таким образом, в сколь угодно малой окрестности функции $\mathbf{1}$ существует непостоянный минимайзер u_n функционала $\mathcal{I}_{s,q}^{\check{\varepsilon}_n}[u]$. При малых $\check{\varepsilon}_n$ оценка радиуса окрестности (4.6) равномерна по n , и u_n попадают в эту окрестность. Неравенство (4.5) влечет за собой равномерную оценку $\mathcal{J}_{s,q}^{\check{\varepsilon}_n}[u_n] > 0$, что противоречит неравенству (4.8).

2. Предположим обратное: пусть при $\varepsilon > 0$ существуют последовательность $\check{q}_n \downarrow 2$ и последовательность непостоянных функций $\{u_n : \|u_n\|_{L_{\check{q}_n}(\Omega)} = 1\}$, для которых

$$\mathcal{I}_{s,\check{q}_n}^\varepsilon[u_n] \leq \varepsilon^{2s}, \quad \text{а значит,} \quad \langle (-\Delta_\Omega^N)^s u_n, u_n \rangle \leq \varepsilon^{2s} \quad \text{и} \quad \|u_n\|_{L_2(\Omega)} \leq 1.$$

Как и в предыдущем пункте, u_n ограничены в $\mathcal{H}^s(\Omega)$ и можно считать, что $u_n \rightharpoonup u$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$. Зафиксируем некоторое $q \in (2, 2_s^*)$; в силу компактности вложения $\mathcal{H}^s(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$ имеем $u_n \rightarrow u$ в $L_q(\Omega)$. Поскольку с некоторого места $\check{q}_n < q$, в силу неравенства Гёльдера $\|u_n\|_{L_q(\Omega)} \geq \|u_n\|_{L_{\check{q}_n}(\Omega)}$, откуда следует, что

$$\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u_n] \leq \mathcal{I}_{s,\check{q}_n}^\varepsilon[u_n] \leq \varepsilon^{2s} = \mathcal{I}_{s,\check{q}_n}^\varepsilon[\mathbf{1}] = \mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[\mathbf{1}]. \quad (4.9)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (-\Delta_\Omega^N)^s u_n, u_n \rangle &\leq \varepsilon^{2s} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L_q(\Omega)}^2 - \varepsilon^{2s} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &= \varepsilon^{2s} \left(\|u\|_{L_q(\Omega)}^2 - \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right), \end{aligned}$$

и, переходя к пределу по $q \downarrow 2$ в правой части, получаем $\langle (-\Delta_\Omega^N)^s u, u \rangle = 0$. Поэтому, как и в предыдущем пункте, $u_n \rightarrow u$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$, и отсюда следует $u = \mathbf{1}$. Выбирая q близким к 2, имеем $\varepsilon < \varepsilon_s(q)$, и в этом случае неравенство (4.9) противоречит неравенству (4.5).

3. Поскольку функция $\mathbf{1}$ не является минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q_0}^{\varepsilon_0}[u]$, существует непостоянная функция u , для которой $\mathcal{I}_{s,q_0}^{\varepsilon_0}[u] < \varepsilon_0^{2s}$. Требуемое утверждение следует из неравенств Гёльдера:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{s,q}^{\varepsilon_0}[u] &\leq \mathcal{I}_{s,q_0}^{\varepsilon_0}[u] < \varepsilon_0^{2s} = \mathcal{I}_{s,q}^{\varepsilon_0}[\mathbf{1}], \\ \mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u] &= \mathcal{I}_{s,q}^{\varepsilon_0}[u] + (\varepsilon^{2s} - \varepsilon_0^{2s}) \frac{\|u\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|u\|_{L_q(\Omega)}^2} < \varepsilon_0^{2s} + (\varepsilon^{2s} - \varepsilon_0^{2s}) = \mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[\mathbf{1}]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Благодаря теореме 4.2, для каждого $q \in (2, 2_s^*]$ можно определить показатель $\mathcal{E}_s(q)$: при $\varepsilon \leq \mathcal{E}_s(q)$ функция $\mathbf{1}$ дает глобальный минимум в $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$, а при $\varepsilon > \mathcal{E}_s(q)$ не дает. Очевидно, что $\varepsilon_s(q) \geq \mathcal{E}_s(q)$, а из теоремы 4.2 также следует,

что $\mathcal{E}_s(q) > 0$, $\mathcal{E}_s(q)$ не возрастает и $\mathcal{E}_s(q) \rightarrow \infty$ при $q \downarrow 2$. Наконец, если $n = 1$ и $s \geq \frac{1}{2}$, то $\mathcal{E}_s(q) \rightarrow 0$ при $q \rightarrow \infty$.

Теорема 4.3. *Функция $\mathcal{E}_s(q)$ непрерывна на $(2, 2_s^*]$ (на $(2, \infty)$ в случае $n = 1$ и $s \geq 1/2$) и строго убывает.*

Доказательство. Мы докажем утверждение теоремы для $s < n/2$. Для случая $n = 1$ и $s \geq 1/2$ доказательство проходит без изменений.

1. Сначала покажем, что $\mathcal{E}_s(q)$ строго убывает. Действительно, рассмотрим точку (q_0, ε_0) на кривой $\varepsilon = \mathcal{E}_s(q)$, $q_0 \in (2, 2_s^*)$. По построению для любых $\varepsilon_n \downarrow \varepsilon_0$ минимайзеры u_n функционалов $\mathcal{I}_{s,q_0}^{\varepsilon_n}[u]$ непостоянны. Нормируем эти минимайзеры условием $\|u_n\|_{L_{q_0}(\Omega)} = 1$. Для них выполнены неравенства

$$\mathcal{I}_{s,q_0}^{\varepsilon_n}[u_n] < \varepsilon_n^{2s}, \quad \text{а значит,} \quad \langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u_n, u_n \rangle < \varepsilon_n^{2s} \quad \text{и} \quad \|u_n\|_{L_2(\Omega)} < 1. \quad (4.10)$$

Как и в доказательстве теоремы 4.2, u_n ограничены в $\mathcal{H}^s(\Omega)$, существует слабый предел $u_n \rightharpoonup u_0$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$ и $u_n \rightarrow u_0$ в $L_{q_0}(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$. Из слабой полунепрерывности снизу нормы в $\mathcal{H}^s(\Omega)$ вытекает, что

$$\mathcal{I}_{s,q_0}^{\varepsilon_0}[u_0] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{s,q_0}^{\varepsilon_n}[u_n] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^{2s} = \varepsilon_0^{2s}.$$

Возможны два случая: $u_0 \neq \mathbf{1}$ и $u_0 = \mathbf{1}$.

Разберем первый случай: при $q > q_0$ имеем $\|u_0\|_{L_q(\Omega)} > \|u_0\|_{L_{q_0}(\Omega)} = 1$; поэтому

$$\mathcal{I}_{s,q}^{\varepsilon_0}[u_0] < \mathcal{I}_{s,q_0}^{\varepsilon_0}[u_0] \leq \varepsilon_0^{2s} = \mathcal{I}_{s,q}^{\varepsilon_0}[\mathbf{1}].$$

Отсюда следует, что при $u_0 \neq \mathbf{1}$ и $q > q_0$ функция $\mathbf{1}$ не дает глобального минимума функционала $\mathcal{I}_{s,q}^{\varepsilon_0}[u]$, поэтому $\mathcal{E}_s(q) < \varepsilon_0 = \mathcal{E}_s(q_0)$.

Покажем, что во втором случае невозможно неравенство $\varepsilon_0 < \varepsilon_s(q_0)$: при больших n имеем $\varepsilon_0 < \varepsilon_n < \varepsilon_s(q_0)$, и, согласно п.2 теоремы 4.1, функция $\mathbf{1}$ является локальным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q_0}^{\varepsilon_n}[u]$. Более того,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u_n, u_n \rangle &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^{2s} \left(\|u_n\|_{L_{q_0}(\Omega)}^2 - \|u_n\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) \\ &= \varepsilon_0^{2s} \left(\|\mathbf{1}\|_{L_{q_0}(\Omega)}^2 - \|\mathbf{1}\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) = 0; \end{aligned}$$

поэтому $\langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u, u \rangle = 0$ и $u_n \rightarrow \mathbf{1}$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$. Вместе с (4.10) это дает противоречие, как и при доказательстве п.1 теоремы 4.2.

Поскольку $\varepsilon_0 = \mathcal{E}_s(q_0) \leq \varepsilon_s(q_0)$, получаем, что остается единственная возможность $\varepsilon_0 = \varepsilon_s(q_0)$, и строгая монотонность следует из цепочки

$$\mathcal{E}_s(q) \leq \varepsilon_s(q) < \varepsilon_s(q_0) = \varepsilon_0 = \mathcal{E}_s(q_0).$$

2. В качестве второго шага покажем, что монотонная функция $\mathcal{E}_s(q)$ непрерывна слева. Для этого опять рассмотрим точку (q_0, ε_0) на кривой $\varepsilon = \mathcal{E}_s(q)$, $q_0 \in (2, 2_s^*]$: при $\varepsilon > \varepsilon_0$ функция **1** не является глобальным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q_0}^\varepsilon[u]$. Поскольку L_q -норма непрерывно зависит от q , получаем, что для достаточно близких снизу к q_0 показателей q функция **1** также не является минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$, что и дает непрерывность слева.

3. Остается показать непрерывность функции $\mathcal{E}_s(q)$ справа. Пусть показатель $q_0 \in (2, 2_s^*)$ и $\varepsilon_0 = \lim_{q \downarrow q_0} \mathcal{E}_s(q)$. Ввиду монотонности функции $\mathcal{E}_s(q)$ для любых $q_n \downarrow q_0$ минимайзеры u_n функционалов $\mathcal{I}_{s,q_n}^{\varepsilon_0}[u]$ непостоянны. Как и ранее, нормируем их условием $\|u_n\|_{L_{q_n}(\Omega)} = 1$, и имеют место неравенства

$$\mathcal{I}_{s,q_n}^{\varepsilon_0}[u_n] < \varepsilon_0^{2s}, \quad \text{а значит,} \quad \langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u_n, u_n \rangle < \varepsilon_0^{2s} \quad \text{и} \quad \|u_n\|_{L_2(\Omega)} \leq 1.$$

Повторим рассуждение из доказательства п.2 теоремы 4.2: u_n ограничены в $\mathcal{H}^s(\Omega)$ и существует слабый предел $u_n \rightharpoonup u_0$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$. При любом $q < 2_s^*$ имеем $u_n \rightarrow u_0$ в $L_q(\Omega)$, а из неравенства Гёльдера при $q_0 < q_n \leq q$ следует, что $\|u_n\|_{L_q(\Omega)} \geq \|u_n\|_{L_{q_n}(\Omega)} = 1$; поэтому

$$\begin{aligned} \langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u_0, u_0 \rangle &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (-\Delta_\Omega^N)_{Sp}^s u_n, u_n \rangle \leq \varepsilon_0^{2s} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L_q(\Omega)}^2 - \varepsilon_0^{2s} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &= \varepsilon_0^{2s} \left(\|u_0\|_{L_q(\Omega)}^2 - \|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2 \right), \end{aligned}$$

откуда предельным переходом по $q \downarrow q_0$ получаем $\mathcal{I}_{s,q_0}^{\varepsilon_0}[u_0] \leq \varepsilon_0^{2s}$. Более того, поскольку

$$\begin{aligned} \|u_0\|_{L_q(\Omega)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L_q(\Omega)} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L_{q_n}(\Omega)} = 1, \\ \|u_0\|_{L_{q_0}(\Omega)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L_{q_0}(\Omega)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L_{q_n}(\Omega)} = 1, \end{aligned}$$

предельным переходом по $q \downarrow q_0$ получаем $\|u_0\|_{L_{q_0}(\Omega)} = 1$. Здесь, как и в доказательстве строгой монотонности $\mathcal{E}_s(q)$, возможны два случая: $u_0 \neq \mathbf{1}$ и $u_0 = \mathbf{1}$.

В первом случае при любом $\varepsilon > \varepsilon_0$ из оценки $\|u_0\|_{L_2(\Omega)} < \|u_0\|_{L_{q_0}(\Omega)} = 1$ получаем

$$\mathcal{I}_{s,q_0}^\varepsilon[u_0] = \mathcal{I}_{s,q_0}^{\varepsilon_0}[u_0] + (\varepsilon^{2s} - \varepsilon_0^{2s}) \frac{\|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|u_0\|_{L_{q_0}(\Omega)}^2} < \varepsilon_0^{2s} + (\varepsilon^{2s} - \varepsilon_0^{2s}) = \mathcal{I}_{s,q_0}^\varepsilon[\mathbf{1}],$$

откуда следует, что $\varepsilon_0 \geq \mathcal{E}_s(q_0)$. Так как функция $\mathcal{E}_s(q)$ убывает, то $\varepsilon_0 \leq \mathcal{E}_s(q_0)$, а следовательно $\varepsilon_0 = \mathcal{E}_s(q_0)$.

Во втором случае $u_n \rightarrow \mathbf{1}$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$, а при $q > q_0$ из $\|u_n\|_{L_q(\Omega)} \geq \|u_n\|_{L_{q_n}(\Omega)}$ получаем

$$\mathcal{I}_{s,q}^{\varepsilon_0}[u_n] \leq \mathcal{I}_{s,q_n}^{\varepsilon_0}[u_n] < \varepsilon_0^{2s} = \mathcal{I}_{s,q_n}^{\varepsilon_0}[\mathbf{1}] = \mathcal{I}_{s,q}^{\varepsilon_0}[\mathbf{1}],$$

откуда следует, что $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_s(q)$. Переходя к пределу по $q \downarrow q_0$, получаем неравенство $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_s(q_0) \geq \mathcal{E}_s(q_0)$, что, как и в первом случае, ввиду убывания функции $\mathcal{E}_s(q)$ дает $\varepsilon_0 = \mathcal{E}_s(q_0)$. ■

Замечание 4.6. В [105] было показано, что в случае $n = 1$ при $s \geq 1$ выполняется равенство $\varepsilon_s(q) = \mathcal{E}_s(q)$ для всех $q > 2$, а также была выдвинута гипотеза, что результат остается верным при $s \geq 1/2$. Эта гипотеза остается открытой, однако предложение 4.1 показывает, что при $s < 1/2$ равенство $\varepsilon_s(q) = \mathcal{E}_s(q)$ не выполняется при q , близких к 2_s^* снизу.

4.4 Доказательство неравенства (4.7)

Напомним, что $n > 2s$, и перепишем неравенство (4.7) в виде

$$\mathcal{A}_n := \frac{2s\Gamma((n+2s)/2)}{\Gamma((n-2s+2)/2)} \left[\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} \right]^{2s/n} < \pi^s. \quad (4.11)$$

Докажем, что $\mathcal{A}_{n+2} < \mathcal{A}_n$, т. е.

$$\frac{\mathcal{A}_{n+2}}{\mathcal{A}_n} = \frac{n+2s}{n-2s+2} \left[\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n/2) [2(n+1)]^{n/2}} \right]^{4s/(n(n+2))} < 1.$$

Возведением в степень получаем эквивалентное неравенство

$$\left[\frac{n+2s}{n-2s+2} \right]^{n(n+2)/(4s)} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n/2) [2(n+1)]^{n/2}} < 1. \quad (4.12)$$

Покажем, что функция $f(s) = \left[\frac{n+2s}{n-2s+2} \right]^{n(n+2)/(4s)}$ является монотонно возрастающей при $s \in [0,1]$. Ее логарифмическая производная равна

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s} \ln \left(\frac{n+2s}{n-2s+2} \right) \right] &= -\frac{1}{s^2} \ln \left(\frac{n+2s}{n-2s+2} \right) + \frac{2(n-2s+2)(2n+2)}{s(n+2s)(n-2s+2)^2} \\ &= \frac{1}{s} \left[\frac{4n+4}{(n+2s)(n-2s+2)} - \frac{1}{s} \ln \left(\frac{n+2s}{n-2s+2} \right) \right] \\ &\geq \frac{1}{s} \left[\frac{4n+4}{(n+2s)(n-2s+2)} - \frac{4s-2}{s(n-2s+2)} \right] = \frac{2}{s(n-2s+2)} \left[\frac{2n+2}{n+2s} - \frac{2s-1}{s} \right] \\ &= \frac{2n+8s-8s^2}{s^2(n-2s+2)(n+2s)} \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, достаточно доказать неравенство (4.12) при $s = 1$, то есть неравенство

$$\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} \left[2(n+1) \left(\frac{n}{n+2} \right)^{(n+2)/2} \right]^{n/2} > 1.$$

При $n = 1$ это неравенство очевидно. При $n \geq 2$ докажем более сильное неравенство

$$\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} \left[2(n+1) \left(\frac{n}{n+2} \right)^{(n+2)/2} \right]^{n/2} \geq 1 + \frac{2}{n+2}$$

которое эквивалентно неравенству

$$\mathcal{B}_n := \frac{(n+2)\Gamma(n/2)}{(n+4)\Gamma(n)} \left[2(n+1) \left(\frac{n}{n+2} \right)^{(n+2)/2} \right]^{n/2} \geq 1. \quad (4.13)$$

Прямые вычисления показывают, что $\mathcal{B}_2 = 1$ и $\mathcal{B}_3 \geq 1,05$. Подсчитаем отношение $\mathcal{B}_{n+2}/\mathcal{B}_n$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{B}_{n+2}}{\mathcal{B}_n} &= \frac{(n+4)^2}{2(n+1)(n+2)(n+6)} \left[2(n+3) \left(\frac{n+2}{n+4} \right)^{(n+4)/2} \right]^{(n+2)/2} \\ &\quad \times \left[2(n+1) \left(\frac{n}{n+2} \right)^{(n+2)/2} \right]^{-n/2} \\ &= \frac{(n+4)^2}{(n+2)(n+6)} \left[\frac{(n+3)(n+2)^2}{(n+1)(n+4)^2} \left(\frac{(n+2)^2}{n^2+4n} \right)^{n/2} \right]^{(n+2)/2} =: g(n). \end{aligned}$$

Покажем, что функция $g(x)$ монотонно убывает при $x \geq 2$. Ее логарифмическая производная равна

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &:= \frac{d}{dx} \left[\ln \left(\frac{(x+4)^2}{(x+2)(x+6)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x+2}{2} \left[\ln \left(\frac{x+3}{x+1} \right) - 2 \ln \left(\frac{x+4}{x+2} \right) + \frac{x}{2} \ln \left(\frac{(x+2)^2}{x^2+4x} \right) \right] \right] \\ &= -\frac{8}{(x+2)(x+4)(x+6)} + \frac{1}{2} \left[\ln \left(1 + \frac{2}{(x+1)(x+4)} \right) - \ln \left(1 + \frac{2}{x+2} \right) \right] \\ &\quad + \frac{x+1}{2} \ln \left(1 + \frac{4}{x^2+4x} \right) - \frac{x+2}{(x+1)(x+3)}.\end{aligned}$$

Поскольку при $t \in (0, 1)$ выполнены оценки

$$t > t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} > \ln(1+t) > t - \frac{t^2}{2},$$

при $x \geq 2$ имеем (положим $y := x - 2$)

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &\leq -\frac{8}{(x+2)(x+4)(x+6)} + \frac{1}{(x+1)(x+4)} - \frac{x+1}{(x+2)^2} \\ &\quad + \frac{x+1}{2} \left(\frac{4}{x^2+4x} - \frac{8}{(x^2+4x)^2} + \frac{64}{3(x^2+4x)^3} \right) - \frac{x+2}{(x+1)(x+3)} \\ &= -\frac{18x^8 + 219x^7 + 910x^6 + 1236x^5 - 968x^4 - 4080x^3 - 5024x^2 - 4608x - 2304}{3x^3(x+1)(x+2)^2(x+3)(x+4)^3(x+6)} \\ &= -\frac{18y^8 + 507y^7 + 5992y^6 + 38616y^5 + 147472y^4}{3(y+5)^3(y+6)(y+7)^2(y+8)(y+9)^3(y+10)} \\ &\quad - \frac{338112y^3 + 443968y^2 + 285504y + 50688}{3(y+5)^3(y+6)(y+7)^2(y+8)(y+9)^3(y+10)} < 0.\end{aligned}$$

Применяя неравенство Бернулли $(1+t)^m \geq 1+mt$ при $t > -1$, получаем

$$\left(\frac{(n+2)^2}{n^2+4n} \right)^{n/2} = \left(1 + \frac{4}{n^2+4n} \right)^{n/2} \geq \frac{n+6}{n+4};$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{(n+3)(n+2)^2(n+6)}{(n+1)(n+4)^3} \right]^{(n+2)/2} &= \left[1 - \frac{2(n^2+2n-4)}{(n+1)(n+4)^3} \right]^{(n+2)/2} \\ &\geq 1 - \frac{(n^2+2n-4)(n+2)}{(n+1)(n+4)^3},\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} g(n) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)^2}{(n+2)(n+6)} \left[\frac{(n+3)(n+2)^2(n+6)}{(n+1)(n+4)^3} \right]^{(n+2)/2} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{(n^2 + 2n - 4)(n+2)}{(n+1)(n+4)^3} \right] = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $g(n)$ монотонно убывает к единице, и поэтому выполнено $g(n) > 1$. Это доказывает неравенство (4.13), из которого следует неравенство (4.12), а следовательно, $\mathcal{A}_{n+2} < \mathcal{A}_n$.

Для завершения доказательства остается показать, что неравенство (4.11) справедливо при $n \leq 3$ (в случае $n = 1$ есть дополнительное ограничение $2s < 1$, поэтому (4.11) для $n = 3$ и $2s \geq 1$ нужно проверять отдельно). При $n = 1$ неравенство (4.11) принимает вид (поскольку $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$)

$$\frac{2s\Gamma((1+2s)/2)}{\Gamma((3-2s)/2)} < 1.$$

Его справедливость следует из оценки $\Gamma((3+2s)/2) \leq \Gamma(2) \leq \Gamma((5-2s)/2)$:

$$\begin{aligned} \frac{2s\Gamma((1+2s)/2)}{\Gamma((3-2s)/2)} &= \frac{2s(3-2s)\Gamma((3+2s)/2)}{(1+2s)\Gamma((5-2s)/2)} \\ &= \left(1 - \frac{(1-2s)^2}{1+2s} \right) \frac{\Gamma((3+2s)/2)}{\Gamma((5-2s)/2)} < 1. \end{aligned}$$

При $n = 2$ неравенство (4.11) записывается в виде

$$\frac{2s\Gamma(1+s)}{\Gamma(2-s)} < \pi^s.$$

Используя формулу дополнения Эйлера $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$ при нецелых z , получаем

$$2\Gamma^2(1+s)\sin(\pi s) < \pi^{1+s}(1-s),$$

и это неравенство следует из двух цепочек неравенств (поскольку $\Gamma(1+s) \leq 1$):

$$2\Gamma^2(1+s)\sin(\pi s) < 2 < \pi^{1+s}(1-s) \quad \text{при } s \in (0, 0,7];$$

$$2\Gamma^2(1+s)\sin(\pi s) < 2\sin(\pi(1-s)) < 2\pi(1-s) < \pi^{1+s}(1-s) \quad \text{при } s \in [0,7, 1).$$

При $n = 3$ неравенство (4.11) записывается в виде

$$\frac{2s\Gamma((3+2s)/2)}{\Gamma((5-2s)/2)} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{4} \right]^{2s/3} < \pi^s,$$

или, после избавления от знаменателя,

$$2s\Gamma((3+2s)/2) < (4\pi)^{2s/3}\Gamma((5-2s)/2).$$

Справедливость этого неравенства следует из цепочки оценок

$$\begin{aligned} 2s\Gamma((3+2s)/2) &< 2s\Gamma(5/2) = 3s\Gamma(3/2) \\ &< (4\pi)^{2s/3}\Gamma(3/2) < (4\pi)^{2s/3}\Gamma((5-2s)/2). \end{aligned}$$

Глава 5. Разрешимость задачи Дирихле, порожденной дробным неравенством Харди—Соболева

5.1 Постановка задачи

Данная глава посвящена вопросу достижимости точной константы $\mathcal{S}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D}$ в дробном неравенстве Харди—Соболева в $\mathcal{C}^1$ -гладкой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ при $0 < \sigma < s < 1$:

$$\mathcal{S}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D} \cdot \| |x|^{\sigma-s} u \|_{L_{2^*_{\sigma}}(\Omega)}^2 \leq \langle (-\Delta_{\Omega}^D)_{Sp}^s u, u \rangle, \quad u \in \tilde{\mathcal{D}}^s(\Omega). \quad (5.1)$$

В правой части этого неравенства стоит спектральный лапласиан Дирихле, в отличие от аналогичной задачи со спектральным лапласианом Неймана $(-\Delta_{\Omega}^N)_{Sp}^s$ из главы 3.

Достижимость точной константы в неравенстве (5.1) равносильна существованию минимайзера функционала $\mathcal{I}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D}[u]$:

$$\mathcal{I}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D}[u] := \frac{\langle (-\Delta_{\Omega}^D)_{Sp}^s u, u \rangle}{\| |x|^{\sigma-s} u \|_{L_{2^*_{\sigma}}(\Omega)}^2}. \quad (5.2)$$

Стандартные рассуждения показывают, что минимайзер функционала (5.2) после домножения на подходящую константу является решением задачи

$$(-\Delta_{\Omega}^D)_{Sp}^s u(x) = \frac{u^{2^*_{\sigma}-1}(x)}{|x|^{(s-\sigma)2^*_{\sigma}}} \quad \text{в } \Omega, \quad u \in \tilde{\mathcal{D}}^s(\Omega). \quad (5.3)$$

Если $\mathbf{0}_n \notin \bar{\Omega}$, то для ограниченной области Ω соответствующее вложение компактно, и очевидно, что константа $\mathcal{S}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D}$ достигается. В дальнейшем мы будем считать, что $\mathbf{0}_n \in \bar{\Omega}$.

Для неравенства (5.1) мы установим следующие результаты:

- В случае $\mathbf{0}_n \in \Omega$ точная константа *не достигается*, если выполнено $\tilde{\mathcal{D}}^s(\Omega) \neq \mathcal{D}^s(\mathbb{R}^n)$. Более того, в звездной относительно $\mathbf{0}_n$ области Ω уравнение Эйлера–Лагранжа для задачи (5.3) не имеет нетривиальных неотрицательных решений.
- В случае полупространства $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ точная константа *достигается*.

- В случае $\mathbf{0}_n \in \partial\Omega$ и ограниченной области Ω точная константа *достигается* при ограничениях на границу области $\partial\Omega$ в нуле, аналогичных ограничениям из [92].

Настоящая глава имеет следующую структуру: в §5.2 доказывается *недостижимость* точной константы при условии $\mathbf{0}_n \in \Omega$ и отсутствие нетривиальных неотрицательных решений у уравнения Эйлера–Лагранжа для задачи (5.1) в звездных областях. В §5.3 мы получим оценки функций Грина некоторых вспомогательных задач. В §5.4 мы докажем *достижимость* точной константы $\mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D}$. В §5.5 мы дадим описание поведения полученного минимайзера в $\mathbb{R}_+^n$ и его СТ-продолжения: сначала мы получим “грубую” поточечную оценку, определяемую модулем интегральной непрерывности в пространстве Лебега с критическим показателем, и из нее выведем более точные оценки (аналог оценок [92, теорема 2.1]). В §5.6 мы сформулируем требуемые условия на границу $\partial\Omega$ и на основе оценок из §5.5 получим *достижимость* точной константы в области Ω . Технические оценки, необходимые для доказательства достижимости точной константы в области Ω , приведены в §§5.7–5.8.

В этой главе координаты в $\mathbb{R}^n$ и в Ω мы будем обозначать через $x \equiv (x', x_n)$, а координаты в $\mathbb{R}_+^n$ через $y \equiv (y', y_n)$. Для СТ-продолжений используются координаты $X \equiv (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$ и $Y \equiv (y, z) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+$ соответственно.

Справедливость неравенства (5.1) при $s \in (0, 1)$ (и даже при $s \in (0, n/2)$) следует из неравенства (1.13) и предложения 1.3. Легко видеть, что в $\mathbb{R}^n$ неравенство (5.1) при $\sigma = 0$ совпадает с дробным неравенством Харди (1.11), а при $\sigma = s$ — с дробным неравенством Соболева (1.12).

Напомним, что пространство $\tilde{\mathcal{D}}^s(\Omega)$ совпадает с замыканием $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ по квадратичной форме $\langle (-\Delta_\Omega^D)_{S_p}^s u, u \rangle$. Также напомним, что $\tilde{\mathcal{D}}^s(\mathbb{R}_+^n) \cap L_2(\mathbb{R}_+^n) = \tilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{R}_+^n)$, а для ограниченной области Ω имеем $\tilde{\mathcal{D}}^s(\Omega) \equiv \tilde{\mathcal{H}}^s(\Omega)$.

Замечание 5.1. Любой минимайзер функционала (5.2) можно считать положительным: неотрицательность следует из предложения 1.2, поскольку замена $u \rightarrow |u|$ уменьшает значение функционала (5.2). Положительность следует из неотрицательности правой части (5.3) и предложения 1.4.

5.2 Недостижимость константы $\mathcal{S}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D}$ в случае $\mathbf{0}_n \in \Omega$

Теорема 5.1. *Выполнены следующие утверждения:*

1. Пусть $\mathbf{0}_n \in \Omega$ и $\tilde{\mathcal{D}}^s(\Omega) \neq \mathcal{D}^s(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\mathcal{S}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D}$ не достигается.
2. Для звездных относительно $\mathbf{0}_n$ областей Ω уравнение (5.3) не имеет неотрицательных решений.

Доказательство. 1. Доказательство первого утверждения получается модификацией рассуждения для локального аналога. Мы приведем его полностью.

Покажем справедливость неравенства $\mathcal{S}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D} \leq \mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}^n}$. Действительно, для получения константы $\mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}^n}$ функционал (5.2) достаточно минимизировать по пространству $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$: эти функции плотны в $\mathcal{D}^s(\mathbb{R}^n)$. Воспользуемся конструкцией из предложения 1.5: для любой функции $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ при больших ρ носитель $\text{supp}(u_\rho)$ лежит в области Ω , и $u_\rho \in \tilde{\mathcal{D}}^s(\Omega)$. Знаменатель функционала (5.2) инвариантен при замене $u \rightarrow u_\rho$, а числитель при $\rho \rightarrow \infty$ в пределе дает $\langle (-\Delta)^s u, u \rangle$. Неравенство доказано.

Пусть константа $\mathcal{S}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D}$ достигается и $\mathbf{0}_n \in \Omega$. Продолжим минимайзер нулем, получив функцию в $\mathbb{R}^n$. В силу предложения 1.3 значение функционала (5.2) на этой функции не больше $\mathcal{S}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D}$. В свою очередь, неравенство $\mathcal{S}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D} \leq \mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}^n}$ означает, что построенная функция является минимайзером во всем пространстве. Это противоречит принципу максимума из предложения 1.4: построенный минимайзер в $\mathbb{R}^n$ является решением уравнения (5.3) с неотрицательной правой частью, и в то же время принимает нулевые значения в силу $\tilde{\mathcal{D}}^s(\Omega) \neq \mathcal{D}^s(\mathbb{R}^n)$.

2. Мы получим нелокальный аналог тождества Похожаева для лапласиана $(-\Delta_\Omega^D)_R^s$ (для суженного лапласиана $(-\Delta_\Omega^D)_R^s$ соответствующий аналог был получен в [73]; см. также [74] для лапласиана $(-\Delta)^s$ в $\mathbb{R}^n$). Заметим, что любое решение уравнения (5.3) имеет особенность в нуле, но является гладким вне окрестности нуля. Из уравнения (1.26) интегрированием по частям получаем

(обозначим $\eta_\varepsilon(x) := 1 - \varphi_\varepsilon(x)$, где $\varphi_\varepsilon(x)$ введена в (1.1)):

$$\begin{aligned}
0 &= C_s \int_0^\infty \int_\Omega \operatorname{div} (t^{1-2s} \nabla_X w(X)) \langle X, \nabla_X w(X) \rangle \eta_\varepsilon(x) dX \\
&= \int_\Omega \frac{u^{2_\sigma^*-1}(x)}{|x|^{(s-\sigma)2_\sigma^*}} \langle x, \nabla_x u(x) \rangle \eta_\varepsilon(x) dx + C_s \int_0^\infty \int_{\partial\Omega} t^{1-2s} \langle \nabla_x w, \vec{n} \rangle \langle x, \nabla_x w \rangle \eta_\varepsilon(x) dX \\
&\quad - C_s \int_0^\infty \int_\Omega t^{1-2s} |\nabla_X w|^2 \eta_\varepsilon(x) dX - \frac{C_s}{2} \int_0^\infty \int_\Omega t^{1-2s} \langle X, \nabla_X (|\nabla_X w|^2) \rangle \eta_\varepsilon(x) dX \\
&\quad - C_s \int_0^\infty \int_\Omega t^{1-2s} \langle \nabla_x w, \nabla_x \eta_\varepsilon(x) \rangle \langle X, \nabla_X w \rangle dX =: B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5,
\end{aligned}$$

(в B_1 и B_2 градиенты берутся по x , поскольку $w_t|_{x \in \partial\Omega} = 0$ и $tw_t|_{t=0} = 0$ ввиду (1.28)). Преобразуем B_1 :

$$\begin{aligned}
B_1 &= \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{[u^{2_\sigma^*}(x)]_{x_i}}{2_\sigma^*} \frac{x_i \eta_\varepsilon(x)}{|x|^{(s-\sigma)2_\sigma^*}} dx \\
&= \int_\Omega \frac{u^{2_\sigma^*}(x)}{2_\sigma^*} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\eta_\varepsilon(x)}{|x|^{(s-\sigma)2_\sigma^*}} - \frac{2_\sigma^*(s-\sigma) \cdot x_i^2 \eta_\varepsilon(x)}{|x|^{(s-\sigma)2_\sigma^*+2}} \right) dx + \int_\Omega \frac{u^{2_\sigma^*}(x)}{2_\sigma^*} \sum_{i=1}^n \frac{x_i [\eta_\varepsilon(x)]_{x_i}}{|x|^{(s-\sigma)2_\sigma^*}} dx \\
&= \left(n/2_\sigma^* - (s-\sigma) \right) \int_\Omega \frac{u^{2_\sigma^*}(x)(1-\varphi_\varepsilon(x))}{|x|^{(s-\sigma)2_\sigma^*}} dx - \int_\Omega \frac{u^{2_\sigma^*}(x)}{2_\sigma^*} \sum_{i=1}^n \frac{x_i [\varphi_\varepsilon(x)]_{x_i}}{|x|^{(s-\sigma)2_\sigma^*}} dx \\
&= -\frac{n-2s}{2} \cdot \left[\langle (-\Delta_\Omega^D)_{Sp}^s u, u \rangle + \int_\Omega \frac{u^{2_\sigma^*}(x) \varphi_\varepsilon(x)}{|x|^{(s-\sigma)2_\sigma^*}} dx \right] - \int_\Omega \frac{u^{2_\sigma^*}(x)}{2_\sigma^*} \sum_{i=1}^n \frac{x_i [\varphi_\varepsilon(x)]_{x_i}}{|x|^{(s-\sigma)2_\sigma^*}} dx.
\end{aligned}$$

Поскольку $w|_{x \in \partial\Omega} = 0$, векторы $\nabla_x w(X)$ и $\vec{n}$ коллинеарны, откуда

$$B_2 = C_s \int_0^\infty \int_{\partial\Omega} t^{1-2s} \langle x, \vec{n} \rangle \cdot |\nabla_x w(X)|^2 \eta_\varepsilon(x) dX.$$

Для B_3 выполнена формула

$$B_3 = -\langle (-\Delta_\Omega^D)_{Sp}^s u, u \rangle + C_s \int_0^\infty \int_\Omega t^{1-2s} |\nabla_X w(X)|^2 \varphi_\varepsilon(x) dX.$$

Интегрированием по частям в B_4 получаем (поскольку $t^{2-2s}|w_t(X)|^2|_{t=0} = 0$)

$$\begin{aligned}
B_4 &= -\frac{C_s}{2} \int_0^\infty \int_{\partial\Omega} t^{1-2s} \langle x, \vec{n} \rangle |\nabla_x w(X)|^2 \eta_\varepsilon(x) dX \\
&\quad + \frac{(n-2s+2)}{2} C_s \int_0^\infty \int_{\Omega} t^{1-2s} |\nabla_X w(X)|^2 (\eta_\varepsilon(x) + \langle x, \nabla_x \eta_\varepsilon(x) \rangle) dX \\
&= -\frac{C_s}{2} \int_0^\infty \int_{\partial\Omega} t^{1-2s} \langle x, \vec{n} \rangle |\nabla_x w(X)|^2 \eta_\varepsilon(x) dX + \frac{n-2s+2}{2} \cdot \langle (-\Delta_\Omega^D)^s u, u \rangle \\
&\quad - \frac{C_s}{2} \int_0^\infty \int_{\Omega} t^{1-2s} |\nabla_X w(X)|^2 ((n-2s+2)\varphi_\varepsilon(x) + \langle x, \nabla_x \varphi_\varepsilon(x) \rangle) dX.
\end{aligned}$$

Из полученных формул следует равенство

$$\begin{aligned}
\frac{C_s}{2} \int_0^\infty \int_{\partial\Omega} t^{1-2s} \langle x, \vec{n} \rangle |\nabla_x w(X)|^2 dX &= \frac{C_s}{2} \int_0^\infty \int_{\partial\Omega} t^{1-2s} \langle x, \vec{n} \rangle |\nabla_x w(X)|^2 \varphi_\varepsilon(x) dX \\
&\quad + \frac{n-2s}{2} \int_{\Omega} \frac{u^{2_\sigma^*}(x) \varphi_\varepsilon(x)}{|x|^{(s-\sigma)2_\sigma^*}} dx + \int_{\Omega} \frac{u^{2_\sigma^*}(x)}{2_\sigma^*} \sum_{i=1}^n \frac{x_i [\varphi_\varepsilon(x)]_{x_i}}{|x|^{(s-\sigma)2_\sigma^*}} dx \\
&\quad + \frac{C_s}{2} \int_0^\infty \int_{\Omega} t^{1-2s} |\nabla_X w(X)|^2 ((n-2s)\varphi_\varepsilon(x) + \langle x, \nabla_x \varphi_\varepsilon(x) \rangle) dX \\
&\quad - C_s \int_0^\infty \int_{\Omega} t^{1-2s} \langle \nabla_x w(X), \nabla_x \varphi_\varepsilon(x) \rangle \langle X, \nabla_X w(X) \rangle dX.
\end{aligned}$$

Заметим, что правая часть равенства стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это означает, что равенство может быть выполнено только тогда, когда левая часть равна нулю. В силу звездности области $\langle x, \vec{n} \rangle > 0$, поэтому $\nabla_x w = 0$ при $x \in \partial\Omega$. Теперь формула интегрирования по частям дает

$$0 = \int_0^\infty \int_{\Omega} \operatorname{div}(t^{1-2s} \nabla_X w(X)) dX = \int_{\Omega} \frac{u^{2_\sigma^*-1}(x)}{|x|^{(s-\sigma)2_\sigma^*}} dX,$$

что невозможно при $u(x) \geq 0, u \not\equiv 0$. ■

Замечание 5.2. Второе утверждение теоремы 5.1 справедливо также в случае $\mathbf{0}_n \in \partial\Omega$. Доказательство проходит без изменений.

С этого момента мы будем считать, что $\mathbf{0}_n \in \partial\Omega$. Также ввиду инвариантности функционала (5.2) относительно домножений $u(x)$ на константу мы будем считать $u(x) > 0$ и $\| |x|^{\sigma-s} u \|_{L_{2\sigma}^*(\Omega)}^2 = 1$.

5.3 Оценки функций Грина для задачи в $\mathbb{R}_+^n$

Рассмотрим следующую задачу в полупространстве:

$$(-\Delta_{\mathbb{R}_+^n}^D)^s u(y) = h(y) \quad \text{в } \mathbb{R}_+^n. \quad (5.4)$$

Обозначим через $w(Y)$ СТ-продолжение функции $u(y)$. Тогда задача (1.26) при $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ принимает вид

$$\mathcal{L}_s[w](Y) \equiv -\operatorname{div}(z^{1-2s} \nabla_Y w(Y)) = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+; \quad w|_{z=0} = u; \quad w|_{y_n=0} = 0. \quad (5.5)$$

Также СТ-продолжение можно получить по функции $h(y)$ как решение задачи

$$\mathcal{L}_s[w](Y) = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+; \quad C_s \frac{\partial w}{\partial \mathbf{v}_s}(y, 0) = h(y); \quad w|_{y_n=0} = 0. \quad (5.6)$$

Цель текущего параграфа — получить оценки функций Грина задач (5.4)-(5.6). Для этого выведем их явные формулы, используя функции Грина в $\mathbb{R}^n$. Ввиду условия $w|_{y_n=0} = 0$ нечетное продолжение $w_{\text{odd}}(X)$ является СТ-продолжением нечетно отраженной функции $u_{\text{odd}}(x)$, и выполнено

$$(-\Delta)^s u_{\text{odd}}(x) = h_{\text{odd}}(x) \quad \text{в } \mathbb{R}^n.$$

Применяя равенства (1.24) и (1.25) к нечетным отражениям, получаем:

Лемма 5.1. *1. Решение задачи (5.6) имеет вид (здесь $y_n \geq 0$)*

$$w(Y) = \int_{\mathbb{R}_+^n} G_s(Y, \xi) h(\xi) d\xi \quad \text{с функцией Грина}$$

$$G_s(Y, \xi) := \frac{\tilde{C}_{n,s}}{(|y - \xi|^2 + z^2)^{\frac{n-2s}{2}}} \left(1 - \left[1 + \frac{4y_n \xi_n}{|y - \xi|^2 + z^2} \right]^{\frac{2s-n}{2}} \right). \quad (5.7)$$

2. Решение задачи (5.5) имеет вид (здесь $y_n \geq 0$)

$$w(Y) = \int_{\mathbb{R}_+^n} \Gamma_s(Y, \xi) u(\xi) d\xi \quad \text{с функцией Грина}$$

$$\Gamma_s(Y, \xi) := \frac{\widehat{C}_{n,s} z^{2s}}{(|y - \xi|^2 + z^2)^{\frac{n+2s}{2}}} \left(1 - \left[1 + \frac{4y_n \xi_n}{|y - \xi|^2 + z^2} \right]^{-\frac{n+2s}{2}} \right). \quad (5.8)$$

3. Решение задачи (5.4) имеет вид (здесь $y_n \geq 0$)

$$u(y) = \int_{\mathbb{R}_+^n} G_s(y, \xi) h(\xi) d\xi \quad \text{с функцией Грина} \quad G_s(y, \xi) := G_s(y, \xi, 0).$$

Для полученных функций Грина выполнены следующие оценки:

Лемма 5.2. При любом $\mathfrak{b} \in [0, 1]$ функции Грина $G_s(Y, \xi)$ и $\Gamma_s(Y, \xi)$ допускают оценки

$$G_s(Y, \xi) \leq \frac{C y_n^{\mathfrak{b}} \xi_n^{\mathfrak{b}}}{(|y - \xi|^2 + z^2)^{\frac{n-2s+2\mathfrak{b}}{2}}} \quad \text{и} \quad \Gamma_s(Y, \xi) \leq \frac{C y_n^{\mathfrak{b}} \xi_n^{\mathfrak{b}} z^{2s}}{(|y - \xi|^2 + z^2)^{\frac{n+2s+2\mathfrak{b}}{2}}}. \quad (5.9)$$

Градиент $\nabla_Y G_s(Y, \xi)$ может быть оценен как

$$|\nabla_Y G_s(Y, \xi)| \leq \frac{C}{(|y - \xi|^2 + z^2)^{\frac{n-2s+1}{2}}} \cdot \min \left(1, \frac{y_n \xi_n}{|y - \xi|^2 + z^2} + \frac{\xi_n}{\sqrt{|y - \xi|^2 + z^2}} \right). \quad (5.10)$$

Доказательство. Первая из оценок (5.9) получается интерполяцией двух неравенств

$$G_s(Y, \xi) \leq \frac{C}{(|y - \xi|^2 + z^2)^{\frac{n-2s}{2}}} \quad \text{и} \quad G_s(Y, \xi) \leq \frac{C y_n \xi_n}{(|y - \xi|^2 + z^2)^{\frac{n-2s+2}{2}}},$$

первое из которых очевидно, а второе следует из оценки по теореме Лагранжа:

$$1 - \left[1 + \frac{4y_n \xi_n}{|y - \xi|^2 + z^2} \right]^{\frac{2s-n}{2}} \leq \frac{C y_n \xi_n}{|y - \xi|^2 + z^2}. \quad (5.11)$$

Вторая из оценок (5.9) получается аналогичным образом.

Градиент функции Грина $\nabla_Y G_s(Y, \xi)$ имеет вид (здесь $i \in [1 : n - 1]$)

$$\begin{pmatrix} \partial_z G_s(Y, \xi) \\ \partial_{y_i} G_s(Y, \xi) \\ \partial_{y_n} G_s(Y, \xi) \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} \frac{z}{(|y - \xi|^2 + z^2)^{\frac{n-2s+2}{2}}} \left(1 - \left[1 + \frac{4y_n \xi_n}{|y - \xi|^2 + z^2} \right]^{\frac{2s-n-2}{2}} \right) \\ \frac{y_i - \xi_i}{(|y - \xi|^2 + z^2)^{\frac{n-2s+2}{2}}} \left(1 - \left[1 + \frac{4y_n \xi_n}{|y - \xi|^2 + z^2} \right]^{\frac{2s-n-2}{2}} \right) \\ \frac{y_n - \xi_n}{(|y - \xi|^2 + z^2)^{\frac{n-2s+2}{2}}} - \frac{y_n + \xi_n}{(|y' - \xi'|^2 + |y_n + \xi_n|^2 + z^2)^{\frac{n-2s+2}{2}}} \end{pmatrix},$$

поэтому первая половина оценки (5.10) очевидна. Вторая половина оценки (5.10) для $\partial_z G_s$ и $\partial_{y_i} G_s$ получается аналогом оценки (5.11) для выражения в больших скобках. Неравенство для $\partial_{y_n} G_s$ следует из неравенства (напомним, что $\xi_n > 0$ и $y_n > 0$)

$$|\partial_{y_n} G_s(Y, \xi)| \leq \frac{|y_n - \xi_n|}{(|y - \xi|^2 + z^2)^{\frac{n-2s+2}{2}}} \left(1 - \left[1 + \frac{4y_n \xi_n}{|y - \xi|^2 + z^2} \right]^{\frac{2s-n-2}{2}} \right) + \frac{2\xi_n}{(|y - \xi|^2 + z^2)^{\frac{n-2s+2}{2}}}$$

и аналога оценки (5.11) для выражения в больших круглых скобках. ■

5.4 Достижимость точной константы $\mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D}$

Теорема 5.2. В $\mathbb{R}_+^n$ существует минимайзер функционала (5.2).

Доказательство. Мы модифицируем схему, приведенную в [102, теорема 3.1] и основанную на принципе Лионса [61; 62]. Пусть $u_k(y)$ — минимизирующая последовательность для функционала (5.2). Как говорилось в §5.2, можно считать $u_k(y) \geq 0$ и $\| |y|^{\sigma-s} u_k \|_{L_{2_\sigma^*}(\mathbb{R}_+^n)} = 1$. Для функции u_k рассмотрим СТ-продолжение $w_k(Y)$ и определим функцию $U_k(y)$:

$$U_k(y) := \int_0^\infty z^{1-2s} |\nabla_Y w_k(Y)|^2 dz. \quad (5.12)$$

Последовательность $\{u_k\}$ ограничена в пространстве $\tilde{\mathcal{D}}^s(\mathbb{R}_+^n)$, поэтому функции w_k ограничены в пространстве $\mathfrak{W}_{s,Sp}^D(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+)$ с нормой (1.27), а функции U_k и $\| |y|^{\sigma-s} u_k \|_{2_\sigma^*}$ ограничены в $L_1(\mathbb{R}_+^n)$. Не умаляя общности можно считать, что:

- $u_k \rightarrow u$ в $\tilde{\mathcal{D}}^s(\mathbb{R}_+^n)$
- $\nabla_Y w_k \rightarrow \nabla_Y w$ в $L_2(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+, z^{1-2s})$, и w — допустимое продолжение функции u
- $\| |y|^{\sigma-s} u_k \|_{2_\sigma^*}$ слабо сходятся к мере μ на $\overline{\mathbb{R}_+^n}$
- U_k слабо сходятся к мере $\mathcal{M}$ на $\overline{\mathbb{R}_+^n}$

(здесь $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ — это одноточечная компактификация $\mathbb{R}_+^n$).

Поскольку $2_\sigma^* < 2_s^*$, вложение $\tilde{\mathcal{D}}_{loc}^s(\mathbb{R}_+^n) \hookrightarrow L_{2_\sigma^*,loc}(\mathbb{R}_+^n \setminus \{\mathbf{0}_n\})$ компактно, и имеет место сходимость $u_k \rightarrow u$ в $L_{2_\sigma^*,loc}(\mathbb{R}_+^n \setminus \{\mathbf{0}_n\})$. Отсюда $|y|^{\sigma-s} u_k \rightarrow |y|^{\sigma-s} u$,

и для меры μ справедливо представление

$$||y|^{\sigma-s}u_k|^{2_\sigma^*} \rightharpoonup \mu = ||y|^{\sigma-s}u|^{2_\sigma^*} + \alpha_0 \delta_0(y) + \alpha_\infty \delta_\infty(y), \quad \alpha_0, \alpha_\infty \geq 0,$$

где $\delta_0(y)$ и $\delta_\infty(y)$ – дельта-функции в нуле и бесконечности. Покажем, что для меры $\mathcal{M}$ выполнено неравенство

$$\mathcal{M} \geq U + \mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D} \alpha_0^{2/2_\sigma^*} \delta_0(y) + \mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D} \alpha_\infty^{2/2_\sigma^*} \delta_\infty(y), \quad (5.13)$$

где функция U определяется формулой (5.12) с функцией w в правой части (вместо w_k). Поскольку правая часть неравенства (5.13) состоит из абсолютно непрерывной части и двух точечных мер, достаточно показать, что $\mathcal{M}$ не меньше каждого из слагаемых.

Для любой $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ имеет место слабая сходимост $\nabla_Y w_k \eta \rightharpoonup \nabla_Y w \eta$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+, z^{1-2s})$. Получаем цепочку

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} \eta^2(y) d\mathcal{M} &\equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+^n} \eta^2(y) U_k(y) dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_+^n} z^{1-2s} |\nabla_Y w_k(Y) \cdot \eta(y)|^2 dY \\ &\stackrel{*}{\geq} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_+^n} z^{1-2s} |\nabla_Y w(Y) \cdot \eta(y)|^2 dY = \int_{\mathbb{R}_+^n} \eta^2(y) U(y) dy \end{aligned} \quad (5.14)$$

(неравенство $(*)$ следует из слабой полунепрерывности нормы снизу), и $\mathcal{M} \geq U$.

Остается получить оценки в нуле и бесконечности. В качестве пробной функции в нуле подставим $\eta_\varepsilon(y) := \varphi_{2\varepsilon}(y)$ (она определена в (1.1); для оценки в бесконечности $\eta_\varepsilon(y) := 1 - \varphi_{2/\varepsilon}(y)$):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} \eta_\varepsilon^2(y) d\mathcal{M} &\equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+^n} U_k \eta_\varepsilon^2(y) dy \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_+^n} z^{1-2s} |\nabla_Y [w_k(Y) \eta_\varepsilon(y)] - w_k(Y) \nabla_Y \eta_\varepsilon(y)|^2 dY \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_+^n} \left[z^{1-2s} |\nabla_Y [w_k(Y) \eta_\varepsilon(y)]|^2 - 2z^{1-2s} \nabla_Y w_k(Y) \nabla_Y \eta_\varepsilon(y) w_k(Y) \eta_\varepsilon(y) \right. \\ &\quad \left. + z^{1-2s} |w_k(Y) \nabla_Y \eta_\varepsilon(y)|^2 \right] dY =: D_1 - D_2 + D_3. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Ввиду неравенства Харди–Соболева (5.1) первый член D_1 дает оценку:

$$D_1 \geq \mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} ||y|^{\sigma-s} u_k \varphi_{2\varepsilon}||_{L_{2_\sigma^*}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \geq \mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D} \alpha_0^{2/2_\sigma^*},$$

(аналогичное неравенство выполнено и в бесконечности). Покажем, что в третьем слагаемом в (5.15) можно перейти к пределу по k под знаком интеграла:

Лемма 5.3. *Выполнено равенство*

$$D_3 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_+^n} z^{1-2s} w^2(Y) |\nabla_y \eta_\varepsilon(y)|^2 dY. \quad (5.16)$$

Доказательство. Докажем утверждение для пробной функции в окрестности нуля: утверждение в бесконечности получается практически дословно. Разобьем интеграл по z на три части (здесь $\delta \in (0,1)$)

$$a_k + b_k + c_k := \left(\int_0^\delta + \int_\delta^{1/\delta} + \int_{1/\delta}^\infty \right) \int_{\mathbb{R}_+^n} z^{1-2s} w_k^2(Y) |\nabla_y \eta_\varepsilon(y)|^2 dY.$$

При фиксированном δ перейдем к пределу в слагаемом b_k : функции $w_k(Y)$ ограничены в $W_2^1(\mathbb{K}_{\varepsilon,\varepsilon}^+ \times [\delta, 1/\delta])$, поэтому можно считать, что $w_k \rightarrow w$ сильно в $L_2(\mathbb{K}_{\varepsilon,\varepsilon}^+ \times [\delta, 1/\delta])$.

Остается показать, что при фиксированном ε за счет выбора δ сумму $a_k + c_k$ можно сделать сколь угодно малой. Покажем, что справедлива оценка

$$a_k + c_k < C(\varepsilon) \cdot \delta^{1-s} \quad (5.17)$$

с константой $C(\varepsilon)$, не зависящей от k . Воспользуемся формулой (5.8)

$$w_k(Y) = \left(\int_{|y-\xi|>1} + \int_{|y-\xi|\leq 1} \right) u_k(\xi) \Gamma_s(Y, \xi) d\xi =: w_{1k}(Y) + w_{2k}(Y)$$

для оценки a_k :

$$a_k \leq 2 \int_0^\delta \int_{\mathbb{R}_+^n} z^{1-2s} [w_{1k}^2(Y) + w_{2k}^2(Y)] \cdot |\nabla_y \eta_\varepsilon(y)|^2 dY =: a_{1k} + a_{2k}.$$

Из оценки (5.9) с $\mathfrak{b} = 0$, неравенства Коши–Буняковского–Шварца и неравенства $|\nabla_y \varphi_{2\varepsilon}| \leq \frac{c}{\varepsilon}$ получаем:

$$\begin{aligned} a_{1k} &\leq \frac{C}{\varepsilon^2} \int_0^\delta z^{1-2s} \int_{|y| < 2\varepsilon} \left(\int_{|y-\xi| > 1} \frac{u_k(\xi) z^{2s}}{(|y-\xi|^2 + z^2)^{\frac{n+2s}{2}}} d\xi \right)^2 dY \\ &\leq C \frac{\delta^{2+2s}}{\varepsilon^2} \int_{|y| < 2\varepsilon} \left(\int_{|y-\xi| > 1} \frac{u_k(\xi) |\xi|^{-s} |\xi|^s}{|y-\xi|^{n+2s}} d\xi \right)^2 dy \\ &\leq C(\varepsilon) \delta^{2+2s} \| |y|^{-s} u_k \|_{L_2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \int_1^\infty r^{-n-2s-1} dr. \end{aligned}$$

Аналогично получаем оценку

$$\begin{aligned} a_{2k} &\leq \frac{C}{\varepsilon^2} \int_0^\delta z^{-s} \int_{|y| < 2\varepsilon} \left(\int_{|y-\xi| \leq 1} \frac{u_k(\xi) z^{2s+\frac{1-s}{2}} d\xi}{(|y-\xi|^2 + z^2)^{\frac{n+2s}{2}}} \right)^2 dY \leq \\ &\leq C \frac{\delta^{1-s}}{\varepsilon^2} \int_{|y| < 2\varepsilon} \left(\int_{|y-\xi| \leq 1} \frac{u_k(\xi) d\xi}{|y-\xi|^{n-\frac{1-s}{2}}} \right)^2 dy. \end{aligned}$$

Оценим подынтегральное выражение в правой части следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\int_{|y-\xi| \leq 1} \frac{u_k(\xi)}{|y-\xi|^{n-\frac{1-s}{2}}} d\xi \right)^2 &\leq C \left(\int_{|y-\xi| \leq 1} \frac{u_k(\xi) - u_k(y)}{|y-\xi|^{n-\frac{1-s}{2}}} d\xi + u_k(y) \right)^2 \leq C u_k^2(y) \\ + C \left(\int_{|y-\xi| \leq 1} \frac{u_k(\xi) - u_k(y)}{|y-\xi|^{n-\frac{1-s}{2}}} d\xi \right)^2 &\leq C u_k^2(y) + C \int_{|y-\xi| \leq 1} \frac{|u_k(\xi) - u_k(y)|^2}{|y-\xi|^{n+2s}} d\xi \cdot \int_0^1 r^s dr. \end{aligned}$$

Отсюда, используя предложение 1.3, получаем

$$a_{2k} \leq C(\varepsilon) \delta^{1-s} \left(\langle (-\Delta_{\mathbb{R}_+^n}^D)_{S_p}^s u_k, u_k \rangle \cdot \int_0^1 r^s dr + \| |y|^{-s} u_k \|_{L_2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \right).$$

Для c_k выполнено неравенство (здесь использована оценка (5.9) с $\mathfrak{b} = 1$)

$$\begin{aligned}
c_k &\leq \frac{C}{\varepsilon^2} \int_{1/\delta}^{\infty} z^{1-2s} \int_{|y| < 2\varepsilon} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{u_k(\xi) z^{2s} |y_n| \xi_n}{(|y - \xi|^2 + z^2)^{\frac{n+2s+2}{2}}} d\xi \right)^2 dY \\
&\leq C(\varepsilon) \| |y|^{-s} u_k \|_{L_2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \int_{1/\delta}^{\infty} z^{1+2s} \left(\int_0^{\infty} \frac{r^{n+1+2s}}{(r^2 + z^2)^{n+2s+2}} dr \right) dz \\
&\leq C(\varepsilon) \| |y|^{-s} u_k \|_{L_2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \int_{1/\delta}^{\infty} z^{-1-n} dz = C(\varepsilon) \delta^n \| |y|^{-s} u_k \|_{L_2(\mathbb{R}_+^n)}^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, оценка (5.17) доказана, а с ней и формула (5.16). ■

Продолжим доказательство теоремы. Выведем из леммы 5.3 оценку в нуле. Имеем неравенство

$$D_3 \leq \frac{C}{\varepsilon^2} \int_0^{\infty} \int_{|y| < 2\varepsilon} z^{1-2s} |w(Y)|^2 dY. \quad (5.18)$$

При $y_n \leq 2\varepsilon$ выполнено неравенство

$$|w(Y)|^2 = \left(\int_0^{y_n} \frac{\partial w(y', t, z)}{\partial y_n} dt \right)^2 \leq 2\varepsilon \int_0^{2\varepsilon} \left(\frac{\partial w}{\partial y_n} \right)^2 dt,$$

откуда

$$D_3 \leq \int_0^{\infty} \int_{|y| < 2\sqrt{2}\varepsilon} z^{1-2s} \left(\frac{\partial w}{\partial y_n} \right)^2 dY = o_\varepsilon(1) \cdot \mathcal{E}_{s, \mathbb{R}_+^n}[w].$$

При помощи неравенства Коши–Буняковского–Шварца получается оценка

$$|D_2| \leq C \sqrt{D_1 \cdot D_3} = o_\varepsilon(1). \quad (5.19)$$

Таким образом, оценка (5.15) переписывается в виде

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi_{2\varepsilon}^2 d\mathcal{M} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+^n} U_k \varphi_{2\varepsilon}^2 dy = \mathcal{S}_{s, \sigma, \mathbb{R}_+^n}^{Sp, D} \alpha_0^{2/2_\sigma^*} + o_\varepsilon(1),$$

то есть $\mathcal{M} \geq \mathcal{S}_{s, \sigma, \mathbb{R}_+^n}^{Sp, D} \alpha_0^{2/2_\sigma^*} \delta_0(y)$.

Выведем из леммы 5.3 оценку в бесконечности. Имеем неравенство

$$D_3 \leq \varepsilon^2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{K}_{1/\varepsilon, 1/\varepsilon}^n} z^{1-2s} |w(Y)|^2 dY.$$

В сферических координатах $(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ при $\theta_{n-1} = 0$ выполнено $w = 0$, поэтому

$$|w(Y)|^2 = |w(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})|^2 = \left(\int_0^{\theta_{n-1}} \frac{\partial w(y', t, z)}{\partial \theta_{n-1}} dt \right)^2 \leq \pi \int_0^\pi \left(\frac{\partial w}{\partial \theta_{n-1}} \right)^2 dt,$$

откуда

$$\begin{aligned} D_3 &\leq \pi^2 \varepsilon^2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{K}_{1/\varepsilon, 1/\varepsilon}^n} z^{1-2s} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta_{n-1}} \right)^2 dY \leq \frac{4\pi^2 \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \int_0^\infty \int_{\mathbb{K}_{1/\varepsilon, 1/\varepsilon}^n} z^{1-2s} |\nabla_y w|^2 dY \\ &= o_\varepsilon(1) \cdot \mathcal{E}_{s, \mathbb{R}_+^n}[w]. \end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны оценке в нуле. Неравенство (5.13) доказано.

Окончание доказательства стандартно. Растяжением по y и домножением на константу можно добиться выполнения соотношения (с условием $\| |y|^{\sigma-s} u_k \|_{L_{2_\sigma^*}(\Omega)} = 1$):

$$\| |y|^{\sigma-s} u_k \|_{L_{2_\sigma^*}(\mathbb{B}_1^+)}^{2_\sigma^*} = \| |y|^{\sigma-s} u_k \|_{L_{2_\sigma^*}(\mathbb{R}_+^n \setminus \mathbb{B}_1^+)}^{2_\sigma^*} = 1/2. \quad (5.20)$$

Из неравенства (5.13) и того, что w — допустимое продолжение u , получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{s, \sigma, \mathbb{R}_+^n}^{Sp, D} \left(\| |y|^{\sigma-s} u \|_{L_{2_\sigma^*}(\mathbb{R}_+^n)}^2 + \alpha_0^{2/2_\sigma^*} + \alpha_\infty^{2/2_\sigma^*} \right) \\ \leq \langle (-\Delta_{\mathbb{R}_+^n}^D)_{Sp}^s u, u \rangle + \mathcal{S}_{s, \sigma, \mathbb{R}_+^n}^{Sp, D} \alpha_0^{2/2_\sigma^*} + \mathcal{S}_{s, \sigma, \mathbb{R}_+^n}^{Sp, D} \alpha_\infty^{2/2_\sigma^*} \leq \int_{\mathbb{R}_+^n} 1 d\mathcal{M} \\ = \mathcal{S}_{s, \sigma, \mathbb{R}_+^n}^{Sp, D} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} 1 d\mu \right)^{2/2_\sigma^*} = \mathcal{S}_{s, \sigma, \mathbb{R}_+^n}^{Sp, D} \left(\| |y|^{\sigma-s} u \|_{L_{2_\sigma^*}(\mathbb{R}_+^n)}^{2_\sigma^*} + \alpha_0 + \alpha_\infty \right)^{2/2_\sigma^*}. \quad (5.21) \end{aligned}$$

Очевидно, что эта оценка может быть выполнена только в том случае, когда в ее правой части есть ровно одно ненулевое слагаемое. Соотношение (5.20) оставляет лишь возможность $\alpha_0 = \alpha_\infty = 0$, откуда получается, что u — минимайзер функционала (5.2). ■

Замечание 5.3. Аналогичным рассуждением можно получить существование минимайзера функционала (5.2) для любого конуса в $\mathbb{R}^n$.

Обозначим полученный минимайзер через $\Phi(y)$, а его СТ-продолжение через $\mathcal{W}(Y)$. Мы считаем $\Phi(y)$ нормированным по знаменателю функционала (5.2), поэтому выполнено равенство $\mathcal{E}_{s, \mathbb{R}_+^n}[\mathcal{W}] = \mathcal{S}_{s, \sigma, \mathbb{R}_+^n}^{Sp, D}$.

Замечание 5.4. Минимайзер функционала (5.2) с условием нормировки $\| |y|^{\sigma-s} \Phi \|_{L_{2\sigma}^*(\mathbb{R}_+^n)} = 1$ не является единственным.

Действительно, функционал (5.2) инвариантен относительно гомотетий и домножения на константу. Композицией этих преобразований можно получить сколько угодно минимайзеров даже при условии единичного знаменателя.

Свойства минимайзера и его продолжения обсуждаются в §5.5.

5.5 Свойства минимайзеров $\Phi(y)$ и $\mathcal{W}(Y)$

Лемма 5.4. Минимайзеры $\Phi(y)$ и $\mathcal{W}(Y)$ радиальны по y' и положительны при $y_n > 0$.

Доказательство. Утверждение следует из того факта, что нетривиальная частичная симметризация Шварца по переменным y' уменьшает значение функционала (5.2). Действительно, воспользуемся равенством (1.29): его правая часть не увеличивается при симметризации (см. [53, теорема 2.31, с. 83] для симметризации Штейнера; частичная симметризация Шварца может быть получена как предел симметризаций Штейнера). Симметризация СТ-продолжения w_{Sp}^D является допустимым продолжением симметризованной функции u , поэтому числитель функционала (1.27) при симметризации не увеличивается. Значение функционала в целом уменьшается, поскольку увеличивается знаменатель (см. [100, теорема 3.4]). ■

Для дальнейших рассуждений зафиксируем конкретный минимайзер и получим оценки его поведения (и поведения СТ-продолжения) в нуле и бесконечности. В качестве первого шага получим “грубую” оценку $\Phi(y)$ на основе метода из [112, лемма 3.5] (см. также [98, гл. II, §5]): это оценка $\sup \Phi$ через

модуль интегральной непрерывности в пространстве Лебега с предельным показателем вложения Соболева.

Пусть $0 < \tau < \|\Phi\|_{L_{2s}^*(\mathbb{R}_+^n)}$, тогда из абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует число $\lambda := \lambda(\Phi, \tau)$ (называемое **уровнем**), такое что

$$\|\Phi - \lambda\|_{L_{2s}^*(\mathcal{Q}_\lambda)} = \tau, \quad \text{где} \quad \mathcal{Q}_\lambda := \{y \in \mathbb{R}_+^n : \Phi(y) > \lambda\}.$$

Лемма 5.5. *Для любого решения $\Phi(y)$ уравнения (5.3) в $\mathbb{R}_+^n$ существует $\tau_*(n, s, \sigma)$, при котором выполнено неравенство*

$$\sup \Phi \leq C \cdot \lambda(\Phi, \tau_*). \quad (5.22)$$

Доказательство. Для любой функции $\eta(Y) \in W_2^1(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+, z^{1-2s})$, $\eta|_{y_n=0} = 0$ имеем

$$C_s \cdot \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_+^n} z^{1-2s} \nabla_Y \mathcal{W}(Y) \cdot \nabla_Y \eta(Y) dY = \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|\Phi(y)|^{2_\sigma^*-1}}{|y|^{(s-\sigma)2_\sigma^*}} \eta(y, 0) dy.$$

Подставим в качестве пробной функции $\eta(Y) := [\mathcal{W}(Y) - \lambda]_+$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{s, \mathbb{R}_+^n, \lambda}[\mathcal{W}] &:= C_s \cdot \int_{\{\mathcal{W} > \lambda\}} z^{1-2s} |\nabla_Y \mathcal{W}(Y)|^2 dY \\ &= \int_{\mathcal{Q}_\lambda} \frac{|\Phi(y)|^{2_\sigma^*-1}}{|y|^{(s-\sigma)2_\sigma^*}} [\Phi(y) - \lambda] dy \leq \int_{\mathcal{Q}_\lambda} \frac{|\Phi(y)|^{2_\sigma^*}}{|y|^{(s-\sigma)2_\sigma^*}} dy. \end{aligned}$$

Оценим интеграл из правой части:

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{L_{2_\sigma^*}^*(\mathcal{Q}_\lambda, |y|^{(\sigma-s)2_\sigma^*})}^{2_\sigma^*} &\leq \left(\|\Phi - \lambda\|_{L_{2_\sigma^*}^*(\mathcal{Q}_\lambda, |y|^{(\sigma-s)2_\sigma^*})} + \lambda \|1\|_{L_{2_\sigma^*}^*(\mathcal{Q}_\lambda, |y|^{(\sigma-s)2_\sigma^*})} \right)^{2_\sigma^*} \\ &\leq 2^{2_\sigma^*} \left(\|\Phi - \lambda\|_{L_{2_\sigma^*}^*}^{2_\sigma^*} + \lambda^{2_\sigma^*} \int_{\mathcal{Q}_\lambda} \frac{1}{|y|^{(s-\sigma)2_\sigma^*}} dy \right) \\ &\stackrel{*}{\leq} 2^{2_\sigma^*} \|\Phi - \lambda\|_{L_{2_\sigma^*}^*(\mathcal{Q}_\lambda, |y|^{(\sigma-s)2_\sigma^*})}^{2_\sigma^*} + C_1 \lambda^{2_\sigma^*} |\mathcal{Q}_\lambda|^{\frac{n-2s}{n-2\sigma}}, \end{aligned}$$

неравенство (*) получается симметризацией Шварца. Оценим первое слагаемое по неравенству Гельдера (напомним, что $\tau \equiv \|\Phi - \lambda\|_{L_{2s}^*(\mathcal{Q}_\lambda)}$)

$$\begin{aligned} \|\Phi - \lambda\|_{L_{2_\sigma^*}^*(\mathcal{Q}_\lambda, |y|^{(\sigma-s)2_\sigma^*})}^{2_\sigma^*} &\leq \|\Phi - \lambda\|_{L_2(\mathcal{Q}_\lambda, |y|^{-2s})}^{\frac{2n(s-\sigma)}{(n-2\sigma)s}} \cdot \|\Phi - \lambda\|_{L_{2s}^*(\mathcal{Q}_\lambda)}^{2 - \frac{2n(s-\sigma)}{(n-2\sigma)s} + 2_\sigma^* - 2} \\ &= \|\Phi - \lambda\|_{L_2(\mathcal{Q}_\lambda, |y|^{-2s})}^{\frac{2n(s-\sigma)}{(n-2\sigma)s}} \cdot \|\Phi - \lambda\|_{L_{2s}^*(\mathcal{Q}_\lambda)}^{2 - \frac{2n(s-\sigma)}{(n-2\sigma)s}} \cdot \tau^{2_\sigma^* - 2}. \end{aligned}$$

В силу дробных неравенств Харди (1.11) и Соболева (1.12) имеем

$$\begin{aligned} \|\Phi - \lambda\|_{L_2(\mathcal{Q}_\lambda, |y|^{-2s})}^{\frac{2n(s-\sigma)}{(n-2\sigma)s}} \cdot \|\Phi - \lambda\|_{L_{2s}^*(\mathcal{Q}_\lambda)}^{2-\frac{2n(s-\sigma)}{(n-2\sigma)s}} \\ \leq C_2 \langle (-\Delta_{\mathcal{Q}_\lambda}^D)^s [\Phi - \lambda]_+, [\Phi - \lambda]_+ \rangle^{**} \leq C_2 \mathcal{E}_{s, \mathbb{R}_+^n, \lambda} [\mathcal{W}], \end{aligned}$$

неравенство (**) следует из того факта, что $\eta(Y) \equiv [\mathcal{W}(Y) - \lambda]_+$ — допустимое продолжение функции $[\Phi - \lambda]_+$. Собирая оценки воедино, получаем неравенство

$$\mathcal{E}_{s, \mathbb{R}_+^n, \lambda} [\mathcal{W}] \leq 2^{2\sigma} C_2 \mathcal{E}_{s, \mathbb{R}_+^n, \lambda} [\mathcal{W}] \tau_*^{2\sigma-2} + C_1 \lambda^{2\sigma} |\mathcal{Q}_\lambda|^{\frac{n-2s}{n-2\sigma}}.$$

Пусть для τ_* выполнено неравенство $2^{2\sigma} C_2 \tau_*^{2\sigma-2} \leq \frac{1}{2}$. При всех $\lambda > \lambda(\Phi, \tau_*)$ имеем

$$C_3 \|\Phi - \lambda\|_{L_{2s}^*(\mathcal{Q}_\lambda)}^2 \leq \mathcal{E}_{s, \mathbb{R}_+^n, \lambda} [\mathcal{W}] \leq 2C_1 \lambda^{2\sigma} |\mathcal{Q}_\lambda|^{\frac{n-2s}{n-2\sigma}}. \quad (5.23)$$

Из неравенства Гельдера и неравенства (5.23) получаем

$$\mathfrak{g}(\lambda) := \int_{\mathcal{Q}_\lambda} [\Phi(y) - \lambda] dy \leq \|\Phi - \lambda\|_{L_{2s}^*(\mathcal{Q}_\lambda)} \cdot |\mathcal{Q}_\lambda|^{\frac{n+2s}{2n}} \leq C_4 \lambda^{\frac{n}{n-2\sigma}} |\mathcal{Q}_\lambda|^{1+\frac{\sigma(n-2s)}{n(n-2\sigma)}}. \quad (5.24)$$

Ввиду формулы для послойного представления интеграла Лебега

$$\mathfrak{g}(\lambda) = \int_{\mathcal{Q}_\lambda} \int_{\lambda}^{\infty} \chi_{\{\theta < \Phi(y)\}} d\theta dy = \int_{\lambda}^{\infty} |\mathcal{Q}_\theta| d\theta$$

для почти всех λ выполнено равенство $\mathfrak{g}'(\lambda) = -|\mathcal{Q}_\lambda|$. Неравенство (5.24) принимает вид:

$$-\mathfrak{g}'(\lambda) [\mathfrak{g}(\lambda)]^{\frac{-n(n-2\sigma)}{n^2-n\sigma-2\sigma s}} \geq C_5 \lambda^{\frac{-n^2}{n^2-n\sigma-2\sigma s}}.$$

Интегрированием по отрезку $[\lambda, \sup \Phi]$ получаем

$$\begin{aligned} -\mathfrak{g}(\lambda)^{\frac{n\sigma-2\sigma s}{n^2-n\sigma-2\sigma s}} &\leq C_6 \left[(\sup \Phi)^{\frac{-n\sigma-2\sigma s}{n^2-n\sigma-2\sigma s}} - \lambda^{\frac{-n\sigma-2\sigma s}{n^2-n\sigma-2\sigma s}} \right]; \\ (\sup \Phi)^{\frac{-n\sigma-2\sigma s}{n^2-n\sigma-2\sigma s}} &\geq \lambda^{\frac{-n\sigma-2\sigma s}{n^2-n\sigma-2\sigma s}} - C_6^{-1} \mathfrak{g}(\lambda)^{\frac{n\sigma-2\sigma s}{n^2-n\sigma-2\sigma s}}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Оценим последний член из (5.24) при $\tau_* \leq \left(\frac{C_6}{2}\right)^{\frac{n^2-n\sigma-2\sigma s}{n\sigma-2\sigma s}} \cdot \left[\mathcal{S}_{s, \sigma, \mathbb{R}_+^n}^{Sp, D} / \mathcal{S}_{s, s, \mathbb{R}^n}\right]^{-\frac{n+2s}{2(n-2s)}} :$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(\lambda) \lambda^{\frac{n+2s}{n-2s}} &\leq \|\Phi - \lambda\|_{L_{2s}^*(\mathcal{Q}_\lambda)} \left(|\mathcal{Q}_\lambda| \lambda^{2\sigma}\right)^{\frac{n+2s}{2n}} \leq \tau_* \|\Phi\|_{L_{2s}^*}^{2\sigma-1} \\ &\leq \tau_* \left[\mathcal{E}_{s, \mathbb{R}_+^n} [\mathcal{W}] / \mathcal{S}_{s, s, \mathbb{R}^n}\right]^{\frac{n+2s}{2(n-2s)}} = \tau_* \left[\mathcal{S}_{s, \sigma, \mathbb{R}_+^n}^{Sp, D} / \mathcal{S}_{s, s, \mathbb{R}^n}\right]^{\frac{n+2s}{2(n-2s)}} \leq (C_6/2)^{\frac{n^2-n\sigma-2\sigma s}{n\sigma-2\sigma s}}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Из неравенств (5.25) и (5.26) следует неравенство

$$(\sup \Phi)^{\frac{-n\sigma-2\sigma s}{n^2-n\sigma-2\sigma s}} \geq \frac{1}{2} \lambda^{\frac{-n\sigma-2\sigma s}{n^2-n\sigma-2\sigma s}},$$

которое и дает оценку (5.22). ■

Замечание 5.5. Задача (5.3) инвариантна при s -преобразовании Кельвина. Действительно, помимо формул (1.32), также выполнено равенство

$$\frac{\partial w^*}{\partial \mathbf{v}_s}(x, 0) \equiv |x|^{-n-2s} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{v}_s} \left(\frac{x}{|x|^2}, 0 \right) = \frac{w^{2_\sigma^*-1} \left(\frac{x}{|x|^2}, 0 \right) |x|^{-n-2s}}{\left| \frac{x}{|x|^2} \right|^{(s-\sigma)2_\sigma^*}} = \frac{[w^*]^{2_\sigma^*-1}(x, 0)}{|x|^{2_\sigma^*(s-\sigma)}}.$$

Этот факт в дальнейшем поможет нам получать оценки на решение w в бесконечности из оценок в нуле.

Следствие 5.1. Для минимайзера $\Phi(y)$ выполнена оценка

$$\Phi(y) \leq \frac{C(n, s, \sigma, \lambda(\Phi, \tau_*), \lambda(\Phi^*, \tau_*))}{(1 + |y|)^{n-2s}}, \quad (5.27)$$

где τ_* определено в лемме 5.5.

Доказательство. Оценка при $|y| \leq 1$ совпадает с оценкой (5.22). Оценка при $|y| \geq 1$ получается s -преобразованием Кельвина:

$$\Phi(y) \leq \frac{1}{|y|^{n-2s}} \cdot \sup \Phi^* \left(\frac{y}{|y|^2} \right) \leq \frac{C(n, s, \sigma, \lambda(\Phi^*, \tau_*))}{|y|^{n-2s}}. \quad \blacksquare$$

Лемма 5.6. Выполнены следующие оценки:

$$\Phi(y) \leq \frac{C y_n}{1 + |y|^{n-2s+2}}, \quad y \in \mathbb{R}_+^n; \quad \mathcal{W}(Y) \leq \frac{C y_n}{1 + |Y|^{n-2s+2}}, \quad Y \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+; \quad (5.28)$$

$$\mathcal{V}(y) := C_s \cdot \int_0^\infty z^{1-2s} |\nabla_Y \mathcal{W}(Y)|^2 dz \leq \frac{C}{1 + |y|^{2n-2s+2}}, \quad y \in \mathbb{R}_+^n, \quad (5.29)$$

где константы C зависят от n, s, σ и выбора минимайзера Φ .

Доказательство. Оценка (5.28) для функции $\Phi(y)$ следует из оценки для продолжения $\mathcal{W}(Y)$, поскольку $\Phi(y)$ является следом $\mathcal{W}(Y)$. Докажем оценку на $\mathcal{W}(Y)$: достаточно получить ее при $|Y| \leq 1$, поскольку оценка в бесконечности

получается из оценки в нуле s -преобразованием Кельвина. Представление для $\mathcal{W}(Y)$ с функцией Грина (5.7) имеет вид

$$\mathcal{W}(Y) = \int_{\mathbb{R}_+^n} G_s(Y, \xi) \frac{\Phi^{2_\sigma^*-1}(\xi)}{|\xi|^{(s-\sigma)2_\sigma^*}} d\xi, \quad y_n \geq 0.$$

Разобьем множество интегрирования на 3 части:

$$\mathcal{W}(Y) \equiv A_1 + A_2 + A_3 := \left(\int_{|\xi|>2} + \int_{\substack{|\xi|\leq 2 \\ 2|y-\xi|>y_n}} + \int_{\substack{|\xi|\leq 2 \\ 2|y-\xi|\leq y_n}} \right) G_s(Y, \xi) \frac{\Phi^{2_\sigma^*-1}(\xi)}{|\xi|^{(s-\sigma)2_\sigma^*}} d\xi.$$

Оценим интеграл A_1 , используя оценку (5.27) и оценку (5.9) с $\mathfrak{b} = 1$:

$$\begin{aligned} A_1 &\leq C y_n \int_{|\xi|>2} |\xi|^{(2_\sigma^*-1)(2s-n)} |\xi|^{(\sigma-s)2_\sigma^*} \frac{\xi_n}{|\xi|^{n-2s+2}} d\xi \\ &\leq C y_n \int_{|\xi|>2} |\xi|^{-\left(\frac{n^2-2ns}{n-2\sigma}+n+1\right)} d\xi \leq C y_n. \end{aligned}$$

Оценка интегралов A_2 и A_3 получается итерационно. Напомним, что минимайзер $\Phi(y)$ зафиксирован; пусть для него выполнена априорная оценка с показателем $\mathfrak{p} \in [0, 1)$ (оценка с $\mathfrak{p} = 0$ доказана в лемме 5.5):

$$\Phi(y) \leq C y_n^{\mathfrak{p}}. \quad (5.30)$$

Пусть $\mathfrak{p}_* := \min(\mathfrak{q} + \mathfrak{p}, 1)$, где

$$\mathfrak{q} := \frac{\sigma(n-2s)}{n-2\sigma} = s - \frac{(s-\sigma)2_\sigma^*}{2} \in (0, s).$$

Оценим A_2 . На множестве интегрирования выполнено неравенство

$$\xi_n \leq |\xi - y| + y_n \leq 3|\xi - y|,$$

поэтому из неравенства $\xi_n < |\xi|$, оценки (5.27) и оценки (5.9) с $\mathfrak{b} = 1$ имеем

$$\begin{aligned} A_2 &\leq \int_{\substack{|\xi|\leq 2 \\ 2|y-\xi|>y_n}} |\xi|^{(\sigma-s)2_\sigma^*} \frac{C y_n \xi_n^{1+(2_\sigma^*-1)\mathfrak{p}}}{|y-\xi|^{n-2s+2}} d\xi \\ &\leq C y_n^{\mathfrak{p}_*} \int_{|\xi|\leq 2} |\xi|^{2(\mathfrak{q}-s)} |y-\xi|^{-n+2s+(2_\sigma^*-1)\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_*} d\xi \quad (5.31) \end{aligned}$$

(обе степени отрицательны, их сумма больше $-n$, и интеграл сходится).

Оценим A_3 . На множестве интегрирования выполнены неравенства

$$|\xi| \geq |y| - |y - \xi| \geq |y| - \frac{y_n}{2} \geq \frac{y_n}{2}; \quad \xi_n \leq |y_n - \xi_n| + y_n \leq \frac{3y_n}{2},$$

поэтому из оценки (5.9) с $\mathbf{b} = 0$ получается оценка

$$A_3 \leq \int_{2|y-\xi| \leq y_n} \frac{C \xi_n^{(2_\sigma^*-1)\mathbf{p}} d\xi}{|\xi|^{2s-2\mathbf{q}} |y - \xi|^{n-2s}} \leq C y_n^{(2_\sigma^*-1)\mathbf{p}-2s+2\mathbf{q}} \int_{2|y-\xi| \leq y_n} |y - \xi|^{2s-n} d\xi \leq C y_n^{\mathbf{p}_*}. \quad (5.32)$$

Оценки (5.31) и (5.32) дают оценки

$$\mathcal{W}(Y) \leq C y_n^{\mathbf{p}_*} \quad \text{и} \quad \Phi(y) \leq C y_n^{\mathbf{p}_*}, \quad (5.33)$$

что позволяет увеличить показатель в правой части оценки (5.30) хотя бы на $\min(\mathbf{q}, 1 - \mathbf{p})$. Повторяя этот процесс, за конечное число шагов получаем оценки (5.33) с $\mathbf{p}_* = 1$. Оценка (5.28) доказана полностью.

Перейдем к доказательству оценки (5.29). Поскольку функция $\mathcal{V}(y)$ не инвариантна под действием s -преобразования Кельвина, оценки в нуле и в бесконечности не получаются друг из друга, и их нужно доказывать по отдельности. Градиент минимайзера получается дифференцированием под знаком интеграла:

$$\nabla_Y \mathcal{W}(Y) \equiv \int \frac{\Phi^{2_\sigma^*-1}(\xi)}{|\xi|^{(s-\sigma)2_\sigma^*}} \nabla_Y G_s(Y, \xi) d\xi, \quad y_n \geq 0.$$

Получим оценку (5.29) при $|y| \leq 1$. Определим A_4 и A_5 равенством

$$\nabla_Y \mathcal{W}(Y) \equiv \left(\int_{|\xi| \geq 2} + \int_{|\xi| < 2} \right) \frac{\Phi^{2_\sigma^*-1}(\xi)}{|\xi|^{(s-\sigma)2_\sigma^*}} \nabla_Y G_s(Y, \xi) d\xi =: A_4(Y) + A_5(Y), \quad y_n \geq 0.$$

Выполнено очевидное неравенство

$$C_s^{-1} \cdot \mathcal{V}(y) \leq 2 \int_0^\infty z^{1-2s} A_4^2(Y) dz + 2 \int_0^2 z^{1-2s} A_5^2(Y) dz + 2 \int_2^\infty z^{1-2s} A_5^2(Y) dz. \quad (5.34)$$

Для оценки первого слагаемого в (5.34) оценим A_4 , используя (5.10) и (5.28):

$$A_4 \leq \int_{|\xi| \geq 2} \frac{\xi_n^{2_\sigma^*-1}}{|\xi|^{(s-\sigma)2_\sigma^* + (2_\sigma^*-1)(n-2s+2)} (|y - \xi|^2 + z^2)^{\frac{n-2s+1}{2}}} d\xi,$$

и поэтому (здесь использовано неравенство $|y - \xi| \geq |\xi| - |y| \geq 1$)

$$\int_0^\infty z^{1-2s} A_4^2(Y) dz \leq C \int_0^\infty \frac{z^{1-2s}}{(1+z^2)^{n-2s+1}} dz \cdot \left(\int_2^\infty \frac{r^{2_\sigma^*-1} r^{n-1}}{r^{(s-\sigma)2_\sigma^* + (2_\sigma^*-1)(n-2s+2)}} dr \right)^2 \leq C,$$

сходимость интеграла по r следует из равенства

$$2_\sigma^* - 1 + n - 1 - (s - \sigma)2_\sigma^* - (2_\sigma^* - 1)(n - 2s + 2) = -\frac{2\sigma(n - 2s + 2)}{n - 2\sigma} - 2.$$

Для оценки оставшихся слагаемых в (5.34) оценим A_5 , используя (5.10) и (5.28):

$$A_5 \leq \int_{|\xi| < 2} \frac{\xi_n^{2_\sigma^*-1}}{|\xi|^{(s-\sigma)2_\sigma^*} (|y - \xi|^2 + z^2)^{\frac{n-2s+1}{2}}} d\xi.$$

Второе слагаемое оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_0^2 z^{1-2s} A_5^2(Y) dz \\ & \leq C \int_0^2 z^{-1+\min(s, 1-s)} dz \cdot \left(\int_{|\xi| < 2} \frac{\xi_n^{2_\sigma^*-1}}{|\xi|^{(s-\sigma)2_\sigma^*} |y - \xi|^{n-s+\frac{\min(s, 1-s)}{2}}} d\xi \right)^2 \leq C, \end{aligned}$$

сходимость интеграла по ξ обеспечивается неравенством

$$2_\sigma^* - 2 - (s - \sigma)2_\sigma^* + s - \frac{\min(s, 1-s)}{2} = \frac{2\sigma(n - 2s + 2)}{n - 2\sigma} - s - \frac{\min(s, 1-s)}{2} > -1.$$

Наконец, третье слагаемое оценивается как

$$\int_2^\infty z^{1-2s} A_5^2(Y) dz \leq C \int_2^\infty \frac{z^{1-2s}}{z^{2n-4s+2}} dz \cdot \left(\int_0^2 \frac{r^{2_\sigma^*-1} r^{n-1}}{r^{(s-\sigma)2_\sigma^*}} dr \right)^2 \leq C,$$

и оценка (5.29) при $|y| \leq 1$ доказана.

Осталось получить оценку (5.29) при $|y| > 1$. При $y_n \geq 0$ определим A_6 и A_7 равенством

$$\nabla_Y \mathcal{W}(Y) \equiv \left(\int_{10|y-\xi| < |y|} + \int_{10|y-\xi| \geq |y|} \right) \frac{\Phi^{2_\sigma^*-1}(\xi)}{|\xi|^{(s-\sigma)2_\sigma^*}} \nabla_Y G_s(Y, \xi) d\xi =: A_6(Y) + A_7(Y).$$

Неравенство на $\mathcal{V}(y)$ выглядит следующим образом:

$$C_s^{-1} \cdot \mathcal{V}(y) \leq 2 \int_0^\infty z^{1-2s} A_6^2(y, z) dz + 2 \int_0^\infty z^{1-2s} A_7^2(y, z) dz. \quad (5.35)$$

Оценим A_6 из неравенств (5.10) и (5.28), а также неравенства $|\xi| \geq \frac{9|y|}{10} \geq \frac{9}{10}$:

$$\begin{aligned} A_6 &\leq C \int_{10|y-\xi| < |y|} \frac{|\xi|^{(\sigma-s)2_\sigma^* - (2_\sigma^*-1)(n-2s+1)}}{(|y-\xi|^2 + z^2)^{\frac{n-2s+1}{2}}} d\xi \\ &\leq \frac{C}{|y|^{(s-\sigma)2_\sigma^* + (2_\sigma^*-1)(n-2s+1)}} \int_0^{|y|/10} \frac{r^{n-1}}{(r^2 + z^2)^{\frac{n-2s+1}{2}}} dr. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_0^\infty z^{1-2s} \left(\int_0^{|y|/10} \frac{r^{n-1}}{(r^2 + z^2)^{\frac{n-2s+1}{2}}} dr \right)^2 dz = \frac{|y|^{2s}}{10^{2s}} \int_0^\infty z^{1-2s} \left(\int_0^1 \frac{r^{n-1}}{(r^2 + z^2)^{\frac{n-2s+1}{2}}} dr \right)^2 dz,$$

получаем оценку первого слагаемого в (5.35)

$$\int_0^\infty z^{1-2s} A_6^2(y, z) dz \leq \frac{C|y|^{2s}}{|y|^{2((s-\sigma)2_\sigma^* + (2_\sigma^*-1)(n-2s+1))}} = \frac{C}{|y|^{2n-2s+2+4\sigma\frac{n-2s+2}{n-2\sigma}}}.$$

Для оценки второго слагаемого в (5.35) оценим A_7 из неравенств (5.10) и (5.28):

$$\begin{aligned} A_7 &\leq \int_{10|y-\xi| \geq |y|} \frac{C\Phi^{2_\sigma^*-1}(\xi)\xi_n}{|\xi|^{(s-\sigma)2_\sigma^*} (|y-\xi|^2 + z^2)^{\frac{n-2s+2}{2}}} \left(\frac{y_n}{\sqrt{|y-\xi|^2 + z^2}} + 1 \right) d\xi \\ &\leq \frac{C}{(|y|^2 + z^2)^{\frac{n-2s+2}{2}}} \cdot \int_{10|y-\xi| \geq |y|} \frac{\xi_n^{2_\sigma^*}}{|\xi|^{(s-\sigma)2_\sigma^*} (1 + |\xi|^{(2_\sigma^*-1)(n-2s+2)})} d\xi. \end{aligned}$$

сходимость интеграла по ξ следует из неравенства

$$2_\sigma^* - (s-\sigma)2_\sigma^* - (2_\sigma^*-1)(n-2s+2) = -\frac{n^2 - 4s\sigma + 4\sigma}{n-2\sigma} = -n-2\sigma\frac{n-2s+2}{n-2\sigma} < -n.$$

Получаем оценку второго слагаемого

$$\int_0^\infty z^{1-2s} A_7^2(y, z) dz \leq C \int_0^\infty \frac{z^{1-2s}}{(|y|^2 + z^2)^{n-2s+2}} dz \leq \frac{C}{|y|^{2n-2s+2}},$$

и оценка (5.29) доказана! ■

5.6 Достижимость точной константы $\mathcal{S}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D}$

Для доказательства существования решения в области требуется наложить условия на границу $\partial\Omega$. Воспользуемся параметризацией $x_n = F(x')$ в окрестности $|x| < r_0$ начала координат $\mathbf{0}_n$: мы будем считать, что $F \in \mathcal{C}^1$, $F(\mathbf{0}_{n-1}) = 0$ и $\nabla_{x'} F(\mathbf{0}_{n-1}) = \mathbf{0}_{n-1}$. Следуя работе [92], предположим, что граница **вогнута в среднем** в нуле: при малых $\tau > 0$ выполнено неравенство

$$f(\tau) := \frac{1}{|\mathbb{S}_\tau^{n-2}|} \int_{\mathbb{S}_\tau^{n-2}} F(y') dy' < 0. \quad (5.36)$$

Очевидно, что $f \in \mathcal{C}^1$ в окрестности нуля. Кроме того, предположим, что f имеет **регулярное поведение** в нуле порядка $\alpha \in [1, n - 2s + 3)$: при любом $d > 0$ выполнено

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(d\tau)}{f(\tau)} = d^\alpha. \quad (5.37)$$

Известно (см. [75, §1.1, §1.2]), что для функций с регулярным поведением (5.37) имеет место представление $f(\tau) := -\tau^\alpha \psi(\tau)$ с медленно меняющейся в окрестности нуля функцией $\psi(\tau)$. Отдельно отметим, что в случае $\alpha = 1$ условие $F \in \mathcal{C}^1$ влечет $\lim_{\tau \rightarrow 0} \psi(\tau) = 0$.

Определим следующие функции

$$\begin{aligned} f_1(\tau) &:= \frac{1}{|\mathbb{S}_\tau^{n-2}|} \int_{\mathbb{S}_\tau^{n-2}} F^2(y') dy'; & f_2(\tau) &:= \frac{1}{|\mathbb{S}_\tau^{n-2}|} \int_{\mathbb{S}_\tau^{n-2}} |\nabla_{y'} F(y')|^2 dy'; \\ f_3(\tau) &:= \frac{1}{|\mathbb{S}_\tau^{n-2}|} \int_{\mathbb{S}_\tau^{n-2}} |\nabla_{y'} F(y')| dy', \end{aligned}$$

и потребуем выполнения **условия**

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f_2(\tau)}{f(\tau)} \tau = 0. \quad (5.38)$$

Замечание 5.6. В случае $\mathcal{C}^2$ -гладкой области Ω с отрицательной средней кривизной границы $\partial\Omega$ в начале координат $\mathbf{0}_n$ условия (5.36)-(5.38) выполнены при $\alpha = 2$ (см. [92, замечание 1]). Также отметим, что эти условия допускают как отсутствие средней кривизны (в случае $\alpha < 2$), так и ее обращение в ноль (при $\alpha > 2$).

Замечание 5.7. В [92, §4, п.4] из условия (5.38) было получено неравенство

$$f_1(\tau) \leq C\tau|f(\tau)|_{o_\tau(1)}. \quad (5.39)$$

Теорема 5.3. Пусть граница $\partial\Omega$ удовлетворяет условиям (5.36)-(5.38). Тогда минимайзер функционала (5.2) существует, и, таким образом, задача (5.3) имеет положительное решение в области Ω .

Доказательство. Схема доказательства повторяет схему из теоремы 5.2. Рассмотрим минимизирующую последовательность $u_k(x)$ для функционала (5.2). Обозначим СТ-продолжения $w_k(X)$ и определим функции $U_k(x)$ формулой (5.12). Как и ранее, $U_k \in L_1(\Omega)$ и $\|x\|^{\sigma-s}u_k\|_{2_\sigma^*}^{2_\sigma^*} \in L_1(\Omega)$, и можно считать, что:

- $u_k \geq 0$, $u_k \rightharpoonup u$ в $\tilde{\mathcal{D}}^s(\Omega)$
- $\nabla_X w_k \rightharpoonup \nabla_X w$ в $L_2(\Omega \times \mathbb{R}_+, t^{1-2s})$
- $\|x\|^{\sigma-s}u_k\|_{2_\sigma^*}^{2_\sigma^*}$ слабо сходятся к мере μ на $\bar{\Omega}$
- U_k слабо сходятся к мере $\mathcal{M}$ на $\bar{\Omega}$.

В отличие от случая $\Omega = \mathbb{R}_+^n$, в ограниченной области Ω мера μ имеет вид

$$\mu = \|x\|^{\sigma-s}u\|_{2_\sigma^*}^{2_\sigma^*} + \alpha_0\delta_0(x),$$

и требуется показать справедливость неравенства

$$\mathcal{M} \geq U + \mathcal{S}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D} \alpha_0^{2/2_\sigma^*} \delta_0(x). \quad (5.40)$$

Доказательство оценки $\mathcal{M} \geq U$ дословно повторяет цепочку неравенств (5.14). Для получения оценки в нуле запишем аналог равенства (5.15):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_{2\varepsilon}^2 d\mathcal{M} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_{\Omega} \left[t^{1-2s} |\nabla_X [w_k(X) \varphi_{2\varepsilon}]|^2 - 2t^{1-2s} |\nabla_x w_k \cdot \nabla_x \varphi_{2\varepsilon} \cdot w_k \varphi_{2\varepsilon}| \right. \\ &\quad \left. + t^{1-2s} |w_k(X) \nabla_x \varphi_{2\varepsilon}(x)|^2 \right] dX =: \tilde{D}_1 - \tilde{D}_2 + \tilde{D}_3 \end{aligned} \quad (5.41)$$

с $\tilde{D}_1 \geq \mathcal{S}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D} \alpha_0^{2/2_\sigma^*}$. Аналогично лемме 5.3, покажем, что в третьем члене можно перейти к пределу под знаком интеграла. Для этого разобьем его на три части:

$$\tilde{a}_k + \tilde{b}_k + \tilde{c}_k := \left(\int_0^\delta + \int_\delta^{1/\delta} + \int_{1/\delta}^\infty \right) \int_{\Omega} t^{1-2s} w_k^2(X) |\nabla_x \varphi_{2\varepsilon}(x)|^2 dX.$$

Аналогично доказательству леммы 5.3 слагаемые $\tilde{b}_k$ имеют предел, и остается получить аналог оценки (5.17). В ограниченной области СТ-продолжение (1.26)

может быть разложено в ряд Фурье по собственным функциям оператора Лапласа (см. [82, (3.1)-(3.8)]):

$$w(X) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i(t) \varphi_{D,i}(x) \quad \text{с} \quad d_i(t) = t^s \frac{2^{1-s}}{\Gamma(s)} \lambda_{D,i}^{s/2} \langle u, \varphi_{D,i} \rangle \mathfrak{K}_s(\lambda_{D,i}^{1/2} t).$$

Пользуясь асимптотиками (1.2) и (1.3) для $\mathfrak{K}_s(\tau)$, получаем оценки (очевидно, $\lambda_{D,i} \rightarrow \infty$)

$$w_k(X) \leq C \sum_{i=1}^{\infty} \langle u_k, \varphi_{D,i} \rangle \varphi_{D,i}(x) \cdot \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [0, \delta]; \\ t^{2s-2} & \text{при } t \in [1/\delta, \infty), \end{cases}$$

поэтому выполняется неравенство

$$\tilde{a}_k + \tilde{c}_k \leq \frac{C}{\varepsilon^2} \int_0^{\infty} (t^{1-2s} \chi_{[0,\delta]}(t) + t^{2s-3} \chi_{[1/\delta,\infty)}(t)) \int_{\Omega} u_k^2 dX \leq C(\varepsilon) \delta^{2-2s} \|u_k\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Аналог оценки (5.17) доказан, дальнейшие оценки (5.18)-(5.19) также выполняются, поэтому выполнено неравенство (5.40). Неравенство, аналогичное (5.21), оставляет две альтернативы: либо $\alpha_0 = 0$ и минимум достигается, либо $\alpha_0 = 1$ и $u \equiv 0$.

Покажем, что во втором случае выполнено неравенство

$$\mathcal{S}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D} \geq \mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D}. \quad (5.42)$$

Действительно, если $\{u_k\}$ — минимизирующая последовательность для функционала (5.2), то последовательность $\{u_k \varphi_{2\varepsilon}\}$ тоже является минимизирующей (см. также [63, следствие 2.1]): знаменатель функционала (5.2) сходится к $[\alpha_0 \varphi_{2\varepsilon}^{2^*}(0)]^{2/2^*} = \alpha_0^{2/2^*}$, а сходимость числителя получается из (5.41) и аналога леммы 5.3 (в этом случае $\tilde{D}_2 = \tilde{D}_3 = 0$):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{s,\Omega} [w_k \varphi_{2\varepsilon}] = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \int_{\Omega} t^{1-2s} |\nabla_X [w_k \varphi_{2\varepsilon}]|^2 dX = \int_{\Omega} \varphi_{2\varepsilon}^2 d\mathcal{M} = \mathcal{S}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D} \alpha_0^{2/2^*}.$$

Более того, при малых ε можно распрямить границу $\partial\Omega$ преобразованием $\Theta_1(x)$ (см. (1.5); его якобиан единичный), и с учетом $F \in \mathcal{C}^1$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}_{s,\Omega} [w_k \varphi_{2\varepsilon}]}{\| |x|^{\sigma-s} u_k \varphi_{2\varepsilon} \|_{L_{2\sigma}^*(\Omega)}^2} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{C_s \cdot \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_+^n} z^{1-2s} |\nabla_Y [w_k \varphi_{2\varepsilon}] (\Theta_1^{-1}(y), z)|^2 dY \cdot (1 + o_\varepsilon(1))}{\left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \|y'\|^2 + (y_n + F(y'))^2 \right)^{\frac{(\sigma-s)2_\sigma^*}{2}} [u_k \varphi_{2\varepsilon}]_{2_\sigma^*}^2 (\Theta_1^{-1}(y)) dy)^{2/2_\sigma^*}}, \end{aligned}$$

($o_\varepsilon(1)$ в числителе возникает из оценки производных $\frac{\partial F}{\partial y_i}$ при замене переменных в градиенте). Ввиду того, что функция $w_k(\Theta_1^{-1}(y), z) \cdot \varphi_{2\varepsilon}(\Theta_1^{-1}(y))$ является допустимым продолжением функции $u_k(\Theta_1^{-1}(y)) \cdot \varphi_{2\varepsilon}(\Theta_1^{-1}(y))$, выполнено неравенство

$$\mathcal{S}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D} \geq \mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D} \cdot (1 + o_\varepsilon(1)).$$

Поскольку ε может быть выбрано сколь угодно малым, неравенство (5.42) доказано.

Для завершения доказательства остается построить (используя условия (5.36)-(5.38)) функцию $\tilde{\Phi}_\varepsilon(x)$ со значением функционала (5.2) меньше $\mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D}$. Для этого используем замены переменных (1.6): пусть $\delta \in (0, r_0)$, определим функцию $\tilde{\varphi}(x) := \varphi_\delta(\Theta_1(x))$ и функции $\tilde{\Phi}_\varepsilon(x)$ и $\tilde{\mathcal{W}}_\varepsilon(X)$ (напомним, что $\Phi(y)$ — минимайзер в $\mathbb{R}_+^n$, а $\mathcal{W}(Y)$ — его СТ-продолжение)

$$\tilde{\Phi}_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-\frac{n-2s}{2}} \Phi(\Theta_\varepsilon(x)) \tilde{\varphi}(x); \quad \tilde{\mathcal{W}}_\varepsilon(X) := \varepsilon^{-\frac{n-2s}{2}} \mathcal{W}(\Theta_\varepsilon(X)) \tilde{\varphi}(x).$$

Отметим, что функция $\tilde{\varphi}(\Theta_\varepsilon^{-1}(y))$ является радиальной

$$\tilde{\varphi}(\Theta_\varepsilon^{-1}(y)) = \tilde{\varphi}(\varepsilon y', \varepsilon y_n + F(\varepsilon y')) = \varphi_\delta(\Theta_1(\Theta_\varepsilon^{-1}(y))) = \varphi_\delta(\varepsilon |y|),$$

а функция $\tilde{\mathcal{W}}_\varepsilon(X)$ является допустимым продолжением функции $\tilde{\Phi}_\varepsilon(x)$. Отсюда следует, что

$$\mathcal{I}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D}[\tilde{\Phi}_\varepsilon(x)] = \frac{\langle (-\Delta_\Omega^D)^s_{Sp} \tilde{\Phi}_\varepsilon, \tilde{\Phi}_\varepsilon \rangle}{\| |x|^{\sigma-s} \tilde{\Phi}_\varepsilon(x) \|_{L_{2\sigma}^*(\Omega)}^2} \leq \frac{C_s \cdot \int_0^\infty \int_\Omega t^{1-2s} |\nabla_X \tilde{\mathcal{W}}_\varepsilon(X)|^2 dX}{\| |x|^{\sigma-s} \tilde{\Phi}_\varepsilon(x) \|_{L_{2\sigma}^*(\Omega)}^2}. \quad (5.43)$$

В §§5.7 и 5.8 будут доказаны оценки на числитель и знаменатель правой части оценки (5.43):

$$\int_{\Omega} \frac{|\tilde{\Phi}_{\varepsilon}(x)|^{2_{\sigma}^*}}{|x|^{(s-\sigma)2_{\sigma}^*}} dx = 1 - \mathcal{A}_1(\varepsilon) \cdot [1 + o_{\varepsilon}(1) + o_{\delta}(1)]; \quad (5.44)$$

$$\mathcal{E}_{s,\Omega} [\widetilde{\mathcal{W}}_{\varepsilon}] = \mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D} + \mathcal{A}_2(\varepsilon) \cdot [1 + o_{\varepsilon}(1) + o_{\delta}(1)] - \frac{2}{2_{\sigma}^*} \mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D} \mathcal{A}_1(\varepsilon) \cdot [1 + o_{\varepsilon}(1)], \quad (5.45)$$

где при фиксированном δ и $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathcal{A}_1(\varepsilon) \sim c_1 \varepsilon^{-1} f(\varepsilon); \quad \mathcal{A}_2(\varepsilon) \sim c_2 \varepsilon^{-1} f(\varepsilon); \quad \mathcal{A}_1(\varepsilon), \mathcal{A}_2(\varepsilon) < 0$$

с константами $c_1, c_2 > 0$. Поэтому при достаточно малых δ и ε имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{s,\sigma,\Omega}^{Sp,D} [\tilde{\Phi}_{\varepsilon}(x)] &\leq \frac{\mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D} + \mathcal{A}_2(\varepsilon) \cdot [1 + o_{\varepsilon}(1) + o_{\delta}(1)] - \frac{2}{2_{\sigma}^*} \mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D} \mathcal{A}_1(\varepsilon) \cdot [1 + o_{\varepsilon}(1)]}{\left(1 - \mathcal{A}_1(\varepsilon)[1 + o_{\varepsilon}(1) + o_{\delta}(1)]\right)^{2/2_{\sigma}^*}} \\ &= \mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D} + \mathcal{A}_2(\varepsilon) \cdot [1 + o_{\varepsilon}(1) + o_{\delta}(1)] < \mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D}, \end{aligned}$$

неравенство (5.42) не выполнено, и теорема 5.3 доказана! ■

5.7 Доказательство оценки (5.44)

Формула (5.44) получается модификацией выкладок из [92, §4]. Сделаем замену переменных (1.6) и распишем подынтегральное выражение по формуле Тейлора:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{|\tilde{\Phi}_{\varepsilon}(x)|^{2_{\sigma}^*}}{|x|^{(s-\sigma)2_{\sigma}^*}} dx &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|\Phi(y)|^{2_{\sigma}^*}}{|y + \varepsilon^{-1}F(\varepsilon y')e_n|^{(s-\sigma)2_{\sigma}^*}} \tilde{\varphi}^{2_{\sigma}^*}(\Theta_{\varepsilon}^{-1}(y)) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|\Phi(y)|^{2_{\sigma}^*}}{|y|^{(s-\sigma)2_{\sigma}^*}} \varphi_{\delta}^{2_{\sigma}^*}(\varepsilon y) \cdot \left(1 - \frac{(s-\sigma)2_{\sigma}^*}{\varepsilon} F(\varepsilon y') \frac{y_n}{|y|^2} + \frac{F^2(\varepsilon y')}{\varepsilon^2 |y|^2} \cdot O_{\delta}(1) \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|\Phi(y)|^{2_{\sigma}^*}}{|y|^{(s-\sigma)2_{\sigma}^*}} dy - \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|\Phi(y)|^{2_{\sigma}^*}}{|y|^{(s-\sigma)2_{\sigma}^*}} \left(1 - \varphi_{\delta}^{2_{\sigma}^*}(\varepsilon y) \right) dy \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{(s-\sigma)2_{\sigma}^* |\Phi(y)|^{2_{\sigma}^*} \varphi_{\delta}^{2_{\sigma}^*}(\varepsilon y) y_n}{\varepsilon |y|^{(s-\sigma)2_{\sigma}^*+2}} F(\varepsilon y') dy + O_{\delta}(1) \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|\Phi(y)|^{2_{\sigma}^*}}{|y|^{(s-\sigma)2_{\sigma}^*}} \varphi_{\delta}^{2_{\sigma}^*}(\varepsilon y) \frac{F^2(\varepsilon y')}{\varepsilon^2 |y|^2} dy \\
&=: I_1 - I_2(\varepsilon) - I_3(\varepsilon) + I_4(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Лемма 5.7. *Выполнены следующие соотношения:*

$$1. \ I_1 = 1 \text{ и } I_2(\varepsilon) \leq C \left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right)^{\frac{n(n-2s+2)}{n-2\sigma}}.$$

2.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \frac{I_3(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} = C \int_0^{\infty} \tau^{\alpha+n} \int_0^{\infty} \frac{|\Phi(\tau, \tau \varsigma)|^{2_{\sigma}^*} d\varsigma}{|\tau^2 + \tau^2 \varsigma^2|^{\frac{(s-\sigma)2_{\sigma}^*+2}{2}}} d\tau. \quad (5.46)$$

$$3. \ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \varepsilon \frac{I_4(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} \right| = o_{\delta}(1).$$

Доказательство.

1. Равенство $I_1 = 1$ следует из нормировки $\Phi(y)$. Также, из оценки (5.28) для минимайзера $\Phi(y)$ имеем

$$\begin{aligned}
I_2(\varepsilon) &\equiv \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|\Phi(y)|^{2_{\sigma}^*}}{|y|^{(s-\sigma)2_{\sigma}^*}} \left(1 - \varphi_{\delta}^{2_{\sigma}^*}(\varepsilon y) \right) dy \\
&\leq C \int_{\delta/(2\varepsilon)}^{\infty} r^{n-1-2_{\sigma}^*(n-s-\sigma+1)} dr = C \left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right)^{\frac{n(n-2s+2)}{n-2\sigma}}.
\end{aligned}$$

2. Выполнена цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon I_3(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} &= \frac{(s-\sigma)2_\sigma^*}{f(\varepsilon)} \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi_\delta^{2_\sigma^*}(\varepsilon y) \frac{|\Phi(y)|^{2_\sigma^*} y_n}{|y|^{(s-\sigma)2_\sigma^*+2}} F(\varepsilon y') dy \\
&= \frac{C}{f(\varepsilon)} \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_\delta^{2_\sigma^*}(\varepsilon \sqrt{\tau^2 + y_n^2}) \frac{|\Phi(\tau, y_n)|^{2_\sigma^*} y_n}{(\tau^2 + y_n^2)^{\frac{(s-\sigma)2_\sigma^*+2}{2}}} \int_{\mathbb{S}_\tau^{n-2}} F(\varepsilon y') d\mathbb{S}_\tau^{n-2}(y') dy_n d\tau \\
&= C \int_0^\infty \tau^n \frac{f(\varepsilon \tau)}{f(\varepsilon)} \int_0^\infty \varphi_\delta^{2_\sigma^*}(\varepsilon \sqrt{\tau^2 + \tau^2 \varsigma^2}) \frac{|\Phi(\tau, \tau \varsigma)|^{2_\sigma^*} \varsigma d\varsigma}{(\tau^2 + \tau^2 \varsigma^2)^{\frac{(s-\sigma)2_\sigma^*+2}{2}}} d\tau \\
&= C \int_0^\infty \tau^{\alpha+n} \frac{\psi(\varepsilon \tau)}{\psi(\varepsilon)} \int_0^\infty \varphi_\delta^{2_\sigma^*}(\varepsilon \sqrt{\tau^2 + \tau^2 \varsigma^2}) \frac{|\Phi(\tau, \tau \varsigma)|^{2_\sigma^*} \varsigma d\varsigma}{(\tau^2 + \tau^2 \varsigma^2)^{\frac{(s-\sigma)2_\sigma^*+2}{2}}} d\tau \\
&=: C \int_0^\infty P_\varepsilon(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Поскольку $\psi(\tau)$ — медленно меняющаяся функция, $P_\varepsilon(\tau)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится к подынтегральному выражению в правой части (5.46). Для обоснования формулы (5.46) требуется перейти к пределу под знаком интеграла. Покажем, что выполнены условия теоремы Лебега. Для этого построим суммируемую мажоранту для $P_\varepsilon(\tau)$ (аналогичную мажоранте из [92, предложение 4.1]). Используя равенство

$$\frac{\psi(\varepsilon \tau)}{\psi(\varepsilon)} = \frac{\psi(\varepsilon \tau)(\varepsilon \tau)^\beta}{\psi(\varepsilon)(\varepsilon)^\beta} \chi_{[0,1]}(\tau) \tau^{-\beta} + \frac{\psi(\varepsilon \tau)(\varepsilon \tau)^{-\beta}}{\psi(\varepsilon)(\varepsilon)^{-\beta}} \chi_{[1,\infty)}(\tau) \tau^\beta \quad (5.47)$$

оценим $P_\varepsilon(\tau)$ сверху (при любом $\beta > 0$ функция $\psi(\tau)\tau^\beta$ является возрастающей, а $\psi(\tau)\tau^{-\beta}$ — убывающей):

$$P_\varepsilon(\tau) \leq C (\chi_{[0,1]}(\tau) \cdot \tau^{\alpha+n-\beta} + \chi_{[1,\infty)}(\tau) \cdot \tau^{\alpha+n+\beta}) \int_0^\infty \frac{|\Phi(\tau, \tau \varsigma)|^{2_\sigma^*} \varsigma d\varsigma}{(\tau^2 + \tau^2 \varsigma^2)^{\frac{(s-\sigma)2_\sigma^*+2}{2}}}.$$

Получившийся интеграл оценим с помощью (5.28): при $\tau \in [0,1]$ имеем

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{(\tau^2 + \tau^2 \varsigma^2)^{\frac{(1-s+\sigma)2_\sigma^*-2}{2}} \varsigma}{1 + (\tau^2 + \tau^2 \varsigma^2)^{\frac{(n-2s+2)2_\sigma^*}{2}}} d\varsigma &= \frac{1}{2\tau^2} \int_{\tau^2}^\infty \frac{r^{\frac{(1-s+\sigma)2_\sigma^*-2}{2}}}{1 + r^{\frac{(n-2s+2)2_\sigma^*}{2}}} dr \\
&\leq \frac{1}{2\tau^2} \int_0^\infty \frac{r^{\frac{(1-s+\sigma)2_\sigma^*-2}{2}}}{1 + r^{\frac{(n-2s+2)2_\sigma^*}{2}}} dr,
\end{aligned}$$

при $\tau > 1$ имеем

$$\int_0^\infty \frac{(\tau^2 + \tau^2 \zeta^2)^{\frac{(1-s+\sigma)2_\sigma^*-2}{2}} \zeta}{1 + (\tau^2 + \tau^2 \zeta^2)^{\frac{(n-2s+2)2_\sigma^*}{2}}} d\zeta \leq \tau^{-(n-s-\sigma+1)2_\sigma^*-2} \int_0^\infty \frac{\zeta}{(1 + \zeta^2)^{\frac{(n-s-\sigma+1)2_\sigma^*+2}{2}}} d\zeta.$$

Выбирая $\beta := \min\left(\frac{\sigma(n-2s+2)}{n-2\sigma}, \frac{1}{2}\right)$, получаем оценку

$$P_\varepsilon(\tau) \leq C \left(\chi_{[0,1]}(\tau) \cdot \tau^{\alpha+n-2-\beta} + \chi_{[1,\infty)}(\tau) \cdot \tau^{\alpha+n+\beta-(n-s-\sigma+1)2_\sigma^*-2} \right)$$

где в правой части стоит суммируемая мажоранта (напомним, что выполнено $\alpha < n - 2s + 3$):

$$\alpha + n + \beta - (n - s - \sigma + 1)2_\sigma^* - 2 < -1 + \beta - \frac{2\sigma(n - 2s + 2)}{n - 2\sigma} < -1.$$

3. Используя неравенство (5.39), получаем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \left| \varepsilon \frac{I_4(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} \right| &\leq O_\delta(1) \int_0^{\delta/\varepsilon} \frac{\tau^{n-2} f_1(\varepsilon\tau)}{\varepsilon |f(\varepsilon)|} \int_0^{\sqrt{(\delta/\varepsilon)^2 - \tau^2}} \frac{|\Phi(\tau, y_n)|^{2_\sigma^*} dy_n}{(\tau^2 + y_n^2)^{\frac{(s-\sigma)2_\sigma^*+2}{2}}} d\tau \\ &\leq o_\delta(1) \int_0^{\delta/\varepsilon} \frac{\tau^n f(\varepsilon\tau)}{f(\varepsilon)} \int_0^{\sqrt{\delta^2/(\varepsilon\tau)^2 - 1}} \frac{|\Phi(\tau, \tau\zeta)|^{2_\sigma^*} d\zeta}{(\tau^2 + \tau^2 \zeta^2)^{\frac{(s-\sigma)2_\sigma^*+2}{2}}} d\tau. \end{aligned}$$

Аналогично доказательству п.2, интеграл в последнем выражении имеет конечный предел при $\varepsilon \rightarrow 0$, что и дает требуемую оценку. $\blacksquare$

Формула (5.44) следует из леммы 5.7: положим $\mathcal{A}_1(\varepsilon) := I_3(\varepsilon)$; из п.3 следует оценка $I_4(\varepsilon) = o_\delta(1)\mathcal{A}_1(\varepsilon)$, а оценка $I_2(\varepsilon) = o_\varepsilon(1)\mathcal{A}_1(\varepsilon)$ следует из п.1 и неравенства

$$I_2(\varepsilon) \leq C(\delta) \cdot \varepsilon^{\frac{n(n-2s+2)}{n-2\sigma}} = o_\varepsilon(1) \cdot \varepsilon^{\alpha-1} \leq o_\varepsilon(1) \cdot \varepsilon^{-1} f(\varepsilon) = o_\varepsilon(1) \cdot \mathcal{A}_1(\varepsilon).$$

5.8 Доказательство оценки (5.45)

Для краткости обозначим $\mathfrak{y} := n/2 - s$. Для градиента функции $\widetilde{\mathcal{W}}_\varepsilon$ имеют место формулы (здесь $i \in [1 : n - 1]$):

$$\begin{aligned} \nabla_X \widetilde{\mathcal{W}}_\varepsilon &\equiv \begin{pmatrix} \partial_t \widetilde{\mathcal{W}}_\varepsilon \\ \partial_{x_i} \widetilde{\mathcal{W}}_\varepsilon \\ \partial_{x_n} \widetilde{\mathcal{W}}_\varepsilon \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon^{-\mathfrak{y}-1} \mathcal{W}_z(\Theta_\varepsilon(X)) \widetilde{\varphi}(x) \\ \varepsilon^{-\mathfrak{y}-1} [\mathcal{W}_{y_i}(\Theta_\varepsilon(X)) - \mathcal{W}_{y_n}(\Theta_\varepsilon(X)) F_{x_i}(x')] \widetilde{\varphi}(x) + \varepsilon^{-\mathfrak{y}} \mathcal{W}(\Theta_\varepsilon(X)) \widetilde{\varphi}_{x_i}(x) \\ \varepsilon^{-\mathfrak{y}-1} \mathcal{W}_{y_n}(\Theta_\varepsilon(X)) \widetilde{\varphi}(x) + \varepsilon^{-\mathfrak{y}} \mathcal{W}(\Theta_\varepsilon(X)) \widetilde{\varphi}_{x_n}(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Подставляя формулы для производных в интеграл энергии, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{s,\Omega} [\widetilde{\mathcal{W}}_\varepsilon] &= C_s \cdot \int_0^\infty t^{1-2s} \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left[\varepsilon^{-2\mathfrak{y}-2} \widetilde{\varphi}^2(x) \mathcal{W}_{y_i}^2(\Theta_\varepsilon(X)) \right. \right. \\ &\quad - 2\varepsilon^{-2\mathfrak{y}-2} \widetilde{\varphi}^2(x) \mathcal{W}_{y_i}(\Theta_\varepsilon(X)) \mathcal{W}_{y_n}(\Theta_\varepsilon(X)) F_{x_i}(x') \\ &\quad + 2\varepsilon^{-2\mathfrak{y}-1} \widetilde{\varphi}_{x_i}(x) \widetilde{\varphi}(x) \mathcal{W}_{y_i}(\Theta_\varepsilon(X)) \mathcal{W}(\Theta_\varepsilon(X)) \\ &\quad - 2\varepsilon^{-2\mathfrak{y}-1} \widetilde{\varphi}_{x_i}(x) \widetilde{\varphi}(x) F_{x_i}(x') \mathcal{W}_{y_n}(\Theta_\varepsilon(X)) \mathcal{W}(\Theta_\varepsilon(X)) \\ &\quad \left. + \varepsilon^{-2\mathfrak{y}-2} \widetilde{\varphi}^2(x) F_{x_i}^2(x') \mathcal{W}_{y_n}^2(\Theta_\varepsilon(X)) + \varepsilon^{-2\mathfrak{y}} \widetilde{\varphi}_{x_i}^2(x) \mathcal{W}^2(\Theta_\varepsilon(X)) \right] \\ &\quad + \varepsilon^{-2\mathfrak{y}-2} \widetilde{\varphi}^2(x) \mathcal{W}_{y_n}^2(\Theta_\varepsilon(X)) + 2\varepsilon^{-2\mathfrak{y}-1} \widetilde{\varphi}_{x_n}(x) \widetilde{\varphi}(x) \mathcal{W}_{y_n}(\Theta_\varepsilon(X)) \mathcal{W}(\Theta_\varepsilon(X)) \\ &\quad \left. + \varepsilon^{-2\mathfrak{y}} \widetilde{\varphi}_{x_n}^2(x) \mathcal{W}^2(\Theta_\varepsilon(X)) + \varepsilon^{-2\mathfrak{y}-2} \widetilde{\varphi}^2(x) \mathcal{W}_z^2(\Theta_\varepsilon(X)) \right) dX =: J_1 - J_2 + \dots + J_9 + J_{10} \end{aligned}$$

Оценим сумму $J_1 + J_7 + J_{10}$. Выполнена цепочка равенств

$$\begin{aligned} J_1 + J_7 + J_{10} &= C_s \cdot \int_0^\infty z^{1-2s} \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi_\delta^2(\varepsilon y) |\nabla_Y \mathcal{W}(Y)|^2 dY \\ &= \mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D} - \int_{\mathbb{R}_+^n} [1 - \varphi_\delta^2(\varepsilon y)] \cdot \mathcal{V}(y) dy. \end{aligned}$$

Из неравенства (5.29) получаем

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} [1 - \varphi_\delta^2(\varepsilon y)] \cdot \mathcal{V}(y) dy \leq C \int_{\delta/\varepsilon}^\infty r^{-3+2s-n} dr = C \left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right)^{n-2s+2}$$

откуда

$$J_1 + J_7 + J_{10} = \mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D} + C(\delta) \cdot O(\varepsilon^{n-2s+2}).$$

Оценка суммы $J_3 + J_8$ получается из неравенств (5.28) и (5.29):

$$\begin{aligned} J_3 + J_8 &\leq 2C_s \varepsilon \int_0^\infty z^{1-2s} \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi_\delta(\varepsilon y) |\nabla_y \varphi_\delta(\varepsilon y)| \cdot \mathcal{W}(Y) |\nabla_Y \mathcal{W}(Y)| dY \\ &\leq \frac{C\varepsilon}{\delta} \left(\int_{\mathbb{K}_{\delta/\varepsilon, \delta/\varepsilon}^n} \mathcal{V}(y) dy \times \int_{\mathbb{K}_{\delta/\varepsilon, \delta/\varepsilon}^n} \int_0^\infty z^{1-2s} |\mathcal{W}(Y)|^2 dY \right)^{1/2} \\ &= \frac{C\varepsilon}{\delta} \left(\int_{\delta/(2\varepsilon)}^{\delta/\varepsilon} r^{-3+2s-n} dr \times \int_{\delta/(2\varepsilon)}^{\delta/\varepsilon} r^{-1+2s-n} dr \right)^{1/2} = C \left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right)^{n-2s+2}. \end{aligned}$$

Неравенство (5.28) также обеспечивает оценку суммы $J_6 + J_9$:

$$\begin{aligned} J_6 + J_9 &= C\varepsilon^2 \int_0^\infty z^{1-2s} \int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla_y \varphi_\delta(\varepsilon y)|^2 \mathcal{W}^2(Y) dY \\ &= \frac{C\varepsilon^2}{\delta^2} \int_{\delta/(2\varepsilon)}^{\delta/\varepsilon} r^{-1+2s-n} dr = C \left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right)^{n-2s+2}. \end{aligned}$$

Преобразуем J_2 . Интегрируя по частям, получаем:

$$\begin{aligned} J_2 &= -\frac{2C_s}{\varepsilon} \int_0^\infty z^{1-2s} \int_{\mathbb{R}_+^n} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\varphi_\delta^2(\varepsilon y) \mathcal{W}_{y_i y_i}(Y) \mathcal{W}_{y_n}(Y) F(\varepsilon y') \right. \\ &\quad \left. + [\varphi_\delta^2(\varepsilon y)]_{y_i} \mathcal{W}_{y_i}(Y) \mathcal{W}_{y_n}(Y) F(\varepsilon y') + \varphi_\delta^2(\varepsilon y) \mathcal{W}_{y_i}(Y) \mathcal{W}_{y_i y_n}(Y) F(\varepsilon y') \right] dY. \end{aligned}$$

Из уравнения (1.26) выражаем сумму вторых производных по y_i :

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{2C_s}{\varepsilon} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi_\delta^2(\varepsilon y) \mathcal{W}_{y_n}(Y) [z^{1-2s} \mathcal{W}_{y_n y_n}(Y) + [z^{1-2s} \mathcal{W}_z(Y)]_z] F(\varepsilon y') dY \\ &\quad - \frac{2C_s}{\varepsilon} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_+^n} z^{1-2s} \sum_{i=1}^{n-1} [\varphi_\delta^2(\varepsilon y)]_{y_i} \mathcal{W}_{y_i}(Y) \mathcal{W}_{y_n}(Y) F(\varepsilon y') dY \\ &\quad - \frac{C_s}{\varepsilon} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_+^n} z^{1-2s} \varphi_\delta^2(\varepsilon y) [|\nabla_{y'} \mathcal{W}(Y)|^2]_{y_n} F(\varepsilon y') dY =: \mathcal{K} + E_1 + E_2. \end{aligned}$$

Преобразуем слагаемое $\mathcal{K}$, проинтегрировав по частям:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \frac{C_s}{\varepsilon} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi_\delta^2(\varepsilon y) F(\varepsilon y') \left[z^{1-2s} [\mathcal{W}_{y_n}^2(Y)]_{y_n} + 2\mathcal{W}_{y_n}(Y) [z^{1-2s} \mathcal{W}_z(Y)]_z \right] dY \\
&= -\frac{C_s}{\varepsilon} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} z^{1-2s} \varphi_\delta^2(\varepsilon y') \mathcal{W}_{y_n}^2(y', 0, z) F(\varepsilon y') dy' dz \\
&\quad - \frac{C_s}{\varepsilon} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_+^n} z^{1-2s} [\varphi_\delta^2(\varepsilon y)]_{y_n} \mathcal{W}_{y_n}^2(Y) F(\varepsilon y') dy dz \\
&\quad + \frac{2}{\varepsilon} \mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D} \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi_\delta^2(\varepsilon y) F(\varepsilon y') \Phi_{y_n}(y) \frac{\Phi^{2_\sigma^*-1}(y)}{|y|^{(s-\sigma)2_\sigma^*}} dy \\
&\quad - \frac{C_s}{\varepsilon} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi_\delta^2(\varepsilon y) F(\varepsilon y') [z^{1-2s} \mathcal{W}_z^2(Y)]_{y_n} dY =: -E_3 + E_4 + \mathcal{N} + E_7.
\end{aligned}$$

Поскольку $\mathcal{W}_z(y', 0, z) = 0$, интегрирование по частям слагаемых $\mathcal{N}$ и E_7 дает

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} &= \frac{2}{\varepsilon} \mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D} \int_{\mathbb{R}_+^n} \left[-\frac{[\varphi_\delta^2(\varepsilon y)]_{y_n}}{2_\sigma^*} + \varphi_\delta^2(\varepsilon y) \frac{(s-\sigma)y_n}{|y|^2} \right] \frac{\Phi^{2_\sigma^*}(y)}{|y|^{(s-\sigma)2_\sigma^*}} F(\varepsilon y') dy =: E_5 + E_6, \\
E_7 &= \frac{C_s}{\varepsilon} \int_0^\infty z^{1-2s} \int_{\mathbb{R}_+^n} [\varphi_\delta^2(\varepsilon y)]_{y_n} F(\varepsilon y') \mathcal{W}_z^2(Y) dY.
\end{aligned}$$

Лемма 5.8. *Выполнены следующие соотношения:*

1.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \frac{E_3(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} = C \int_0^\infty \tau^{n+\alpha-2} \int_0^\infty z^{1-2s} |\nabla_{\tau,z} \mathcal{W}(\tau, 0, z)|^2 dz d\tau \quad (5.48)$$

2. $|E_1 + E_2 + E_4 + E_7| = C(\delta) \varepsilon^{n-2s+2}$

3. $|E_5| = o(\varepsilon^{n-2s+2})$

4. $E_6 = \frac{2}{2_\sigma^*} \mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D} \mathcal{A}_1(\varepsilon) \cdot (1 + o_\varepsilon(1))$

Доказательство.

1. Доказательство аналогично п.2 леммы 5.7: поскольку

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{E_3(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} &\equiv C \int_0^\infty \tau^{n-2} \frac{f(\varepsilon\tau)}{f(\varepsilon)} \varphi_\delta^2(\varepsilon\tau) \int_0^\infty z^{1-2s} |\nabla_{\tau,z} \mathcal{W}(\tau, 0, z)|^2 dz d\tau \\ &=: C \int_0^\infty Q_\varepsilon(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

формула (5.48) получается поточечным переходом к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в выражении $Q_\varepsilon(\tau)$. Для обоснования корректности предельного перехода найдем мажоранту: оценка на $Q_\varepsilon(\tau)$ получается из оценки (5.29) и равенства (5.47)

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon(\tau) &\leq \tau^{n-2+\alpha} \left| \frac{\psi(\varepsilon\tau)}{\psi(\varepsilon)} \right| \int_0^\infty z^{1-2s} |\nabla_{\tau,z} \mathcal{W}(\tau, 0, z)|^2 dz \\ &\leq \left| \frac{\psi(\varepsilon\tau)}{\psi(\varepsilon)} \right| \frac{C\tau^{n-2+\alpha}}{1 + |\tau|^{2n-2s+2}} \leq C(\chi_{[0,1]}(\tau)\tau^{\alpha+n-\beta-2} + \chi_{[1,\infty)}(\tau)\tau^{\alpha-n-4+\beta+2s}), \end{aligned}$$

последний показатель меньше -1 при достаточно малом β , поскольку выполнено условие $\alpha < n - 2s + 3$.

2. Утверждение следует из цепочки неравенств

$$\begin{aligned} |E_1 + E_2 + E_4 + E_7| &= \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty z^{1-2s} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[-2[\varphi_\delta^2(\varepsilon y)]_\tau \mathcal{W}_\tau(Y) \mathcal{W}_{y_n}(Y) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [\varphi_\delta^2(\varepsilon y)]_{y_n} [\mathcal{W}_\tau^2 - \mathcal{W}_{y_n}^2 + \mathcal{W}_z^2] \right] dy_n \times \int_{\mathbb{S}_\tau^{n-2}} F(\varepsilon y') d\mathbb{S}_\tau^{n-2}(y') d\tau dz \right| \\ &\leq \frac{C}{\delta} \int_{\delta/(2\varepsilon)}^{\delta/\varepsilon} \int_0^r \int_0^\infty z^{1-2s} \left| \nabla_{\tau,y_n,z} \mathcal{W}(\tau, \sqrt{r^2 - \tau^2}, z) \right|^2 dz \frac{r\tau^{n-2} |f(\varepsilon\tau)|}{\sqrt{r^2 - \tau^2}} d\tau dr \\ &\leq \frac{C}{\delta} \int_{\delta/(2\varepsilon)}^{\delta/\varepsilon} r^{-2n+2s-1} \int_0^r \frac{\tau^{n-2} |f(\varepsilon\tau)|}{\sqrt{r^2 - \tau^2}} d\tau dr \\ &= C(\delta) \varepsilon^{n-2s+2} \int_{\delta/2}^\delta \int_0^{\tilde{r}} \frac{\tilde{r}^{-2n+2s-1} \tilde{\tau}^{n-2} |f(\tilde{\tau})|}{\sqrt{\tilde{r}^2 - \tilde{\tau}^2}} d\tilde{\tau} d\tilde{r}. \end{aligned}$$

3. Имеем оценку

$$\begin{aligned}
|E_5| &= \left| \frac{2}{2_\sigma^* \varepsilon} \mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\varphi_\delta^2(\varepsilon \sqrt{\tau^2 + y_n^2}) \right]_{y_n} \frac{|\Phi|^{2_\sigma^*}(\tau, y_n)}{|y|^{(s-\sigma)2_\sigma^*}} dy_n \times \right. \\
&\quad \left. \times \int_{\mathbb{S}_\tau^{n-2}} F(\varepsilon y') d\mathbb{S}_\tau^{n-2}(y') d\tau \right| \\
&\leq \frac{C}{\delta} \int_{\delta/(2\varepsilon)}^{\delta/\varepsilon} \int_0^r \frac{|\Phi|^{2_\sigma^*}(\tau, \sqrt{r^2 - \tau^2}) r \tau^{n-2} |f(\varepsilon \tau)|}{r^{(s-\sigma)2_\sigma^*} \sqrt{r^2 - \tau^2}} d\tau dr \\
&\leq \frac{C}{\delta} \int_{\delta/(2\varepsilon)}^{\delta/\varepsilon} \int_0^r \frac{r \tau^{n-2} |f(\varepsilon \tau)|}{r^{2_\sigma^*(n-s-\sigma+1)} \sqrt{r^2 - \tau^2}} d\tau dr \\
&\leq \frac{C \varepsilon^{2_\sigma^*(n-s-\sigma+1)-n}}{\delta} \int_{\delta/2}^\delta \tilde{r}^{1-2_\sigma^*(n-s-\sigma+1)} \int_0^{\tilde{r}} \frac{\tilde{\tau}^{n-2} |f(\tilde{\tau})|}{\sqrt{\tilde{r}^2 - \tilde{\tau}^2}} d\tilde{\tau} d\tilde{r} = o(\varepsilon^{n-2s+2}).
\end{aligned}$$

4. Формула для E_6 отличается от формулы для $I_3(\varepsilon)$ домножением на $\frac{2}{2_\sigma^*} \mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D}$ и заменой $\varphi_\delta^{2_\sigma^*}(\varepsilon y)$ на $\varphi_\delta^2(\varepsilon y)$, поэтому доказательство получается дословным повторением п.2 леммы 5.7. $\blacksquare$

Из леммы 5.8 и оценок $I_3(\varepsilon) \stackrel{\varepsilon}{\asymp} f(\varepsilon) \varepsilon^{-1} \stackrel{\varepsilon}{\asymp} E_3(\varepsilon)$ и $\varepsilon^{n-2s+2} = o_\varepsilon(f(\varepsilon) \varepsilon^{-1})$ получаем

$$J_2 = -E_3(\varepsilon) \cdot (1 + o_\delta(1) + o_\varepsilon(1)) + \frac{2}{2_\sigma^*} \mathcal{S}_{s,\sigma,\mathbb{R}_+^n}^{Sp,D} \mathcal{A}_1(\varepsilon) \cdot (1 + o_\varepsilon(1)).$$

Аналогично оценке суммы $J_3 + J_8$ оценим J_4 :

$$\begin{aligned}
|J_4| &\leq 2\varepsilon C_s \int_0^\infty z^{1-2s} \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi_\delta(\varepsilon y) |\nabla_y \varphi_\delta(\varepsilon y)| \mathcal{W}(Y) |\nabla_Y \mathcal{W}(Y)| |\nabla_{y'} F(\varepsilon y')| dY \\
&\leq \frac{C\varepsilon}{\delta} \int_{\delta/(2\varepsilon)}^{\delta/\varepsilon} r^{2s-2n} \int_0^r \frac{\tau^{n-2} f_3(\varepsilon \tau)}{\sqrt{r^2 - \tau^2}} d\tau dr \leq \frac{C\varepsilon^{n-2s+2}}{\delta} \int_{\delta/2}^\delta \tilde{r}^{2s-2n} \int_0^{\tilde{r}} \frac{\tilde{\tau}^{n-2} f_3(\tilde{\tau})}{\sqrt{\tilde{r}^2 - \tilde{\tau}^2}} d\tilde{\tau} d\tilde{r} \\
&= C(\delta) \varepsilon^{n-2s+2}.
\end{aligned}$$

Осталось оценить J_5 . Ввиду оценок (5.29) и (5.39) имеем

$$\begin{aligned}
J_5 &= \int_0^\infty z^{1-2s} \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi_\delta^2(\varepsilon y) |\nabla_{y'} F(\varepsilon y')|^2 \mathcal{W}_{y_n}^2(Y) dY \\
&\leq C \int_0^{\delta/\varepsilon} \tau^{n-2} f_2(\varepsilon \tau) \int_0^{\sqrt{(\delta/\varepsilon)^2 - \tau^2}} \mathcal{V}(\tau, y_n) dy_n d\tau \leq \int_0^{\delta/\varepsilon} \int_0^\infty \frac{C \tau^{n-2} f_2(\varepsilon \tau)}{(1 + \tau^2 + y_n^2)^{n-s+1}} dy_n d\tau \\
&\leq \int_0^{\delta/\varepsilon} \frac{C \tau^{n-2} f_2(\varepsilon \tau)}{(1 + \tau^2)^{\frac{2n-2s+1}{2}}} d\tau = \frac{o_\delta(1)}{\varepsilon} \int_0^{\delta/\varepsilon} \frac{\tau^{n-3} |f(\varepsilon \tau)|}{(1 + \tau^2)^{\frac{2n-2s+1}{2}}} d\tau \stackrel{*}{=} o_\delta(1) E_3,
\end{aligned}$$

оценка (*) получается аналогично оценке из п.1 леммы 5.8.

Обозначая $\mathcal{A}_2(\varepsilon) := E_3(\varepsilon)$ и собирая воедино все доказанные выше оценки, получаем требуемую формулу (5.45).

Заключение

В диссертации рассматриваются вопросы существования и качественных свойств решений полулинейных уравнений с различными дробными лапласианами в зависимости от размера области и ее формы. Классические результаты для операторов Лапласа и p -Лапласа переносятся на нелокальный случай.

Основные результаты работы заключаются в следующем.

Показано, что для задачи $(-\Delta)^s u = |u|^{q-2}u$ с дробным лапласианом Дирихле (спектральным или суженным) имеет место эффект множественности решений в кольцах большого радиуса, аналогичный классическим результатам Коффмана [29] и Ли [57] для $s = 1$.

Рассмотрен вопрос о существовании решений с минимальной энергией для критической задачи Неймана $(-\Delta_\Omega^N)_{S_p}^s u + u = |u|^{2_s^*-2}u$, порождаемой предельной Соболевской теоремой вложения $\mathcal{H}^s(\Omega) \hookrightarrow L_{2_s^*}(\Omega)$. Оказывается, что в $\mathcal{C}^2$ -гладкой ограниченной области Ω решение существует, что соотносится с известными результатами для оператора Лапласа [12; 86] и p -Лапласа [93]. Интересной особенностью полученного результата является дополнительное ограничение $2s > 1$, которое, по-видимому, является существенным, но требует дополнительного исследования.

Изучен эффект постоянства решений с минимальной энергией для задачи Неймана $(-\Delta_\Omega^N)_{S_p}^s u + u = |u|^{q-2}u$ в зависимости от размера липшицевой области Ω . Для семейства областей $\varepsilon\Omega$ доказано, что при малых коэффициентах гомотетии ε единственный минимайзер – константа, а при больших ε константа не является даже локальным минимайзером. Также обсуждается вопрос о том, является ли константа – локальный минимайзер – глобальным. Доказанные результаты обобщают результаты для уравнения с оператором Лапласа [106].

Исследована разрешимость задачи со спектральным дробным лапласианом Дирихле и критической особенностью типа Харди–Соболева в правой части $(-\Delta_\Omega^D)_{S_p}^s u = |x|^{(\sigma-s)2_\sigma^*} u^{2_\sigma^*-1}$ в $\mathcal{C}^1$ -гладкой ограниченной области Ω . Как и при $s = 1$, разрешимость задачи зависит от геометрии области Ω и ее взаиморасположения с началом координат $\mathbf{0}_n$:

– если ограниченная область Ω отделена от $\mathbf{0}_n$, то задача разрешима;

- если $\mathbf{0}_n \in \Omega$, то решений с минимальной энергией не существует, и, более того, в звездной относительно $\mathbf{0}_n$ области Ω исходная задача не имеет нетривиальных неотрицательных решений;
- в случае полупространства $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ задача разрешима;
- наконец, в случае $\mathbf{0}_n \in \partial\Omega$ в ограниченной области Ω задача разрешима, если граница области вогнута в среднем в начале координат — это условие естественным образом возникло при доказательстве локального результата [92].

Возможные направления для дальнейшей работы: исследование необходимости условия $2s > 1$ для разрешимости критической задачи Неймана; изучение влияния кривизны на разрешимость задачи типа Харди—Соболева с дробным спектральным лапласианом Дирихле на многообразии с краем; разрешимость задачи, порождаемой дробным неравенством Харди—Соболева с суженным дробным лапласианом Дирихле в области.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в рецензируемых изданиях

1. *Ustinov N.* The effect of curvature in fractional Hardy-Sobolev inequality involving the spectral Dirichlet Laplacian // Transactions of the American Mathematical Society. — 2020. — т. 373. — с. 7785—7815.
2. *Устинов Н. С.* Множественность решений краевых задач с дробными лапласианами Дирихле и Навье // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2017. — т. 459. — с. 104—126.
3. *Устинов Н. С.* О достижимости точных констант в дробных неравенствах Харди–Соболева со спектральным лапласианом Дирихле // Функциональный анализ и его приложения. — 2019. — т. 53, № 4. — с. 93—98.
4. *Устинов Н. С.* О постоянстве экстремали в теореме вложения дробного порядка // Функциональный анализ и его приложения. — 2020. — т. 54, № 4. — с. 85—97.
5. *Устинов Н. С.* О разрешимости полулинейной задачи со спектральным дробным лапласианом Неймана и критической правой частью // Алгебра и Анализ. — 2021. — т. 33, № 1. — с. 194—212.

Тезисы докладов

6. *Ustinov N.* Multiplicity of boundary value problem solutions for fractional Dirichlet Laplacian // School and Workshop «PDEs and Applications». — Naples, 2016. — с. 10.
7. *Ustinov N.* Multiplicity of positive solutions to the boundary value problems for fractional Laplacians in the expanding annuli // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. — Владимир, 2016. — с. 281.

8. *Ustinov N.* Multiplicity of positive solutions to the boundary value problems for fractional Laplacians in the expanding annuli // International Conference on Partial Differential Equations. — Silkroad Mathematics Center Series International Conferences, Beijing, 2017. — с. 24.
9. *Ustinov N.* On attainability of the best constant in the Navier-type fractional Hardy–Sobolev inequalities // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. — Владимир, 2018. — с. 270–271.
10. *Ustinov N.* On existence of extremal function in the Navier-type fractional Hardy–Sobolev inequalities // Book of Abstracts of International Conference Singular Problems, Blow-Up and Regimes with Peaking in Nonlinear PDEs. — RUDN University, Moscow, 2019. — с. 78–79.
11. *Ustinov N.* On solvability of a critical problem with the spectral Neumann fractional Laplacian // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. — Владимир, 2020. — с. 237–238.

Список литературы

12. *Adimurthi, Mancini G.* The Neumann problem for elliptic equations with critical nonlinearity // Nonlin. Anal. Sc. Norm. Super. di Pisa Quaderni. — 1991. — с. 9–25.
13. *Apushkinskaya D. E., Repin S.* Thin obstacle problem: Estimates of the distance to the exact solution // Interfaces and Free Boundaries. — 2018. — т. 20, № 4.
14. *Aronszajn N.* Boundary values of functions with finite Dirichlet integral // Techn. Report of Univ. of Kansas. — 1955. — т. 14. — с. 77–94.
15. *Barrios B., et al.* On some critical problems for the fractional Laplacian operator // Journal of Differential Equations. — 2012. — т. 252, № 11. — с. 6133–6162.
16. *Berestycki H., Lions P.-L.* Nonlinear scalar field equations, I. Existence of a ground state // Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 1983. — т. 82, № 4. — с. 313–346.

17. *Berestycki H., Nirenberg L.* On the Method of Moving Planes and the Sliding Method // Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society. — 1991. — т. 22, № 1. — с. 1—37.
18. *Biler P., Karch G., Woyczyński W. A.* Critical nonlinearity exponent and self-similar asymptotics for Lévy conservation laws // Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis. т. 18. — Elsevier. 2001. — с. 613—637.
19. *Bogdan K., Dyda B.* The best constant in a fractional Hardy inequality // Mathematische Nachrichten. — 2011. — т. 284, № 5. — с. 629—638.
20. *Brezis H., Nirenberg L.* Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical sobolev exponents // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1983. — т. 36, № 4. — с. 437—477.
21. *Byeon J.* Existence of many nonequivalent nonradial positive solutions of semilinear elliptic equations on three-dimensional annuli // Journal of Differential Equations. — 1997. — т. 136, № 1. — с. 136—165.
22. *Cabré X., Sire Y.* Nonlinear equations for fractional Laplacians, I: Regularity, maximum principles, and Hamiltonian estimates // Annales de l'IHP Analyse non linéaire. т. 31. — 2014. — с. 23—53.
23. *Caffarelli L., Roquejoffre J.-M., Savin O.* Nonlocal minimal surfaces // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 2010. — т. 63, № 9. — с. 1111—1144.
24. *Caffarelli L., Silvestre L.* An extension problem related to the fractional Laplacian // Communications in Partial Differential Equations. — 2007. — т. 32, № 8. — с. 1245—1260.
25. *Caffarelli L., Valdinoci E.* Uniform estimates and limiting arguments for nonlocal minimal surfaces // Calculus of Variations and Partial Differential Equations. — 2011. — т. 41, № 1/2. — с. 203—240.
26. *Caldirolì P., Musina R.* On a variational degenerate elliptic problem // Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA. — 2000. — т. 7, № 2. — с. 187—199.
27. *Capella A., et al.* Regularity of radial extremal solutions for some non-local semilinear equations // Communications in Partial Differential Equations. — 2011. — т. 36, № 8. — с. 1353—1384.

28. *Catrina F., Wang Z.-Q.* Nonlinear elliptic equations on expanding symmetric domains // Journal of Differential Equations. — 1999. — т. 156, № 1. — с. 153—181.
29. *Coffman C. V.* A non-linear boundary value problem with many positive solutions // Journal of Differential Equations. — 1984. — т. 54, № 3. — с. 429—437.
30. *Cont R., Tankov P.* Financial modelling with jump processes. — 2004.
31. *Cotsiolis A., Tavoularis N. K.* Best constants for Sobolev inequalities for higher order fractional derivatives // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2004. — т. 295, № 1. — с. 225—236.
32. *Del Pino M., Felmer P. L.* Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains // Calculus of Variations and Partial Differential Equations. — 1996. — т. 4, № 2. — с. 121—137.
33. *Di Nezza E., Palatucci G., Valdinoci E.* Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces // Bulletin des Sciences Mathématiques. — 2012. — т. 136, № 5. — с. 521—573.
34. *Egnell H.* Positive solutions of semilinear equations in cones // Transactions of the American Mathematical Society. — 1992. — т. 330, № 1. — с. 191—201.
35. *Euler L.* De Progressionibus Transcendentibus, sev quarum Termini Generales Algebraice Dari Nequevent. — 1738.
36. *Fall M. M., Weth T.* Nonexistence results for a class of fractional elliptic boundary value problems // Journal of Functional Analysis. — 2012. — т. 263, № 8. — с. 2205—2227.
37. *Fernández Bonder J., Lami Dozo E., Rossi J. D.* Symmetry properties for the extremals of the Sobolev trace embedding // Annales de l'IHP Analyse non linéaire. т. 21. — 2004. — с. 795—805.
38. *Gagliardo E.* Proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili // Matematika. — 1961. — т. 5, № 4. — с. 87—116.
39. *Gazzola F., Grunau H.-C., Sweers G.* Optimal Sobolev and Hardy–Rellich constants under Navier boundary conditions // Annali di Matematica Pura ed Applicata. — 2010. — т. 189, № 3. — с. 475—486.

40. *Ge Y.* Sharp Sobolev inequalities in critical dimensions // The Michigan Mathematical Journal. — 2003. — т. 51, № 1. — с. 27—46.
41. *Ghoussoub N., Kang X. S.* Hardy–Sobolev critical elliptic equations with boundary singularities // Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis. т. 21. — Elsevier. 2004. — с. 767—793.
42. *Ghoussoub N., Robert F.* Concentration estimates for Emden–Fowler equations with boundary singularities and critical growth // International Mathematics Research Papers. — 2006. — т. 2006. — с. 1—85.
43. *Ghoussoub N., Robert F.* The effect of curvature on the best constant in the Hardy–Sobolev inequalities // Geometric & Functional Analysis GAFA. — 2006. — т. 16, № 6. — с. 1201—1245.
44. *Ghoussoub N., Yuan C.* Multiple solutions for quasi-linear PDEs involving the critical Sobolev and Hardy exponents // Transactions of the American Mathematical Society. — 2000. — т. 352, № 12. — с. 5703—5743.
45. *Gidas B., Ni W.-M., Nirenberg L.* Symmetry and related properties via the maximum principle // Communications in Mathematical Physics. — 1979. — т. 68, № 3. — с. 209—243.
46. *Gorenflo R., Mainardi F.* Random walk models approximating symmetric space-fractional diffusion processes // Problems and methods in mathematical physics. — Springer, 2001. — с. 120—145.
47. *Grossi M.* Uniqueness of the least-energy solution for a semilinear Neumann problem // Proceedings of the American Mathematical Society. — 2000. — т. 128, № 6. — с. 1665—1672.
48. *Grubb G.* Integration by parts and Pohozaev identities for space-dependent fractional-order operators // Journal of Differential Equations. — 2016. — т. 261, № 3. — с. 1835—1879.
49. *Guan Q.-Y.* Integration by parts formula for regional fractional Laplacian // Communications in Mathematical Physics. — 2006. — т. 266, № 2. — с. 289—329.
50. *Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G.* Inequalities. — Cambridge University Press, 1934.

51. *Herbst I. W.* Spectral theory of the operator $(p^2 + m^2)^{1/2} - Ze^2/r$ // Communications in Mathematical Physics. — 1977. — т. 53, № 3. — с. 285—294.
52. *Iannizzotto A., Mosconi S., Squassina M.* $\mathcal{H}^s$ versus C^0 -weighted minimizers // Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA. — 2015. — т. 22, № 3. — с. 477—497.
53. *Kawohl B.* Rearrangements and convexity of level sets in PDE. т. 1150. — Springer, 2006.
54. *Kwaśnicki M.* Ten equivalent definitions of the fractional Laplace operator // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2017. — т. 20, № 1. — с. 7—51.
55. *Leibniz G. W.* Letter from Hanover, Germany to GFA L'Hospital, September 30, 1695 // Leibniz Mathematische Schriften. Olms-Verlag, Hildesheim, Germany. — 1962. — с. 301—302.
56. *Leibniz G. W.* Letter from Hanover, Germany to Johann Bernoulli, December 28, 1695 // Leibniz Mathematische Schriften. Olms-Verlag, Hildesheim, Germany. — 1962. — с. 226.
57. *Li Y. Y.* Existence of many positive solutions of semilinear elliptic equations on annulus // Journal of Differential Equations. — 1990. — т. 83, № 2. — с. 348—367.
58. *Lin S.-S.* Existence of Many Positive Nonradial Solutions for Nonlinear Elliptic Equations on an Annulus // Journal of Differential Equations. — 1993. — т. 103, № 2. — с. 338—349.
59. *Lions P.-L.* The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The limit case, part 1 // Revista Matemática Iberoamericana. — 1985. — т. 1, № 1. — с. 145—201.
60. *Lions P.-L.* The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The limit case, part 2 // Revista Matemática Iberoamericana. — 1985. — т. 1, № 2. — с. 45—121.
61. *Lions P.-L.* The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The locally compact case, part 1. // Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis. т. 1. — Elsevier. 1984. — с. 109—145.

62. *Lions P.-L.* The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The locally compact case, part 2 // Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis. т. 1. — Elsevier. 1984. — с. 223—283.
63. *Lions P.-L., Pacella F., Tricarico M.* Best constants in Sobolev inequalities for functions vanishing on some part of the boundary and related questions // Indiana University Mathematics Journal. — 1988. — т. 37, № 2. — с. 301—324.
64. *Musina R., Nazarov A. I.* On fractional laplacians // Communications in Partial Differential Equations. — 2014. — т. 39, № 9. — с. 1780—1790.
65. *Musina R., Nazarov A. I.* On fractional Laplacians—2 // Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire. т. 33. — Elsevier. 2016. — с. 1667—1673.
66. *Musina R., Nazarov A. I.* On fractional Laplacians—3 // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. — 2016. — т. 22, № 3. — с. 832—841.
67. *Musina R., Nazarov A. I.* On the Sobolev and Hardy constants for the fractional Navier Laplacian // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. — 2015. — т. 121. — с. 123—129.
68. *Musina R., Nazarov A. I.* Sobolev inequalities for fractional Neumann Laplacians on half spaces // Advances in Calculus of Variations. — 2018. — т. 1, ahead-of—print.
69. *Musina R., Nazarov A. I.* Strong maximum principles for fractional Laplacians // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics. — 2019. — т. 149, № 5. — с. 1223—1240.
70. *Nehari Z.* On a class of nonlinear second-order differential equations // Transactions of the American Mathematical Society. — 1960. — т. 95, № 1. — с. 101—123.
71. *Palais R. S.* The principle of symmetric criticality // Communications in Mathematical Physics. — 1979. — т. 69, № 1. — с. 19—30.
72. *Pereira A. L., Pereira M. C.* A generic property for the eigenfunctions of the Laplacian // Topological Methods in Nonlinear Analysis. — 2002. — т. 20, № 2. — с. 283—313.

73. *Ros-Oton X., Serra J.* Nonexistence results for nonlocal equations with critical and supercritical nonlinearities // Communications in Partial Differential Equations. — 2015. — т. 40, № 1. — с. 115—133.
74. *Ros-Oton X., Serra J.* The Pohozaev identity for the fractional Laplacian // Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 2014. — т. 213, № 2. — с. 587—628.
75. *Seneta E.* Regular Varying Functions. т. 508. — Springer, 1976.
76. *Serrin J.* Positive solutions of a prescribed mean curvature problem // Calculus of Variations and Partial Differential Equations. — Springer, 1988. — с. 248—255.
77. *Serrin J., Zou H.* Non-existence of positive solutions of Lane-Emden systems // Differential and Integral Equations. — 1996. — т. 9, № 4. — с. 635—653.
78. *Servadei R., Valdinoci E.* Mountain pass solutions for non-local elliptic operators // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2012. — т. 389, № 2. — с. 887—898.
79. *Silvestre L.* Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 2007. — т. 60, № 1. — с. 67—112.
80. *Sire Y., Valdinoci E.* Fractional Laplacian phase transitions and boundary reactions: a geometric inequality and a symmetry result // Journal of Functional Analysis. — 2009. — т. 256, № 6. — с. 1842—1864.
81. *Smets D., Willem M.* Partial symmetry and asymptotic behavior for some elliptic variational problems // Calculus of Variations and Partial Differential Equations. — 2003. — т. 18, № 1. — с. 57—75.
82. *Stinga P. R., Torrea J. L.* Extension problem and Harnack's inequality for some fractional operators // Communications in Partial Differential Equations. — 2010. — т. 35, № 11. — с. 2092—2122.
83. *Struwe M.* Variational methods. т. 991. — Springer, 2000.
84. *Valdinoci E.* From the long jump random walk to the fractional Laplacian // SeMA Journal: Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada. — 2009. — № 49. — с. 33—44.

85. *Van der Vorst R. C. A. M.* Best constant for the embedding of the space $\mathcal{H}^2 \cap \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ into $L^{2N/(N-4)}(\Omega)$ // *Differential and Integral Equations*. — 1993. — т. 6, № 2. — с. 259—276.
86. *Wang X.-J.* Neumann problems of semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents // *Journal of Differential equations*. — 1991. — т. 93, № 2. — с. 283—310.
87. *Бабич В. М., Слободецкий Л. Н.* Об ограниченности интеграла Дирихле // *Доклады Академии Наук СССР*. — 1956. — т. 106, № 4. — с. 604—607.
88. *Бесов О. В.* Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // *Труды Математического института АН СССР*. — 1961. — т. 60, № 6. — с. 42—81.
89. *Бесов О. В.* О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // *Доклады Академии Наук СССР*. — 1959. — т. 126, № 6. — с. 1163—1165.
90. *Ватсон Д. Н.* Теория бесселевых функций. — Издательство иностранной литературы, 1949.
91. *Галахов Е. И.* Об отсутствии локальных решений некоторых эволюционных задач // *Математические заметки*. — 2009. — т. 86, № 3. — с. 337—349.
92. *Демьянов А. В., Назаров А. И.* О разрешимости задачи Дирихле для полулинейного уравнения Шредингера с сингулярным потенциалом // *Записки научных семинаров ПОМИ*. — 2006. — т. 336. — с. 25—45.
93. *Демьянов А. В., Назаров А. И.* О существовании экстремальной функции в теоремах вложения Соболева с предельным показателем // *Алгебра и анализ*. — 2005. — т. 17, № 5. — с. 105—140.
94. *Ильин В. П.* Некоторые интегральные неравенства и их применения в теории дифференцируемых функций многих переменных // *Математический сборник*. — 1961. — т. 54, № 3. — с. 331—380.
95. *Колоницкий С. Б.* Множественность решений задачи Дирихле для уравнения с p -лапласианом в трехмерном сферическом слое // *Алгебра и анализ*. — 2010. — т. 22, № 3. — с. 206—221.

96. *Кондратьев В. А., Ландис Е. М.* О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Математический сборник. — 1988. — т. 135, № 3. — с. 346—360.
97. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1988.
98. *Ладыженская О. А., Николаевна У. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973.
99. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. — М.: Наука, 1966.
100. *Либ Э., Лосс М.* Анализ. — Новосибирск: Научная Книга, 1998.
101. *Митидиери Э., Похожаев С. И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. — 2001. — т. 234. — с. 3—383.
102. *Назаров А. И.* Неравенства Харди–Соболева в конусе // Проблемы математического анализа. т. 31. — Новосибирск: Издательство Тамары Рожковской, 2005. — с. 39—46.
103. *Назаров А. И.* О решениях задачи Дирихле для уравнения, включающего p -лапласиан, в сферическом слое // Труды Санкт Петербургского Математического Общества. т. 10. — Новосибирск: Издательство Тамары Рожковской, 2004. — с. 33—62.
104. *Назаров А. И.* О точной константе в одномерной теореме вложения // Проблемы математического анализа. — 1999. — т. 19. — с. 149—163.
105. *Назаров А. И.* О точных константах в одномерных теоремах вложения произвольного порядка // Вопросы современной теории аппроксимации. — Издательство Санкт-Петербургского университета, 2004. — с. 146—158.
106. *Назаров А. И., Щеглова А. П.* О некоторых свойствах экстремали в вариационной задаче, порожденной теоремой вложения Соболева // Проблемы математического анализа. т. 27. — Новосибирск: Издательство Тамары Рожковской, 2004. — с. 109—136.

107. *Похожяев С. И.* О собственных функциях уравнения $\Delta u + \lambda f(u) = 0$ // Доклады Академии Наук СССР. т. 165. — Российская академия наук. 1965. — с. 36—39.
108. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
109. *Слободецкий Л. Н.* Обобщенные пространства С.Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Ученые записки Ленинградского государственного педагогического института имени А.И. Герцена. — 1958. — т. 197. — с. 54—112.
110. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.
111. *Фино А. З., Галахов Е. И., Салиева О. А.* Отсутствие глобальных слабых решений для эволюционных уравнений с дробным лапласианом // Математические заметки. — 2020. — т. 108, № 6. — с. 911—919.
112. *Щеглова А. П.* Задача Неймана для полулинейного эллиптического уравнения в тонком цилиндре. Решения с наименьшей энергией // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2007. — т. 348. — с. 272—302.
113. *Эванс Л. К.* Методы слабой сходимости для нелинейных уравнений с частными производными. — Новосибирск: Издательство Тамары Рожковской, 2006.