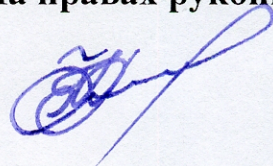


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

**«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича
Столетовых» (ВлГУ)**

На правах рукописи



Горшков Кирилл Андреевич

**РАЗРАБОТКА МОДЕЛЕЙ СИСТЕМНОЙ ОРГАНИЗАЦИИ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЕЙ НА ПРИНЦИПАХ
СИММЕТРИИ**

05.12.13 – Системы, сети и устройства телекоммуникаций

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата технических наук

**Научный руководитель:
доктор технических наук, профессор
Никитин Олег Рафаилович**

**Научный консультант:
доктор физико-математических наук, профессор
Рау Валерий Георгиевич**

Владимир - 2015

Оглавление

Введение.....	4
Глава I. Обзор существующих сетей и систем телекоммуникации и способов их моделирования	11
1.1 Классификация сетей и систем телекоммуникации	11
1.2. Методы моделирования сетей.....	17
1.3. Моделирующие программы и средства.....	20
1.4. Классификация сетей на основе их структуры.....	31
1.5. Выводы.....	36
Глава II. Теоретические положения к построению моделей сетей на принципах симметричного разбиения пространства	38
2.1. Периодические разбиения пространства сети.....	38
2.2. Метод дискретного моделирования разбиений пространства сети....	40
2.3. Циклические разбиения как способ представления симметричных структур	49
2.4. Рост периодических разбиений и графов.....	55
2.5. Граф связности разбиения в пространстве сети и его рост.....	58
2.6. Построение квазипериодических разбиений пространства сети.....	61
2.7. Выводы.....	65
Глава III. Разработка моделей телекоммуникационных сетей с симметрией, исследование их свойств	66
3.1. Моделирование сетей на принципах периодической симметрии. Расчет независимых конфигураций синхрогрупп.....	66
3.2. Кодировка пространства сети. Соотношение внутренних и граничных кодов системы	73

3.3. Расчет нормированной производительности в модели сети на принципах периодического разбиения пространства	80
3.4. Моделирование сетей на принципах непериодической симметрии..	89
3.5. Сопоставления работы симметричной и стохастической сетей.....	95
3.6. Расчет достижимости сигнала заданной области в модели сети на принципах непериодической симметрии.....	99
3.7. Выводы.....	105
Основные результаты и выводы.....	106
Литература.....	108
Приложение 1. Акты внедрения результатов работы.....	117

Введение

Процессы, связанные с механизмами передачи информации, предполагают наличие в собственной инфраструктуре систем связи. Различным образом реализованные телекоммуникационные сети составляют основу таких систем. В настоящее время продолжает решаться проблема оптимизации распространения сигнала по сети, проектируемой на основе определенной топологии с заданным набором характеристик её элементов. Кроме того, до конца не сформированы механизмы алгоритмизации и описания, учитывающие влияние внешних неконтролируемых факторов, связанных, например, с изменением топологии сети. В значительной степени эффективным при решении данной проблемы может оказаться применение методов априорного компьютерного и математического моделирования.

К настоящему времени создано достаточное количество программных средств (симуляторов) для моделирования сетей телекоммуникации различного профиля. Разработка подобного программного обеспечения ведется, например, группой под руководством профессора Р. Багродиа в Калифорнийском университете, работающей совместно с Национальной лабораторией в Беркли; результаты в этой области также достигнуты оборонным агентством США DARPA в рамках проекта VINT. Сами программные средства имеют ряд различий, связанных со степенью универсальности (подходящих для работы с определенным классом устройств или ориентированных на широкий ряд оборудования), а также расширяемости (с возможностью выбора средств программирования или с фиксированной функциональностью). Отечественные научные школы, занимающиеся проблемами проектирования и моделирования сетей, представлены рядом научных коллективов, работающих под руководством

ведущих ученых, таких как Б.С. Гольдштейн, В.В. Крылов, А.Е. Кучерявый, К.Е. Самуйлов, В.А. Ершов, Г.Г. Яновский, Е.Б. Алексеев и др.

Анализ моделирующих программ показал, что на данный момент не разработана общая модель описания распространения сигналов (возмущений) по сетям и по элементам сетей, которая могла бы быть адекватной физическому механизму этих процессов. Наличие такой модели позволило бы говорить о преимуществах внедрения сетей с определенной топологией для различных задач связи; выявить особенности сетей с периодической и непериодической структурой; сформировать ряд рекомендаций по технологической реализации конкретных типов сетей; предоставить возможность проектирования телекоммуникационных сетей с учетом модельной апробации эффективности их функционирования до введения в эксплуатацию.

Обзор литературных данных также позволил заметить, что в качестве объектов исследования и моделирования выступают, как правило, сложные (интеллектуальные) сети, для описания которых требуются алгоритмы на основе адаптивных и обучаемых принципов [75]. К таким сетям относят, например, персептронные нейронные сети, не нуждающиеся в специальной верификации, поскольку описывают реально существующий и функционирующий в организме объект. Но вопрос о реализации сети, базирующейся на таких принципах в радиотехнике, остается открытым. При проектировании сетей телекоммуникации в радиотехнике, как правило, прибегают к так называемому «прецедентному» методу (так обстоит дело, например, с проектированием телефонных сетей), где в качестве основы выступает готовый объект, аналогичный по размерам и структуре, и дублируется решение по построению сети передачи сигнала. Однако может быть предложен целый ряд сетей, для которых существует возможность проектирования на принципах симметричного разбиения пространства (с

топологией дуального к разбиению симметричного графа, выбранного в качестве модели сети). Такими являются сети, организованные на принципах трансляционной и нетрансляционной симметрии.

Как известно, и сигналы, и помехи представляют собой случайные процессы, что требует при описании механизма их распространения прибегать к дескрипторам для случайных величин [25,26]. Такими являются, например, случайные функции времени [21]. Метод, представленный в диссертационном исследовании, позволяет абстрагироваться от специфических особенностей сигналов и помех, что дает возможность использовать метрический подход. Это облегчает на этапе проектирования задачу, связанную с реализацией сетей конкретного типа при конструировании современных систем телекоммуникации.

Актуальность темы

Совокупность обозначенных нерешенных задач обуславливает необходимость создания модельных способов представления телекоммуникационных сетей, позволяющих описывать процессы, связанные с распространением сигнала, прогнозировать вероятность поступления сигнала в конкретную область сети, рассматривать влияние симметрии на эффективность работы определенной топологии сети до введения системы в эксплуатацию. Определение наиболее подходящих маршрутов при проектировании таких сетей является определяющим, но оно не может быть технологически реализовано без предварительной модельной апробации, поэтому построение модельных способов представления сетей является важной задачей и делает тему исследования актуальной.

Цель работы и задачи исследования

Целью настоящей работы является построение и исследование компьютерных моделей, алгоритмов и методов представления

телекоммуникационных сетей, системная организация которых основана на принципах трансляционной и нетрансляционной симметрии, для повышения эффективности их функционирования.

Для достижения цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Анализ существующих реализаций различных топологий телекоммуникационных сетей, а также программ и средств моделирования телекоммуникационных сетей различного профиля.
2. Разработка методики распределения абонентов телекоммуникационных сетей на основе применения групп трансляционной и нетрансляционной симметрии.
3. Разработка методики расчета числа независимых конфигураций синхрогрупп ($СГ_0$) в дискретном пространстве сети.
4. Разработка методики построения графа связанности синхрогрупп ($СГ_0$) для периодической сети в дискретной модели разбиения пространства.
5. Рассмотрение инверсионного преобразования кодов в модели разбиения пространства сети на домены $СГ_0$.
6. Разработка методики расчета вероятности достижимости сигнала по различным маршрутам.
7. Сопоставление работы сетей, построенных на принципах симметрии и организованных хаотическим образом.

Методы исследования

Используемые в работе методы и подходы базируются на математической теории групп подстановок, на фундаментальной теории правильных разбиений пространства и на её расширении с включением модели периодического и непериодического разбиений и упаковок плоскости на многоугольники произвольной формы. В работе используются методы

дискретного моделирования упаковок, методы теории графов, теории радиотехники, а также методы математической статистики и теории вероятности.

Научная новизна исследования

1. Предложен способ распределения абонентов телекоммуникационных сетей на основе применения групп трансляционной и нетрансляционной симметрии.
2. Предложена дискретная модель пространства сети (ДМПС) и получена формула расчета числа независимых конфигураций синхрогрупп ($СГ_0$) и формула изменения их количества.
3. В дискретной модели (r,R) -системы Делоне разбиения пространства впервые разработана последовательность операций построения графа связности $СГ_0$ для случая телекоммуникационной сети с периодической симметрией.
4. Впервые предложена двойная кодировка в программах разбиения двумерного пространства сети на $СГ_0$ -кластеры и графа телекоммуникационной сети.

Практическая значимость исследования

Разработанные модели позволяют предложить методику прогнозирования сетевых процессов на основе метрики вводимого пространства сети и сделать вывод о сравнении эффективности работы сетей с определенной топологией до введения их в эксплуатацию.

Предлагаемые алгоритмы могут быть использованы при распределении станций абонентских терминалов, обеспечивающих доступ в Интернет при поступлении сигнала от спутника, в соответствии с симметрией диаграмм направленности антенн.

Использование моделей на этапе проектирования телекоммуникационных сетей для стандартизации способов производства отдельных элементов.

Основные положения и результаты, выносимые на защиту

1. Методика распределения абонентов телекоммуникационных сетей на основе применения групп трансляционной и нетрансляционной симметрии.
2. Методика расчета в дискретном пространстве сети числа независимых конфигураций синхрогрупп и аналитического представления изменения их количества.
3. Методика построения в дискретной модели (r,R) -системы Делоне разбиения пространства графа связанности синхрогрупп для периодической сети.
4. Методика вероятностного расчета достижимости сигнала заданной области пространства сети.

Результаты исследования внедрены и реализованы:

1. В ОАО «Владимирское конструкторское бюро радиосвязи» при проектировании комплексов радиосвязи, что позволило оптимизировать управление радиостанциями, входящими в их состав.
2. В ФГБОУ ВПО ВлГУ им. Столетовых для обеспечения учебного процесса при подготовке бакалавров по направлениям 210400.62 – «Радиотехника», 210700.62 – «Информационные технологии и системы связи».

Апробация работы и публикации

Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на Всероссийской научно-практической конференции «XI Столетовские чтения», Владимир, 2014 г.; на XI международной научной

конференции «Перспективные технологии в средствах передачи информации», Владимир, 2015 г.; на Международной научной конференции «Современные проблемы информатизации в системах моделирования, программирования и телекоммуникациях», Москва, 2015 г.; на научной конференции «Современные телекоммуникационные и информационные технологии», Москва, 2015 г.

По теме исследования опубликовано 9 работ, в том числе 4 в изданиях, рекомендованных ВАК, 4 тезиса докладов, материалы диссертации вошли в разделы учебного пособия для радиотехнических специальностей вуза.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 117 страницах машинописного текста, иллюстрирована 49 рисунками. В списке литературы содержится 90 наименований.

Благодарности

Автор выражает признательность своему научному руководителю д.т.н., профессору О.Р. Никитину, а также научному консультанту д.ф.-м.н., профессору В.Г. Рау за проявленное внимание к работе, поддержку и идеи, стимулирующие исследования. Особая благодарность д.т.н., профессору А.Д. Позднякову, д.т.н., профессору И.Р. Дубову и д.ф.-м.н. М.М. Глазову за полезные обсуждения и ценные советы.

ГЛАВА I. ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ СЕТЕЙ И СИСТЕМ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ И СПОСОБОВ ИХ МОДЕЛИРОВАНИЯ

1.1. Классификация сетей и систем телекоммуникации

Мониторинг учебных и профессиональных изданий позволяет выделить из числа различных определений понятия телекоммуникационных систем наиболее общую формулировку. Под телекоммуникационными системами в целом будем понимать совокупность структур и средств, предназначенных для передачи сравнительно больших объемов информации (преимущественно – в цифровой форме) посредством специально организованных каналов связи (или радиоэфира) [33]. В состав таких систем входят, например, получившие за последнее время широкое распространение сотовые системы связи; системы персонального вызова; различные виды систем телевидения (в том числе кабельное, сотовое и спутниковое); системы спутниковой связи и навигации; оптоволоконные сети по передаче данных.

В качестве оснований для классификации телекоммуникационных систем могут выступать различные принципы их разделения на соответствующие типы. Если принимать во внимание территориальный критерий, телекоммуникационные сети можно разделить на *глобальные* (границы распространения которых могут включать территорию целого государства или даже совокупности государств) и *локальные* (площадь распространения которых обычно не превышает 10 м²). Если в качестве критерия разделения на типы выбрана характеристика скорости передачи информации, то сети принято делить на *высоко-, средне- и низкоскоростные*. Различаться могут и средства, с помощью которых осуществляется передача информации, в зависимости от вида материала, на базе которого строится система сети, в настоящее время реализуются *оптоволоконные сети, сети,*

организованные посредством *коаксиального кабеля* или *витой пары*, *сети с передачей электромагнитного излучения* (в инфракрасном диапазоне или по радиоканалам). Способ передачи информации позволяет говорить о существовании сетей *аналогово* и *цифрового* типов. Наличие мобильных свойств у станций телекоммуникационных сетей выделяет отдельный тип *подвижных сетей* (по принципу охвата площади покрытия это – *спутниковые, транкинговые, сотовые и микросотовые*) и *неподвижных* (стационарных).

Особого внимания заслуживает классификация телекоммуникационных систем (ТС), основанная на топологическом разделении (учитывающая принципы системной организации сети). Принято [42] выделять следующие типы топологий:

Магистральный (шина, bus) – тип организации, при котором связь между любыми станциями осуществляется посредством единого общего канала, при этом передаваемая информация доступна любой станции, включенной в состав системы, это так называемое свойство широковещательности (рис.1.1).

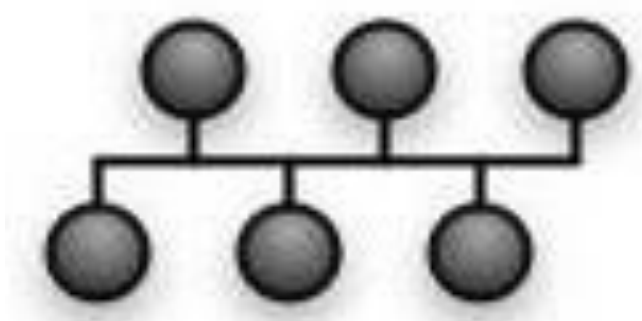


Рис.1.1 Топология магистрального типа

Радиальный (звезда, star) – тип организации, для которого характерно наличие центрального узла (концентратора), связанного с остальными

станциями отдельными каналами передачи информации, что обеспечивает определенный уровень надежности систем такого типа (рис.1.2)

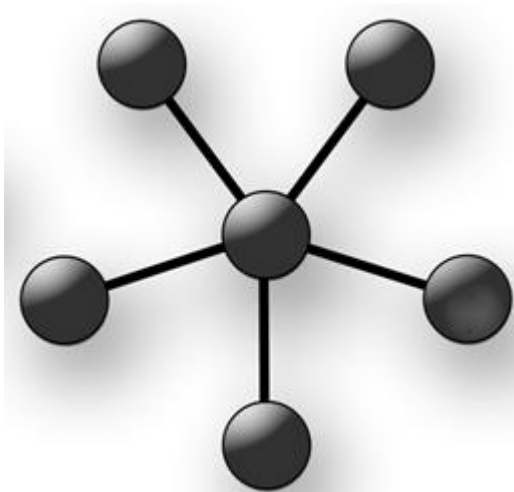


Рис. 1.2 Топология радиального типа

Кольцевой (ring) – тип организации, при котором все станции сети связаны общим кольцевым каналом передачи информации, становящейся доступной всем станциям поочередно (рис.1.3).

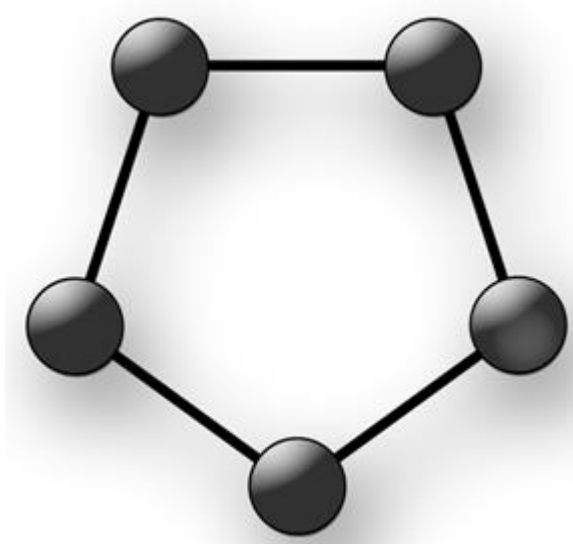


Рис.1.3 Топология типа кольцо

Существует и ряд более сложно организованных топологий, хотя базовыми являются перечисленные три типа. Среди прочих реализуются топологии с двойным кольцом, ячеистой структурой, вида решетки, дерева,

снежинки, представляющие собой смещение или расширенный вариант базовых топологий. Неотъемлемым принципом системной организации любого вида топологии, неважно подразумевается ли географическое расположение или виртуальная система связей, является наличие симметрии, влияющей на эффективность функционирования ТС, что послужило отправным моментом для проведенных диссертационных исследований.

Анализ мониторинга патентов и изобретений [4], относящихся к области цифровой вычислительной техники, показал что вопрос, связанный с проектированием систем, уменьшение среднего времени прохождения в которых связано с реализацией симметричного расположения узлов (симметричной топологии), не потерял актуальности. Так, например, изобретение, предназначенное для построения многопроцессорных вычислительных систем с синхронной и асинхронной работой процессоров, использует передачу сообщений от исходного узла в узел назначений по заранее заданному тракту, определяемому внутренней структурой сети, т.е. её топологией. Это позволяет уменьшить процесс буферизации информации в промежуточных узлах (узлах-медиаторах), сократить время ожидания при пропуске сообщения, тем самым повысить скорость передачи информации между отдельными узлами (межузловую пропускную способность). В этом случае также достигается синхронная передача сообщений между узлами, которая обеспечивается за счет использования синхронизирующих сигналов, передаваемых вместе с информацией. Каждый канал представлен средствами передачи информации и средствами передачи синхронизирующих сигналов для управления отправлением и поступлением информации. Такая система строится из многомерной сети маршрутизации А, состоящей из совокупности узлов обработки, и многомерной сети маршрутизации В, состоящей из блоков прокладки маршрута, которые

представляют собой сдвоенные решетки узлов [44]. Сети А и В организованы таким образом, что обладают одинаковыми измерением и архитектурой, при этом они являются двумерными сдвоенными решетками узлов. Любой узел содержит блок прокладки маршрута, состоящий из четырех типов каналов передачи данных. Первый канал предназначен для обмена данными между блоком формирования маршрута и процессором, второй – между блоками по первому пространственному направлению (X), третий – между блоками по второму пространственному направлению (Y), четвертый – между блоками по третьему пространственному направлению (Z). Наглядно продемонстрировать процесс маршрутизации в сети можно с помощью рисунка 1.4 [4]

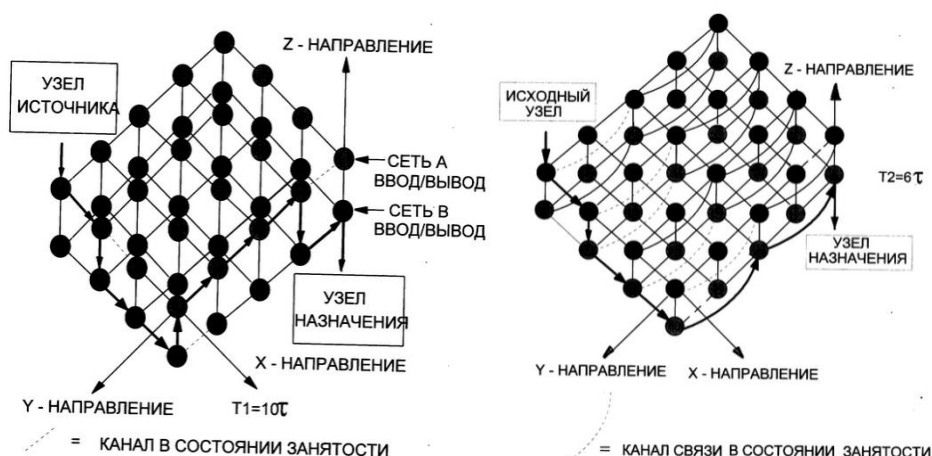


Рис.1.4 Топология многопроцессорной вычислительной системы с маршрутизацией

Примером такой системы может служить синхронная сеть, организованная на базе линейной N-мерной решетки с удаленными узлами связи. Число узлов этой сети должно численно совпадать с произведением протяженности решетки по каждой из координат. Смежными (соседними) считаются узлы, отличие которых друг от друга составляют не более чем по одной координате и не превосходит единицы. При такой организации расстояние между узлами рассчитывается как сумма протяженностей

решетки по каждой координате за вычетом N . Наличие связей между отдаленными узлами системы дает возможность уменьшить расстояние при конструировании маршрута. На рис.1.5 приведена реализация для четырехмерной сети.

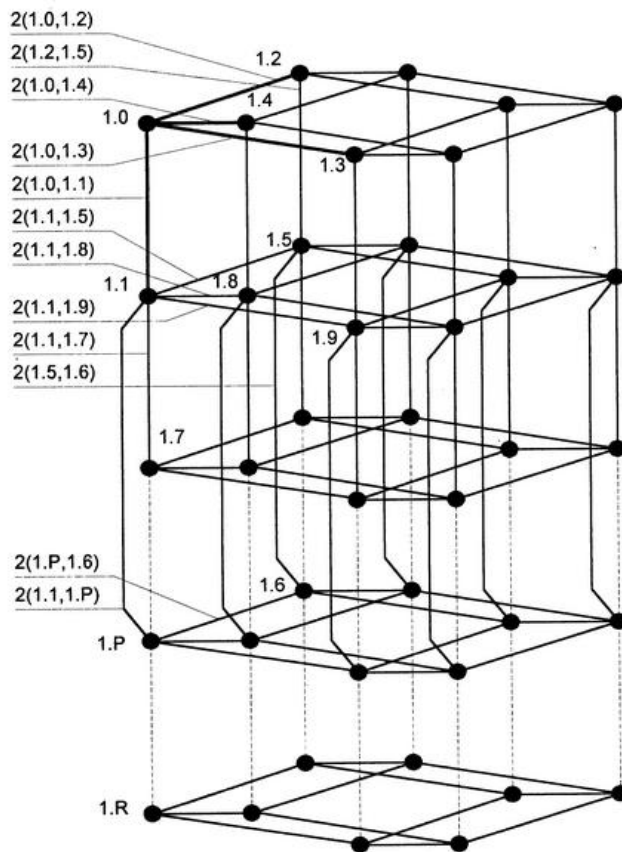


Рис.1.5 Линейная N -мерная решетка с отдаленными узлами связи

Данный пример позволяет продемонстрировать тот факт, что учет симметрии при организации сети позволяет упростить формирование выделенного тракта для передачи сигнала, вследствие чего влияет на уменьшение среднего времени прохождения сигнала в такой системе. Сам вид такой сети (рис.1.2), что несложно заметить, содержит фундаментальную область, трансляция которой с учетом изменения координат узлов (играющих существенную роль в формировании протокола при передаче сигнала по сети) образует полную топологию.

1.2 Методы моделирования сетей

Процесс моделирования представляет собой научный метод, использование которого приводит к замене исследуемого объекта на более простой (модельный). Как и любой реальный объект, процесс распространения сигнала по сети может быть смоделирован с помощью физических или математических подходов. При физическом моделировании имитацией натурального процесса служит материальная система, воспроизводящая особенности изучаемой сети с сохранением её физической природы. В качестве примера такого моделирования может выступать пилотная сеть, которая используется для изучения принципиальных возможностей организации сети на основе определенных коммуникационных устройств, компьютеров, операционных систем и приложений [43].

Возможности физических моделей, как правило, позволяют работать с ограниченным набором процессов. Обычно подход, связанный с созданием таких моделей, оправдан в случае небольшого количества сочетаний параметров исследуемой системы, поскольку, например, проверка работы для вариантов с применением различных видов коммуникационных устройств: маршрутизаторов, коммутаторов и т.д. — при натуральном моделировании самой вычислительной сети становится довольно трудоемкой. А создание реальных прототипов при большом числе маршрутизаторов сети ведет не только к временным и интеллектуальным затратам, но и создает необходимость использовать немалое число материальных ресурсов. [8]

Однако и для случаев, когда в оптимизационных схемах сетей не происходит изменения самих функциональных устройств, а меняются только их параметры, проведение реального эксперимента при большом числе различных комбинаций этих параметров становится очень затратным по

времени. К примеру, даже незначительное изменение максимальной величины пакета в любом протоколе приводит к необходимости перестроения операционной системы в большом числе обслуживающих устройств, что обуславливает появление дополнительных процедур, выполняемых администрирующим аппаратом сети [90]. В связи с этим при моделировании процессов, связанных с организацией и функционированием систем различного уровня, прибегают, как правило, к более абстрактному представлению сетевых механизмов через совокупность различных математических соотношений (формул, схем, аналитических расчетов, предикативных форм, геометрических образов, логических условий и т.д.), описывающих механизм изменения состояний системы посредством заданных параметров, количественных характеристик элементов сети, времени и начальных условий [54].

Среди математических моделей, применяющихся для визуализации сетевых процессов, в особый класс стоит выделить так называемые имитационные модели [52]. Последние представляют собой программный продукт, поэтапно воспроизводящий события, соответствующие процессам в реальной системе. К примеру, имитационные модели вычислительных сетей позволяют воспроизводить генерацию сообщений приложениями, распределение информационного сигнала на кадры определенных протоколов и пакеты; моделировать задержки, возникающие в результате обработки данных; воспроизводить процесс обработки поступающих пакетов маршрутизатором и т.д [87]. Объективным преимуществом имитационных моделей является их экономичность, поскольку использование данного метода не требует приобретения дополнительного оборудования, как при физических способах воспроизведения сетевых процессов.

Имитационные модели [63] также позволяют выполнить замену процессов, происходящих в реальном масштабе времени, на ускоренную

смену событий, определяемую общей скоростью работы программы. Таким образом, появляется возможность оценить эффективность работы сети не только для заданной системы параметров, но в широком диапазоне их варьирования. Математические модели такого плана позволяют получать результат в виде набора статистических данных (среднем времени обработки данных на узле сети, вероятности потерь пакетов данных, скорости поступления сигналов на каждом шаге маршрутизации), которые необходимы для оптимизации работы сложных систем и, как правило, становятся их предпроектными характеристиками. К средствам имитационного моделирования, помимо универсальных языков программирования, можно отнести специальные языки создания имитационных моделей (SIMDIS, GPSS, SIMULA) [63].

Не всегда имитационные модели обладают необходимым уровнем универсальности и позволяют получать количественные результаты оценки процессов в сети, особенно, если модель воссоздает события проекта, еще не имеющего практики реализации. В таких случаях для анализа эффективности проекта могут быть созданы имитационные модели отдельных процессов, работающие независимо от общей организации (архитектуры) сети.

Применение моделирования при создании проекта (реинжинеринге) локальной или глобальной сети позволяет в общем случае реализовать следующее [32]:

1. произвести перспективный прогноз эффективности вычислительной системы;
2. дать оценку пропускной способности сети;
3. выполнить сравнение всевозможных вариантов организации вычислительной системы;
4. спрогнозировать требования к пропускной способности сети;

5. сделать оценку влияния мощности функционирующих станций или серверов на саму вычислительную систему;
6. произвести оценку требуемого количества серверов в сети, а также их производительности и многое другое.

1.3. Моделирующие программы и средства

Процесс проектирования крупных систем, инфраструктура и функционирование которых опирается на создание сетей с нетривиальной топологией, не обходится без предварительного модельного представления создаваемой сети. В качестве приоритетных задач моделирования выступает поиск оптимальных режимов работы (соответствующих рабочих характеристик), эффективной организации топологии и подходящего для определенных целей телекоммуникации сетевого оборудования.

Модели различных классов позволяют путем варьирования и анализа результатов осуществить подбор следующих необходимых характеристик сети [64]:

1. предельные пропускные способности отдельных элементов сети, а также зависимость потери пакетов от загрузки конкретных станций и внешних каналов;
2. оптимальную организацию топологии сети;
3. оценку необходимой полосы пропускания внешнего канала для обеспечения требуемого уровня QOS;
4. влияние замены серверов на перераспределение информационных потоков (Proxy, Firewall и т.д.);
5. время отклика серверов;
6. предельно допустимое число пользователей определенного сервера;
7. выбор сетевого оборудования;
8. выбор внутреннего протокола маршрутизации и его параметров;

9. оценку влияния мультимедийного трафика на работу локальной сети.

Изучение опубликованных данных [5, 8, 45, 63] позволило выделить три способа моделирования, имеющих различия, связанные с формой представления сетей; числом параметров, включаемых в систему моделирования (предельные пропускные способности, время отклика на поступивший сигнал, приоритет сетевого оборудования, выбор внутреннего протокола маршрутизации и т.д.); методами и математическим аппаратом, на которых базируется идеология модели.

Моделирование с помощью аналитического представления[21]. Реализация аналитического способа создания моделей сетей, позволяющего прогнозировать поведение системы до введения её в эксплуатацию, может быть осуществлена, к примеру, с помощью программ NS-2 или Macedon. Такие программные средства базируются на математических функциях и отношениях, связывающих входной и выходной сигналы. Поскольку и сигналы, и помехи представляют собой случайные процессы, то при описании механизма их распространения приходится прибегать к дескрипторам для случайных величин. Одной из приоритетных задач моделирования с помощью аналитического представления является поиск среднего значения $\bar{X}$, зависящего в большей степени от времени ожидания t . Как пример для случая Пуассоновского распределения, $\bar{X}$ может быть вычислено с помощью следующего соотношения:

$$\bar{X} = \frac{\lambda[S^2 + (4e+2)\tau S + 5\tau^2 + 4e(2e-1)\tau^2]}{2(1-\lambda[S+\tau+2e\tau])} - \frac{(1-e^{-2\lambda\tau})(e+\lambda\tau-2\lambda\tau e)}{\lambda e[F(\lambda)e^{-(1+\lambda\tau)} + e^{-2\lambda\tau}-1]} + 2e\tau + S + \tau/$$

3(1)

(τ – время задержки при передаче сигнала по сети; S – первый момент распределения передачи сигнала; S^2 – второй момент распределения

передачи сигнала; λ – средняя входная частота сообщений; e – основание натурального логарифма; $F(\lambda)$ – функция Лапласа для распределения времени, значение которой может быть представлено в следующей интегральной форме: $F(\lambda) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\lambda t} dt$, а для экспоненциального распределения величин сообщений: $F(\lambda) = \frac{1}{1+\rho}$. [2] Данный способ расчета был применен в аналитической модели (для сетей Ethernet CSMA-CD) Лэмом [1]. В данном случае принимается во внимание тот факт, что сеть построена из достаточно большого числа узлов (станций), которые имеют связь с доменным доступом. Таким образом, станция осуществляет передачу данных, начиная с определенного временного домена, а распределение сигналов характеризуется Пуассоновским распределением с неменяющейся скоростью передачи, равной 1.

Математическим фундаментом поиска характеристик элементов сетей является теория массового обслуживания (теория очередей), в соответствии с которой Д. Дж. Кенделлом была предложена следующая номенклатура [64]: A/B/C/K/m/z. (A – характеризует процесс прибытия; B – процесс обслуживания; C – число серверов (или узлов); K – максимальный размер очереди (по умолчанию соответствует бесконечности); m – число клиентов (по умолчанию соответствует бесконечности); z – схема работы буфера (по умолчанию следует считать FIFO)).

Для задания аналитического представления различных систем используются статистические методы формализации, представляющие собой совокупность распределений [1,9]:

- распределение Релея (G);
- распределение Эрланга порядка k (E_k);
- марковское (пуассоновское) экспоненциальное распределение (M);
- гиперэкспоненциальное распределение порядка k (H_k).

Чаще всего встречаются следующие схемы работы буферов: схемами FIFO (First-In-First-Out), FIRO (First-In-Random-Out) и LIFO (Last-In-First-Out) [9]. Таким образом, записанное в соответствии с принятой номенклатурой M/M/2 следует понимать, как запись очереди, время поступления и время отправления в которой описываются экспоненциальным распределением.

Среднее значение длины очереди N^* для случая среднего времени ожидания (пребывания заявки в системе) t и средней входной частоте сообщений, равной λ , определяется согласно теореме Литла (1961 г.) следующим образом:

$$N^* = \lambda t$$

Для случая записи очереди M/G/1 входной процесс описывается распределением Пуассона и имеет скорость поступления сообщений равной λ (простейший поток). Вероятность того, что за время t на вход поступит n сообщений, можно вычислить:

$$P(n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Для случая, если очередь записана m/d/1, считается, что время обслуживания не изменяется, а среднее время ожидания может быть рассчитано:

$$\bar{T} = \frac{\rho \tau}{2(1 - \rho)}$$

Если в качестве примера рассмотреть вариант сети Ethernet, имеющей N каналов следования данных и принять, что на входе каждого узла сообщения характеризуются Пуассоновским распределением, а распределение самих сообщений по их длине является произвольным. Схема буфера FIFO, т.е. данные выходят из узла (станции) согласно

очередности прибытия. Сам трафик считается симметричным. Тогда очередь описывается моделью M/G/1, а среднее время ожидания может быть рассчитано с помощью соотношения следующего вида:

$$\bar{T} = \hat{y} + \frac{\lambda \hat{y}}{2(1 - \rho)},$$

где $\hat{y} = [1 + (N - 2)\rho G]S$

$$\rho = \frac{\lambda S}{1 - (N - 2)G\lambda S}$$

$G=1/(N-1)$ -показывает вероятность, что сообщение отправителя i направлено получателю j . Среднее время распространения сообщения в такой сети рассчитывается следующим образом:

$$\bar{T} = \hat{y} + \frac{\lambda \hat{y}^2}{2(1 - \rho)} + S + \tau$$

Для сравнения в работе приведены лишь несколько вариантов расчёта для небольшого числа моделей, используемых аналитическим способом.

Моделирование с помощью симуляционного представления [63]применяется, как правило, для поиска критических элементов сети. Реализуется такой способ модельного представления с помощью специальных языков симулирования и предполагает сравнение результатов функционирования модели с экспериментальными данными, полученными при анализе работы реальной сети. Создаваемая модель должна как можно точнее воспроизводить сетевые процессы, поэтому, в случае одновременного наличия событий в различных точках сети, симуляция таких процессов возможна только с применением многопроцессорных устройств. Если одновременное воспроизведение нескольких процессов не возможно (в рамках определенной задачи маршрутизации) то для

отдельного логического сегмента приходится создавать очередь событий [38].

При разработке статистических симуляционных моделей задается ряд характеристик, таких как *время ожидания* (интервал времени от поступления сообщения в сетевой интерфейс до его процессорной обработки); *системное время* (промежуток времени отсчитываемый от момента создания сообщения до поступления его к адресату); *время передачи* (временные задержки при передачи данных от процессора к процессору); *время распространения* (временные задержки, возникающие в результате обмена сообщениями между интерфейсами)

Однако весь перечень рассчитываемых в процессе моделирования характеристик включает гораздо большее число параметров. В таблице 1 приведен список временных характеристик, которые вычисляются при симуляционном способе представления сетей. [2]

Таблица 1.1 Перечень характеристик, рассчитываемых при симуляционном моделировании.

Статистика для очередей	Пиковое значение длины очереди
	Среднее значение длины очереди
	Значение среднеквадратичного отклонения среднего значения от величины длины очереди
Статистика ожидания	Значение максимального времени ожидания
	Значение среднего времени ожидания

	Значение среднеквадратичного времени ожидания
Статистика потерь сообщений	Общее значение числа потерянных сообщений
	Частота возникновения потерь сообщений
	Количество потер, возникающих в результате таймаутов или переполнения очереди
Статистика системного времени	Значение максимального системного времени
	Значение среднего системного времени
	Значение пикового количества системных сообщений
	Значение среднеквадратичного отклонения количества системных сообщений и самого системного времени

Еще одним вариантом реализации симуляционного подхода для моделирования сетей может служить метод, при котором каждому логическому сегменту сначала рассчитывается очередь событий, а затем моделируется очередность пакетов, находящихся в режиме ожидания отправки. Сама очередь может изменяться при поступлении извне пакета данных. Как только очередь для каждого элемента сети сформирована (построена), начинает работу программа отправки сообщений. В данной

системе вычисляются моменты времени, когда все пакеты достигают узлов адресата в данном логическом сегменте, наряду с этим осуществляется проверка на наличие столкновений между пакетами. Применение данного подхода ускоряет вычисления для варианта небольшой нагрузки сети, но при наличии достаточно большого количества узлов.

Ряд трудностей, возникающих при данном способе моделирования, обусловлен необходимостью обслуживания непростого списка, включающего очередь пакетов, находящихся в режиме ожидания отправки. Структура такого списка подразумевает наличие описания ситуации в сети на текущий момент. Возникновение проблем также сопряжено с работой переключателей, мостов и маршрутизаторов, поскольку их функционирование может привести к спонтанному возникновению в очереди событий дополнительных элементов, имеющих приоритет обслуживания.

Моделирование с помощью тредов предполагает создание виртуальной сети (например, с помощью потенциала операционной среды Linux), внутри которой возможно воспроизведение обмена, различных типов протоколов, схем построения очередей [44]. Полоса канала в таком методе может быть реализована алгоритмом «маркерное ведро». Основной задачей метода является установление зависимости между пропускной способностью сети и параметрами длины пакета, величины нагрузки, числа узлов в сети. Математическим фундаментом при решении этой задачи выступает теория очередей и статистическое распределение Пуассона.

При данном способе моделирования сеть разбивается на так называемые логические сегменты, в каждой из которых работает независимая синхронизация процессов (хотя эти процессы и влияют друг на друга через мосты, переключатели и маршрутизаторы).

Полное модельное представление сети, учитывающая рабочие приложения, подразумевает применение ряда распределений [54]:

1. Распределение узлов сети в соответствии с их активностью.
2. Распределение, учитывающее длину пакетов.
3. Распределение, которое строится на основании величины процента времени, используемого каждым узлом для определенного рода приложения.
4. Распределение с учетом используемых в работе сети протоколов.

Начать рассматривать процесс моделирования с помощью тредов следует с процедуры проверки пропускной способности сети, если осуществляется вариация размерами пакета или загрузкой, затем следует выполнить подсчет количества столкновений и установление корреляции между пропускной способностью и величиной буфера сетевого интерфейса (как влияет размер буфера переключателей на следование сигнала по пути к абонентам).

Формат для описания сетевой топологии (список) включает [5]:

1. Идентификатор узла (присвоенный номер).
2. Код типа узла.
3. Список узлов соседей (номер соседа: задержка до него)

Сам процесс отсылки пакета состоит из:

1. Проверки возможности начать.
2. Упорядочивания передачи битов (каждый так называемы бит-такт).
3. Контроля состояния возможных столкновений.
4. Обработки вариантов столкновения.
5. Попытки возобновить передачу и вычисления номера соответствующего столкновению бит-такта при наличии столкновения.

Попытка начала передачи предполагает проверку передачи сигнала на каждом предыдущем бит-такте и контроль количества незанятых передач бит-тактов:

Процесс приема состоит из совокупности следующих процедур:

1. Контроля окончания приема. Окончание приема может свидетельствовать о переходе в режим для осуществления анализа полученных данных.
2. Контроля присутствия столкновений.
3. Контроля адресов и содержимого пакета и т.д.

Для примера можно рассмотреть случай для равномерного распределения по времени. Каждому узлу присваивается конкретное значение средней частоты отсылки пакетов. Время отправления задается случайным. Средняя частота задается равной для всех узлов. Минимальная средняя величина периода отправления пакетов определяется в бит-тактах и должно превосходить 512 бит-тактов. Пока узел осуществляет передачу, он не может передать новый пакет [5]. Именно из-за этого частота отправления пакетов зависит от паузы между началом нового и концом предшествующего. Среднее значение периода посылки пакетов равно $T_{\text{пакета}} + 96(\text{бит-тактов}) + d$ (значение d величина статистическая). Для каждого узла задается значение d (сначала равное для всех узлов). Если предположить равномерное распределение вероятности (передача пакета может начаться в любой бит-такт с равной вероятностью).

Если вероятность прихода n пакетов на время t распределена по закону Пуассона [12]:

$$P = \frac{(Lt)^n e^{-Lt}}{n!},$$

где L - средняя частота следования событий, то реальное время между событиями t может быть определено как $t = -T \ln(R)$. R - случайное число $0 \leq R \leq 1$, а $T = 1/L$.

Результатами моделирования с помощью тредов могут являться [5] (фиксируются отдельно для каждого набора входных параметров):

1. Вероятность потери пакета для логического сегмента и каждой из рабочих станций.
2. Пропускная способность серверов для каждого из логических сегментов (путь сервер – логический сегмент)
3. Вероятность столкновения для каждого логического сегмента и каждой рабочей станции.
4. Распределение потоков по логическим сегментам (и рабочим станциям) независимо для каждого направления (вход и выход).
5. Распределение потоков для всех входов/выходов переключателей мостов и маршрутизаторов.
6. Доля вспомогательного трафика (ICMP, SNMP, отклики ТСП, широковещательные запросы и т.д.) по отношению к информационному потоку для различных узлов сети (серверов, маршрутизаторов).
7. Уровень широковещательного трафика для каждого из логических сегментов

1.4. Классификация сетей на основе их структуры

Построение сетей связи, предполагающих построение маршрутов следования данных, опирается на знание топологии сети, например, взаимного расположения центральной станции (ЦС) (радиомодема, осуществляющего постоянную, периодическую, базовую синхронизацию всей сети) и синхрогрупп ($СГ_0$) - совокупности потребителей, имеющих одинаковое время поступления сигнала (рис.1.6) [53]. Примером наиболее распространенной сети является компьютерная сеть, работа которой определяется протоколами маршрутизации [88].

Протокол маршрутизации — сетевой протокол, используемый маршрутизаторами для определения возможных маршрутов следования данных в составной компьютерной сети [56]. Применение протокола маршрутизации позволяет избежать ручного ввода всех допустимых маршрутов, что, в свою очередь, снижает количество ошибок, обеспечивает согласованность действий всех маршрутизаторов в сети и облегчает труд администраторов [22].

Как отмечается в [60,61] протоколы маршрутизации делятся на два вида, зависящие от типов алгоритмов, на которых они основаны: дистанционно-векторные протоколы (основаны на Distance Vector Algorithm (DVA)) и протоколы состояния каналов связи (основаны на Link State Algorithm (LSA)).

Так же протоколы маршрутизации делятся на два вида в зависимости от сферы применения: междоменной маршрутизации и внутридоменной маршрутизации.

В общем случае произвольной сети, будем считать, что совокупность распределенных станций, связанных между собой различными способами, образует *пространство сети*. Система связей определяет математическую модель в виде графа — графа маршрутизации сети.

Сравнительный анализ различных вариантов возможных топологий сетей, а также расчет комбинаторно возможных вариантов графа междоменной маршрутизации сетей (ГМС) позволит выделить среди них наиболее подходящие при реализации.

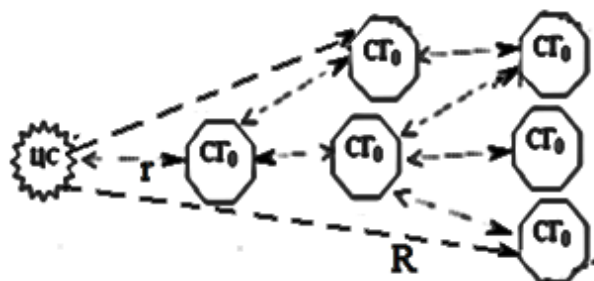


Рис.1.6 Схема сети с соединением «точка-точка» с синхронизацией ЦС и маршрутизацией

При классификации сетей на основе их геометрической структуры и топологии можно выделить три наиболее различающиеся между собой случая.

1. Сеть, которая сложилась стихийно. В этом случае распределение элементов сети в пространстве неоднородно и сами элементы обладают различными радиофизическими свойствами (характеристиками). Такую сеть будем называть *неупорядоченной*. Форма доменов различна (рис. 1.7а), но для разработки протоколов (алгоритмов и программ), удобно выбрать аппроксимацию каждой формы с помощью полимино. Это почти всегда (за исключением существования у домена только одного или двух соседей) можно сделать, не нарушая топологии сети, методом разбиения, накладывая на сеть с доменами «клеточную» решетку определенных размеров (в декартовой системе целочисленных координат).

2. Сеть создается по проекту без привязки к особенностям рельефа местности. В этом случае можно упорядочить структуру (в зависимости от различных требований), сделать, например, однородной, то есть наиболее симметричной. Для ее реализации относительно легко разработать стандарт и

сформулировать требования к физическим характеристикам элементов сети. Будем называть эту сеть *полностью* или *глобально упорядоченной*. Геометрическим примером такой сети является правильная решетка трансляций (узлов с «пустыми» ячейками рис.1.7.б).

3. Третий вариант представляет собой сочетание локально неупорядоченной структуры с глобальной упорядоченностью. В качестве основного объекта исследования в данной работе выберем именно такой вариант сети: решетка трансляций с фундаментальной областью, заполненной неупорядоченными доменами (рис.1.7.в). Сеть в таком случае назовем *локально неупорядоченной*.

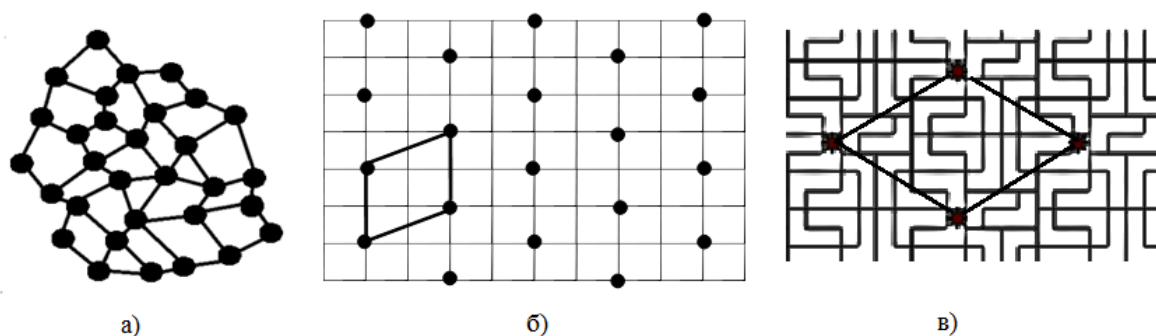


Рис.1.7 Варианты представления структуры сетей: а) – неупорядоченная; б) – глобально упорядоченная; в) – локально неупорядоченная.

Любой промежуточный вариант перехода от упорядоченной структуры сети к неупорядоченной сети будет характеризоваться наличием случайных «дефектов» и относиться к разряду *дефектных* сетей. Устойчивая работа сети часто определяется радиационной защищенностью отдельных элементов радиотехнических устройств, особенно при их миниатюризации. Точное количество дефектных сетей, в общем случае, непредсказуемо. Тем не менее, в каждом конкретном случае, введением вероятностных закономерностей можно получить результат распространения сигналов по сети при наличии дефектов.

От источника информации к потребителю может существовать два способа передачи пакетов информации:

- полевой, при котором все потребители, обладающие рецептивными способностями к характеристикам сигнала, включены в процесс передачи-получения. При таком процессе передача осуществляется за счет электромагнитного излучения, поэтому скорость распространения сигнала в масштабах реальных объектов можно считать бесконечно большой.

- пошаговый, реализация которого сводится к созданию сети с маршрутизацией [72,83], т.е. к выбору оптимальных каналов следования данных в случае, когда передача сигнала напрямую от источника к потребителю невозможна и осуществляется посредством медиаторов. Для описания передачи информации необходим переход к дискретному пространству. В этом случае в качестве математической модели могут быть предложены либо модель графа, либо модель (r,R) -системы Делоне [20], отражающая условие существование любой сети.

Сама идея системы Делоне базируется на способе задания точек плоскости, удовлетворяющих двум аксиомам[18]:

1. Аксиоме дискретности: расстояние от любой точки множества до ближайшей к ней точки этого же множества больше или равно некоторому фиксированному отрезку длины r .

2. Аксиоме покрытия: расстояние от любой точки пространства до ближайшей к ней точки системы меньше или равно некоторому фиксированному отрезку длины R .(рис.1.8).

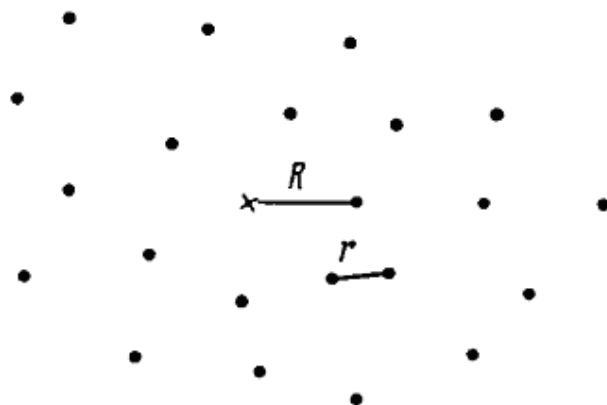


Рис.1.8 Пример (R,r) -системы Делоне.

Осуществляем поиск такой (r,R) системы, в которой операторы (потребители) расположены с некоторой так называемой «равномерной плотностью». Одним из примеров такой (r,R) системы является система, основанная на принципах симметрии. Этот метод Делоне впервые применил для описания периодических структур вещества [17].

Если расстояние исчисляется количеством шагов, выполняемых на каждом этапе маршрутизации, то для описания приходится задавать Дискретное пространство, обладающее собственной метрикой, отличной от метрики Евклидова пространства R^n .

Все реально существующие сети маршрутизации устроены по хаотическому принципу передачи сигнала, это означает, что одновременно передать одну и ту же информацию от точки A к точкам B_1 и B_2 не возможно, если они распложены на разном расстоянии, основываясь на Евклидовой метрике. Возникает проблема управления сигналом, передаваемым по телекоммуникационной сети. Для простоты расчетов (и дальнейшей алгоритмизации процедуры при её программной реализации) предложим такие модельные формы, которые образуют либо *решетку трансляции*, либо *квазирешетку* [67].

Первый случай приводит нас к сети с периодической симметрией, второй - с непериодической симметрией. Эффективность предложенных моделей рассмотрена в главе 3.

Понятие геодезической линии в евклидовой метрике и метрике дискретного пространства определяется по-разному. Так, в случае дискретного пространства, геодезическая будет задаваться числом шагов (s), необходимых для пошаговой передачи сигнала. Потребителей (операторов), распространение сигнала до которых определяется одинаковым числом шагов, будем считать принадлежащими одному координационному окружению $E_q(a, n)$ (в дальнейшем под такой совокупностью операторов сети будем понимать синхрогруппу SG_0 , а сам термин координационного окружения будет использоваться при описании математической модели роста графа) так задается понятие эквидистантности на дискретном пространстве.

1.5. Выводы

- Обзор существующих реализаций различных топологий телекоммуникационных сетей позволил заметить, что с целью увеличения эффективности работы некоторых систем (например, повышение межузловой пропускной способности в многопроцессорной вычислительной сети) используется условие симметричного расположения узлов.
- Объектами исследования и моделирования выступают, как правило, сложные, интеллектуальные сети или статистические процессы в отдельных участках сети, что создает необходимость прибегать к использованию либо алгоритмов на основе адаптивных и обучаемых принципов, либо совокупности распределений случайной величины.

- При моделировании сетей в радиотехнике прибегают к так называемому «прецедентному» методу, где в качестве основы выступает уже функционирующий объект и определяются условия его наиболее эффективного режима работы.
- При классификации сетей на основе их структуры можно выделить три наиболее различающихся случая: неупорядоченная сеть, глобально упорядоченная сеть и локально неупорядоченная сеть. И предложить для третьего варианта модель на основе симметричного разбиения пространства (с топологией симметричного графа, являющегося дуальным к разбиению).

ГЛАВА II. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ К ПОСТРОЕНИЮ МОДЕЛИ СЕТЕЙ НА ПРИНЦИПАХ СИММЕТРИЧНОГО РАЗБИЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА

2.1 Периодические разбиения пространства сети

Для моделирования процессов, приводящих к образованию симметрического распределения элементов или связанных с их периодическим или квазипериодическим распределением, может быть использована модель послойного роста разбиений. Под разбиением будем понимать такое расположение фигур на плоскости или в пространстве, которое сочетает в себе упаковку и покрытие: образующие разбиение фигуры не имеют общих внутренних точек (могут соприкасаться, но не перекрывать одна другую) и каждая точка плоскости или пространства принадлежит, по крайней мере, одной фигуре (нескольким фигурам одновременно могут принадлежать точки, лежащие на границе фигур). [51] В качестве геометрического способа реализации разбиений может выступать нормальное разбиение плоскости на многоугольники [30]. Этому требованию в случае евклидовой метрики R^n удовлетворяют, как известно [62], только три из одиннадцати комбинаторно-различных разбиений на планигоны: на основе квадрата, правильного шестиугольника и правильного треугольника (рис.2.1).

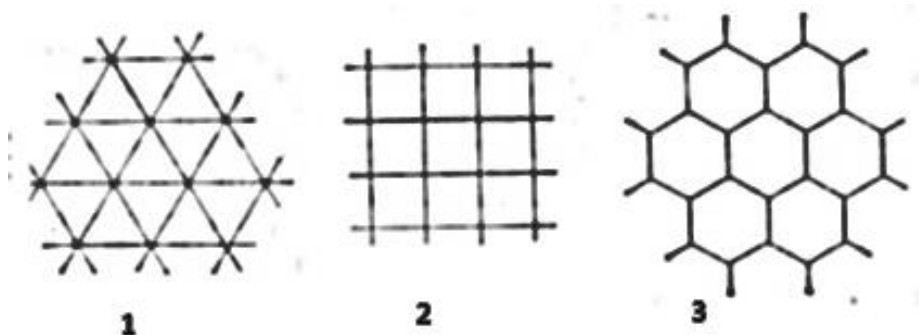


Рис.2.1 Примеры разбиений плоскости. 1- полиамонды; 2 – полимино; 3- полигексы.

Таким образом, наложение соответствующей сетки на плоскость позволяет выделять различные конфигурации объединения клеточных областей (полимино, полигексов или полиамондов) [13], и процесс моделирования образования новых элементов исходного множества разбиения может быть представлен процедурой послойного окружения произвольного планигона [37].

Будем считать, что в плоскости задана упаковка многоугольников или, в частном случае, разбиение плоскости на многоугольники. Тогда алгоритм послойного роста может быть реализован следующей последовательностью действий. Один или несколько многоугольников выбираются в качестве исходного - затравочного. На первом этапе происходит присоединение к затравочному планигону его первого координационного окружения (совокупности многоугольников, являющихся соседними хотя бы для затравочного). Соседними будем считать такие многоугольники, которые имеют хотя бы одну общую сторону. Далее описанная процедура повторяется многократно, на каждом новом шаге в качестве исходной комбинации многоугольников принимается построенная на предыдущем шаге совокупность фигур. Условно назовем присоединяемые координационные окружения слоями роста, тогда сам алгоритм естественно назвать послойным ростом упаковки или разбиения [37].

На основе данного принципа были разработаны программные реализации алгоритма послойного роста в периодических разбиениях плоскости на полимино. Применение программ позволило произвести компьютерное исследование ряда периодических разбиений с целью выявления влияния размера и формы исходного затравочного многоугольника, параметров и симметрии решетки трансляций, а также зависимости геометрии слоев от самого разбиения. В каждом случае при формировании последующих окружений обнаруживалась закономерность

образования некоторого феноменологического многоугольника, дальнейшее увеличение которого путем присоединения очередного слоя не приводит к изменению его формы. Динамику данного процесса можно проиллюстрировать следующим образом (рис.2.2)

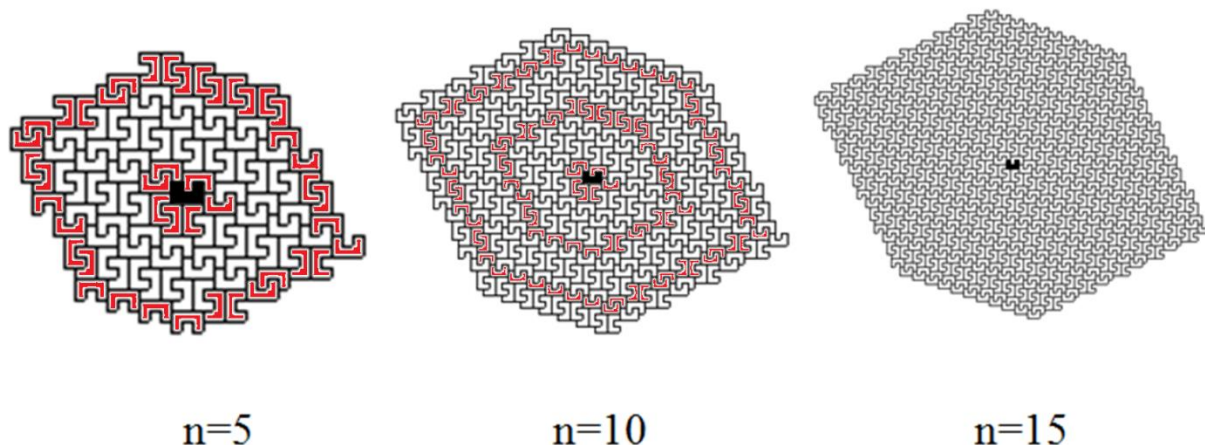


Рис.2.2 Образование формы роста в разбиении плоскости на полимино

Если каждому планигону на плоскости поставить в соответствие вершину графа, а отношением соседства (по критерию наличия общей грани у планигонов) задать соединение этих вершин ребрами, образуется сеть абонентов, распределенных по принципу периодического разбиения плоскости. Это может быть использовано на этапе создания проекта распределения абонентов сети с учетом наличия возможности их локального нахождения в определенной области.

2.2 Метод дискретного моделирования разбиений пространства сети

Перечисление Грюнбаумом и Шепардом [19,20] различных типов изоэдрических разбиений двумерного пространства подвело некоторый итог в системном анализе, когда мозаики стали широко распространенной моделью для описания периодических структур. В книге Кларнера [29] описаны подходы к разбиению пространства не только на правильные, выпуклые многоугольники, но и фигуры произвольной формы, среди

которых наибольший интерес представили разбиения на группы равносторонних треугольников (полиамондов), квадратов (полимино) и правильных шестиугольников (полигексов) [71,73], имеющих общие ребра. Последнее время интерес к этим разбиениям не уменьшился, но даже возрос [10,11], так как значительно увеличились возможности применения компьютерных методов решения как реальных, так и модельных задач [24,37].

Модель одномерного целочисленного разбиения периодического пространства на отрезки (по $\text{mod } N$), содержащие k -точек, была предложена Паттерсоном [55] и подробно исследовано в работах [48,35] для решения проблемы гомометрии, приводящей к неоднозначности расшифровок структур методами построения Фурье-образов. Было, в частности, показано [35], что располагая точки векторной системы (функции межточечных расстояний) вдоль узловых направлений ортогональной ячейки из $N \times N$ узлов, можно получить для выбранного направления набор *двумерных* гомометричных структур. В этом случае векторная система каждой из этих структур содержит координаты всех точек периода решетки N . В комбинаторике (в табл.2.1 [48]) координаты структуры такой полной векторной системы точек, образуют блок-схему и (v, k, λ) – разностное множество, где $v = N$, k – минимальное количество точек с целочисленными координатами, λ -кратность точек в векторной системе. При построении полной векторной системы точек в двумерной решетке образуются N раз центрированные ячейки этой решетки [68], варианты которых были положены в основу модели дискретного двумерного, а затем и n -мерного упаковочного пространства. Выбор направления в решетке, содержащей $N \times N$ узлов, определяет одну из подрешеток, ячейка которой содержит N узлов решетки.

Пересчет количества вариантов гомометричных структур с заданным набором $k(k-1) = N$ – точек векторной системы в ячейке двумерной

структуры показал, что это количество для простых чисел N равно $(N+1)$. Решение общей задачи перечисления количества двумерных и трехмерных решеток с N - узлами в ячейках решетки было получено после введения понятия упаковочного пространства (УП) и его Pack-Space (PS) – формализации [46].

Упаковочным пространством (PS) или пространством разбиения названа решетка, в которой каждому узлу приписан вес (символ или цвет) таким образом, что любое множество узлов решетки с одинаковым весом образует одну и ту же (с точностью до сдвига) подрешетку трансляций исходной решетки [35].

Столбцы координат векторов (в базисе исходной решетки) одного из базисов подрешетки в этой решетке образуют целочисленную матрицу вида:

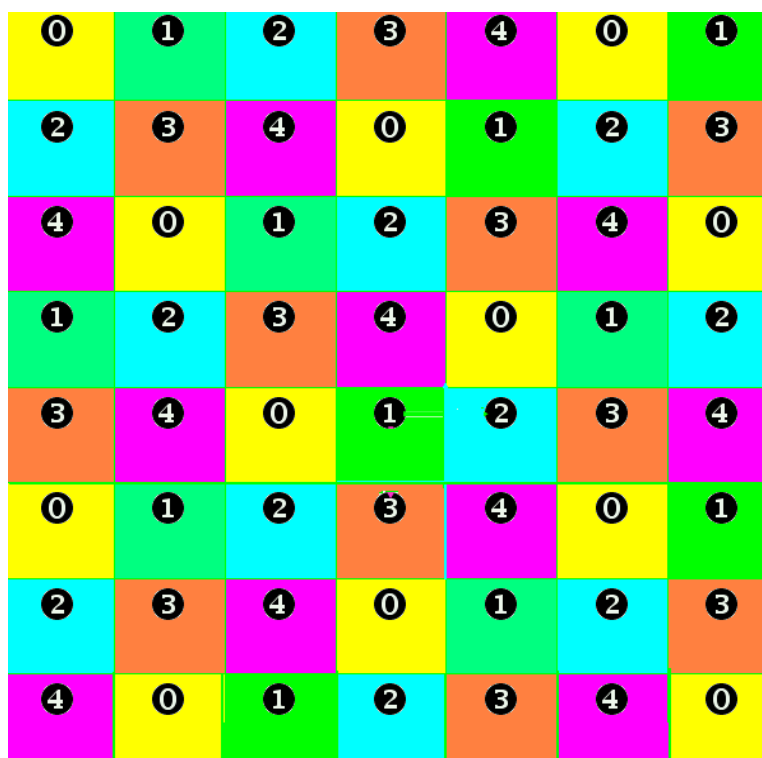
$$Y = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & 0 & z_3 \end{bmatrix}, \text{ где } 0 \leq x_2 < x_1, 0 \leq x_3 < x_1, 0 \leq y_3 < y_2, z_3 > 0.$$

Матрица Y называется матрицей трехмерного упаковочного пространства. Порядок упаковочного пространства совпадает с индексом подрешетки и равен произведению диагональных элементов упаковочной матрицы $N = x_1 y_2 z_3$.

Для двумерной решетки в матрице останутся только числа x_1, x_2, y_2 . Порядок упаковочного пространства в этом случае будет $N = x_1 y_2$.

Для каждого узла упаковочного пространства построим разбиение Дирихле делением межузельных расстояний срединной плоскостью и, как нетрудно видеть, в результате получим разбиение пространства на области, не содержащие внутри себя узлов, кроме одного. Это - кубы в трехмерном пространстве и квадраты в двумерном (рис.2.3). В физике твердого тела такие области решетки называют ячейками Вигнера-Зейтца в прямом

пространстве координат, или зонами Бриллюэна в обратном пространстве импульсов. По этому же принципу строятся разбиения пространства кристаллической решетки на области Вороного-Дирихле для атомов и молекул [65]. Пусть размеры квадрата совпадут с размерами одной из клеток, составляющих N -мино произвольной формы. Тогда можно поставить задачу вложения полимино в фундаментальную область двумерного упаковочного пространства. Если это удастся сделать, то выбранная фигура полимино разобьет пространство.



*Рис. 2.3 К определению упаковочного пространства сети.
Пространство $P51_3$*

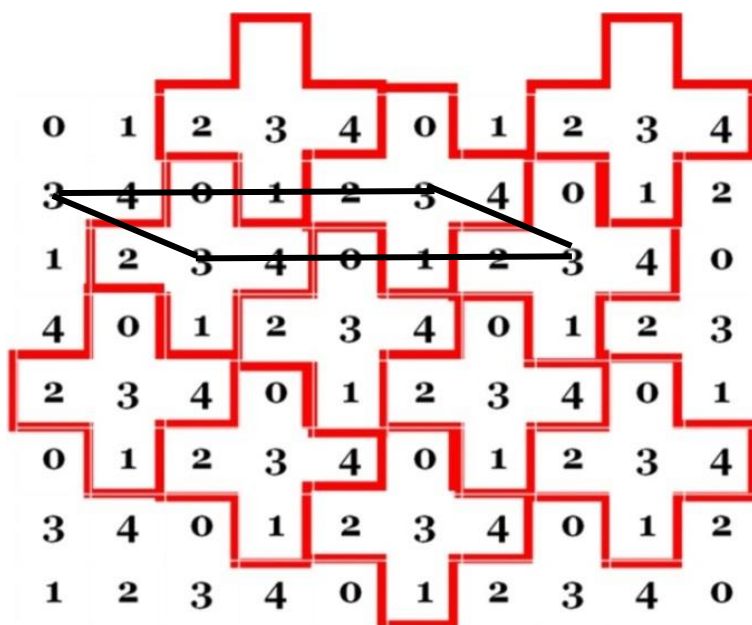


Рис.2.4 УП $P51_2$. Векторами выделена одна из ячеек решетки, соответствующая номенклатуре УП. Проверен критерий разбиения пространства на фигуру полимино - «крест». Центр фигуры совпадает с «весом» равным 3 упаковочного пространства.

Для примера рассмотрим полимино из 5 клеток в форме «креста» и совместим его центральную клетку с какой-либо клеткой упаковочного пространства $P51_2$ (рис.2.4). Критерий разбиения следующий: если все клетки с заданной ориентацией полимино совпадут с клетками, имеющими различные веса в упаковочном пространстве, то выбранное полимино разбивает пространство. Этот вывод является общим и отвечает на вопрос: какое полимино (поликуб) или их сборка могут стать фундаментальной областью пространства разбиения.

Формализация основных понятий модели дискретного n -мерного упаковочного пространства, поликуба и критерия разбиения приведены в работе [35,36]. Для двумерных и трехмерных упаковочных пространств, матрицы УП которых имеют вид

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$, предложена номенклатура: ***Pac_b*** - для двумерных

упаковочных пространств (УП^{2D}) и ***Sab_df_e^c*** - для трехмерных УП^{3D}. Определители этих матриц, равные произведению их диагональных элементов, называется **порядком N** упаковочного пространства.

Для пространства, изображенного на рис. 2.3, имеем: $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, $y_2 = 1$. Двумерное упаковочное пространство, изображенное на рис.4, обозначается P_{51_3} . Количество N упаковочных пространств с заданным порядком N конечно и определяется по формулам(1) [37]:

$$Np(\text{двумерное УП}) = \sum_{d|N} d ; Ns(\text{трехмерное УП}) = \sum_{d_1 d_2 | N} d_1^2 d_2$$

На рисунке 2.3 приведен пример фигуры с $N = 5$, с помощью которой реализовано разбиение [85]. Очевидно, что любая конфигурация полимино может быть задана в области, содержащей N на N ячеек, каждая из которых совпадает по размеру с величиной клеточных областей полимино (рис.2.5). Центры ячеек содержат узлы перевода решетки в упаковочное пространство. Если в качестве основных направлений выбрать вертикальные и горизонтальные линии, то узлы в таком базисе будут иметь целочисленные значения [68] (рис.2.5).

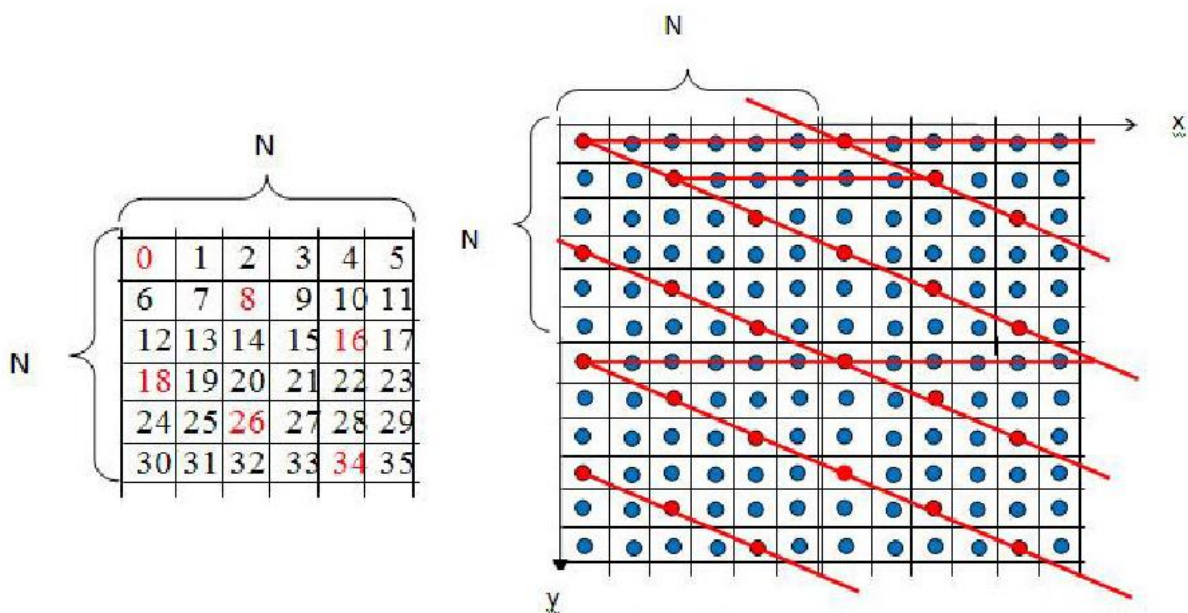


Рис. 2.5 Ряд параллельных узловых линий

В качестве исходного узла выбирается узел в верхнем левом углу. Красным задано узловое направление задающее перевод 0 – 8 и может быть описано циклической перестановкой:

$$(0\ 8\ 16\ 18\ 26\ 34)(1\ 9\ 17\ 19\ 27\ 35)(2\ 10\ 12\ 20\ 28\ 30)(3\ 11\ 13\ 21\ 29\ 31) \\ (4\ 6\ 14\ 22\ 24\ 32)\ (5\ 7\ 15\ 23\ 25\ 33).$$

Эта перестановка, задаваемая серией параллельных линий, определяет координаты узлов (6,0) и (2,1), а фундаментальная область содержит N=6 узлов (6 квадратов полимино). Координаты выбранных узлов могут быть представлены в виде вектор-столбцов матрицы:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 6\ 2 - \text{период по оси } O_x, \ 0\ 1 - \text{период по оси } O_y,$$

номенклатура: P61₂.

Из геометрии узловых линий в пространстве 4×4 (рис.2.6) и в таблице 2, видно, что операции $g(2)$, $g(8)$ и $g(10)$ отличаются на одну ячейку с

индексом 8, простое деление этих клеток позволяет выделить только две независимых из них ($g(10)$ и $g(8)$) [89].

Остальные подгруппы могут быть разделены на эквивалентные пары, количество которых равно 5. Таким образом, количество независимых узловых областей 7 для решеток с индексом $N = 4$, который совпадает с суммой делителей числа 4.

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Рис 2.6 Упаковочное пространство 4×4

Таблица 2.1. Группы перестановок для УП 4×4 (одинаковым цветом выделены перестановки, задающие один вид УП).

$g[0] = (0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15) = (0)(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)(14)(15)$
$g[1] = (5\ 6\ 7\ 4\ 9\ 10\ 11\ 8\ 13\ 14\ 15\ 12\ 1\ 2\ 3\ 0) = (0\ 5\ 10\ 15)(1\ 6\ 11\ 12)(2\ 7\ 8\ 13)(3\ 4\ 9\ 14)$
$g[2] = (10\ 11\ 8\ 9\ 14\ 15\ 12\ 13\ 2\ 3\ 0\ 1\ 6\ 7\ 4\ 5) = (0\ 10)(1\ 11)(2\ 8)(3\ 9)(4\ 14)(5\ 15)(6\ 12)(7\ 13)$
$g[3] = (15\ 12\ 13\ 14\ 3\ 0\ 1\ 2\ 7\ 4\ 5\ 6\ 11\ 8\ 9\ 10) = (0\ 15\ 10\ 5)(1\ 12\ 11\ 6)(2\ 13\ 8\ 7)(3\ 14\ 9\ 4)$
$g[4] = (6\ 7\ 4\ 5\ 10\ 11\ 8\ 9\ 14\ 15\ 12\ 13\ 2\ 3\ 0\ 1) = (0\ 6\ 8\ 14)(1\ 7\ 9\ 15)(2\ 4\ 10\ 12)(3\ 5\ 11\ 13)$
$g[5] = (11\ 8\ 9\ 10\ 15\ 12\ 13\ 14\ 3\ 0\ 1\ 2\ 7\ 4\ 5\ 6) = (0\ 11\ 2\ 9)(1\ 8\ 3\ 10)(4\ 15\ 6\ 13)(5\ 12\ 7\ 14)$
$g[6] = (12\ 13\ 14\ 15\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11) = (0\ 12\ 8\ 4)(1\ 13\ 9\ 5)(2\ 14\ 10\ 6)(3\ 15\ 11\ 7)$
$g[7] = (1\ 2\ 3\ 0\ 5\ 6\ 7\ 4\ 9\ 10\ 11\ 8\ 13\ 14\ 15\ 12) = (0\ 1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 7)(8\ 9\ 10\ 11)(12\ 13\ 14\ 15)$
$g[8] = (8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7) = (0\ 8)(1\ 9)(2\ 10)(3\ 11)(4\ 12)(5\ 13)(6\ 14)(7\ 15)$
$g[9] = (13\ 14\ 1\ 5\ 12\ 1\ 2\ 3\ 0\ 5\ 6\ 7\ 4\ 9\ 10\ 11\ 8) = (0\ 13\ 10\ 7)(1\ 1\ 4\ 11\ 4)(2\ 15\ 8\ 5)(3\ 12\ 9\ 6)$
$g[10] = (2\ 3\ 0\ 1\ 6\ 7\ 4\ 5\ 10\ 11\ 8\ 9\ 14\ 15\ 12\ 13) = (0\ 2)(1\ 3)(4\ 6)(5\ 7)(8\ 10)(9\ 11)(12\ 14)(13\ 15)$
$g[11] = (7\ 4\ 5\ 6\ 11\ 8\ 9\ 10\ 15\ 12\ 13\ 14\ 3\ 0\ 1\ 2) = (0\ 7\ 10\ 13)(1\ 4\ 11\ 14)(2\ 5\ 8\ 15)(3\ 6\ 9\ 12)$
$g[12] = (14\ 15\ 12\ 13\ 2\ 3\ 0\ 1\ 6\ 7\ 4\ 5\ 10\ 11\ 8\ 9) = (0\ 14\ 8\ 6)(1\ 15\ 9\ 7)(2\ 12\ 10\ 4)(3\ 13\ 11\ 5)$
$g[13] = (3\ 0\ 1\ 2\ 7\ 4\ 5\ 6\ 11\ 8\ 9\ 10\ 15\ 12\ 13\ 14) = (0\ 3\ 2\ 1)(4\ 7\ 6\ 5)(8\ 11\ 10\ 9)(12\ 1\ 5\ 14\ 13)$
$g[14] = (4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 0\ 1\ 2\ 3) = (0\ 4\ 8\ 12)(1\ 5\ 9\ 13)(2\ 6\ 10\ 14)(3\ 7\ 11\ 1\ 5)$
$g[15] = (9\ 10\ 11\ 8\ 13\ 14\ 15\ 12\ 1\ 2\ 3\ 0\ 5\ 6\ 7\ 4) = (0\ 9\ 2\ 11)(1\ 10\ 3\ 8)(4\ 13\ 6\ 15)(5\ 14\ 7\ 12)$

2.3 Циклические разбиения как способ представления симметричных структур

Уже со времен Кирхгофа любую электрическую цепь (рис. 2.7) и простую радиосхему для необходимых расчетов принято заменять модельной системой сопряженных замкнутых цепей, циклов (колец) и исследовать или реально собирать циклы в отдельности. Теоретически, каждая фиксированная «цветная» точка кольца может определять функцию элемента кольца (резистора, конденсатора, источника, выпрямителя, транзистора и др.) или соответствовать выбранному веществу (проводнику, диэлектрику и прочее), то есть несет определенную «нагрузку». Аналогичный механизм может быть реализован при построении моделей телекоммуникационных сетей, в которых присутствует приоритет обслуживания (каждая точка такой системы – оператор сети – будет характеризоваться определенной «нагрузкой»).

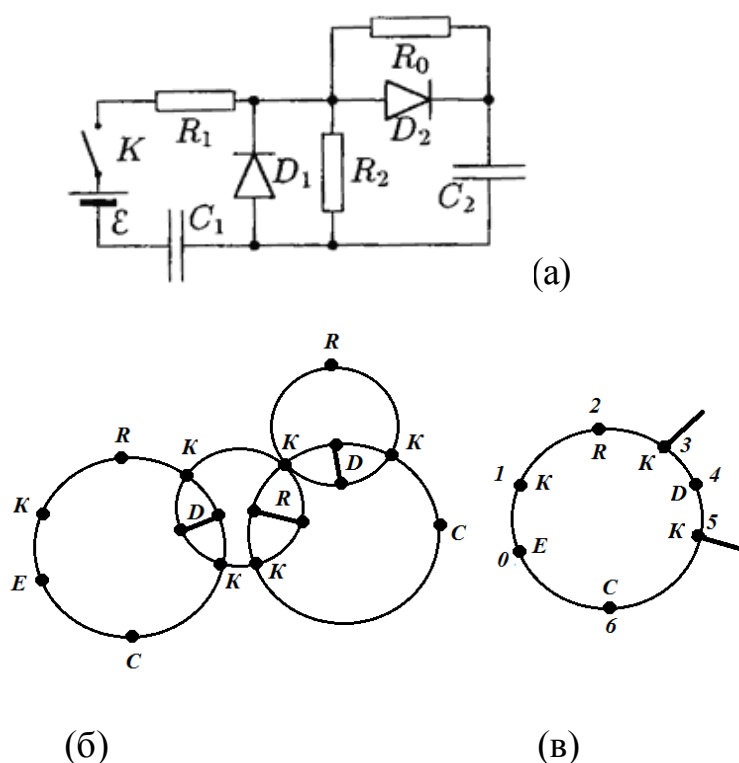


Рис. 2.7 Электрическая цепь (а) и ее представление в циклах (б); выделено одно кольцо (в).

На первом этапе исследований колец возникла задача перечисления циклических разбиений с заданным количеством точек двух сортов: занятых и не занятых позиций в структуре цикла. Исследования, проведенные Хоземаном и Бахчи, Бюргером [55] завершились работой В.Г. Рау [47,48] перечислением таких «двухцветных» целочисленных циклических разбиений. Полученные результаты можно кратко представить следующим образом.

Для перечисления разбиений N_v^k заданного периода v , содержащего k – занятых позиций точек, использовались комбинаторные методы теории чисел [62]. Было показано, что каждой блок-схеме с автоморфизмом $\alpha : a_{ij} + 1 \rightarrow a_{i+1,j} ; B_{i,k} \rightarrow B_{i+1,k}$, переставляющим как элементы a_{ij} , так и блоки $B_{i,k}$ блок-схемы по циклу длины v , соответствует один и только один циклотомический набор, а поэтому число блок-схем из множества $E = \{0, 1, \dots, v-1\}$ с $|E| = v$ равно количеству циклических разбиений N_v^k . Если начинать каждую блок-схему с блоков, содержащих фиксированный элемент a_{ij} , то, как показано в [55] блоков с этим элементом во всех блок-схемах содержится C_{v-1}^{k-1} , а с другой стороны, в блок-схеме с периодом $T = v/d$, общее количество которых обозначено $m(d)$, содержится k/d блоков с a_{ij} и общее число блоков, содержащих фиксированный элемент будет равно $m(d) \cdot k/d$. Суммируя по всем делителям d числа $n = (k, v)$ (НОД чисел k и v), имеем:

$$C_{v-1}^{k-1} = k \sum_{d \mid n} m(d) / d . \text{ Далее, используя рецепты [47,48], вычислено количество}$$

$m(d)$, а затем N_v^k , через известную в комбинаторике функцию Мёбиуса:

$$\sum_{q \wedge k} \mu(q') = \begin{cases} 1, & \text{при } q' = 1 \\ 0, & \text{при } q' > 1 \end{cases} . \text{ В этом случае, } N_v^k = 1/k \sum_{d \mid n} C_{\frac{v}{d}-1}^{\frac{k}{d}-1} \sum_{d' \mid d} \frac{d}{d'} \mu(d') , \text{ но сумма}$$

$\sum_{d \wedge d} \frac{\mu(d')}{d'} = \varphi(d)$ – есть функция Эйлера, определяющая количество чисел

взаимно простых с d , поэтому окончательно имеем: $N_v^k = \frac{1}{k} \sum_{d \wedge n} \varphi(d) C_{\frac{v}{d}-1}^{\frac{k}{d}-1}$.

Во всех этих работах конкретные структуры колец были рассмотрены не достаточно полно. Не рассматривались и более сложные «многоцветные» кольца, в которых каждый элемент кольца имеет свою «нагрузку», абстрактно, свой цвет.

Были рассмотрены так называемые циклотомические двухцветные наборы точек [50], и предложен способ расчета структур многоцветных (в том числе и двухцветных) циклических разбиений и произведена их классификация на основе симметрии групп подстановок [59], как это продемонстрировано ниже. Из теории групп известно [55], что $N!$ перестановок N чисел составляет их наибольшее количество и принадлежит полной группе симметрии перестановок чисел. Полная группа разбивается на подгруппы порядка p . Элемент подгруппы (перестановка) будет соответствовать определенной структуре кольца, если каждому числу на кольце однозначно поставить в соответствие число в перестановке. В то же время, каждой перестановке соответствует один элемент подгруппы, который можно представить в виде произведения подциклов. Считая точки, принадлежащие одному подциклу идентичными, то есть имеющими один и тот же цвет, получаем разбиение перестановки на цветные подциклы. Каждая подгруппа, содержащая p – элементов (порядок группы) определит количество структур колец с общей симметрией. Таким образом, получаем возможность для классификации структур колец по их принадлежности к одной подгруппе, а цветные подциклы в подстановке определяют структуру цветного кольца.

Для вывода преобразований симметрии подгруппы подстановок и построения групповой таблицы Кэли была составлена программа перемножения элементов группы, возможности которой представлены на рис. 2.8 Произведение матриц перестановок в программе производится по правилу («левая» подстановка умножается на «правую»), которое представлено в окне программы (рис.2.8) примером с числом элементов $N = 8$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Разбиение любой подстановки на замкнутые подциклы легко понять на основе записи «в подциклах» для левой матрицы в представленном выше равенстве: $0 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 0$, и $2 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 2$. Образуется два подцикла и подстановка дает следующий результат: $(54760123) = (0514)(2736)$. Подстановка разбилась на два подцикла, то есть она двухцветная.

Для расчетов в программу вводятся только вторые (нижние) строки матриц подстановок, так как верхние строки у всех матриц одинаковые. Затем выбираются перестановки, принадлежащие одной подгруппе, и автоматически составляется соответствующая таблица Кэли. Добавление операции подстановки, не принадлежащей этой подгруппе, приводит к расширению подгруппы и к новой таблице Кэли. В программе предусмотрено так же графическое представление («визуализация») структуры каждой подстановки в модели периодического разбиения двумерного пространства [84]. В принципе, по теореме об изоморфизме конечных групп симметрии и групп перестановок «визуализировать» можно любую абстрактную конечную группу, что было ранее продемонстрировано авторами в работе [89].

MATRIX

Элемент 1-й строки: 4 5 6 7 1 0 3 2

Элемент 2-й строки: 6 7 5 4 2 3 1 0

Элемент 2-й строки: 2 3 1 0 7 6 4 5

сброс ☐ Поиск подгрупп **перемножить**

Добавить Табл. К.

Полная таблица Кэли: Построить Т.К. Количество элементов: 1

Действия с матрицами: Матрицы

Поиск циклов: Циклы: 1 Максимальный элемент: 1

Результат поиска: Поиск ☐ Расширенный поиск Расчет

Графическое представление: Выбрать цвет: ☒ Линии Подстановка: Матрица УП: 1 1 1

Масштаб холста: 1 Масштаб клетки: 1 ☐ Разбиения ☐ Поиск мотивов Построение

tabl_k.txt — Блокнот

Файл Правка Формат Вид Справка

```

p[0]=(0 1 2 3 4 5 6 7); g[0] g[1] g[2] g[3] g[4] g[5] g[6] g[7]
g[1]=(5 4 7 6 0 1 2 3); g[1] g[2] g[3] g[0] g[5] g[6] g[7] g[4]
g[2]=(1 0 3 2 5 4 7 6); g[2] g[3] g[0] g[1] g[6] g[7] g[4] g[5]
g[3]=(4 5 6 7 1 0 3 2); g[3] g[0] g[1] g[2] g[7] g[4] g[5] g[6]
g[4]=(6 7 5 4 2 3 1 0); g[4] g[7] g[6] g[5] g[2] g[1] g[0] g[3]
g[5]=(3 2 0 1 6 7 5 4); g[5] g[4] g[7] g[6] g[3] g[2] g[1] g[0]
g[6]=(7 6 4 5 3 2 0 1); g[6] g[5] g[4] g[7] g[0] g[3] g[2] g[1]
g[7]=(2 3 1 0 7 6 4 5); g[7] g[6] g[5] g[4] g[1] g[0] g[3] g[2]

```

Рис. 2.8 Окно программы расчета групп подстановок (вверху) и результат вычислений, сформированный в виде таблицы Кэли (внизу).

Циклическое одномерное разбиение позволяет предложить еще один, более простой, но не менее важный в приложениях, способ «визуализации» в том числе и телекоммуникационных сетей (рис.2.9).

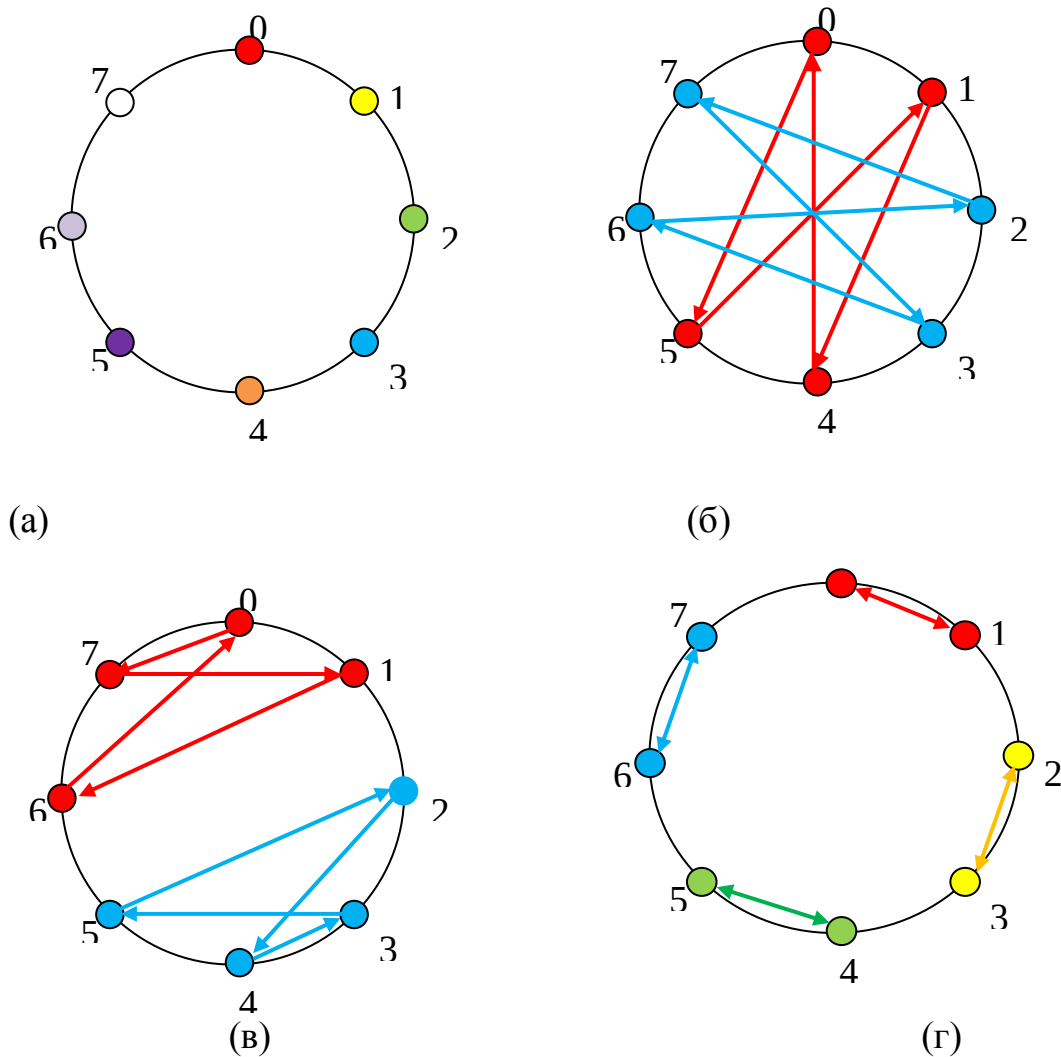


Рис.2.9 Элементы подгруппы подстановок кольца (выделены трансляционно не эквивалентные цветные кольца - «ожерелья» из таблицы Кэли по рис.1): (а) $01234567=(0)(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)$ - восьмицветное преобразование; (б) $54760123=(0514)(2736)$ – двухцветное преобразование; (в) $76453201 = (0716)(2435)$ – двухцветное преобразование; (г) $10325476 = (01)(23)(45)(67)$ – четырехцветное преобразование.

Циклическое одномерное разбиение позволяет предложить еще один, более простой, но не менее важный в приложениях, способ «визуализации» в том числе и телекоммуникационных сетей (рис.2.9).

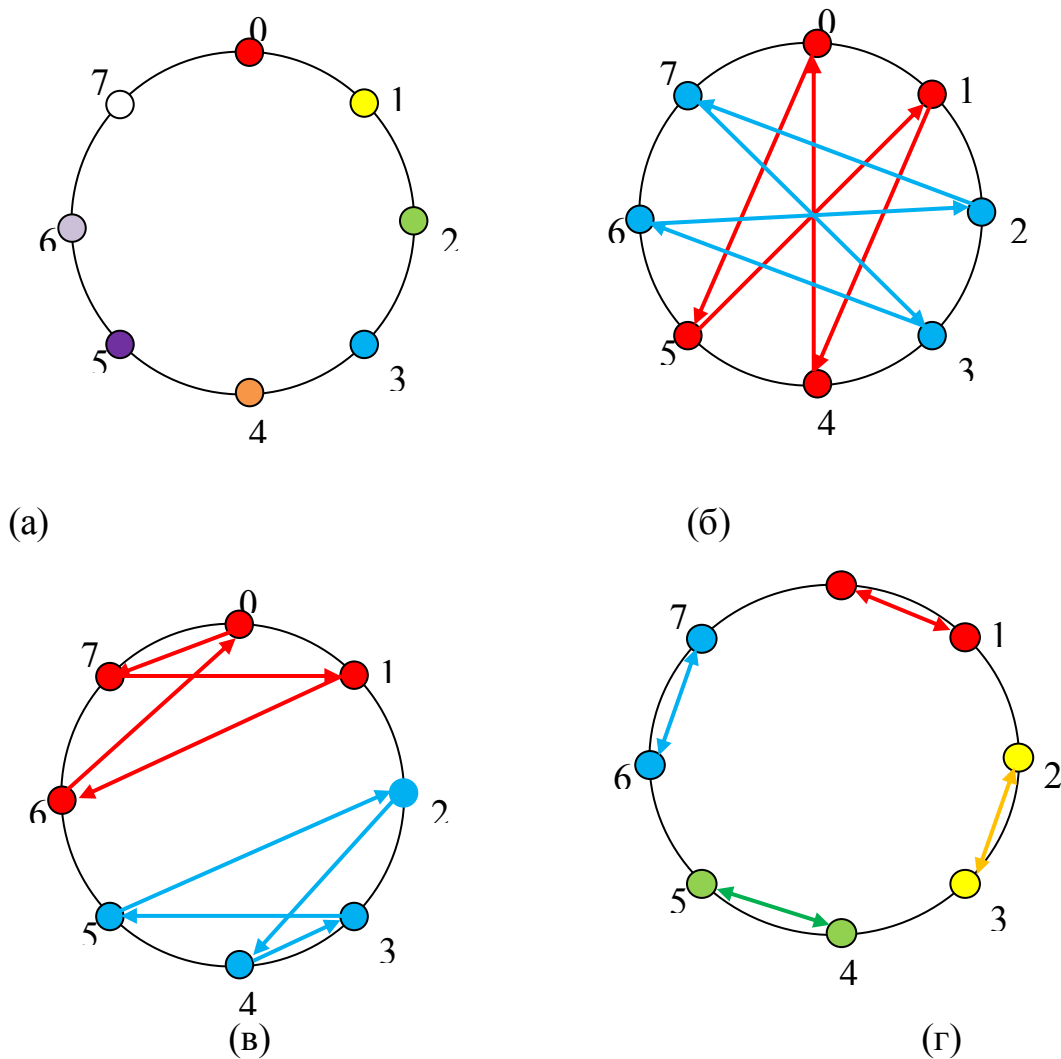


Рис.2.9 Элементы подгруппы подстановок кольца (выделены трансляционно не эквивалентные цветные кольца - «ожерелья» из таблицы Кэли по рис.1): (а) $01234567=(0)(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)$ - восьмицветное преобразование; (б) $54760123=(0514)(2736)$ – двухцветное преобразование; (в) $76453201=(0716)(2435)$ – двухцветное преобразование; (г) $10325476=(01)(23)(45)(67)$ – четырехцветное преобразование.

2.4. Рост периодических разбиений и графов

Послойная окантовочная модель роста, описанная ранее, содержит в двумерном варианте многоугольные разбиения Til плоскости R^n . Затравочный многоугольник M окружается соседними с ним многоугольниками $M^1_1, M^2_2, \dots$ из Til с общей границей длины, большей некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$.

Первый слой $\{M^1_i\}$ окружается его соседними многоугольниками $M^1_2, M^2_2, \dots$ возникает послойный рост из первой, второй и т.д. координационных окружностей. Если отметить точку a в каждом многоугольнике M разбиения Til и соединим ребром с a' из M' , если M и M' являются соседними. Получается связный неориентированный граф $G \in R^n$ с множеством вершин

$V(G) = \{a, a' \dots\}$, и задача о росте разбиения Til преобразовалась в задачу о n -й координационной окружности или эквидистантном множестве $eq(a, n)$ [85],

состоящем из вершин $x \in V(G)$ на расстоянии $d(a, x) = n$ от начальной вершины a .

Если само разбиение Til будет периодическим, содержащим решетку периодов L , и каждый его домен M содержит круг радиуса $r \geq \varepsilon_1 > 0$. При таком допущении граф G становится *периодическим* и *дискретным* [23].

Теперь, чтобы осуществить описание роста такого графа в периодических разбиениях, требуется рассмотрение асимптотического поведения при $n \rightarrow \infty$ координационного круга $Eq(a, n)$ с центром в вершине a и его границы — n -й координационной окружности или эквидистантного множества $eq(a, n)$ уровня n . Они состоят из вершин $x \in V(G)$ на расстоянии $d(a, x) \leq n$ и $d(a, x) = n$ соответственно.

Произвольная вершина a сравнима с некоторой фундаментальной вершиной $a_i \bmod L$ из списка. Вектор $v(a_i, a)$ из a_i в a принадлежит решетке L , и в силу инвариантности выполняется равенство

$$eq(a, n) = eq(a_i, n) + v(a_i, a).$$

Поэтому достаточно рассмотреть координационные окружности $eq(a, n)$ с центрами в вершинах $a = a_1, \dots, a_j$. Цепь:

$$p: a_i \rightarrow b_1 \rightarrow \dots \rightarrow b_{s-1} \rightarrow a_i'$$

соединяющую a_i с вершиной $a_i' \equiv a_i \pmod{L}$, будем называть лучом, если она удовлетворяет двум условиям:

- 1) расстояние равно $d(a_i, a_i')$, и, значит, цепь p будет геодезической;
- 2) промежуточные вершины обладают свойством $b_j \not\equiv a_i \pmod{L}$ и $b_j \not\equiv b_k \pmod{L}$ при $j \neq k$

Лучи p являются простыми цепями, состоят из различных вершин и ребер, и их длины $d(p) = s$ удовлетворяют неравенству:

$$d(p) \leq f$$

Обозначим $p(a_i, s)$ множество лучей длины s с началом a_i , а их объединение обозначим

$$P_G = \bigcup_{1 \leq i \leq f} \bigcup_{1 \leq s \leq f} p(a_i, s)$$

Каждой цепи p отвечает вектор $v = \bar{p}$, определяемый ее крайними вершинами. Для лучей $p \in P_G$ их векторы $v = \bar{p}$ содержатся в решетке L .

Лучевые векторы вместе со своими лучами образуют звезду

$$St_G = P_G \cup \{v = \bar{p} : p \in P_G\}$$

графа G .

Введем нормированную или единичную звезду:

$$st_G = P_G \cup \{v = \bar{p}/d(p) : p \in P_G\}$$

Её векторам v может не отвечать никакая цепь графа G . Вершинная звезда vst_G образуется из единичных векторов $v \in st_G$, задающих выпуклую оболочку нормированной звезды st_G .

Эту звезду полезно представлять состоящей из векторов $\bar{p}$ и когерентных цепей

$$p = p_s \rightarrow \dots \rightarrow p_s \text{ (} k - \text{раз)},$$

полученных сложением самих с собою лучей $p_s \in P_G$ так, чтобы цепь p содержала n_f ребер, т.е. $k = n_f/s$, где $s = d(p_s)$. Длины всех когерентных цепей равны $d(p) = n_f$ для $p_s \in Cst_G$. Когерентные цепи p — это реальные цепи графа G , а отвечающие им нормированные векторы $v = \bar{p}/n_f = \bar{p}_s/n_f$ являются вершинными. Выпуклая оболочка вершинной звезды vst_G представляет собой некоторый выпуклый многоугольник Pol_G . Дискретность графа G обеспечивает конечность числа вершин и векторов у многоугольника Pol_G и всех звезд (рис.2.10) [24].

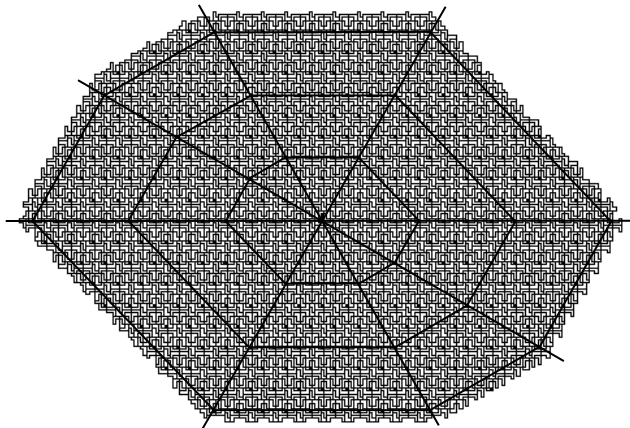


Рис.2.10 Нормированная звезда и соответствующая ей форма роста

В примере, приведенном на рис.2.10, показаны закономерности распространяющегося по пространству разбиения сигнала, по форме совпадающие с оболочкой вершинной звезды. Для проектирования структуры сети этот фактор является ключевым. Он позволяет производить расчеты синхронной достижимости $СГ_0$ на каждом этапе распространения передаваемой по сети информации, априорного выбора соответствующего проекта для построения сетей маршрутизации по требованиям заказчика и выработки соответствующего протокола.

2.5. Граф связности разбиений в пространстве сети и его рост

Теория графов в силу универсальности и абстрактности объектов неоднократно использовалась в теоретических отраслях науки при описании процессов и систем, имеющих геометрическую интерпретацию, с целью упрощения [6]. Одно из первых применений теории графов для решения топологической задачи связано с именем Эйлера, также в фундаментальных областях физики и химии реализация моделей графов принадлежит соответственно Кирхгофу и Кели. Необходимость экстраполяции объектов математики на реальные физические процессы значительно ускорила формализацию данной научной области, что привело к разработке базовых понятий и формулировке ряда теорем. Подход, опирающийся на привлечении теории графов для рассмотрения головоломок, где основными структурными элементами выступают полиэдры, был предложен Гамильтоном. Рассмотрим альтернативный росту разбиений (упаковок) способ описания процессов роста и образования связи ростом ориентированного графа.

Устанавливается отношение соседства послойным ростом упаковок фигур (соседними считаются многоугольники, имеющие хотя бы одну общую сторону), с помощью следующей системы аксиом [37]:

A1. *Симметричности*: если M_1 и M_2 – соседние фигуры, то M_2 и M_1 – тоже соседние.

A2. *Конечности*: существование для любой фигуры конечного числа соседних с ней фигур.

A3. *Периодичности*: для любого автоморфизма $g \in \text{Aut}(\text{Pack})$ из группы автоморфизмов упаковки и любых двух соседних фигур M_1 и M_2 фигуры $g(M_1)$ и $g(M_2)$ – соседние.

Последовательность, составляемая из соседних фигур упаковки, называется цепью. Упаковка будет считаться связной, если любые две фигуры этой упаковки можно соединить цепью.

A4. *Связности*: упаковка должна быть связной.

Отношение соседства также позволяет задать собственную метрику на множестве фигур упаковки. Если k – число фигур, входящих в цепь, то под длиной такой цепи будем понимать число $k-1$. Под расстоянием между фигурами M_1 и M_2 – $d(M_1, M_2)$ – будем понимать кратчайшую длину из соединяющих их цепей, а саму цепь станем называть геодезической.

Заданное отношение соседства позволяет поставить в соответствие каждой упаковке Pack граф связности G . Для осуществления этой процедуры производится выбор в каждом многоугольнике разбиения точки – вершины графа. Вершины $1a$ и $2a$, соответственно выбранные внутри фигур M_1 и M_2 , соединяются ребром графа только в том случае, если фигуры M_1 и M_2 являются соседними. На образующемся графе G отношение соседства также может быть задано на множестве вершин: две вершины считаются соседними, если они соединены ребром. Отношение соседства позволяет распространить все определения, касающиеся формы роста, на графы. Следствием рассмотренных выше определений является следующая теорема[37].

Теорема 2.1. Упаковка (разбиение) $Pack$ и ее граф связности $G (Pack)$ имеют одинаковые формы роста, при условии, что хотя бы одна из них существует.

Можно также определить рост не по вершинам, а по ребрам графа, считая два ребра соседними тогда и только тогда, когда они имеют общую вершину. Другими словами, для каждого графа G однозначно определен его реберный граф $L (G)$. При условии существования формы роста справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. Форма роста графа G при росте по вершинам совпадает с формой роста его реберного графа $L (G)$ при росте по ребрам.

Поэтому в дальнейшем следует рассматривать рост графов по их вершинам. Если при определении отношения соседства отказаться от аксиомы симметричности (A1), то сама функция $d (M_i, M_j)$ уже не будет метрикой, однако определения $Eq (M, n)$ и $eq (M, n)$ сохраняют свой смысл. Соответствующий упаковке $Pack$ граф связности для такого случая будет ориентированным. При этом условие связности, зафиксированное в аксиоме (A4), часто оказывается недостаточным и его приходится заменять на условие сильной связности соответствующего орграфа (существования как цепи из M_1 в M_2 , так и цепи из M_2 в M_1). В дальнейшем, за исключением специальных оговоренных случаев, будем считать, что аксиома A1 выполнена, или же соответствующий орграф сильно связан. В силу теоремы 2.1 рост периодических разбиений (упаковок) можно свести к росту графов и наоборот [36]. Таким образом, рост упаковок и рост графов связности – это два эквивалентных языка для описания организации сети и процессов образования связи (рис.2.11).

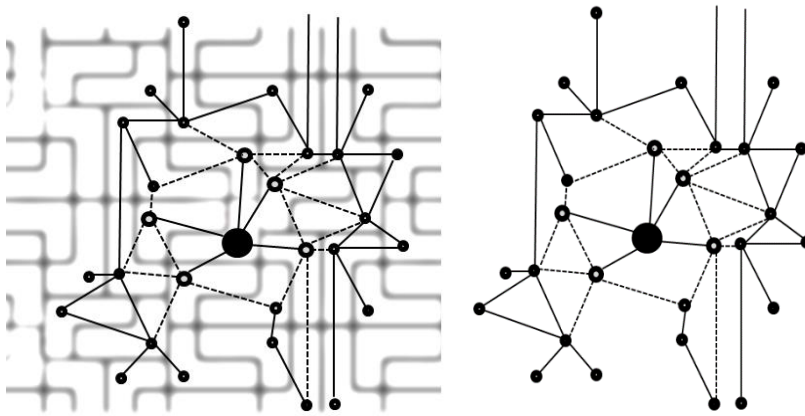


Рис.2.11 *Разбиение и соответствующий ему граф соседства.*

2.6. Построение квазипериодических разбиений пространства сети

В ряде случаев расположение абонентов сети можно сделать симметричным (удастся выявить трансляцию их расположения или точечные элементы симметрии), но строгой периодичности распределения не наблюдается. В таком случае говорят о квазипериодической или непериодической симметрии. А модельное представление таких систем может быть представлено квазипериодическим разбиением плоскости по аналогии с периодическим. За последнее время, принимая во внимание открытие, исследование и технологическое внедрение квазикристаллов [77,78], являющихся реальным подтверждением непериодической симметрии в природе, разработано несколько различных подходов к построению таких разбиений. Например, принцип по *локальным правилам* [34,69,82], используемый Р. Пенроузом для построения мозаик; *подстановочный метод* (*подход дефляции-инфляции*)[74], при котором происходит замена фигуры определенным набором фигур; метод на основе *преобразования двойственности*[69,81]; принцип с проектированием так называемых *ступенчатых поверхностей* [67]. Обобщением проективных методов является метод *среза и проекции* (*cut-and-project*) [70,76], в котором квазипериодическое точечное множество, названное *модельным*

множеством (*modelset*) [80], получают как результат проекции определённого подмножества периодической решетки, расположенной в гиперпространстве высокой размерности.[41]

Для построения на плоскости фрактала n *Pol* с поворотной симметрией n -го порядка будем использовать следующую конструкцию. В качестве порождающего элемента Pol_n^0 возьмем произвольный правильный n -угольник на плоскости. Порождающее преобразование на k -ом шаге построения фрактала определим как объединение множества Pol_n^{k-1} , полученного на $(k-1)$ -ом шаге с n его копиями, полученными отражением Pol_n^{k-1} в сторонах правильного n -угольника, описанного вокруг Pol_n^{k-1} . Множество Pol_n^k назовём предфракталом k -ого порядка. На рис.2.12 представлены предфракталы порядков $k = 0, 1, 2, 3$ фрактала Pol_5 . При рассмотрении дифракции в качестве рассеивающих центров мы будем использовать центры n -угольников, из которых состоят предфракталы, поэтому от фрактала Pol_n (предфрактала Pol) перейдём соответственно к фракталу P_n (предфракталу P_n^k) множества центров n -угольников, которые образуют фрактал Pol_n (предфрактал Pol_n^k). Фрактал P_n удастся задать с помощью функции ρ_n , используя операцию свертки $\otimes$.

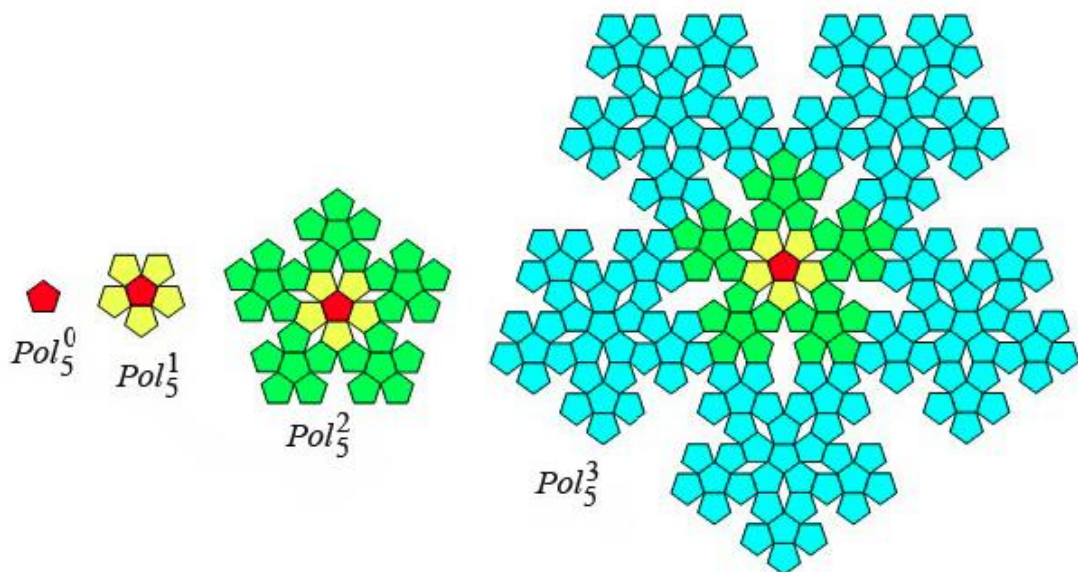


Рис.2.12 Пример образования предфрактала $k=0,1,2,3$ фрактала Pol_5 .

Алгоритм свертки двух точечных функций, геометрический образ которого легко представить с помощью следующей процедуры (рис.2.13) [41].

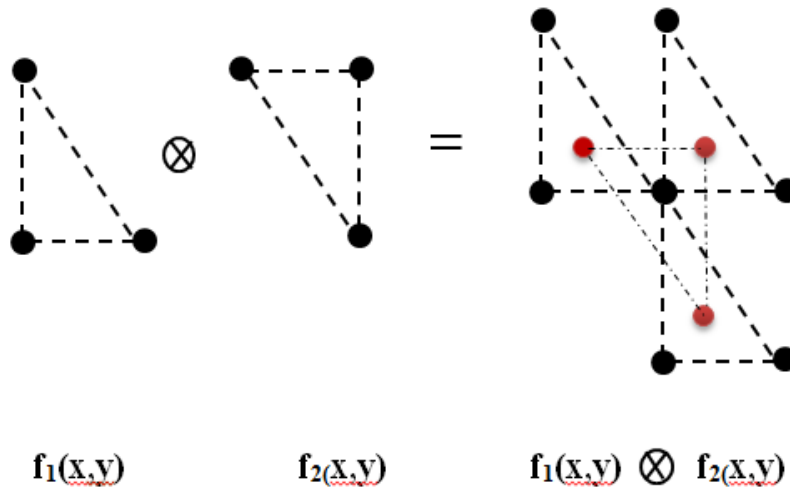


Рис.2.13. Представление свертки двух точечных функций.

Каждый последующий шаг математических преобразований (итераций) приводит к образованию на плоскости конечного числа точек-абонентов, аналитически задаваемых результирующими функциями свертки, фактически происходит распределение «точек» одной функции по «точкам» второй. Каждая из точек может, в свою очередь, являться модельным представлением элемента или совокупности элементов (например, синхрогруппы) сети.

Интегральный способ представления свертки может быть аналитически задан следующим образом:

$$\rho(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x,y) \cdot \varphi_2(x-u, y-v) du dv$$

Для описания непрерывных и дискретных функций Дираком была введена обобщенная δ -функция, математически определяемая как:

$$\varphi_1(r) = \sum_{i=1}^3 \delta(r-r_i); \quad \varphi_2(r) = \sum_{j=1}^4 \delta(r-r_j)$$

где параметры $r(x, y)$; $r_i(x_i, y_i)$; $r_j(x_j, y_j)$ соответственно задают геометрическое место точек в выбранной системе координат, положения точек первой функции и положения точек второй функции[49]. Для того чтобы из совокупности получаемых сверткой точек получить фрактальный объект с заданным свойством симметрии (например, оси симметрии), необходимо дополнить процедуру свертки операциями поворота и элементами гомотетии.

Было замечено, что как и в случае с сетью, обладающей периодической симметрией (рис. 2.2), число подключающихся абонентов при каждой следующей передаче сигнала имеет распределение максимумов, подчиняющееся закону чисел Фибоначчи (табл.3). Маршрутизацию в такой сети рассмотрим в главе 3.

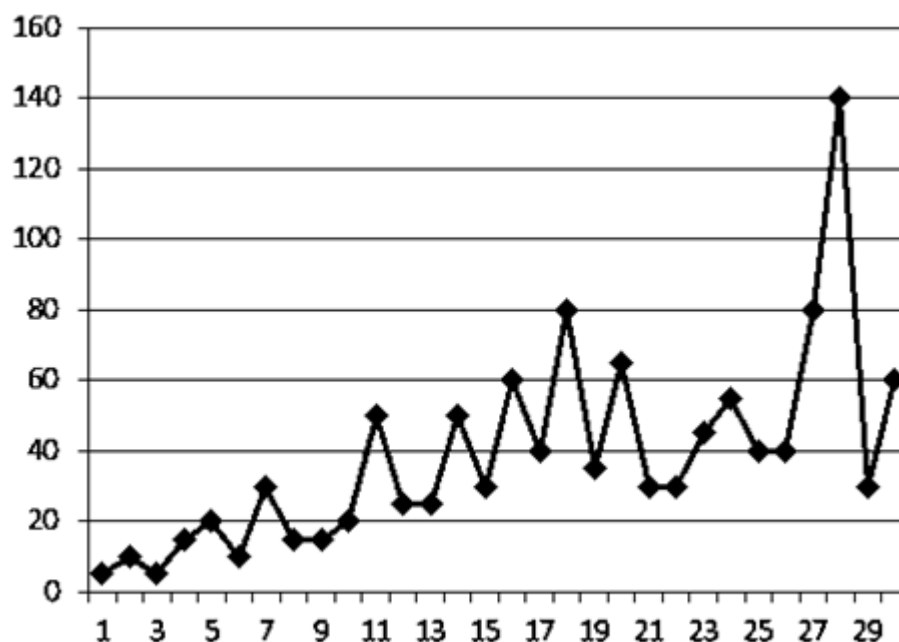


Рис.2.14 Распределение максимумов числа подключающихся абонентов (по оси ординат – число подключающихся абонентов, по оси абсцисс – номер передачи).

2.7. Выводы

- Для автоматизации симметричного распределения абонентов телекоммуникационных сетей могут быть использованы алгоритмы периодического и квазипериодического разбиения пространства (плоскости).
- Критерий разбиения пространства сети произвольным планигоном (доменом $СГ_0$), вид фундаментальной области (ячейки трансляции), а также возможные варианты разбиений могут быть определены с помощью конструкции упаковочного пространства.
- Рост периодического разбиения и периодического графа связности представляют собой эквивалентные способы описания и представления системной организации сети (в частности, её топологии).
- Распределение абонентов телекоммуникационных сетей в соответствии с принципами нетрансляционной симметрии может быть реализовано с помощью алгоритмов свертки функций для построения предфракталов.

ГЛАВА III. РАЗРАБОТКА МОДЕЛЕЙ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЕЙ С СИММЕТРИЕЙ, ИССЛЕДОВАНИЕ ИХ СВОЙСТВ

3.1. Моделирование сетей на принципах периодической симметрии. Расчет независимых конфигураций синхрогрупп

Рассмотрим геометрическую модель для описания работы локально неупорядоченной сети. Произведем разбиение пространства сети на домены $СГ_0$.

Тогда, согласно введенной в первой главе терминологии, алгоритм разбиения (методика распределения абонентов телекоммуникационных сетей на основе трансляционной симметрии) будет следующим:

1. Выбор упаковочного пространства с N - конечным числом синхрогрупп.
2. Выбор фундаментальной области и ячейки трансляций в разбиении.
3. Выбор в дискретном пространстве сети одного многоугольника (или нескольких многоугольников-соседей) в качестве исходного ($СГ_0$). Соседними будем считать такие многоугольники, которые имеют с доменом $СГ_0$ хотя бы одну общую сторону (связь).
4. Присоединение к затравочному планигону $СГ_0$ его первого координационного окружения, то есть совокупности многоугольников, являющихся соседними для $СГ_0$. Образуется первый кластер сети.
5. Далее описанная процедура повторяется многократно, на каждом новом шаге в качестве исходного структурного элемента принимается кластер, построенный на предыдущем шаге.

Так как в математике нет общего алгоритма разбиения пространства на домены с различной внутренней конфигурацией, воспользуемся структурным упрощением, заключающемся в таком расположении синхрогрупп ($СГ_0$),

каждая из которых способна выполнять функцию центральной, и в этом случае, все домены группы функционально равноправны, но при этом, могут иметь разное количество связей. Ограничения, накладываемые на «длину связи», максимальный радиус действия которой R , приводит к модели $(r-R)$ - системы Делоне [20], пример которой изображен на рис. 3.1 в и ее представление в виде доменов Дирихле (рис. 3.1г).

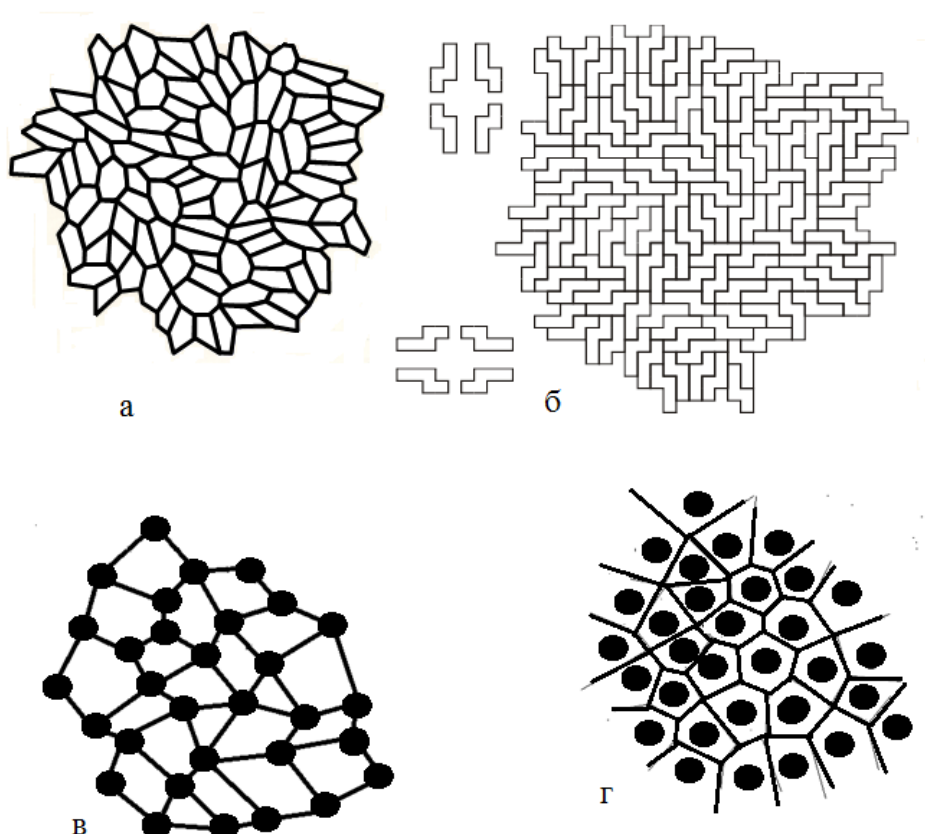


Рис. 3.1 Неупорядоченные сети. Топология графа сетей (а) и (б) одинакова. (в) – Система точек Делоне и (г) – домены Дирихле системы точек Делоне.

Каждому элементу сети (участнику процесса передачи-получения сигнала) на евклидовой плоскости ставится в соответствие некоторая область, назовем её доменом (областью Дирихле), необходимая для задания дискретной плоскости (пространства), которая представляет собой результат

нормального разбиения непрерывной плоскости (пространства) на одинаковые многоугольники (в трехмерном случае—многогранники). Зададим порядок разбиения количеством вершин полигонов, попавших в элемент произвольной области, построенной на этих вершинах, затем присвоим каждому порядковый номер, условно полагая, что в вершинах находятся «потребители сигнала» и выделим для каждого потребителя клетку-домен Дирихле. Таким образом, получим разбиение плоскости на домены Дирихле[12].

Для геометрического описания отношения соседства используем граф соседства. Поскольку распространение сигнала по сети представляет собой направленный процесс, то граф отношения соседства будет ориентированным, а модель образования связи может быть описана с помощью растущего по определенным правилам графа маршрутизации сети, который построен на множестве условно выбранных точек (устройств) – центров доменов разбиения (рис.3.1а). Совокупность одинаковых $СГ_0$ - доменов или их комбинации могут располагаться в пространстве маршрутизаций сети различным способом, образуя систему разбиения всего пространства. Существование общей границы между областями, в разбиении на области (рис. 3.1б), определяет *отношение соседства*, заданного ребром графа. Требования конечности расстояний между ними приводит либо к разбиению (либо к плотной «упаковке» доменов в локально неупорядоченном варианте), что можно представить для наглядности следующим образом (рис. 3.2).

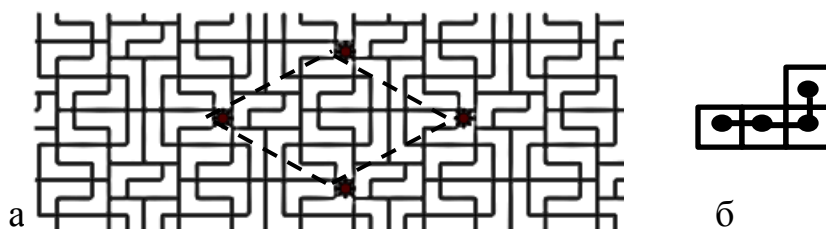


Рис. 3.2 Пример локально неупорядоченного разбиения пространства маршрутизации сети на домены (а) с выделенной фундаментальной областью. Домен - полимино и его внутренняя конфигурация (б).

Очевидно, что результат междоменной маршрутизации зависит от формы отдельных доменов, участвующих в разбиении. Количество вариантов полимино с заданным числом клеток, образующих его, в общем случае, в математике неизвестно. Рассмотрим основную часть задачи перечисления конкретных (частных) форм доменов-полимино. Определим количество конфигураций деревьев внутридоменного графа точек- центров клеток полимино. В данном случае рассматривается так называемый внутридоменный граф, определяющий структуру домена CG_0 и не связанный с графом сети, для возможности применения теории графов для перечисления различных конфигураций доменов CG_0 (полимино).

Внутренняя организация доменов определяет возможность существования контактов между синхрогруппами при маршрутизации, т.е. говорит о способности построения связи между элементами сети. Конфигурацию каждой CG_0 следует считать заданной, если имеется информация о полном наборе степеней вершин соответствующего графа, не учитывая последовательности их расстановки. В теории графов [31] имеется теорема о зависимости числа вершин от числа ребер:

Теорема 3.1. Сумма степеней n вершин графа равна удвоенному числу его ребер $2(n-1)$.

В случае дерева графа, определяющего различные типы полимино (или n -мино, где n - количество клеток в полимино, имеющих хотя бы одну

общую сторону), возможными являются степени вершин от 1 до 4, как это представлено на рис.3.4б для каждого домена. Введем обозначения количества вершин графа степени 1 через x_1 , степени 2 – x_2 , степени 3 – x_3 , степени 4 – x_4 . Тогда, учитывая положение теоремы 1 и представление о данном графе, составим следующую систему уравнений (1):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2(n - 1), \end{cases} \quad (1)$$

где $x_1, \dots, x_4$ принадлежат множеству целых чисел, $x_4^{max} = \left\lfloor \frac{(n-2)}{3} \right\rfloor$, n – количество вершин графа, в квадратных скобках обозначена целая часть числа.

Для удобства расчетов из уравнений системы (1) могут быть составлены еще три уравнения, однако линейно независимыми по-прежнему останутся только два. Составим новую систему (2) для выполнения конкретных расчетов:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n, \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 = n, \\ x_1 - x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = n + 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2n + 2. \end{cases} \quad (2)$$

Используя эти условия, рассчитаем числа x_i для полимино с $n = 8$ квадратами. Значение $x_4^{max}=2$, комбинаторный перебор целых чисел x_1 и x_3 выполняем, учитывая соотношение третьего уравнения системы (2) при $x_4=2,1,0$. Затем при определенных значениях x_1, x_3, x_4 вычисляем x_2 из первого уравнения системы (2). Наборы решений занесем в табл. 2.2.

Табл.2.2.Наборы конфигураций деревьев графа, характеризующего
внутридоменную структуру, при $n=8$

x_i	Номера конфигураций графа						
	1	2	3	4	5	6	7
x_4	2	1	1	0	0	0	0
x_3	0	1	0	3	2	1	0
x_2	0	1	3	0	2	4	6
x_1	6	5	4	5	4	3	2

Полный перебор различных наборов x_i показал, что их число оказалось равным $K(n)=7$.

Для того чтобы пересчитать различные варианты конфигураций деревьев графа, определяющего внутреннюю структуру домена, необходимо учесть порядок следования вершин в графе. В качестве примера рассмотрим варианты для набора 5 из табл.1, где $x_4=0$, $x_3=2$, $x_2=2$, $x_1=4$. Данный набор степеней вершин показывает, что в варианте конфигурации нет вершин степени 4, вершин степени 2 и 3 – две и четыре вершины, имеющие степень 1 (концевые). Таким образом, для заданной конфигурации ($x_4=0$, $x_3=2$, $x_2=2$, $x_1=4$), характеризующей внутреннюю организацию домена ($СГ_0$), имеется всего пять структурно независимых вариантов, интерпретация которых в виде деревьев графа представлена на рис.3.3.

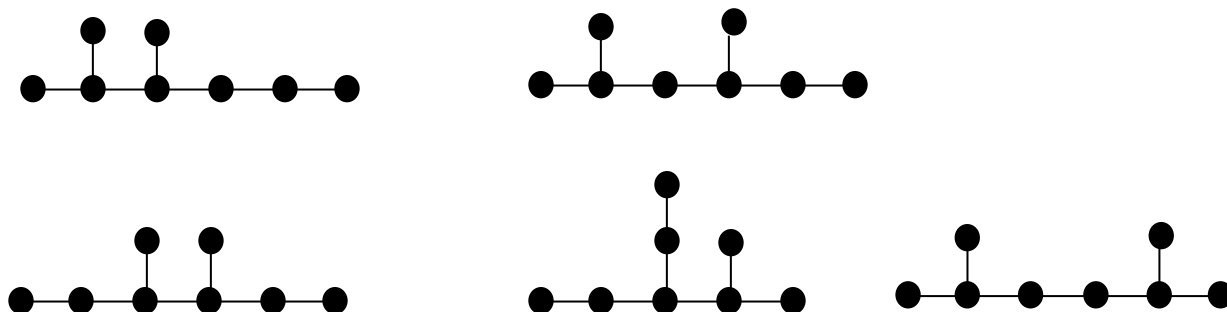


Рис. 3.3 Варианты внутридоменных структур $СГ_0$ с $x_4=0$, $x_3=2$, $x_2=2$, $x_1=4$.

Компьютерный расчет числа наборов конфигураций в общем случае, для произвольного n , дается в работе [48] и приводит к следующему графику зависимости $K(n)$. Периодичность самой последовательности более резко определяется на диаграмме первой разности $K(n+1) - K(n)$, также приведенной на рис. 3.4

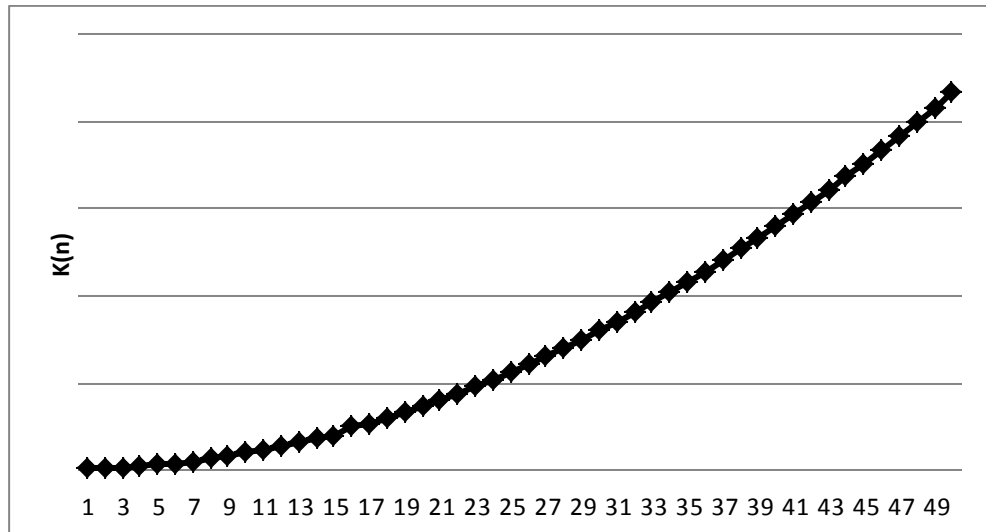


Рис. 3.4 График зависимости количества K_n (по оси ординат) от числа элементов полимино (по оси абсцисс)

Общий результат расчета может быть сведен к формулировке следующей теоремы.

Теорема 3.2. Количество K_n – различных наборов конфигураций деревьев графа доменов-полимино с n - числом вершин находится по формуле [14]:

$$K_n = \left\lfloor \frac{3 + (n+1)^2}{12} \right\rfloor,$$

где квадратные скобки обозначают целую часть заключенного в них числа. Вывод формулы основывается на анализе результатов, полученных ранее в работе [48].

Как сказано выше, совокупность одинаковых $СГ_0$ - доменов или их комбинации могут располагаться в пространстве маршрутизаций сети

различным способом. Кроме этого, в разбиении могут участвовать домены с различной конфигурацией, например, так, как это показано на рис. 3.5. Все это значительно увеличивает возможности проектирования вариантов маршрутизации сетей.

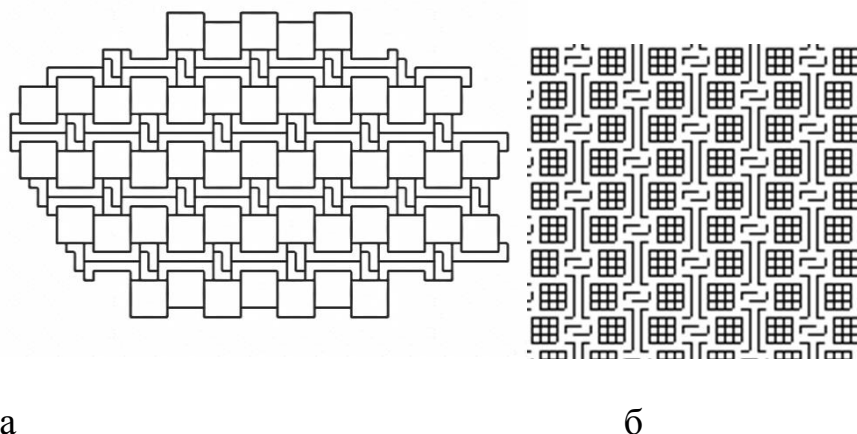


Рис. 3.5 Разбиение области пространства сети на три варианта доменов (а) и с различной конфигурацией (б).

Таким образом, введение пространства маршрутизации сети, его разбиения на домены синхрогруппы и перечисление конфигураций деревьев внутридоменного графа позволяет перейти к следующей задаче: полному представлению вариантов локально-неупорядоченных сетей междоменной маршрутизации с помощью компьютерной автоматизации проектирования.

3.2 Кодировка пространства сети. Соотношение внутренних и граничных кодов системы

Как уже отмечалось, для модельного представления сетей маршрутизации с периодическим распределением элементов (узлов сети) используется конструкция пространства сети (пространства разбиения). Один из способов задания такого дискретного пространства осуществляется путем наложения квадратной сетки на множество элементов, которым затем приписывается определенный вес таким образом, чтобы не был нарушен

описанный в параграфе 2.2 критерий существования периодической упаковки полимино [35]. Само упаковочное пространство полимино в предлагаемой модели является дискретным пространством сети, которое служит основным инструментом для реализации возможности периодического распределения операторов сети симметричным образом. Рассмотрим способ задания дискретного пространства сети с помощью кодировки периодических упаковок полимино [36,37].

Для реализации периодического разбиения необходимо задать решетку трансляции этого разбиения и определить положение границ внутри фундаментальной области решетки трансляции. Саму решетку трансляции и ориентацию доменов $СГ_0$ (полимино), относительно нее, определяет матрица упаковочного пространства (УП). Домены $СГ_0$, составленные в общем случае из N квадратов, у которых изображаются только стороны, принадлежащие соседним $СГ_0$, составляют само разбиение. Поэтому для задания границы разбиения в фундаментальной области необходимо указать, какую из сторон квадрата следует изображать. Для определенности будем выбирать эти границы в направлениях, противоположных векторам базиса УП.

Наличие или отсутствие границы в направлении $-x$ задается цифрой a_i , равной соответственно 1 или 0. Сама последовательность $(a_i/i=1,2,...n)$ задает цифру кода строящегося разбиения $c(g) = \sum_{i=1}^n a_i 2^{i-1}$, где g – вес точки в пространстве сети. Поскольку в фундаментальной области содержится множество точек с различными весами, то сами границы разбиения внутри фундаментальной области могут быть описаны последовательностью цифр кода разбиения $c(g), g = 0, 1, 2, ..., N-1$. Код упаковки является N -значное число в четверичной системе счисления.

Рассмотрим пример трансляционного разбиения плоскости на полимино в упаковочном пространстве $P5I_2$.

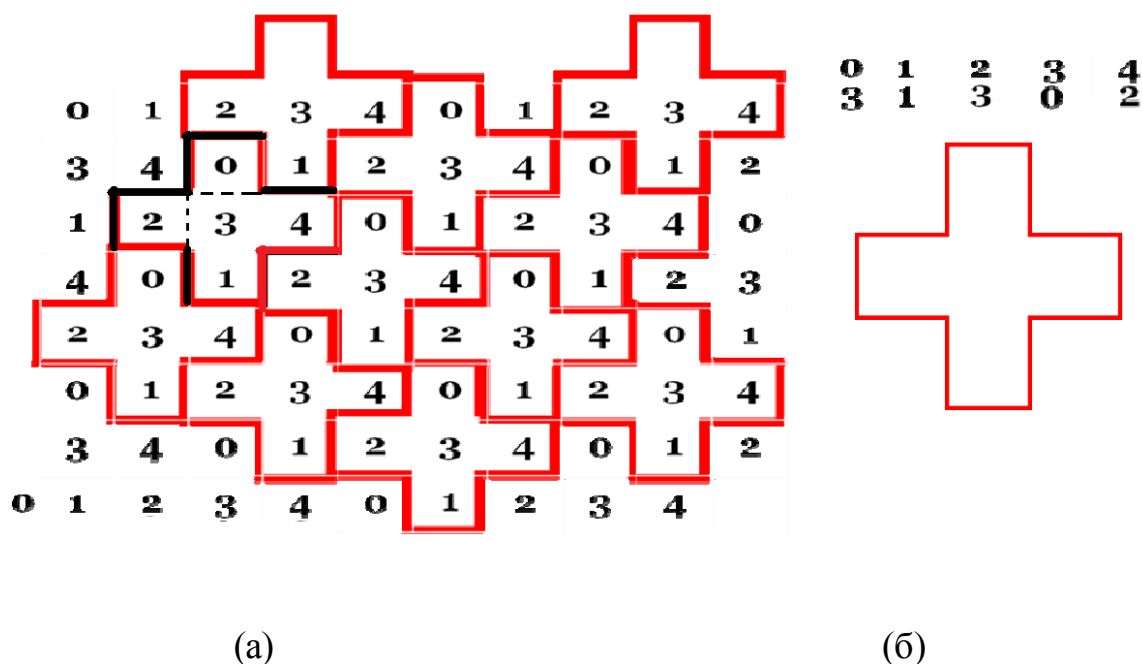


Рис.3.6 Разбиение плоскости на домены SG_0 , характеризующее кодом 31302 в УП $P5I_2$

На рисунке 3.6 показано, какая граница соответствует весу точки. Точка с весом 3 не имеет границ ни в одном из направлений, поставим ей в соответствие код «0» ($c(3)=0$); точка 1 имеет границу только в направлении x и не имеет границ в направлениях $-x$, y и $-y$ (противоположно базисным векторам), ей будет соответствовать код «1» ($c(1)=1$); точка с весом 4 – только в направлении $-y$, это код «2» ($c(4)=2$); код «3» будет характеризоваться границами в направлениях $-y$ и x и, как показано на рисунке, это точки с весами 0 и 2 ($c(0)=c(2)=3$). Таким образом, чтобы задать периодическое разбиение в УП $P5I_2$ с помощью конфигурации домена SG (полимино), приведенной на рис.3.6 (б), необходимо задать код (3 1 3 0 2).

При таком способе составления кода разбиения различным кодам могут соответствовать одни и те же варианты разбиения плоскости, поскольку элементы (цифры) кода, а также их порядок определяются ориентацией базиса и положением начала координат [37].

Описанная процедура позволяет предложить алгоритм задания различных периодических упаковок (или разбиений) доменов СГ и реализовать его в компьютерных моделях рис.3.7.

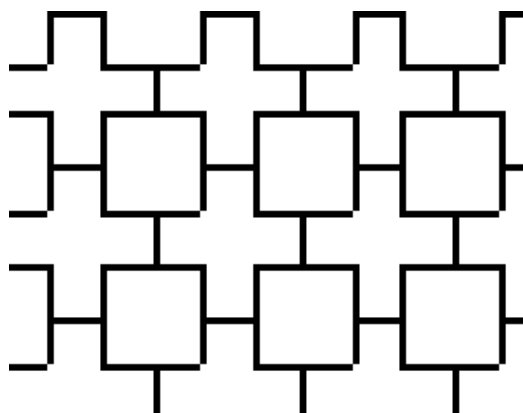
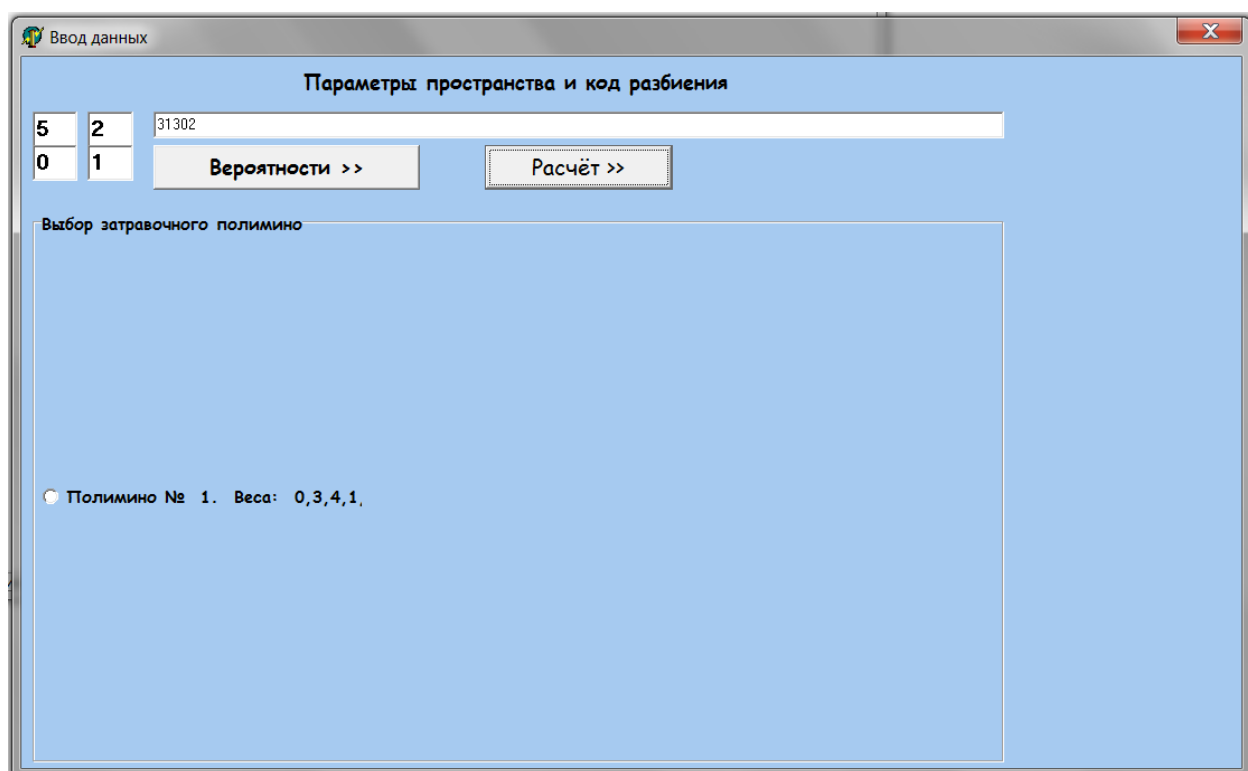
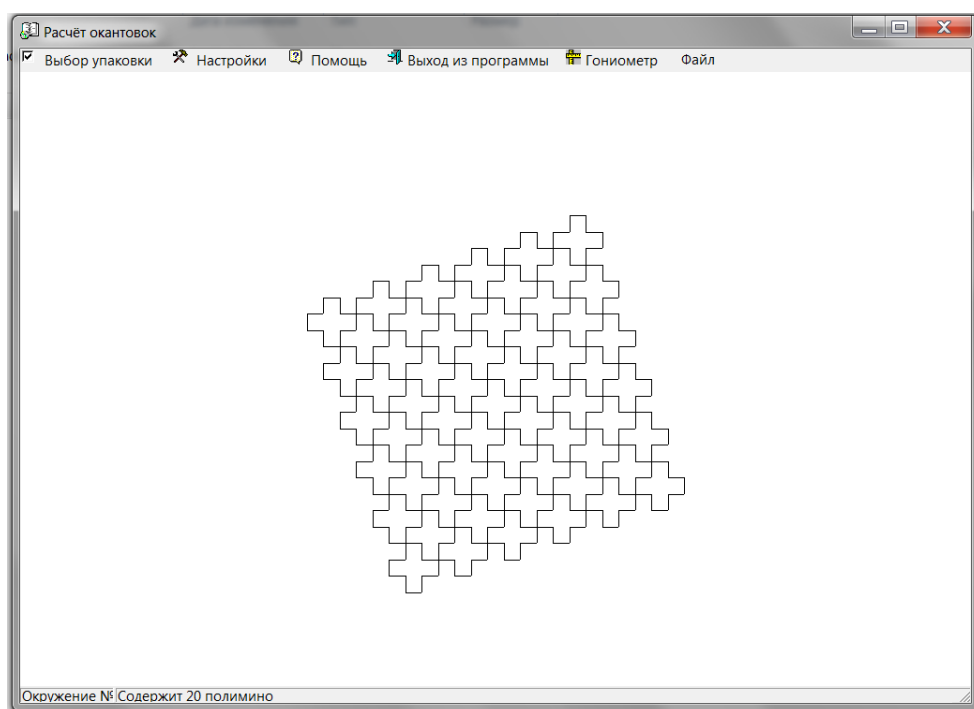


Рис.3.7 Разбиение плоскости на домены СГ, описываемое кодом 321103230 в УП РЗЗ₀.

Проиллюстрируем работу программы расчета и представления разбиений с помощью задаваемых кодировок на рис. 3.8, 3.9

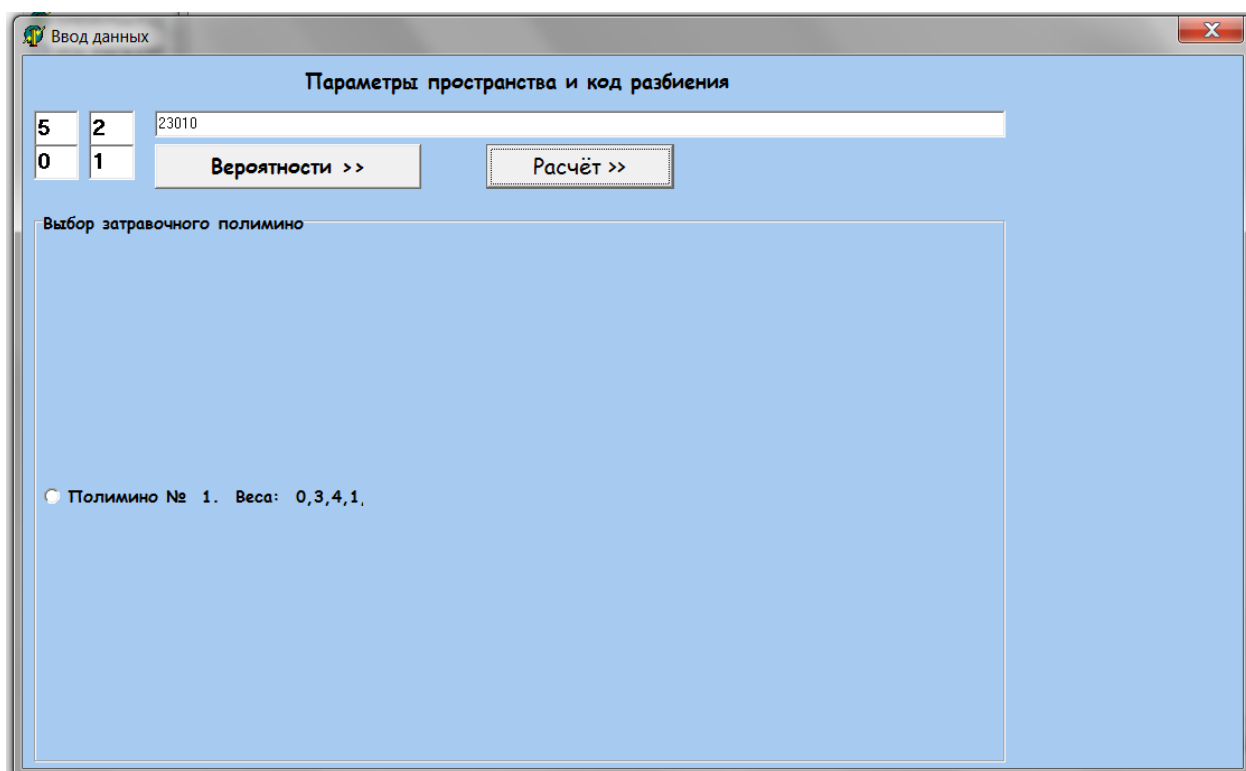


(а)

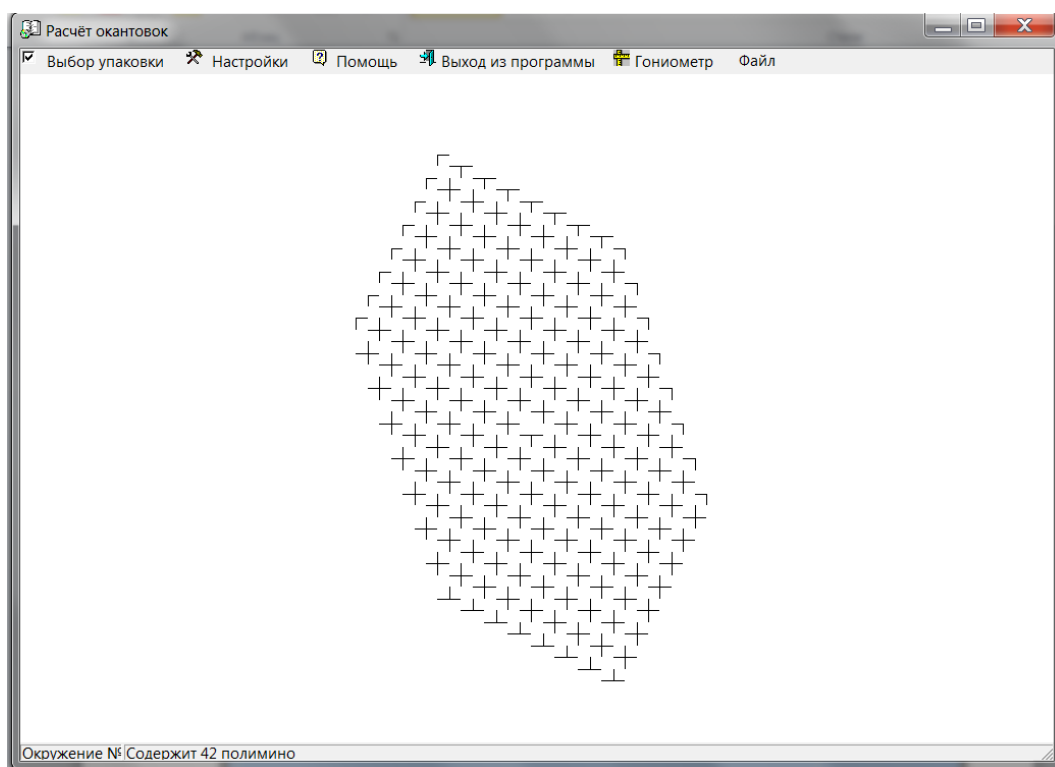


(б)

Рис. 3.8 Задание прямой кодировки (31302) в УП $P51_2$ (а) – диалоговое окно программы, (б) – визуализация кодировки в данном УП.



(а)



(б)

Рис.3.9 Задание инвертированной кодировки (23010) в УП $P5I_2$ (а) – диалоговое окно программы, (б) – визуализация кодировки в данном УП.

Результат компьютерного эксперимента с инвертированием кодов упаковок позволил обнаружить и продемонстрировать истинность утверждения о том, что кодировки взаимно дополняют друг друга: Дирихле и Делоне «сдвинуты» на $\frac{1}{2}$ диагонали решетки и инвертированы по отношению друг к другу. Это приводит к формулировке следующих теорем:

Теорема 3.3. Коды (0, 1, 2, 3) домена СГ и его конфигурации взаимно переходят друг в друга при инвертировании сети, инверсии кодирующего слова и замене кода «0» на код «3». (рис.3.10)

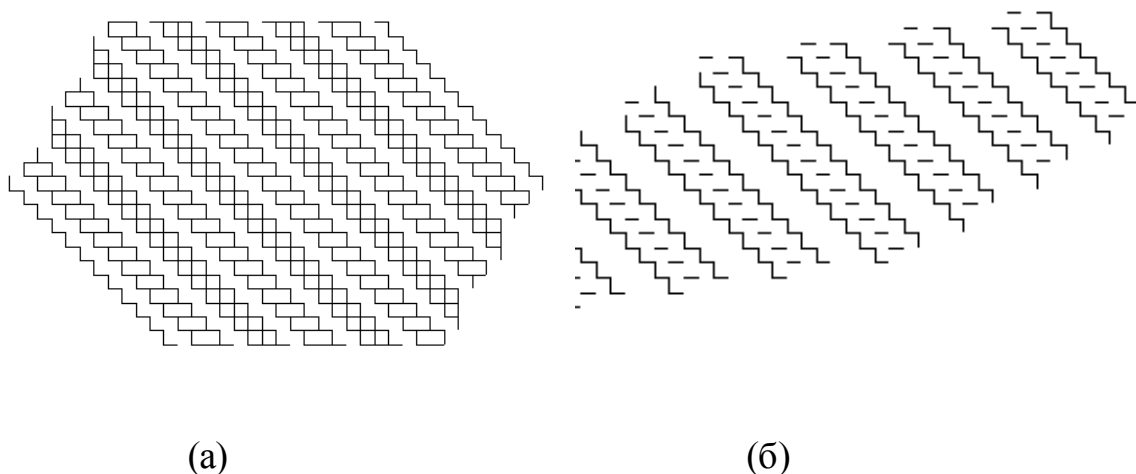


Рис.3.10 Домены СГ в PS 81₁, код: 21233123 (a) и с инверсией кодирующего слова (б)

Теорема 3.4. Для несимметричных структур возможно дополнение доменов конфигурациями, либо конфигураций доменами после инвертирования одной из сетей.

Это позволяет еще раз убедиться в эквивалентности языков описания периодических систем с помощью модели графа и модели разбиения, поскольку наблюдается взаимный переход систем точек Делоне в разбиение Дирихле.

3.3. Расчет нормированной производительности в модели сети на принципах периодического разбиения пространства

Проектирование сложных систем связи, включающих в себя непрерывный поиск маршрутов следования данных, возможность изменять топологию, учет мобильных свойств операторов, не может иметь унифицированных способов верификации работы и методов оценки эффективности функционирования. Что требует разработки способов для анализа работы систем, применимых исключительно к определённому классу [28]. В дальнейшем будем рассматривать такие системы, организация структуры сетей которых предполагает отсутствие мобильных свойств операторов и возможность их периодического распределения (или распределения, удовлетворяющего периодическому разбиению плоскости). Согласно введённой классификации такие сети будем называть локально неупорядоченные. Примерами таких сетей могут служить периодически распределенные узлы транспортных сообщений или операторов, принимающих и распределяющих сигнал (протоколы данных) через спутниковый канал. Это дает, с одной стороны, преимущество при проектировании – стандартизация способа производства элемента сети с возможностью построения системы в целом путем трансляции этого элемента; и, с другой стороны, при построении математической модели, позволяющей более точно оценить результативность эффективности работы сети, чем подход, основанный на статистических методах.

Произведем оценку нормированной производительности сети, характеризующуюся отношением фактической скорости обслуживания γ к пропускной способности μ оператора связи [66], используя в качестве примера сети систему обслуживания типа $M/M/m$ (согласно номенклатуре, введенной Д. Дж. Кендаллом). Данная система состоит из m обслуживающих

линий с пуассоновским входящим потоком и показательным распределением времени обслуживания.

Учитывая, что вероятности поступления сигнала и нулевого поступления описываются распределением Пуассона и не зависят от событий в последующих или в предыдущих промежутках времени (пуассоновский процесс является частным случаем марковского процесса), вероятность передачи сигнала от одного оператора сети к другому может быть рассчитана следующим образом [59]:

$$p_n(t + \Delta t) = [1 - (\mu + \lambda)\Delta t] p_n(t) + \lambda \Delta t p_{n-1}(t) + \mu \Delta t p_{n+1}(t),$$

где $p_n(t + \Delta t)$ - вероятность того, что в момент $t + \Delta t$ в системе находится n клиентов (пакетов, вызовов), λ – средняя скорость поступления сигнала, μ пропускная способность элемента сети.

Это условие используется, как правило, для исследования переходного режима работы, при условии, что работа начинается в момент времени $t=0$. Если затем произвести процедуру разложения $p(t + \Delta t)$ в ряд Тейлора относительно переменной времени t и оставить только первые два члена разложения, то можно получить дифференциально-разностное уравнение, описывающее изменение $p_n(t)$ от времени:

$$p_n(t + \Delta t) = p_n(t) + (dp_n(t)/dt)\Delta t$$

Для получения решения дифференциального уравнения используется принцип равновесия, при котором принимается во внимание равенство вероятностей ухода сигнала (левой части) и прихода сигнала (правой части). Тогда поток, поступающий к данному оператору (или синхрогруппе) μp_{n+1} , равен потоку, покидающему этого оператора λp_n .

$$\lambda p_n = \mu p_{n+1}$$

В случае конечной очереди в системе М/М/т получаем соотношение

$$p_N = (1 - p)p^n / (1 - p^{N+1})$$

Если теперь представить зависимость производительности сети от нагрузки (для случая М/М/т-системы) графически, то получается следующая кривая (рис.3.11)[59]

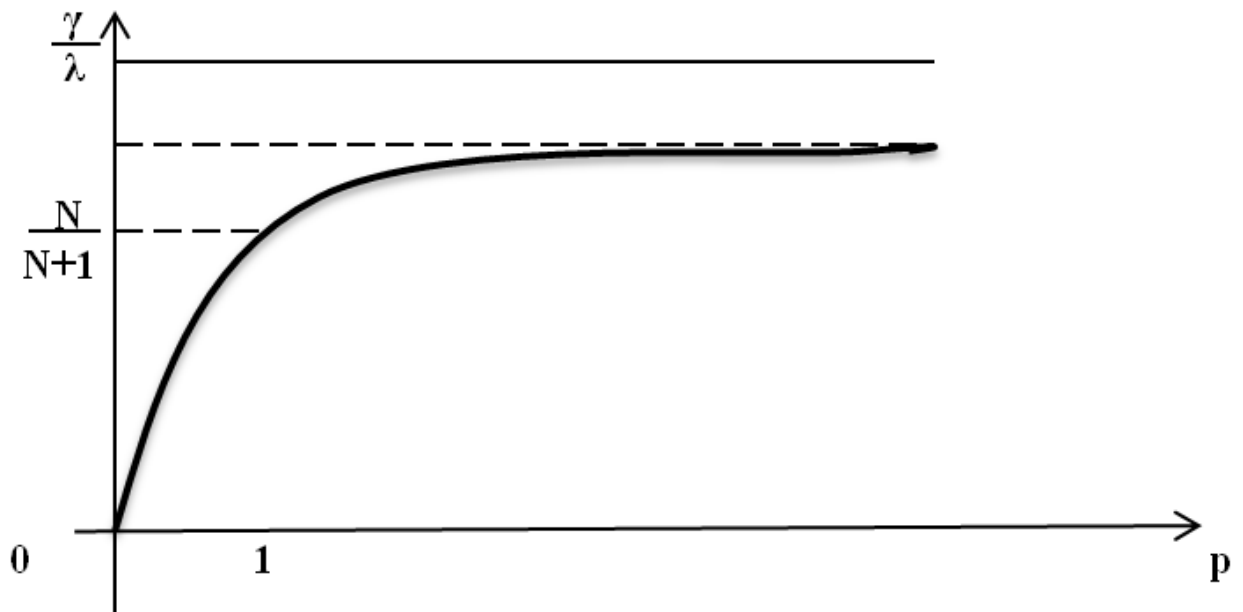


Рис.3.11 Зависимость нормированной производительности сети от нормированной нагрузки.

Как видно из графика, нормированная производительность сети близка по значению к нагрузке при её относительно малых значениях и приближается к пропускной способности при возрастании ρ . Значения функции при стремлении аргумента к 1, могут быть рассчитаны следующим образом:

$$\gamma/\mu = N/(N + 1)$$

Таким образом, приведенные рассуждения позволяют получать значения производительности сети (для случая М/М/т-системы) в

зависимости от числа потребителей, участвующих в передаче сигнала. При рассмотрении сетей маршрутизации каждый этап распределения протоколов дает возможность выделять так называемую синхрогруппу ($СГ_0$) - совокупность потребителей, имеющих одинаковое время поступления сигнала. На конкретном этапе маршрутизации число элементов синхрогруппы и есть число пользователей, определяющее производительность данной сети, поэтому возникает задача нахождения этого числа. Большинство подходов, связанных с поиском элементов синхрогруппы, представляют собой статистические методики расчета средних значений случайной величины и дают, как правило, эквидистантное распределение потребителей относительно выбранного центра – генератора сигнала. Геометрической иллюстрацией последнего служит распределение по окружности в евклидовой метрике. Очевидно, что такое положение потребителей при реальном проектировании сети практически не реализуемо, а возможная аппроксимация будет не лучшим образом влиять на прогнозирование свойств сети.

В качестве альтернативного способа представления сети и определения числа элементов синхрогруппы может быть выбран метод введения дискретного пространства [35]. Как уже отмечалось ранее (в гл.2), для введения дискретного пространства необходимо задать разбиение плоскости, например, путем наложения квадратной решётки на область сети маршрутизации, в результате чего пространство разбивается на квадраты, а попавшие в ячейки элементы позволяют задать порядок образованного разбиения. Объединение клеточных областей с общими ребрами из квадратов образует домены-полимино, конфигурация которых может быть различной и определяет внутреннюю организацию принимающего устройства (например, характеристики скорости поступления и обработки сигнала). После того как проделана процедура разбиения и сформированы домены-полимино, т.е.

задано пространство *маршрутизации сети*, появляется возможность полного представления вариантов локально-неупорядоченных сетей междоменной маршрутизации в виде некоторого феноменологического многоугольника роста, соответствующего форме распространения сигнала по сети. Домен-полимино, внутренние элементы которого выступают в роли генератора сигнала, берется в качестве исходного. Формирование первого окружения соседей (соседними считаются полимино, имеющие хотя бы одно общее ребро) соответствует поиску и определению совокупности потребителей, имеющих одинаковый период поступления сигнала, т.е. SG_0 . Последующее присоединение окружений приводит в конечном итоге к образованию многоугольника, дальнейшее увеличение размеров которого не вызывает изменение его формы. Разработаны алгоритмы, позволяющие выполнять операцию присоединения многократно и получать феноменологический многоугольник. Координационное окружение, построенное путем присоединения соседей, имеет смысл эквидистантного расположения потребителей относительно генератора сигнала в метрике дискретного пространства.

Для примера имеет смысл сопоставить значения производительности сети на втором этапе маршрутизации сетей, работающих на принципах М/М/т системы, которые получаются при определении числа пользователей (синхрогрупп) методами статистического усреднения и способами оценки элементов координационного окружения в методе дискретного представления пространства маршрутизации сети (рис.3.12).

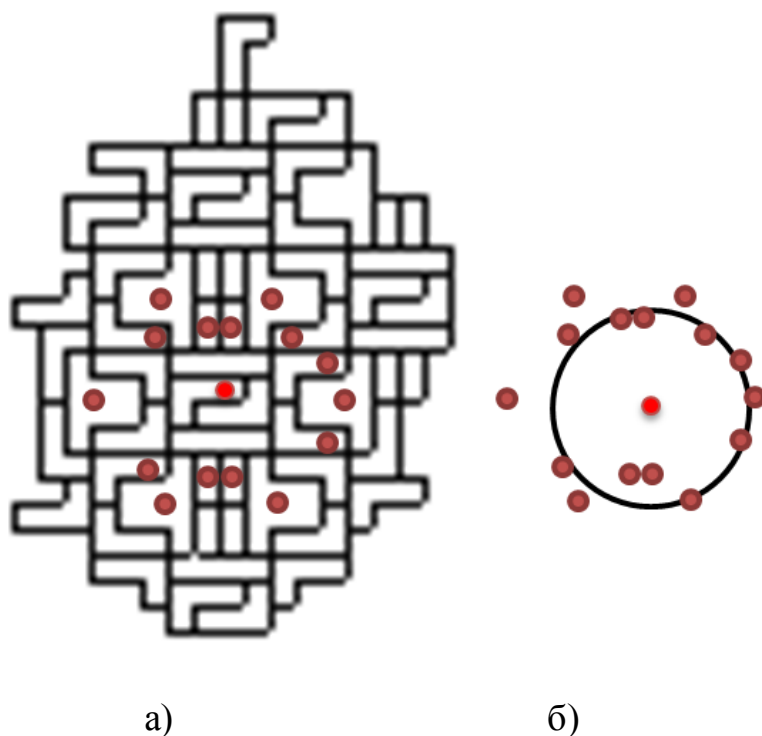


Рис.3.12 Число элементов синхрогруппы: а) метод дискретного представления пространства сети ($N=15$); б) метод статистической оценки, эквидистантное расположение потребителей ($N=8$).

Таким образом, применение метода дискретного представления дает следующее значение нормированной производительности сети на втором шаге построения маршрута: $\gamma/\mu = 15/16 \approx 0,94$; статистический подход позволяет учесть только 8 из 16 пользователей и оценивает производительность нагрузки, как: $\gamma/\mu = 8/9 \approx 0,89$.

Кроме того, построение маршрута, передача данных по которому происходит в математическом смысле по геодезической, фактически сводится к нахождению кратчайшего по числу медиаторов маршрута. Как известно из курса математики, понятие геодезической в метрике евклидова пространства нулевой кривизны R^2 совпадает с понятием прямой в евклидовом пространстве. В метрике дискретного пространства

геодезическая определяется числом шагов (медиаторов) и не совпадает в общем случае с понятием прямой евклидова пространства.

Приведем пример двумерной модели, реализующейся с помощью дискретного пространства сети, в которой может варьироваться значение вероятности присоединения структурных элементов (доменов $СГ_0$) рис. 3.13.

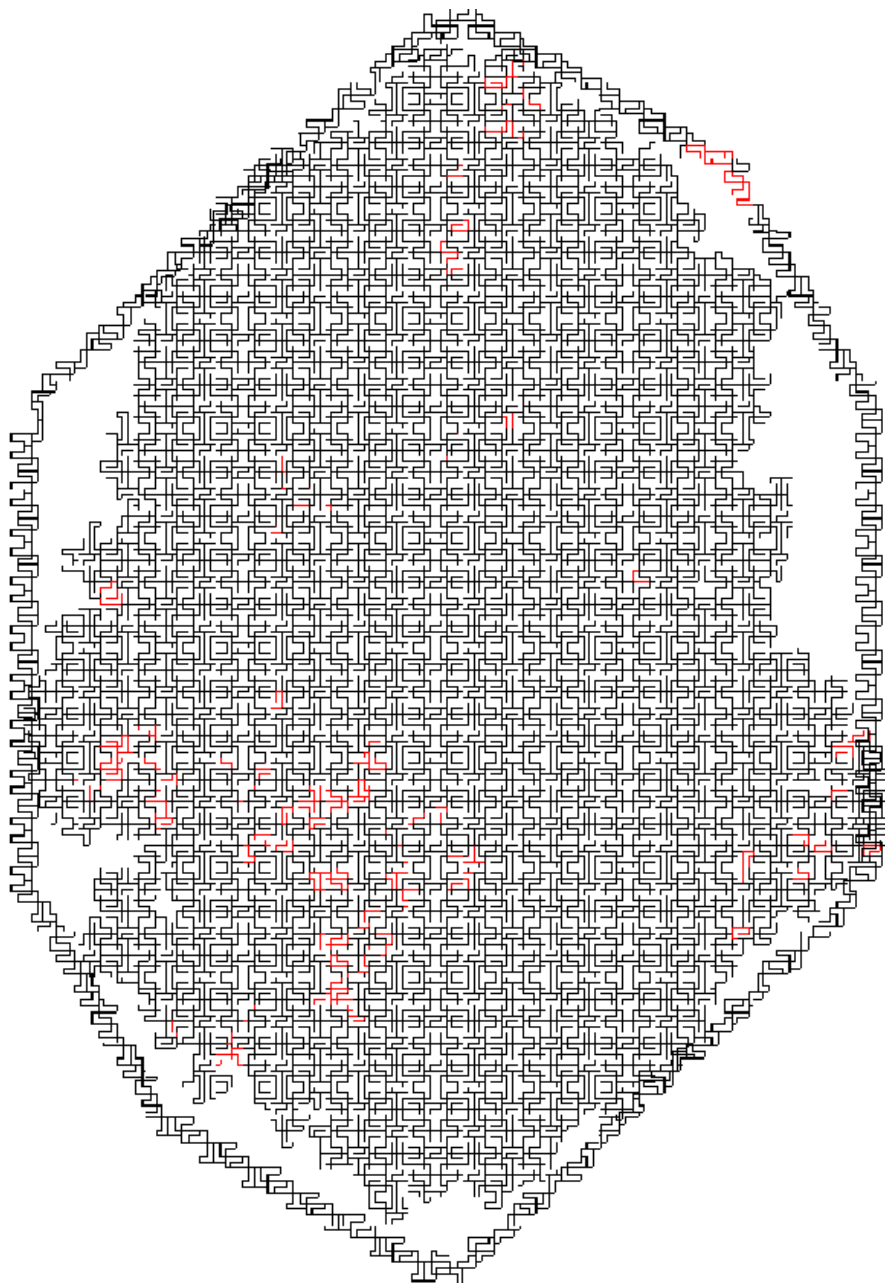


Рис.3.13 Двумерная вероятностная модель (POLPACK). Около 75% операторов случайно не вышли на «связь» (сбои в сети). Красным цветом выделены сообщения о нарушениях в приеме сигнала.

Разработанная программа рассчитывает форму искаженного фронта распространения сигнала по сети при заданных вероятностях отказа приема с четырех сторон света. Таким образом, в зависимости от размеров сети можно проанализировать искажения и дефекты и предъявить необходимые требования к сети (создать протокол).

На основе алгоритма роста графа соседства в разбиении разработан программный комплекс, который позволяет создавать трехмерные варианты моделей сетей маршрутизации, если известна симметрия предполагаемой внутренней организации самой сети. Задавая параметры, определяющие координаты синхрогрупп ($СГ_0$), выполняющих функции генератора сигнала, а также параметры трансляции, соответствующие симметрии локально неупорядоченной сети, можно получать различные варианты трехмерного представления распространения сигнала по сети (рис.3.14).

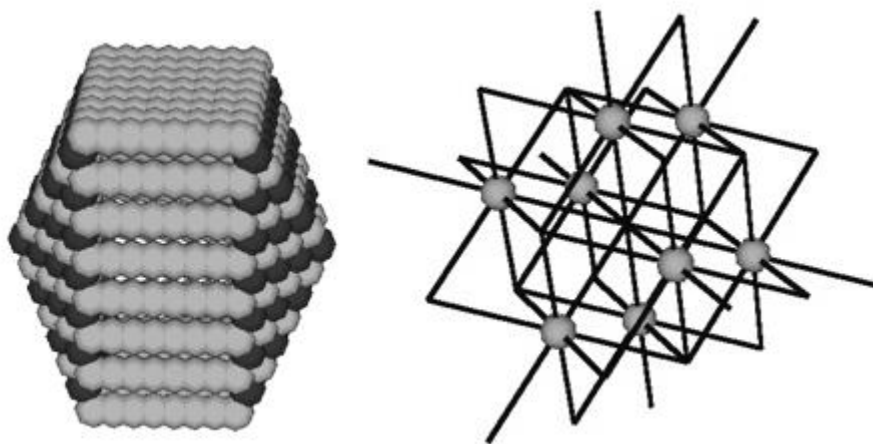


Рис.3.14 Трехмерный вариант моделирования симметричных сетей.
Закон присоединения узлов на каждом следующем этапе маршрутизации:
 $4k^2+2; 8k^2+2$.

Число $СГ$: 6,10,38,34,102,74,198,130,326,202,486,290,678,394.

Программа построения трехмерных моделей сетей маршрутизации, дает возможность учитывать число подключающихся к сети операторов (таких

узов сети, к которым поступил сигнал) на каждом этапе маршрутизации, что в дальнейшем позволяет выявить аналитическую закономерность для определенного варианта сети рис.2 и проиллюстрировать этот процесс графически рис.3.15, 3.16 [48]

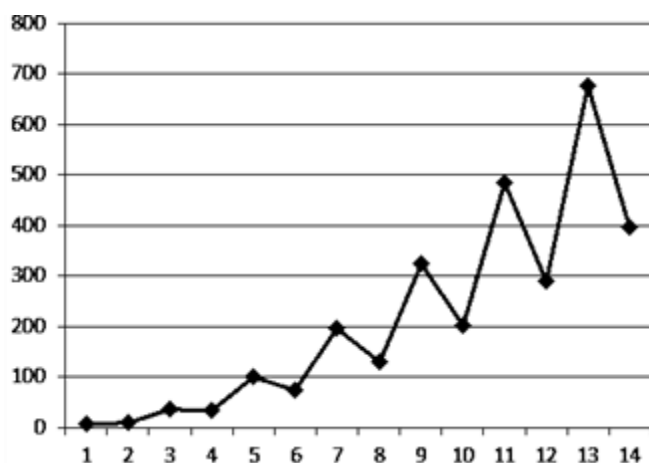


Рис.3.15 Рост числа CG_0 в трехмерной модели сети (по оси абсцисс – номер CG_0 , по оси ординат – количество CG_0 -доменов).

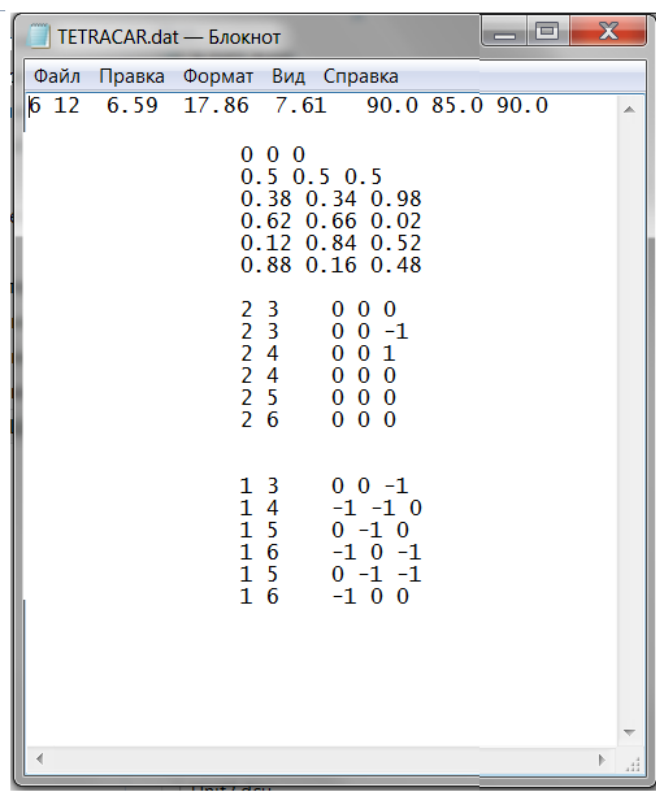


Рис.3.16 Блокнот данных об элементах симметрии сети и координатах узлов, использующихся программой.

3.4. Моделирование сетей на принципах неперiodической симметрии

Телекоммуникационные сети, в частности содержащие достаточно большое число абонентов, как правило, не являются упорядоченными. Это обусловлено географической неоднородностью местности при организации станций, наличием мобильных свойств у потребителя, совокупностью помех, влияющих на распространение сигнала, и прочими факторами. Совокупность этих обстоятельств приводит к необходимости создания таких проектных вариантов симметричных сетей, для которых предусмотрено нарушение периодического распределения элементов. Однако если условием наиболее подходящего проектирования для поставленных задач связи является наличие глобальной упорядоченности, то есть сохранение симметрии сети (что также и оставляет право за разработчиками такой системы алгоритмизировать процесс ее создания на этапе проектирования и сделать заключение об эффективности сети, исходя из данных априорного модельного апробирования), то в качестве модельных объектов, характеризующихся неперiodической симметрией, могут быть выбраны фрактальные формы [79].

На основе математического подхода, связанного с процедурой свертки точечных функций [41], к построению фрактальных форм, подробно описанного в параграфе 2.5, были разработаны алгоритмы и программы, позволяющие моделировать процесс свертки с возможностью выбора элементов симметрии, а также анализировать результат на каждом шаге итерации (рис.3.17).

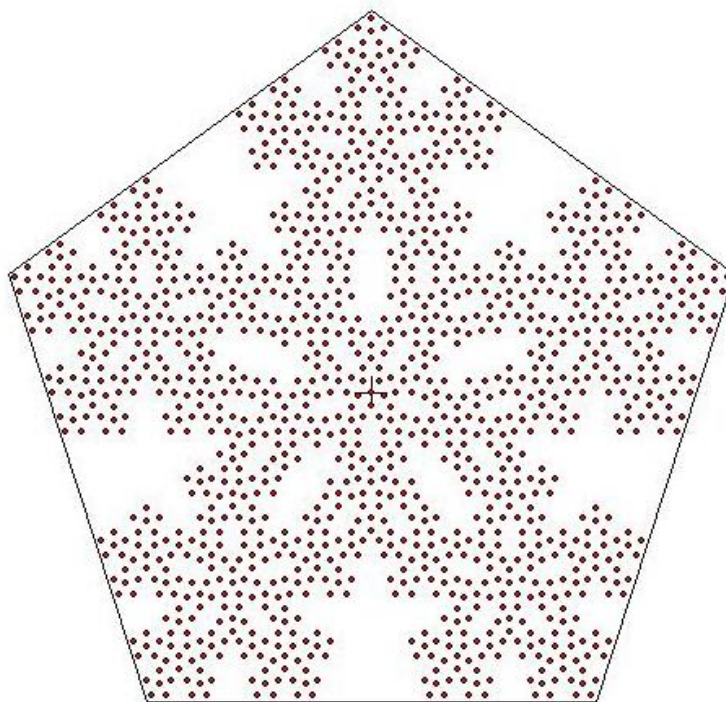


Рис.3.17 *Распределение элементов сети, соответствующее нетрансляционной симметрии – фрактальная мозаика третьего поколения с симметрией пятого порядка.*

Программа расчета точек сети основана на построении прямого и обратного преобразования Фурье. На приведенном примере показана фрактальная сеть (рис.3.17), которая является Фурье-образом мозаики Пенроуза (рис. 3.18).

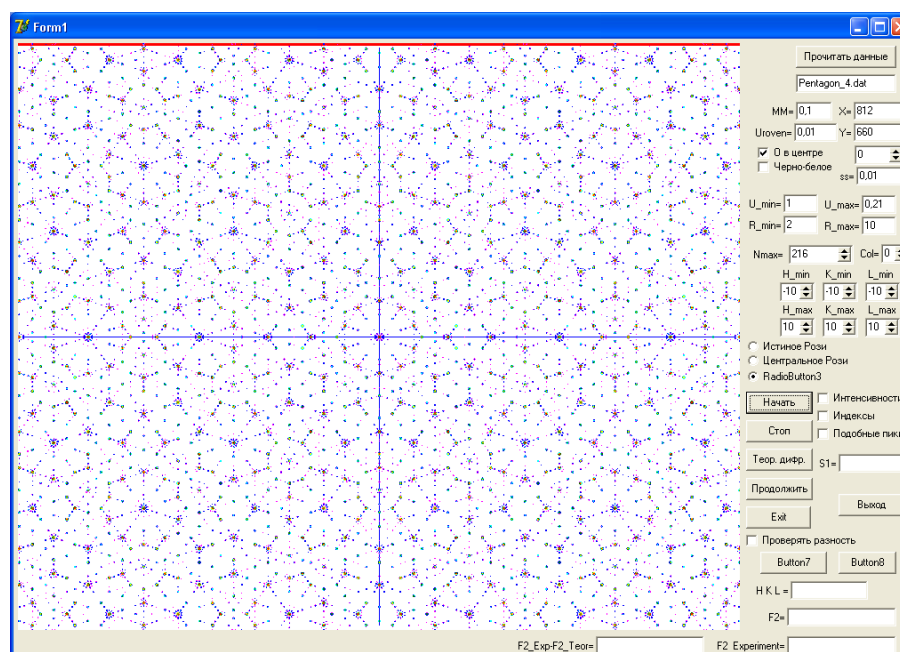


Рис.3.18 Окно программы построения Фурье-образов системы точек

Программа позволяет автоматическим образом распределять операторы сети в соответствии с принципами нетрасляционной симметрии для случаев проектирования телекоммуникационных сетей, в которых реализация периодического расположения операторов не возможна.

Такой способ автоматизации при проектировании топологии сети (структуры и системы связей) может найти практическое применение при распределении абонентских терминалов, обеспечивающих доступ в Интернет при поступлении сигнала от спутника, если передача сигнала осуществляется с помощью конструкции многолучевой антенны [7] рис. 3.19.

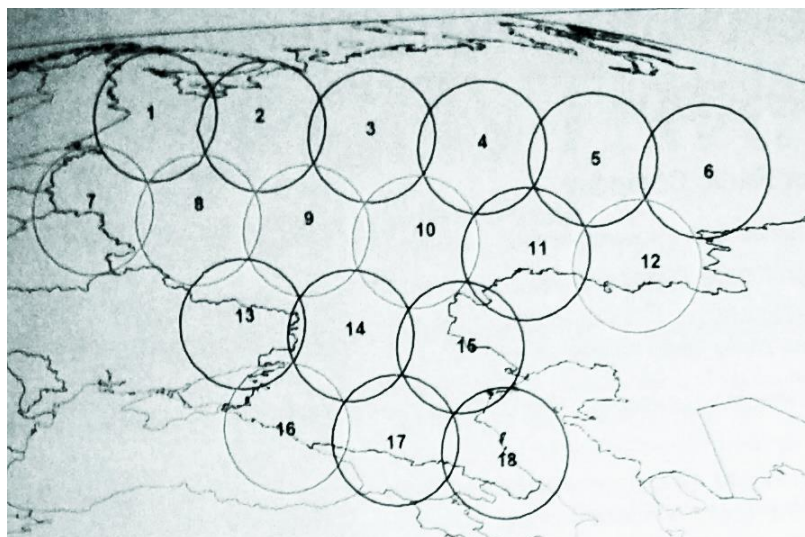


Рис.3.19 Зоны покрытия лучей, соответствующие симметричному положению абонентских терминалов.

В данном примере, публикация о котором содержится в источнике [7], рассмотрен вариант симметричного расположения операторов связи (абонентских терминалов), удовлетворяющий симметрии генерируемых многолепестковой антенной лучей. Все лучи образуются на одном зеркале, а облучающей системой является фазированная решетка с достаточно большим числом расположенных близко друг к другу облучателей, иными словами – целым кластером облучателей, при этом каждый луч создается совокупностью соседних облучателей рис.3.20.

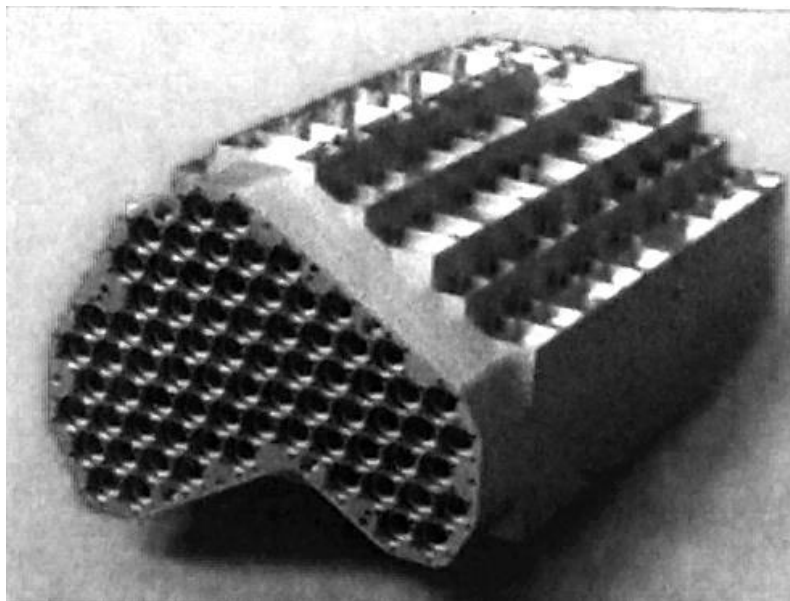


Рис.3.20 Пример кластера облучателей многолучевой антенны.

Вид диаграмм направленности антенны определяет геометрию рабочей зоны земной поверхности и позволяет проектировать расположение принимающих и идущий от спутника сигнал станций в соответствии с элементами имеющейся симметрии.

В системах спутниковой связи в качестве излучающей антенны может быть использован и фрактальный тип, начало исследования свойств которой методами компьютерного моделирования было положено в работах [27,40]. На основании информации о геометрической организации таких антенн, а также данных о расположении и физических параметрах запитки с помощью программ САПР *AntSoft HFSS* были получены способы визуализации процесса распределения электромагнитного поля в виде так называемых диаграмм направленности (рис.3.21), которые позволили произвести качественный и количественный анализ различных режимов работы.

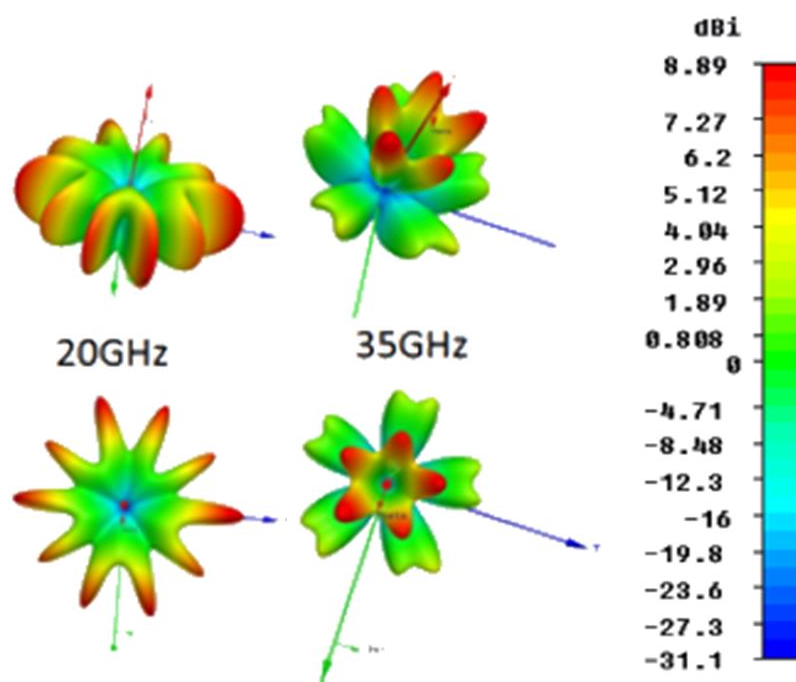


Рис.3.21 3D-диаграмма направленности фрактальной антенны, обладающей симметрией оси пятого порядка

Предполагая заранее, какой вид будет иметь диаграмма направленности используемой фрактальной антенны, можно создать проект с таким расположением абонентских терминалов, поступление сигнала до которых будет одинаковым, что позволит повысить уровень надежности функционирования системы за счет расширения возможности её управления.

При создании спутниковых систем связи метеорологического радиолокационного назначения важной задачей, как отмечается в материалах [3], является разработка подходящих структур сети, в частности с наличием иерархии или симметрии, которые вводятся системой взаимодействия регионального распределительного центра с субрайонными станциями.

Приведенные примеры позволяют продемонстрировать возможность практического приложения разработанной в диссертационной работе модели телекоммуникационных сетей на принципах нетрансляционной симметрии [16].

3.5 Сопоставление работы симметричной и стохастической сетей

Поставим задачу сравнения эффективности работы сетей, способы организации которых базируются на симметричном (удовлетворяющем периодическому разбиению) и хаотическом расположении элементов. В первом случае, формирование симметричной топологии значительно увеличивает прогностические возможности при расчете вероятности достижения сигналом определенных узлов (операторов) сети маршрутизации, что позволяет повысить значение числа элементов сети, получающих сигнал одновременно, не изменяя при этом величину равномерной плотности распределения узлов при проектировании.

Программными средствами визуализации разбиения плоскости на полимино получим вариант симметричного распределения 320 элементов (абонентов) рис.3.22 (а), соответствующий 9-ой итерации при выполнении алгоритма (напомним здесь, что каждый планигон разбиения может быть заменен вершиной графа, ребра которого задают отношение соседства на множестве полимино); а также вариант стохастически распределенных элементов рис.3.22 (б), на котором в области такого же значения площади хаотическим образом расположены элементы в количестве 320 штук.

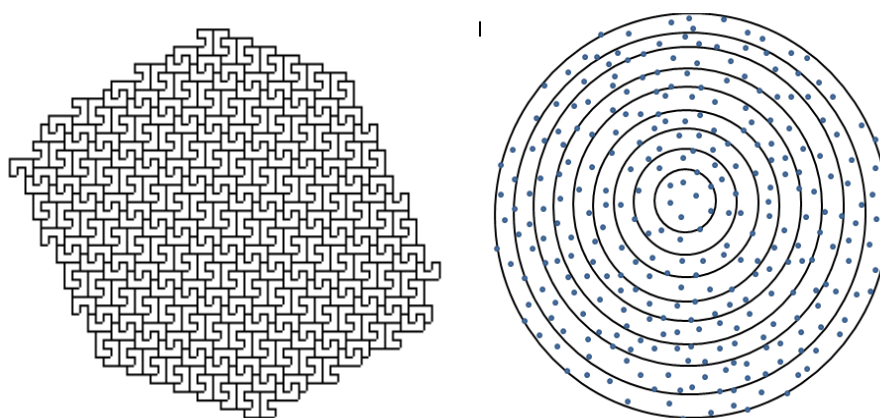


Рис.3.22 Распределение элементов: а) – симметричная сеть; б) – стохастическая сеть.

В случае симметричного распределения элементы на каждом шаге маршрутизации располагаются на сторонах многоугольника, соответствующих эквидистантному расстоянию относительно источника сигнала, и информация о достижении конкретного числа элементов сети (ранее определенного при проектировании в соответствии с используемой метрикой) носит необходимый, а не случайный характер. Для варианта стохастического распределения (например, с Пуассоновским характером) информация об одновременном поступлении сигнала к некоторому числу элементов определяется числом этих элементов, попавших на окружности определенного радиуса с центром, задаваемым геометрическим местом источника, и носит случайный (вероятностный) характер.

Расчеты показывают, что при небольшом значении числа элементов, разница в определении количества одновременно получающих сигнал узлов незначительная. Однако при увеличении числа элементов наблюдается резкое отличие количества узлов (время поступления сигнала до которых одинаково), получаемое методами статистического усреднения и методами дискретного представления. Значения, соответствующие вычислениям при упорядоченной организации и стохастической организации сетей, приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3. Сопоставление числа абонентов.

№ итерации	Число абонентов для вариант упорядоченной организации сети	Число абонентов для вариант хаотической организации сети
1	4	4
2	11	5
3	24	6

4	27	14
5	33	18
6	48	19
7	47	21
8	53	28
9	72	22
	320	137

Разница между расчетами, существенно заметная при возрастании элементов сети маршрутизации, может быть также наглядно проиллюстрирована с помощью гистограммы рис.3.23.

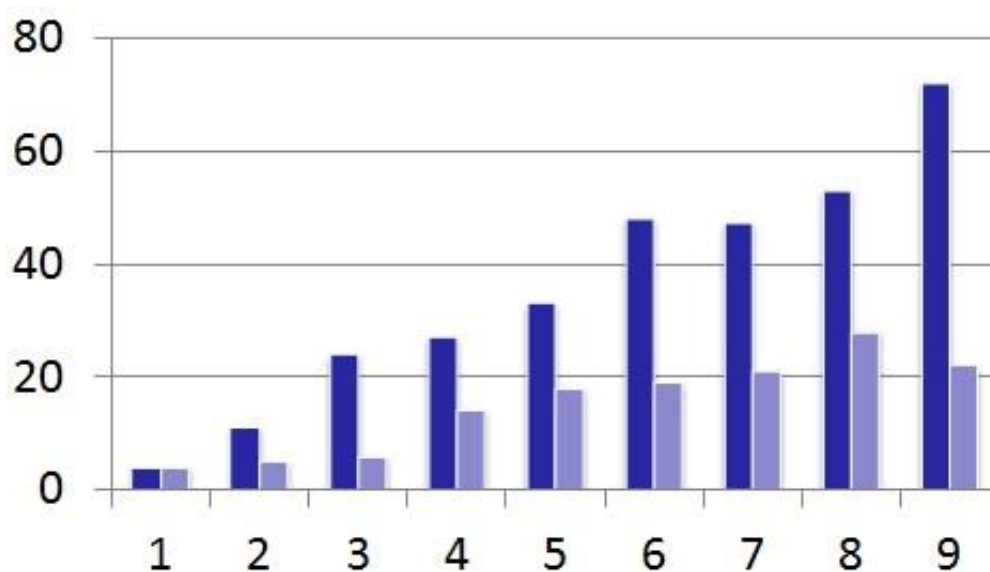


Рис.3.23 Сопоставление учета элементов, одновременно получающих сигнал (светлый цвет соответствует неупорядоченному распределению, темный – упорядоченному) в зависимости от порядка итерации.

Пусть 144 $СГ_0$ распределены в секторе, полученном за 1 шаг (по времени) двумя способами рис. 3.24.

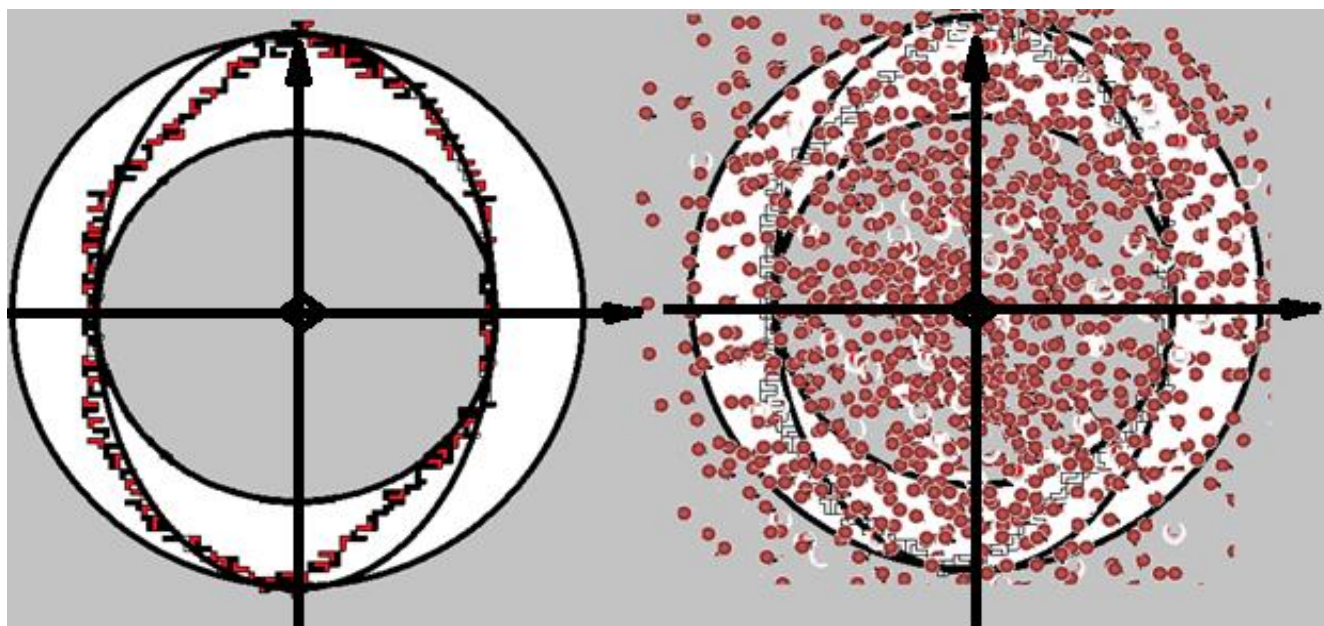


Рис.3.24 Пример расчета элементов для различных способов организации. (а) – многоугольник при симметричном распределении; (б) – сектор при стохастическом.

Распределение 144 $СГ_0$ в секторе (а) на левом рисунке (сеть симметричная), строго определенно, приведет к одновременному получению к моменту времени t_1 (у границы первой окружности) всеми 144 $СГ_0$ сигнала, который был послан в момент времени $t = 0$ с центрального пункта. Что касается стохастической сети маршрутизации (справа (б) с Пуассоновским распределением, то есть, со общим числом потребителей = 144, случайно разбросанным по площади выбранного сектора, на первую окружность попадают только 50 $СГ_0$, которые и получают сигнал одновременно так же в момент времени t_1 . До остальных $СГ_0$ (из $144 - 50$) сигнал дойдет только через $\Delta t = 1$ шагу. Но за это время сигнал в симметричной сети дойдет одновременно уже до следующей окружности из 147 $СГ_0$ (против случайных 60). Поэтому пропускная способность (и производительность) правой сети по отношению к левой сети оказывается, по крайней мере, в 3 раза хуже. Для

того чтобы сигнал дошел до такого же количества потребителей стохастической сети, распределенных в секторе, необходим дополнительный интервал времени. (*Эффект «запаздывания» во времени*) [15]. Чем больше размеры сети, тем заметнее это превосходство. Ради справедливости, следует отметить, что стохастическая сеть более устойчива к различного рода дефектам [39], а симметричная сеть ухудшает свои свойства по мере накопления дефектов и приближается при этом по своим возможностям к стохастической сети. Это естественно, поскольку дефекты (нарушение симметрии) ведут к хаосу, то есть к распределению Пуассона. Этот вывод относится к любому типу сетей.

3.6. Расчет достижимости сигнала заданной области в модели сети на принципах неперiodической симметрии

Рассмотрение дискретной модели пространства сети маршрутизации, построенной на принципах нетрансляционной симметрии, позволяет предложить методику расчета значений вероятности достижения сигналом заданной области сети и нахождения геодезического (оптимального с точки зрения числа медиаторов) маршрута передачи сигнала.

На произвольном участке сети вероятность достижимости сигналом заданной области будет определяться метрикой ДПС. На множестве областей (многоугольников, реализующих разбиение) ДПС задается отношение соседства, которое геометрически может быть представлено в виде графа. Однако топология графа будет зависеть от метрики дискретного пространства и ограничений, связанных с характером пространственного направления сигнала. Степени вершин графа, попавших на заданный маршрут, задают вероятность поступления сигнала в конкретную область сети на каждом этапе маршрутизации, а произведение этих вероятностей

будет численно оценивать возможность достичь произвольной области сигналом по каждому из каналов связи (рис.3.25, поскольку сами операторы на заданном маршруте связаны условием «и».

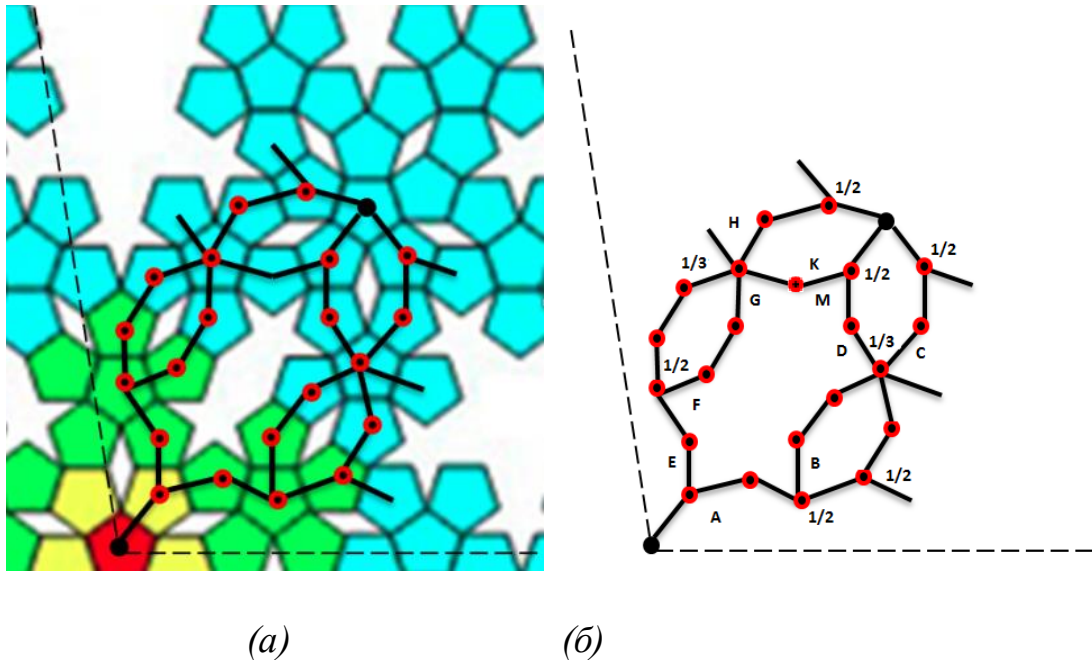


Рис. 3. 25 Часть дискретного пространства сети Pol_5 с фрактальными границами (а) и граф вариантов распространения сигнала (б)

Произведем расчет вероятности достижения сигналом выбранной области на ДПС с симметрией пятого порядка. Как видно из рисунка, передача данных может происходить по десяти различным каналам связи (возможные маршруты обозначены латинскими буквами). Общая вероятность для этого случая будет определяться суммой вероятностей, рассчитанных для каждого маршрута, поскольку выбор самого маршрута ограничивается условием «или» [1]. Найдем значение этой вероятности.

Таблица 2.4 Возможные маршруты и вероятности.

Названия маршрутов	Номера узлов												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	P _i
A	1/2	1	1/2	1/2	1	1/3	1	1/2	-	-	-	-	1/48
B	1/2	1	1/2	1	1	1/3	1	1/2	-	-	-	-	1/24
C	1/2	1	1/2	1/2	1	1/3	1	1/2	-	-	-	-	1/48
D	1/2	1	1/2	1	1	1/3	1	1/2	-	-	-	-	1/24
E	1/2	1	1/2	1	1	1/3	1	1/2	-	-	-	-	1/24
F	1/2	1	1/2	1	1	1/3	1	1/2	-	-	-	-	1/24
G	1/2	1	1/2	1	1	1/3	1	1	-	-	-	-	1/12
H	1/2	1	1/2	1	1	1/3	1	1	-	-	-	-	1/12
Вероятность достижимости:													25/64

Математической основой вычисления вероятности достижения сигналом заданной области послужили теоремы комбинаторики [1].

Очевидно, что вероятность зависит от числа этапов передачи маршрута, т.е. зависит от числа медиаторов, причем будет уменьшаться с возрастанием количества медиаторов, однако различные каналы передачи данных могут обладать совершенно различной пропускной способностью, даже если они характеризуются одинаковым числом посредников, соединяющих две произвольные области. К тому же, уточнить результаты расчетов можно путем введения дополнительных параметров, связанных с физическими характеристиками операторов (скоростью получения в соответствии с принятой в системе очередностью, скоростью обработки и скоростью передачи сигнала).

Проиллюстрированный способ расчета может быть применен к нахождению вероятностей на периодическом дискретном пространстве. Однако отношение соседства в случае периодического разбиения (точнее сказать, упаковки) будет иметь более разветвленный граф (рис.3.26), что приводит к значительному увеличению числа комбинаторно возможных вариантов маршрутов [58] и требует большего времени для вычисления вероятности.

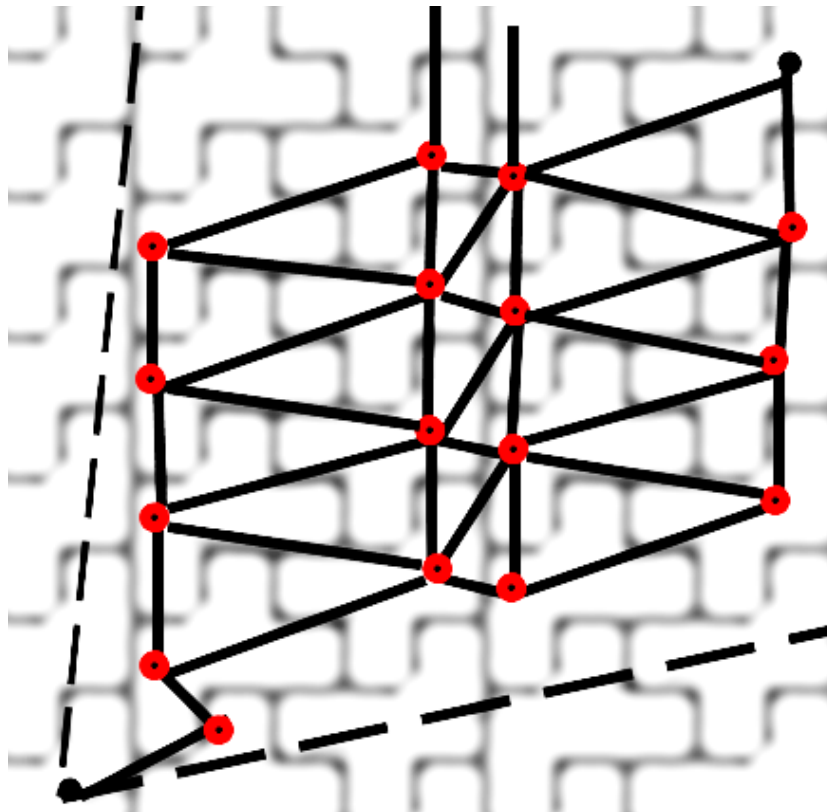


Рис. 3.26 Граф распространения сигнала в дискретном пространстве сети с периодической симметрией.

Тем не менее, с помощью анализа графа соседства на периодическом дискретном пространстве можно производить нахождение геодезического (с позиции метрики) маршрута, поскольку его топология позволяет выявить приоритет маршрута, исходя из наименьшего числа медиаторов. Это приводит к задаче нахождения количества пользователей, принадлежащих

одному этапу маршрутизации, расположенных на эквидистантном расстоянии от генератора сигнала в общем случае. Эквидистантному окружению в метрике дискретного пространства, как было доказано ранее [23], соответствует многоугольник, формирование которого, в рамках предложенной модели, будет определять так называемую синхрогруппу, а также влиять на характеристики функционирования сети.

Стоит также отметить, что метрика (в соответствии с топологией) симметричной сети, в общем случае, не является «эвклидовой». Опираясь на геодезическим «пошаговым расстоянием», легко показать, что через две точки в пространстве разбиения можно показать несколько одинаковых по значению «расстояний»: А-В (рис.3.27 –два таких расстояния). Отличие от сферической поверхности заключается в том, что на сфере два полюса [57], а в разбиении их множество. Эквидистантные «расстояния» образуют не сферу, как в эвклидовом пространстве, а многоугольник. Равносторонний (равнодистантный) треугольник, например ABC, содержит геодезические только с четным числом «шагов»(рис.3.27).

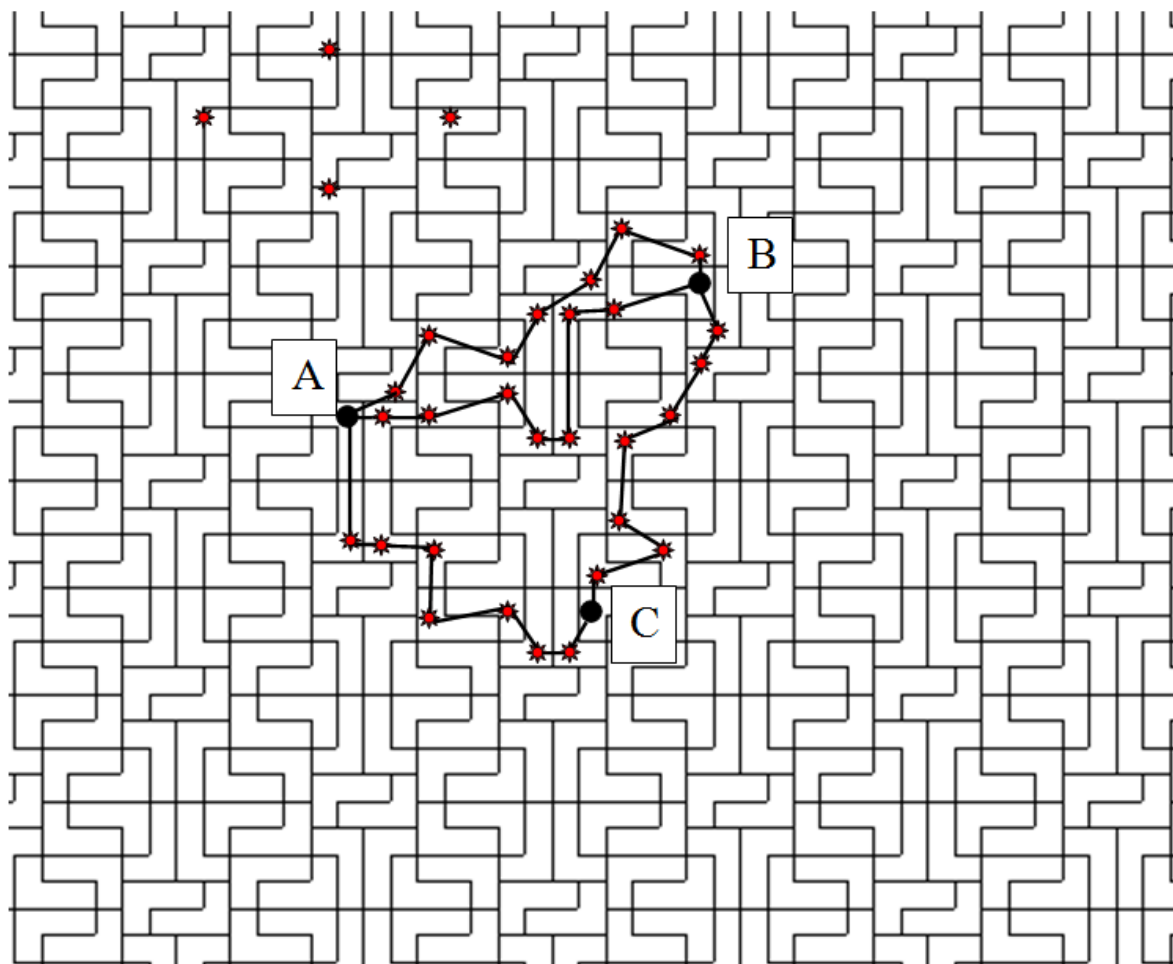


Рис. 3.27 Разбиение пространства сети на области CG_0 , код:
31320332233322032321221111322311332230123220111221322313

3.7. Выводы

- Двойная кодировка в программах разбиения двумерного пространства сети позволяет установить однозначное соответствие внутренних и граничных кодов системы путем инвертирования кодов.
- Если ряд факторов, приводящих к сбоям работы сети, поддается количественной оценке, то данный критерий может быть отражен в программной реализации послойного роста и позволяет демонстрировать вероятности этих сбоев.
- Нормированная производительность сети зависит от числа абонентов, получающих сигнал одновременно, и для способа её расчета может быть использована конструкция дискретного пространства сети.
- Различные способы расположения абонентских терминалов при передачи сигнала от спутника в соответствии с зонами покрытия лучей (в случае использования многолучевой антенны) могут быть реализованы с помощью алгоритмов для распределения элементов по принципу нетрансляционной симметрии.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. На основе анализа литературных данных по существующим реализациям различных топологий телекоммуникационных сетей предложена классификация сетей по способу организации их внутренней структуры.

2. Произведен анализ моделирующих программ и средств телекоммуникационных сетей, который позволил предложить новый способ моделирования сетей с локально неупорядоченной структурой на основе применения групп трансляционной и нетрансляционной симметрии.

3. Для описания, представления и расчета проектируемых сетей на базе метода дискретного моделирования разработана модель дискретного пространства телекоммуникационной сети с маршрутизацией, представляющая собой УП произвольной размерности, в котором домены $СГ_0$ моделируются с помощью основных дескрипторов УП – полимино различной конфигурации.

4. В работе показано, что рост упаковок и рост графа связности – два эквивалентных языка для модельного представления телекоммуникационных сетей, устроенных на принципах симметрии. На основании данного факта предложен алгоритм построения графа связности $СГ_0$ для периодической телекоммуникационной сети в дискретной модели.

5. В программах разбиения двумерного пространства сети на домены $СГ_0$ и графа телекоммуникационной сети предложена двойная кодировка. Показана справедливость теоремы об инверсионном преобразовании кодов (существовании неочевидного однозначного соответствия внутренних и граничных кодов системы).

6. В модели дискретного пространства телекоммуникационной сети решена задача пересчета числа независимых конфигураций доменов $СГ_0$

(деревьев графа или вида полимино) комбинаторно-геометрическим способом. Используемая методика позволила также получить формулу изменения их количества.

7. В программе разбиения двумерного пространства реализована возможность демонстрации формы искаженного фронта распространения сигнала по сети при заданных вероятностях отказа приема сигнала с четырех сторон света.

8. Для случая квазипериодического представления пространства сети была разработана методика расчета вероятности достижимости сигналом узлов сети по различным маршрутам.

9. Произведено сопоставление работы сетей, построенных на принципах симметрии и организованных хаотическим образом. Было установлено наличие так называемого эффекта «запаздывания» при работе стохастических сетей по сравнению с функционированием симметричных сетей.

10. Были обнаружены новые свойства метрики УП, используемой для описания дискретных процессов маршрутизации. Были уточнены понятия: расстояние между элементами, геодезическая и эквидистантное расположение элементов, относительно произвольно выбранного элемента метрики.

Литература

1. Андронов А. М., Копытов Е. А., Гринглаз Л.Я. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник для вузов. СПб.: Питер, 2004. 461 с.: ил.
2. Ашманов С. А., Тимохов А. В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991. - 448 с.
3. Базлова Т.А., Бочарников Н.В., Брылёв Г.Б. и др. Метеорологические автоматизированные радиолокационные сети // Монография – Гидрометеиздат – СПб, 2012 г. – 337с.
4. Баскаков С. С. Распределенный алгоритм автоматического выбора опорных узлов в беспроводных многочечковых (mesh) сетях // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2008. № 4. С. 15-29.
5. Березко М. П., Вишневский В. М., Левнер Е. В., Федотов Е. В. Математические модели исследования алгоритмов маршрутизации в сетях передачи данных. // Информационные процессы, Том 1. № 2, 2001. - стр. 103-125.
6. Берж К. Теория графов и её применение. М: Издательство иностранной литературы, 1962. 320 с.
7. Буйдинов Е., Локшин Б Пути освоения Ка-диапазона космическими аппаратами ГП и КС// Технологии и средства связи - №2 – Гротек, 2014 – С.64 -67.
8. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике М.: Советское радио, 1971. — 328 с.
9. Вентцель, Е.С. Теория случайных процессов и её инженерные приложения: Учеб. пособие для студ. втузов. / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. — Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: Издательский центр «Академия», 2003. - 432 с.
10. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. 2-е-изд. М. "Мир", 1999, 447 с.

11. Гарднер М-. Математические досуги. М. "Мир", 1972, 496 с.
12. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука. - 1987.
13. Голомб С.В. Полимино. Москва, "Мир", 1975, 207 с.
14. Горшков К.А., Никитин О.Р., Рау Т.Ф., А.А. Мохсин Али, Рау В.Г. Комбинаторно-геометрический метод расчета и представления вариантов конфигураций дерева графа сетевых доменов // Журнал «Современные проблемы науки и образования». – 6, выпуск РАЕ. – Москва, 2013. URL: <http://www.science-education.ru/113-11297>.
15. Горшков К.А., Никитин О.Р., Рау Т.Ф., Рау Т.Ф. Иерархические сети в модели дискретного пространства сети // Известия вузов. Технология текстильной промышленности. – Иваново – 2015 - №4(385) – С. 141-145.
16. Горшков К.А., Никитин О.Р., Рау В.Г. Проектирование сети абонентских терминалов с учетом принципа нетрансляционной симметрии // Международная научная конференция «Современные телекоммуникационные и информационные технологии», Москва, 2015; URL: <http://econf.rae.ru/article/9558>
17. Делоне Б.Н. Теория планигонов. // Изв. АН СССР Сер. мат., 1959, 23, 365-386.
18. Делоне Б.Н., Долбилин Н.П., Штогрин М.И. Комбинаторная и метрическая теория планигонов. // Труды МИАН СССР, 1978,148, 109-140.
19. Делоне Б.Н., Фаддеев Д.И. Теория иррациональностей третьей степени.
20. Делоне Б.Н. Геометрия положительных квадратичных форм.// Успехи мат. наук, - 1937. – вып. 3. – С.16 – 62; - вып. 4. – С.102 – 164.
21. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982.
22. Жожикашвили В. А., Вишневский В.М. Сети массового обслуживания. Теория и применение к сетям ЭВМ. М.: Радио и связь. - 1988.

23. Журавлев В.Г. Самоподобный рост периодических разбиений и графов // Алгебра и анализ. — №13. — 2001. — с. 69-92.
24. Журавлев В.Г., Малеев А.В., Рау В.Г., Шутов А.В. Рост случайных графов и упаковок // Кристаллография. — Том 47. — 2002. — с. 976-981.
25. Журбенко И.Г., Кожевникова И.А. Стохастическое моделирование процессов. М.: Изд-во МГУ, 1990.
26. Залманзон Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. М.: Наука, 1989.
27. Илюшин Г. Д., Блатов В. А. Кластерная самоорганизация кристаллообразующих систем: супраполиэдрические кластеры-предшественники и самосборка икосаэдрической структуры $ZrZn_{22}$ (сF184). // Кристаллография; 2009, 54, 590-595.
28. Карасев, А.В. Метод выбора кратчайших направлений передач на сети связи на основе эвристических рассуждений / А.В.Карасев, А.В. Пушнин, В.И. Финаев // Перспективные информационные технологии и интеллектуальные системы. 2000. - № 4. - С. 43 - 46.
29. Кларнер Д.А. Моя жизнь среди полимино. / Математический цветник. Ред. Д.А. Кларнер //М.: Мир, 1983, 303-328.
30. Коломейкина Е.В. Локальные условия правильности разбиения евклидовой плоскости. // Чебышевский сборник; 2004, 5, 31-51.
31. Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход: Пер. с англ. / Н. Кристофидес. М.: Мир, 1978. - 432 с.
32. Кульгин М.В. Коммутация и маршрутизация IP/IPX трафика. М.: КомпьютерПресс, 1998.
33. Лазарев, В. Г. Динамическое управление потоками информации в сетях связи / В.Г. Лазарев, Ю.В. Лазарев. М.: Радио и связь, 1983. - 216 с.
34. Ле Ты КоукТханг, Пиунихин С.А., Садов В.А. Геометрия квазикристаллов // Усп. мат. наук. 1993. V. 48. Р. 41-102.

35. Малеев А.В. , Рау В.Г., Потехин К.А., Пархомов Л.Г., Рау Т.Ф. и др. Метод дискретного моделирования упаковок в молекулярных кристаллах. // Доклады АН СССР. — Том 315. — 1990. — с. 1382-1385.
36. Малеев А.В., Лысов А.Е., Потехин К.А. Симметрия «N-мерные упаковочные пространства. // Кристаллография, 1998, 43, 775-781.
37. Малеев А.В., Шутов А.В. Модель послойного роста разбиений, упаковок и графов // Монография – Владимир: ВГГУ, 2011. - 107 с.
38. Мизин, И. А. Сети коммутации пакетов / И.А. Мизин, В.А. Богатырёв, А. П. Кулешов. М.: Радио и связь, 1986. - 407 с.
39. Никитин О.Р., Горшков К.А., Али Аббас Мохсин Али, Рау Т.Ф., Рау В.Г. Наноструктурное исследование превращений в устройствах с радиоактивными нанокластерами// Фундаментальные исследования. – 2014. – № 5 (часть 5). – стр. 964-968
40. Никитин О.Р., Скворцов К.В., Рау Т.Ф., Малеев А.В., Рау В.Г.. Моделирование фрактальных структур, антенн и излучателей для нанотехнологий. // Известия института инженерной физики. – Серпухов, 2010 – №1, (15) – С. 61- 65.
41. Никитин О.Р. Радиотехнические устройства на микро- и наноуровне. / О.Р. Никитин, В.Г. Рау, К.А. Горшков, К.В. Скворцов, А.А. Мохсин Али – Муром: МиВлГУ, 2014 - 132 с.
42. Олифер, В.Г. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы: Учебник для вузов / В.Г. Олифер, Н.А. Олифер. 2-е изд. - СПб.: Питер, 2006. - 958 с.
43. Питерсон, Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем / Дж. Питерсон. М.: Мир, 1984. - 264 с. 81. Пранявичус, Г. И. Модели и методы исследования вычислительных систем / Г. И. Пранявичус. — Вильнюс: Монслас, 1982. 228 с.
44. Пономарев, И.С. Подерский // Системы управления и информационные технологии. 2003. - № 1 - 2 (12). - С. 73 - 77.

45. Прокошев, В.В. Моделирование топологии сети большой размерности с использованием параллельных вычислений Электронный ресурс. / В.В. Прокошев, П.Ю. Шамин // Телематика-2008: тр. XV Всерос. науч.-метод. конф.

46. Рау В.Г., Пархомов Л.Г., Илюхин В.В., Белов Н.В.//ДАН СССР. 1980. Т.255. №4. С.859.

47. Рау В.Г., Рау Т.Ф., Лебедев Г.О.//Кристаллография. 1996. Т. 41. № 1. С. 178.

48. Рау В.Г., Пугаев А.А., Рау Т.Ф. Координационные числовые последовательности и координационные волны в среде // Кристаллография. — Том 51, — Выпуск 1. — 2006. — с. 8-16.

49. Рау В.Г., Никитин О.Р., Гаврилов В.М. Радиофизические методы дистанционного зондирования Земли и космических объектов под ред. Под ред. В.Г. Рау. — Владимир: ВГПУ, 2007. — 144 с.

50. Рау В.Г., Никитин О.Р., А.А. Мохсин Али, Рау Т.Ф., Ломтев Л.А., Горшков К.А. Нанокластерные системы колец для электроники // Фундаментальные исследования. — Москва — 2015. — № 1 (часть 5). — С.137-142.

51. Роджерс К. Укладки и покрытия. Пер. с англ. М.: Мир, 1968; 134 с.

52. Романов Е.Л., Шмидт В.К. Система имитационного моделирования на базе расширенных сетей Петри // Автоматизация статистической обработки данных. Новосибирск, 1985.

53. Руководство Cisco по междоменноймногоадресатной маршрутизации.//Interdomain Multicast Solutions Guide. — М.: «Вильямс», 2004. — С. 320. — ISBN 5-8459-0605-9.

54. Сабинин О. Ю. Статистическое моделирование технических систем. Спб: Изд-во ЛЭТИ, 1993.

55. Современная кристаллография. Т.1. Симметрия кристаллов и методы структурной кристаллографии. Ред. Б.К. Вайнштейн. М.: Наука. 1980. 384 с.

56. Таненбаум, Э. Компьютерные сети / Э. Таненбаум. 4-е изд. - СПб.: Питер, 2012. - 992 с.
57. Тот Л.Ф; Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.:1. ГИФМЛ* 1958, 363 с.
58. Уваров, Д.В. Построение дерева кратчайших путей в графе на основе данных о парных переходах / Д.В. Уваров, А.И. Перепелкин, В.П. Корячко // Системы управления и информационные технологии. 2004. — № 4(16). -С. 92-95.
59. Федоров Е.С. Симметрия и структура кристаллов. Основные работы. М., Изд-во АН СССР, 1953.
60. Федотов Е. В. Определение оптимальных маршрутов в сети пакетной коммутации. // В сборнике: Сетевая обработка информации. М.: МДНТП, 1990.-стр. 95-98.
61. Хелеби, С. Принципы маршрутизации в Internet / С. Хелеби: Пер. с англ. — 2-е изд. М.: Издательский дом "Вильямс", 2001. - 448 с.
62. Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970, 424с.
63. Цвикун А.Д. Имитационное моделирование в задачах синтеза структуры сложных систем / и др. М.: Наука, 1985.
64. Шварц М.Л. Сети связи: протоколы, моделирование и анализ, М: «Наука», 1992
65. Шторгин М.И. Правильные разбиения Дирихле-Вороного для второй триклинной группы. // Труды МИАН СССР, 1973,123, 3-128.
66. Элиас П., Фанстейн А., Шеннон К. О максимальном потоке через сеть. // Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.-с. 729-734.
67. Arnol'd V.I. Remarks on quasicrystallic symmetries // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1988. P. 21-25.

68. Buerger, M.J. Vector Space and its application in Crystal Structure Investigation. New York/John Wiley & Sons, Inc. London/Chapman & Hall, LTD, 1959, 384p. (Inostrannaya Literatura, Moscow, 1961).

69. deBruijn N.G. Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings // Nederl. Akad.

Wetensch. Proc. Ser. A. 1981. V. 84. P. 39-66.

70. Duneau M., Katz A. Quasiperiodic Patterns // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 2688-2691.

71. Fukuda, H.; Kanomata, C.; Mutoh, N.; Nakamura, G.; Schattschneider, D. Polyominoes and Polyiamonds as Fundamental Domains of Isohedral Tiling with Rotational Symmetry. Symmetry 2011, 3, 828-851.

72. Geographical and energy-aware routing: a recursive data dissemination protocol for wireless sensor networks: Technical report 01-0023 / University of California (Los Angeles); Yu Y., Estrin D., Govindan R. 2001. lip.

73. Golomb S.W. Checkerboards and polyominoes. // Amer. Math. Monthly, 1954, 6b, 672-682.

74. Goodman-Strauss C. Matching rules and substitution tilings // Annals of Mathematics,

Second Series. 1998. V. 147. P. 181-223.

75. Heinzelman W., Kulik J., Balakrishnan H. Adaptive protocols for information dissemination in wireless sensor networks // Proceedings of the 5th annual ACM/IEEE international conference on mobile computing and networking. Seattle (USA), 1999. P. 174-185.

76. Ito S., Ohtsuki M. Parallelogram Tilings and Jacobi-Perron Algorithm // Tokio J.

Math. 1994. V. 17. P. 33-58. Penrose R. // Math. Intelligencer. 1979. V. 2. P. 32.

77. Janot C. Quasicrystals: A primer, 2nd ed., Monographs on the Physics and Chemistry

of Materials, Oxford University Press, Oxford. 1994.

78. Ле Ты КоукТханг, Пиунихин С.А., Садов В.А. Геометрия квазикристаллов. // Учен. мат. наук, 1993, 48, 41-102.
79. Korkin A.N >, Zolotarev E.I. Sur les formes quadratiques positives. // Math. Ann., 1877, III, 375-434.
80. Moody R.V. Model sets: A Survey. In: From Quasicrystals to More Complex Systems.
Eds. F.Axel, F.D'enoyer and J.P.Gazeau, EDP Sciences, Les Ulis, Springer, Berlin.
2000. P. 145-166.
81. Niizeki K. A classification of two-dimensional quasi-periodic tilings obtained with
the grid method // J. Phys. A: Math. Gen. 1988. V. 21. P. 3333-3345.
82. Penrose R. The role of aesthetics in pure and applied mathematical research // Bull. Inst. Math. and its Appl. 1974. V. 10. P. 266-271.
83. Perkins C., Bhagwat P. Highly dynamic destination-sequenced distance-vector routing (DSDV) for mobile computers // ACM SIGCOMM computer communication review. 1994. Vol. 24, no. 4. P. 234-244.
84. Rau V.G., Zhuravlev V.G., Rau T.F., Maleev A.V. Morphogenesis of Crystal Structures in the Discrete Modeling of Packings // Crystallography Reports. — Vol. 47., № 5. — 2002. — p. 727-730.
85. Rawsthorne D. A. Tiling complexity of small n-ominoes ($n < 10$). // Discrete Mathematics, 1988, 70, 71-75.
86. Shechtman D., Blech I., Gratias D., Cahn J. W., Metallic phase with long-range
orientational order and no translational symmetry // Physical Review Letters. 1984. V. 53. P. 1951-1953
87. Sridhara, V. Realistic Simulation of Urban Mesh Networks Part II: Urban Propagation / V. Sridhara and S. Bohacek // U. Delaware Technical Report. -2006.

88. S.S.Lam A Carrier Sense Multiple Access Protocol for Local Networks, Computer Networks, vol. 4, n. 1, pp. 21-32, January 1980.

89. Valery G. Rau *, Leonty A. Lomteva and Tamara F. Rau Non-Crystallographic Symmetry in Packing Spaces. //Symmetry (USA) 2013, 5, 54-80: doi:10.3390/sym5010054.

90. Zadeh, A.N. Self-Organizing Packet Radio Ad Hoc Networks with Overlay (SOPRANO) / A. N. Zadeh et al. // IEEE Communications Magazine.-June, 2002.

ПРИЛОЖЕНИЯ 1. АКТЫ ВНЕДРЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ РАБОТЫ

«УТВЕРЖДАЮ»

Первый проректор, проректор по
научной и инновационной работе ВлГУ

В.Г. Прокошев

24.09 2015 г.

АКТ ВНЕДРЕНИЯ

результатов кандидатской диссертационной работы

Результаты диссертационной работы Горшкова Кирилла Андреевича «Разработка моделей системной организации телекоммуникационных сетей на принципах симметрии», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук, были внедрены в учебный процесс кафедры радиотехники и радиосистем ВлГУ при подготовке бакалавров по направлениям 210400.62 – «Радиотехника», 210700.62 – «Информационные технологии и системы связи» и используются для методического обеспечения лабораторных практикумов дисциплин «Компьютерные сети», «Основы построения телекоммуникационных систем», «Основы компьютерного проектирования и моделирования». Материалы диссертационного исследования были включены в учебное пособие «Радиотехнические устройства на микро- и наноуровне», предназначенное для самостоятельной работы студентов радиотехнического направления университета.

Заведующий кафедрой
радиотехники и радиосистем

О.Р. Никитин

«УТВЕРЖДАЮ»

Генеральный директор ОАО
«Владимирское конструкторское
бюро радиосвязи», к.т.н.



А.Е. Богданов

2015 г.

Для предоставления
в диссертационный совет
Д 212.025.04

АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы на соискание
ученой степени кандидата технических наук Горшкова К.А.

Настоящим актом подтверждается, что модели и алгоритмы, разработанные соискателем Горшковым Кириллом Андреевичем при работе над диссертацией «Разработка моделей системной организации телекоммуникационных сетей на принципах симметрии» учитывались в ОАО «Владимирское конструкторское бюро радиосвязи» при проектировании комплексов радиосвязи, что позволило оптимизировать управление радиостанциями, входящими в их состав.

Начальник лабораторного сектора, к.т.н.

И.С. Прохоров