Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Владимирский государственный университет имени
Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

На правах рукописи

Платов Антон Сергеевич

Оптимизация структурированных по размеру популяций на стационарных состояниях

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
доктор физико–математических наук,
профессор А. А. Давыдов

Владимир — 2016

Оглавление

Введение

Необходимость анализа и оптимизации динамики структурированных популяций естественно возникает при решении широкого класса практических задач рационального природопользования. Такие популяции состоят из однотипных объектов имеющееся отличие между которыми по каким-либо параметрам, например, физиологическим, существенно влияет как на эволюцию самих объектов так и популяции в целом, а, значит, важно и при принятии решений по управлению популяцией.

Первой работой затрагивающей анализ динамики структурированных популяций, по всей видимости, была статья Л. Эйлера [34], в которой он рассматривал задачу об определении справедливой ренты. Для её решения, в случая дискретного времени был определён справедливый размер ренты плательщика возраста a, продолжительность его оставшейся жизни и вероятность его смерти через n лет спустя. Решение этой задачи, привело Л. Эйлера к исследованию вопроса о стационарном распределении популяции по возрасту.

Несмотря на то, что работа Л. Эйлера была опубликована в 1760 году, до начала 20 века в теории структурированных популяций существенных продвижений сделано не было. Интерес исследователей к этой области вернулся лишь с появлением работ А. Лотка [46],[56]. Одним из основных вкладом А. Лотка в эту теорию была концепция восстановления такой популяции, структурированной по возрасту, математическая формулировка которой даётся специальным *уравнением восстановления*:

$$b(t) = \int_0^\infty b(t-a)\beta(a)\mathcal{F}(a)\,\mathrm{d}a. \tag{1}$$

Это уравнение вычисляет текущий уровень воспроизводства по предыдущей истории популяции. Здесь $\mathcal{F}(a)$ – вероятность того, что индивидуум достигнет возраста a, $\beta(a)$ – характеристика воспроизводства, отражающая способность индивидуумов возраста a давать потомство, а $b(t)$ – среднее число индивидуумов произведенных в момент t. Справедливости ради, стоит отметить, что такая концепция модели уже была изложена в работе Эйлера [34], однако уравнение (1) выписано не было. По этой причине уравнение восстановления часто называется уравнением Лотка-Эйлера.

Реально, соотношение (1) описывает распределение только в случае достаточно больших t, когда начальное распределение уже «забывается». Возникает естественный вопрос об эволюции начального распределения за конечный промежуток времени.

Первым, кто дал разумный ответ на этот вопрос, был А. Мак-Кендрик. В своей работе [47], он получил уравнение

$$\frac{\partial x(t,a)}{\partial t} + \frac{\partial x(t,a)}{\partial a} = -\mu(t,a)x(t,a), \tag{2}$$

динамики структурированной по возрасту популяции. Здесь $x(t,a)$ – плотность индивидуумов возраста $a \in [0,\infty)$ в момент времени $t \in [0,\infty)$, а показатель μ характеризует темп смертности. Однако, по неясным причинам, эта работа Мак-Кендрика не получила должного внимания и была забыта, во всяком случае достаточно долго не цитировалась другими авторами.

Двадцать лет спустя Х. фон-Фёрстер вновь получает уравнение (2), лишь в других обозначениях [61]. В этой работе Х. фон-Фёрстер указывает, что уравнение (1), $x(t,0) := b(t)$, должно рассматриваться как граничное условие для уравнения (2). Произошедшее здесь объединение подходов А.Лотка и А. Мак-Кендрика стало одним из ключевых моментов в развитии теории структурированных популяций.

Следующим этапом в анализе моделей структурированных по возрасту популяций стало исследование влияния общей численности популяции на основные характеристики её динамики такие, например, как темп смертности и воспроизводство потомства. Одной из первых работ в этом направлении стало исследование М. Гуртина и Р. Мак-Ками [39], в котором была рассмотрена нелинейная интегро-дифференциальная версия системы (1),(2):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x(t,a)}{\partial t} + \dfrac{\partial x(t,a)}{\partial a} = -\mu(P(t),a)x(t,a), \\ P(t) = \displaystyle\int_0^\infty x(a,t)\,\mathrm{d}a, \\ x(t,0) = \displaystyle\int_0^\infty \beta(P(t),a)x(t,a)\,\mathrm{d}a. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь коэффициенты β и μ, как и выше, характеризуют рождаемость и смертность, а вот $P(t)$ характеризует численность популяции в момент t. Используя метод характеристик и приводя (3) к системе нелинейных интегральных уравнений Вольтера, М. Гуртин и Р. Мак-Ками исследовали вопросы существования, единственности решения системы (3), а также асимптотической устойчивости стационарных состояний системы.

Дж. Вебб предложил другой подход к исследованию структурированных по возрасту популяций [62]. Он рассмотрел динамику модели (3) как действие нелинейной полугруппы в пространстве начальных распределений по возрасту [67]. Этот подход позволил не только дать исчерпывающие ответы на вопросы существования, единственности и асимптотического поведения решений системы (3), но и дал возможность существенно продвинуться в анализе дальнейших обобщений. Примером одного из таких обобщений, важного в эпидемиологии и биологии, является учёт возможной диффузии в уравнении, описывающем динамику популяции [63].

Анализ данных практических наблюдений показывает, что меняющийся линейно со временем возраст индивидуумов не всегда хорошо отражает особенности их индивидуального развития и популяции в целом. Понимание и признание этого факта подтолкнуло исследователей к изучению моделей, в которых структурирование проводится по параметрам, имеющим более сложную, чем линейную зависимость от времени, таким, например, как размер объекта или его вес, содержание калорий и т.п.. Одна из первых моделей такого типа возникла в микробиологии [19],[20],[37],[57]. Эта модель описывает динамику популяции клеток, которые воспроизводятся делением, при этом в качестве параметра структурирования рассматривается размер клетки.

Сегодня анализ моделей динамики структурированных популяций является активно развивающейся областью математики. Достижения соответствующей теории нашли множество применений в задачах прикладного характера, например, в биологической физике [42],[48],[50],[51],[64],[65], в математической экономике [18],[21],[35], демографии [26],[43],[45],[53] и эпидемиологии [23],[27],[36].

Особый интерес с практической точки зрения представляют задачи «правильного» управления структурированными (промысловыми) популяциями с целью получения максимальной выгоды от их эксплуатации. Хорошим примером таких задач является оптимальное (по некоторому критерию качества) управление возобновляемыми биологическими ресурсами, например, отлов рыбы в коммерческих целях [12], управление вырубкой и посадкой леса [40], [66], и т.п.. Одним из инструментов решения возникающих здесь задач оптимизации является принцип максимума Понтрягина, предложенный Л.С. Понтрягиным и его учениками [16] в середине прошлого века, или подходящая адаптация этого принципа [2],[17].

В своей первой формулировке (как в [16]) этот принцип позволяет получить необходимые условия оптимальности в задах управления системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями. Позднее этот принцип был распространен на задачи оптимального управления системами с распределенными параметрами (иначе, системами, динамика которых описывается уравнениями в частных производных), см., например, [3],[11].

Значимой работой в задачах управления структурированными популяциями было исследование М. Брокэйта [22]. Ему удалось доказать принцип максимума Понтрягина для задач оптимизации, динамика в которых описывается уравнением $(3)_1$ с нелокальным граничным условием $(3)_2$.

Из большого числа статей, последовавших после работы [22], отметим исследования В. Вельова [38],[58],[59],[60]. В работах [59],[60], например, были предложены методы оптимального управления гетерогенными системами, частным случаем которых являются структурированные по физиологическим параметрам популяции.

Исследования Р.-У.Гётз, с соавторами [40],[41],[66] и Н. Като [44] представляют серию работ по оптимальному управлению структурированными по размеру популяциями при учете различных критериев качества и особенностей самих популяций. В частности работы [40],[66],[41] акцентированы на применении достижений математической теории оптимального управления к выработке правильной стратегии рационального лесопользования.

Настоящая работа посвящена развитию теории оптимального управления структурированными по размеру популяциями на нетривиальных стационарных состояниях. Под моделью понимаем совокупность уравнений, описывающую динамику структурированной по размеру популяции. В работе мы рассматриваем две таких модели.

В *первой модели* анализируется динамика одной популяции, в которой индивидуумы взаимодействуют через (внутривидовую) конкуренцию. *Вторая модель* описывает динамику совокупности популяций, также взаимодействующих между собой через конкуренцию, но конкуренция здесь может быть или скалярной (=суммарной) или векторной, отражающей вклад каждой из популяций в конкуренцию. В обеих моделях предполагается сочетание естественного и промышленного возобновления.

В первой модели динамика структурированной по размеру популяции, доставляется дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial}{\partial t}x(t,s)+\frac{\partial}{\partial s}\big(g(E(t),s)x(t,s)\big)+\big(\mu(E(t),s)+u(s)\big)x(t,s)=0, \tag{4}$$

в котором $x(t,s)$ – плотность индивидуумов (или объектов) размера s в момент времени t; функции g и μ характеризуют собой темпы роста и смертности при заданном уровне конкуренции E, а функция u отражает интенсивность эксплуатации популяции. Темп роста g фактически означает скорость, с которой объект переходит от меньшего размера к большему за единицу времени [54]:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=g(E,s).$$

Показатель E характеризует уровень конкуренции в популяции. Мы рассматриваем случай конкуренции в *симметричной* форме, когда уровень конкуренции одинаков для индивидуумов всех размеров:

$$E(t)=\int_0^S \chi(s)x(t,s)\,\mathrm{d}s. \tag{5}$$

Здесь χ — непрерывная, положительная функция, отражающая вклад каждого индивида размера s в уровень конкуренции; S – наибольший размер, до которого осуществляется управление популяцией. Данная симметричная форма конкуренции (5), в зависимости от вида популяции, может быть интерпретирована по разному. Например, в работах [40],[66] уровень конкуренции интерпретируется как плотность леса, оказывающая влияние на скорость роста и смертность индивидуумов.

Замечание 1. Несимметричная форма конкуренции может иметь различную форму. Например, когда большие индивидуумы могут влиять на развитие меньших, но не наоборот, то форму конкуренции можно взять в виде

$$E(t,s) = \int_s^S \chi(\tau)x(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Модели с такой формой конкуренции рассматривались в работах [4],[24], [25], [28]. Заметим, что модели с симметричной и несимметричной формами конкуренции являются различными по существу. Из результатов для одного из этих случаев не вытекают результаты для другого.

Как мы отметили выше, функция u отвечает за интенсивность эксплуатации популяции и является управлением в нашей модели. Будем говорить, что управление u является *допустимым,* если оно измеримо и выполнено двустороннее ограничение

$$0 \leq U_1(s) \leq u(s) \leq U_2(s), \quad s \in [0,S],$$

где U_1 и U_2 некоторые непрерывные на отрезке $[0,S]$ функции. Первая из этих функций характеризует минимальный уход за популяцией, вторая отражает технологические ограничения.

Вывод уравнения (4) с подробной биологической интерпретацией можно найти в работах А. де-Руса [54],[55].

Воспроизводство популяции (=приток новых индивидуумов нулевого размера) определяется естественным и промышленным возобновлением. Мы предлагаем новую форму для части естественного возобновления, при которой снижается эффект влияния на воспроизводство каждого последующего прироста плотности популяции. Точнее, возобновление в целом задаётся следующей формулой:

$$x(t,0) = \int\limits_0^S r(E(t),s)x^\beta(t,s)\,\mathrm{d}s + p, \tag{6}$$

где r – неотрицательная, непрерывная функция, характеризующая способность индивидуума размера s давать потомство при уровне конкуренции E; показатель $\beta, 0 < \beta < 1$, отражает нелинейную зависимость воспроизводства от численности индивидуумов а неотрицательная величина p отвечает за постоянное промышленное возобновление.

Во второй модели, мы рассматриваем совокупность из N взаимодействующих популяций. Предполагается, что их совместная динамика описывается следующей системой уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}x_i(t,s)+\frac{\partial}{\partial s}\big(g_i(E(t),s)x_i(t,s)\big)+\big(\mu_i(E(t),s)+u_i(s)\big)x_i(t,s)=0, \tag{7}$$

$$x_i(t,0)=\int\limits_0^{S_i} r_i(E(t),s)x^{\beta_i}(t,s)\,\mathrm{d}s+p_i, \quad x_i(0,s)=x_{0i}(s). \tag{8}$$

Аналогично предыдущей модели, $x_i(t,s)$ означает плотность индивидуумов, i-ой популяции размера s в момент времени t. Параметры g_i, μ_i, u_i, r_i, S_i, p_i, β_i и x_{0i} имеют тот же смысл, что и выше, а индекс i означает номер популяции, $i=\overline{1,N}$.

Мы исследуем два частных случая второй модели. В первом из них конкуренция имеет интегрированный характер и является суммой вкладов в конкуренцию всех N популяций

$$E(t)=\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^{S_i}\chi_i(s)x_i(t,s)\,\mathrm{d}s. \tag{9}$$

Во втором случае рассматривается динамика взаимодействия двух популяций, а конкуренция является векторной величиной, компоненты которой отражают вклады каждой из популяций в общий уровень конкуренции:

$$E(t):=\{E_1(t),E_2(t)\}=\left\{\int\limits_0^{S_1}\chi_1(s)x_1(t,s)\,\mathrm{d}s,\int\limits_0^{S_2}\chi_2(s)x_2(t,s)\,\mathrm{d}s\right\}. \tag{10}$$

В обоих случаях функция χ_i имеет тот же смысл, что и в первой модели и отражает влияние i-ой популяции на вклад в конкуренцию.

Для описанных моделей мы приводим анализ существования нетривиальных стационарных состояний в динамике популяции при выбранных управлениях и при естественных ограничениях (**A1**)-(**A3**) на параметры модели, которые описаны ниже в первой главе. Основной смысл этих ограничений заключается в ухудшении условий развития популяции, а именно замедлении роста и увеличении смертности при увеличении конкуренции, а также отражает тот факт, что рост конкуренции влияет не меньше на развитие индивидуумов малых размеров, чем на развитие больших.

Кроме этого, для моделей, описывающих динамику N взаимодействующих популяций, доказано существование пары, из векторов допустимых управлений $\boldsymbol{u} := (u_1, \ldots, u_N)$ и постоянного промышленного возобновления $\boldsymbol{p} := (p_1, \ldots, p_N)$, доставляющей максимум функционала выгоды от эксплуатации популяций.

Наконец, мы предлагаем два численных подхода для поиска оптимальных управлений среди стационарных. Первый подход основан на необходимом условие оптимальности, которое получено с помощью метода игольчатой вариации. Благодаря необходимому условию строится функция переключения, позволяющая численно искать оптимальное управление. Второй подход заключается в комбинировании принципа максимума Понтрягина и метода стрельбы по параметру — уровню конкуренции.

В первой главе подробно описаны ограничения (**A1**)-(**A3**) накладываемые на коэффициенты моделей и доказана теорема существования и единственности нетривиального стационарного состояния для модели с одной популяцией. Такое состояние не зависит от времени и, следовательно, при выбранном управлении u и промышленном возобновлении p, должно удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(g(E,s)x(s)\big) = -(\mu(E,s)+u(s))x(s), \\ x(0) = \int\limits_0^S r(E,s)x^{\beta}(s)\,\mathrm{d}s + p \\ E = \int\limits_0^S \chi(s)x(s)\,\mathrm{d}s. \end{cases} \tag{11}$$

Теорема 1. [8, 31] *Пусть параметры модели (4)-(6) непрерывны и удовлетворяют условиям* (**A1**)-(**A3**). *Тогда при заданном допустимом управлении и фиксированном неотрицательном промышленном воспроизводстве существует и при том единственное нетривиальное стационарное состояние этой модели.*

Замечание 2. Следует отметить, что при отсутствии промышленного возобновления, т.е. при $p = 0$, помимо нетривиального стационарного состояния популяции имеется и тривиальное — нулевое.

В этой главе исследуется вопрос о существовании стационарного состояния во второй модели при векторной форме конкуренции. Такое состояние удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(g_i(E,s)x_i(s)\big) = -(\mu_i(E,s)+u_i(s))x_i(s), \\ x_i(0) = \int\limits_0^{S_i} r_i(E,s)x_i^{\beta_i}(s)\,\mathrm{d}s + p_i, \\ E := (E_1,E_2) = \left(\int\limits_0^{S_1} \chi_1(s)x_1(s)\,\mathrm{d}s, \int\limits_0^{S_2} \chi_2(s)x_2(s)\,\mathrm{d}s\right), \end{cases} \tag{12}$$

где $i = 1,2$. Более того, доказано, что при выполнении дополнительных условий

$$\frac{\partial x_i}{\partial E_i} \leq \frac{\partial x_i}{\partial E_j}, \quad i = 1,2, \quad j = 1,2, \quad i \neq j, \tag{13}$$

стационарные состояния x_1, x_2 определяются единственным образом. С биологической точки зрения это условие можно интерпретировать как более сильное влияние прироста внутри-видовой конкуренции чем прирост межвидовой. Точнее, справедлива следующая

Теорема 2. [6] *Пусть функции g_i, μ_i, r_i непрерывны по своим аргументам и удовлетворяют условиям* (**A1**)-(**A3**), *а управления u_i измеримы и удовлетворяют ограничениям*

$$U_{i,1}(s) \leq u_i \leq U_{i,2}(s), \quad s \in [0, S_i],$$

с некоторыми непрерывными на $[0, S_i]$ функциями ограничений $U_{i,1}$ и $U_{i,2}$, $0 \leq U_{i,1} \leq U_{i,2}$, $i = 1, 2$. Тогда существует ненулевое стационарное решение задачи (7),(8),(10) и такое решение единственно, если коэффициенты g_i, μ_i, r_i дифференцируемы и выполнены условия (13).

При доказательстве приведённых результатов используются методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, математического и функционального анализа.

Вторая глава работы посвящена вопросу оптимального управления совокупностью из N популяций на стационарном состояние. В качестве функционала рассматривается суммарная выгода от эксплуатации популяций

$$J_N(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) := \sum_{i=1}^{N} \int_0^{S_i} c_i(s) u_i(s) x_i(s)\, \mathrm{d}s, + x_i(S_i) c_{S,i} - p_i c_{0,i} \qquad (14)$$

для которых ищется максимум по вектору допустимых управления $\boldsymbol{u} := (u_1, \ldots, u_N)$ и вектору промышленного возобновления $\boldsymbol{p} := (p_1, \ldots, p_N)$, когда стационарное распределение популяций по размерам x_i отвечает интегро-дифференциальной системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(g_i(E, s) x_i(s)\big) = -(\mu_i(E, s) + u_i(s)) x_i(s), \\ x_i(0) = \displaystyle\int\limits_0^{S_i} r_i(E, s) x_i^{\beta_i}(s)\, \mathrm{d}s + p_i, \\ E = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^{S_i} \chi_i(s) x_i(s)\, \mathrm{d}s. \end{cases} \qquad (15)$$

В функционале (14) функция $c_i(s)$ отражает цену за единицу i-ой популяции размера s. Этот функционала представляет собой сумму доходов от реализации отобранной части популяций и полного изъятия индивидуумов максимальных размеров S_i с учётом затрат на промышленное возобновление.

В этой главе доказывается существование допустимого вектора управлений u и вектора промышленных возобновлений p, $0 \leq p_i \leq P_i$ (такие p_i и p, где P_i - некоторые константы, называются *допустимыми*), для которых функционал выгоды (14) принимает максимальное значение на соответствующем нетривиальном стационарном состояние (среди всех возможных значений на стационарных состояниях). Эта теорема имеет следующую формулировку

Теорема 3. [52] *Пусть, при всех* $i = \overline{1, N}$, *функции* c_i, g_i,μ_i *и* r_i *непрерывны, при этом* g_i, μ_i, r_i *удовлетворяют условиям* (**A1**)-(**A3**) *а* g_i, μ_i *отделены от нуля. Тогда существуют допустимые управления* u_i *и значения восстановления* $p_i, p_i \geq 0$, *для которых функционал выгоды (14) принимает своё максимальное значение на соответствующем нетривиальном стационарном решении системы (15).*

Также, в этой главе сформулирована теорема о существовании допустимых вектора управлений u и вектора промышленных восстановлений p, доставляющих максимум функционала выгоды для второй модели при векторной форме конкуренции

Теорема 4. [6] *Пусть параметры модели (7),(8),(10) непрерывны по своим аргументам и при каждом* i *удовлетворяют условиям* (**A1**)-(**A3**) *по каждой из компонент конкуренции, тогда существуют допустимые управления* u_i *и промышленные воспроизводства* p_i, $i = 1, 2$, *что некоторое из соответствующих стационарных состояний этой модели доставляет максимум дохода от эксплуатации совокупности популяций* *на стационарных состояниях.*

Теоремы 3 и 4 доказываются методами функционального анализа.

В третьей главе предложены два метода решения оптимизационной задачи (11),(14) при $N = 1$. Первый метод основан на использовании необходимого условия оптимальности (см. Теорему 5, [33]), доставляемого вычислением первой вариации функционала (14). Формулировку необходимого условия здесь не приводим из-за громоздкости формул. Основная идея второго подхода заключается в комбинированном использовании метода стрельбы по уровню конкуренции и принципа максимума Понтрягина. Показано, что получаемое в типичной ситуации оптимальное управление является управлением релейного типа.

В этой же главе приводятся иллюстрирующие примеры, в которых оптимальное управление, имеет как одну точку переключения (см. Рис. 9) так и несколько (см. Рис. 14). Обсуждается вопрос применимости комбинированного подхода к задачам оптимизации, когда динамика популяций описывается второй моделью.

Автор диссертации выражает благодарность своему научному руководителю профессору А. А. Давыдову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

1. Модели и предположения

Здесь мы сперва приводим описание основных исследуемых моделей с объяснением естественности ограничений, накладываемых на параметры этих моделей. Затем формулируем основные результаты этой главы, которыми являются теоремы существования и единственности нетривиального стационарного решения в изучаемых моделях. Мы начинаем с простейшего случая – модели динамики одной популяции с учетом внутривидовой конкуренции, а затем получаем аналогичные результаты для модели динамики совокупности конкурирующих популяций.

1.1. Модель одной популяции.

В этой модели динамика популяции задаётся дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка (см. [49],[54],[55]) и имеет следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial t}x(t,s)+\frac{\partial}{\partial s}\big(g(E(t),s)x(t,s)\big)+\big(\mu(E(t),s)+u(s)\big)x(t,s)=0, \qquad (16)$$

где

t – время;

s – размер индивидуума, $s\in[0,S]$;

S – максимальный размер индивидуума;

$x(t,s)$ – плотность индивидуумов размера s, в момент времени t;

$g(E,s)$ – коэффициент скорости роста индивидуумов размера s, при заданном уровне конкуренции E;

$\mu(E,s)$ – показатель смертности индивидуумов размера s, при заданном уровне конкуренции E;

$u(s)$ – интенсивность эксплуатации популяции, которая и является управлением в изучаемой модели.

Отметим, что здесь и далее и мы рассматриваем управление, зависящее лишь от размера индивидуумов, но не зависящее от времени. Прикладной смысл такого управления состоит в более простой практической реализации такого стиля управления.

Далее, слагаемое, характеризующее эксплуатацию популяции, мы выбираем в билинейной форме ux, которая соответствует отбору части популяции. Это мотивировано тем, что директивная эксплуатация в форме u (вместо ux) даже в простейшей логистической модели динамики популяции при оптимизации эксплуатации приводит к неустойчивому положению равновесия [1]. Билинейная форма этого слагаемого использовалась в целом ряде работ (см., например, [40]).

Как мы отмечали выше, параметр E в уравнении (16) характеризует уровень конкуренции в популяции. Его мы берем одинаковым для индивидуумов всех размеров, то есть в симметричной форме

$$E(t) = \int_0^S \chi(s)x(t,s)\,\mathrm{d}s. \tag{17}$$

Здесь χ – непрерывная, положительная функция, отражающая вклад индивидуумов различных размеров в уровень конкуренции. Данная форма конкуренции может быть интерпретирована как плотность индивидуумов в заданном ареале, например, как плотность леса [40],[66].

Воспроизводство популяции мы берем в виде суммы естественного и промышленного возобновления. Оно доставляет краевое условие в модели и задается формулой

$$x(t,0) = \int\limits_0^S r(E(t),s)x^{\beta}(t,s)\,\mathrm{d}s + p, \tag{18}$$

где функция r характеризует репродуктивность индивидуумов различных размеров при имеющемся уровне конкуренции в популяции.

Отметим, что здесь предложена новая формула для естественного воспроизводства популяции, в которой в подынтегральном выражении стоит плотность индивидуумов в степени β, $0 < \beta < 1$. Эта степень отвечает за нелинейный характер зависимости воспроизводства от плотности индивидуумов, когда последующее приращение плотности меньше влияет на воспроизводство, чем предыдущее. В моделях предшественников этот показатель обычно равен 1. Можно показать, что при $\beta \geq 1$ нетривиального стационарного решения может и не быть, в частности, при асимметричной конкуренции [4].

Наконец, неотрицательная величина p характеризует возобновление популяции промышленным путём, например, посадкой леса.

Первой из решаемых в этой работе задач является анализ существования нетривиальных стационарных решений в изучаемых моделях. Стационарность предполагает отсутствие зависимости от времени, поэтому для рассматриваемой модели такие решения, если они существуют, должны удовлетворять следующей системе уравнений

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(g(E,s)x(s)\big) = -(\mu(E,s) + u(s))x(s), \tag{19}$$

$$x(0) = \int\limits_0^S r(E,s)x^{\beta}(s)\,\mathrm{d}s + p, \tag{20}$$

$$E = \int\limits_0^S \chi(s)x(s)\,\mathrm{d}s, \tag{21}$$

которая отличается от исходной модели удалением слагаемых и аргументов, отражающих такую зависимость.

1.2. Теорема существования и единственности стационарного решения для одной популяции

Эту теорему мы доказываем в предположении, что коэффициенты модели (19) удовлетворяют следующим условиям:

(A1) темпы прироста g и смертности μ всюду положительны и

$$g(E_1, s) \geq g(E_2, s), \qquad \mu(E_1, s) \leq \mu(E_2, s),$$

при любых $s \in [0, S]$, и E_1, E_2, $0 \leq E_1 < E_2$;

(A2) показатель репродуктивности всюду неотрицателен, положителен на некотором интервале размеров из $[0, S]$ при любом значении уровня конкуренции, и

$$r(E_1, s) \geq r(E_2, s),$$

при любых $s \in [0, S]$, и E_1, E_2, $0 \leq E_1 < E_2$;

(A3) $\dfrac{g(E_1, 0)}{g(E_1, s)} \leq \dfrac{g(E_2, 0)}{g(E_2, s)}$, при любых $s \in [0, S]$, и E_1, E_2, $0 \leq E_1 < E_2$.

Эти ограничения имеют ясную биологическую интерпретацию, поэтому вполне естественны. Первые два из них означают, что условия для развития популяции не улучшаются при росте конкуренции, то есть при увеличении уровня конкуренции в популяции коэффициенты роста и рождаемости не растут, в то время как коэффициент смертности не убывает. Что касается последнего условия, то оно отражает не меньшее негативное влияние роста конкуренции на прирост для индивидуумов меньшего размера, чем для индивидуумов большего (см. Рис. 1).

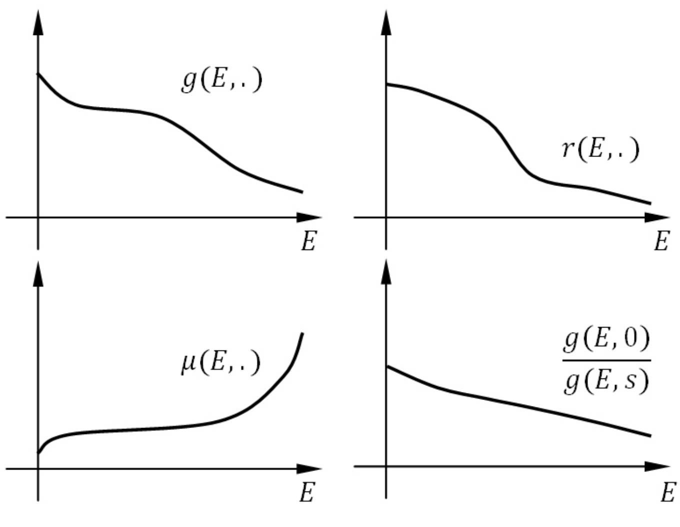

Рис. 1.

Одним из основным результатов этого параграфа является следующее утверждение о существовании и единственности стационарного решения.

Теорема 1. [8, 31] *Пусть функции g, μ и r непрерывны по своим аргументам и удовлетворяют условиям* (**A1**)-(**A3**). *Тогда при заданном допустимом управлении и фиксированном неотрицательном промышленном воспроизводстве существует и единственно нетривиальное стационарное решение модели (4)-(6).*

Доказательство. Как мы отметили выше стационарное решение x, $x = x(s, E)$ задачи (16),(18) должно удовлетворять следующему уравнению

$$\frac{\mathrm{d}\big(g(E,s)x(s)\big)}{\mathrm{d}s} = -\Big(\mu(E,s) + u(s)\Big)x(s), \tag{22}$$

где u — заданное управление, а E – соответствующее значение показателя внутривидовой конкуренции (17).

Понятно, что значение этого показателя зависит от решения x, но сначала мы рассмотрим его как независимый параметр.

При таком подходе решение уравнения (22) легко находится. Оно имеет вид

$$x(s,E) = \frac{g(E,0)x(0,E)}{g(E,s)} e^{-\int\limits_0^s m(\tau,E)\,\mathrm{d}\tau}, \tag{23}$$

где

$$m(\tau, E) = \frac{\mu(\tau,E) + u(\tau)}{g(\tau,E)}.$$

Подставляя это решение в (18), мы получаем уравнение на значение величины $x_0 := x(0,E)$:

$$x_0 - p = x_0^\beta \int\limits_0^S r(E,s) \left[\frac{g(E,0)}{g(E,s)} e^{-\int\limits_0^s m(E,\tau)\,\mathrm{d}\tau}\right]^\beta \mathrm{d}s\,. \tag{24}$$

В силу (**A1**)-(**A3**), интеграл в последнем выражении принимает конечное положительное значение.

Очевидно, правая часть уравнения является положительной строго вогнутой функцией от x_0 на положительной полуоси с нулевым значением в нуле. Следовательно, графики этой функции и линейной функции $x_0 - p$ с неотрицательной величиной p имеют одну точку пересечения при $x_0 > 0$ (см. Рис. 2)

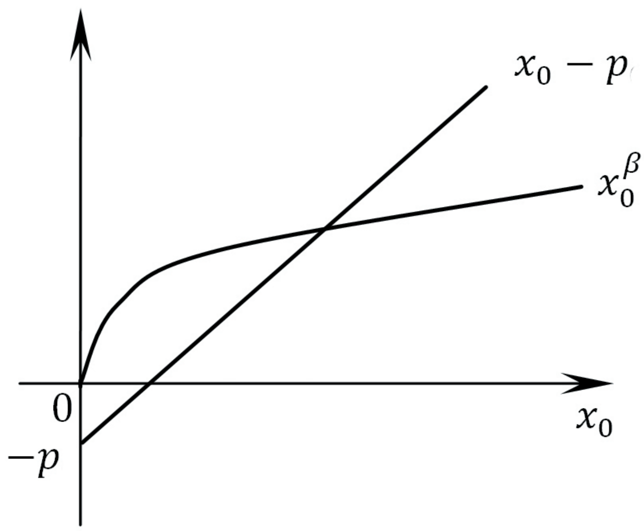

Рис. 2.

Таким образом, для любого значения $\beta \in (0, 1)$ и заданного неотрицательного p существует только одно положительное решение x_0 уравнения (24). Нетрудно видеть, что это решение больше p.

Таким образом, мы можем рассматривать найденное стационарное решение как функцию от зафиксированного выше значения уровня конкуренции E :

$$x(s, E) = \frac{x_0 g(E, 0)}{g(E, s)} e^{-\int\limits_0^s m(\tau, E)\, \mathrm{d}\tau}. \tag{25}$$

Для этого решения справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.1. *При любом $s \in [0, S]$ решение (25) является убывающей функцией по $E \geq 0$, если выполнены условия* (**A1**)-(**A3**).

Действительно, согласно условиям (**A1**)-(**A3**), подынтегральное выражение в уравнении (24) является убывающей по E функцией. Следовательно, коэффициент при x_0^β в этом уравнении и решение x_0 этого уравнения также убывающая по E функция. Отсюда и из условий (**A1**)-(**A3**) следует, что $x(s,.)$ невозрастающая функция по E. Таким образом, предложение 1.1 справедливо.

Подставляя теперь решение (25) в интеграл (17) получим непрерывную функцию f от параметра E :

$$f(E) = \int_0^S \chi(s) x(s, E)\, \mathrm{d}l.$$

Нетрудно видеть, что из предложения 1.1 сразу вытекает

Следствие 1. *При выполнении условий* (**A1**)-(**A3**), *функция f является непрерывной невозрастающей функцией от $E \geq 0$.*

Таким образом, при росте параметра E от нуля до положительного значения $f(0)$ принимаемое этой функцией значение монотонно изменяется, не возрастая, от $f(0)$ до величины $f(f(0))$. Следовательно разность $E - f(E)$ является возрастающей функцией на отрезке $[0, f(0)]$, имеющей отрицательное значение при $E = 0$ и неотрицательное при $E = f(0)$. Следовательно, существует только одно значение $E_0 \in [0, f(0)]$ в котором эта разность обращается в ноль.

Для этого значения решение $x(., E_0)$ будет давать равный ему уровень конкуренции в популяции. Следовательно, это решение является искомым стационарным состоянием. Это стационарное решение определено однозначно, что нетрудно видеть.

Теорема 1 доказана. $\square$

Замечание 3. Из этой теоремы легко следует существование стационарного решения для случая, когда коэффициенты модели зависят только от s. Для этого предыдущее доказательство можно прервать сразу после того, как будет доказано, что уравнение (24) имеет единственное решение на положительной полуоси $x_0 > 0$.

Замечание 4. При $\beta = 1$ теорема 1 останется справедливой, если дополнительно потребовать выполнения следующего неравенства

$$\int\limits_0^S r(0,s)\frac{g(0,0)}{g(0,s)}e^{-\int\limits_0^s m(\tau,0)\,\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}l < 1.$$

1.3. Стационарное состояние в динамике взаимодействующих популяций.

Здесь мы рассматриваем обобщение модели из предыдущего параграфа на случай динамики совокупности популяций, когда уровень конкуренции в среде отражает вклады в конкуренцию всех популяций совокупности.

Точнее, совокупность состоит из N популяций, динамика i-ой из которых доставляется следующей системой уравнений в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial x_i(t,s)}{\partial t} + \frac{\partial\big(g_i(E(t),s)x_i(t,s)\big)}{\partial s} = -(\mu_i(E(t),s) + u_i(s))x_i(t,s), \qquad (26)$$

с граничными условиями

$$x_i(t,0) = \int\limits_0^{S_i} r_i(E(t),s)x_i^{\beta_i}(t,s)\,\mathrm{d}s + p_i, \qquad (27)$$

где, $i = 1,\ldots,N$ означает i-ую популяцию. Здесь функции и величины x_i, g_i, μ_i, u_i, r_i, S_i, p_i, β_i имеют тот же смысл, что и в рассмотренной выше модели.

Взаимодействие между популяциями осуществляется через конкуренцию E. В зависимости от формы E мы будем рассматривать два случая.

В первом из них конкуренция является просто суммой вкладов в конкуренцию всех популяций изучаемой совокупности

$$E(t) = \sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^{S_i} \chi_i(s)x_i(t,s)\,\mathrm{d}s, \qquad (28)$$

где положительные функции χ_i характеризуют вклад индивидуумов i-ой популяции из совокупности в уровень конкуренции.

В этой ситуации доказательство существования и единственности нетривиального стационарного состояния системы (26)-(28) при аналогичных предположениях (**A1**)-(**A3**) на параметры модели g_i, μ_i, r_i, проводится по аналогии, тем же методом что и доказательство теоремы 1 выше. Это обобщение было сделано совместно с А.А.Панешом в работе [52]. Точнее, справедлива следующее утверждение.

Теорема 2'.[52] *Пусть функции g_i, μ_i, r_i непрерывны по своим аргументам и удовлетворяют условиям* (**A1**)-(**A3**)*, промышленное возобновление неотрицательно, а управления u_i измеримы и удовлетворяют условиям*

$$U_{i,1}(s) \leq u_i \leq U_{i,2}(s), \quad s \in [0, S_i],$$

с некоторыми непрерывными на $[0, S_i]$ функциями ограничений $U_{i,1}$ и $U_{i,2}$, $0 \leq U_{i,1} \leq U_{i,2}$, $i = 1, \ldots, N$. Тогда существует и при том единственное ненулевое стационарное решение задачи (26),(27),(28).

Доказательство этой теоремы приведено в [52]. Это доказательство мы здесь не приводим, поскольку эта теорема не является результатом данной работы, хотя ниже мы докажем для этой модели существование оптимального решения.

Во втором случае мы рассматриваем динамику совокупности из двух популяций x_1 и x_2, когда конкуренция является величиной векторной, компоненты которой - вклады в конкуренцию каждой из популяций совокупности:

$$E(t) := (E_1(t), E_2(t)) = \left(\int_0^{S_1} \chi_1(s) x_1(t,s)\,\mathrm{d}s, \int_0^{S_2} \chi_2(s) x_2(t,s)\,\mathrm{d}s \right). \quad (29)$$

Как и прежде, мы предполагаем, что для параметров динамики каждой из популяций выполнены условия (**A1**)-(**A3**) по каждой из компонент вектора конкуренции (при любой заданной другой).

Стационарное решение модели должно удовлетворять системе дифференциальных уравнений (26) без производной по времени и без времени t в аргументах функций:

$$\frac{\mathrm{d}\big(g_i(E,s)x_i(s)\big)}{\mathrm{d}s} = -\big(\mu_i(E,s) + u_i(s)\big)x_i(s),$$

где показатель конкуренции уже имеет некоторое постоянное векторное значение $E = (E_1, E_2)$, соответствующее этому решению, а $i = 1, 2$.

Если, как и выше, не связывать этот показатель с решением, а рассмотреть его как двумерный вектор параметров, то решение последней системы также легко находится. Оно имеет вид

$$x_i(s,E) = \frac{g_i(E,0)x_i(0,E)}{g_i(E,s)} e^{-\int\limits_0^s m_i(\tau,E)\,\mathrm{d}\tau}, \tag{30}$$

где

$$m_i(s,E) = \frac{\mu_i(s,E) + u_i(s)}{g_i(s,E)}.$$

Мы будем предполагать, что так найденные решения по отношению к параметрам E_1 и E_2 удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial x_i}{\partial E_i} \le \frac{\partial x_i}{\partial E_j}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \quad i \ne j. \tag{31}$$

Замечание 5. Последние условия имеют простую биологическую интерпретацию: «маргинальное» влияние на объем популяции межвидовой конкуренция всегда не сильнее, чем внутривидовой. И, если этот тезис и может быть ошибочным далеко от стационарного решения, то вблизи биологического равновесия такое предположение вполне естественно.

Теорема 2. [6] *Пусть функции g_i, μ_i, r_i непрерывны по своим аргументам и удовлетворяют условиям* (**A1**)-(**A3**)*, промышленное возобновление неотрицательно, а управления u_i измеримы и удовлетворяют условиям*

$$U_{i,1}(s) \le u_i \le U_{i,2}(s), \quad s \in [0, S_i],$$

с некоторыми непрерывными на $[0, S_i]$ функциями ограничений $U_{i,1}$ и $U_{i,2}$, $0 \le U_{i,1} \le U_{i,2}$. Тогда существует ненулевое стационарное решение задачи (26),(27),(29). Более того, такое решение единственно, если функции g_i, μ_i, r_i дифференцируемы и выполнены условия (31), $i = 1, 2$.

Доказательство. Подстановка решения (30) в краевые условия (18) позволяет получить систему уравнений для плотности популяции «нулевого» размера $x_0 := (x_{1,0}, x_{2,0}) = (x_{1,0}(0, E), x_{2,0}(0, E))$:

$$x_{i,0} - p_{i,0} = x_{i,0}^{\beta_i} \int\limits_0^{S_i} r_i(E, s) \left[\frac{g_i(E, 0)}{g_i(E, s)} e^{-\int\limits_0^s m_i(E,\tau)d\tau} \right]^{\beta_i} \mathrm{d}s. \qquad (32)$$

При $p_i \ge 0$ и $\beta_i \in (0, 1)$ существует единственное положительное решение $x_{0,i}$ уравнения (32) по тем же причинам, что и в случае выше с одной популяцией, что нетрудно видеть. Подстановка этого решения в (30) даёт стационарное решение, соответствующее заданному значению параметра конкуренции $E = (E_1, E_2)$.

Покажем, что существует такое значение параметра конкуренции и соответствующие ему стационарные решения (30), для которых показатели конкуренции, вычисленные по формуле (29), доставляют в точности это значение.

С этой целью рассмотрим следующие функции f_i и F_i от параметров E_1, E_2 :

$$f_i(E_1, E_2) = \int\limits_0^{S_i} \chi_i(l) x(l, E_1, E_2)\, \mathrm{d}l,$$
$$F_i(E_1, E_2) := E_i - f_i(E_1, E_2).$$

В силу условий (**A1**)-(**A3**) функция f_i не возрастает с ростом компонент показателя конкуренции, поэтому функция F_1 (или F_2) при фиксированном значении параметра E_2 (соответственно E_1) строго монотонна по E_1 (соответственно по E_2) и неограниченно возрастает при $E_1 \to \infty$ (соответственно при $E_2 \to \infty$).

Но

$$F_1(0, E_2) < 0, \quad F_2(E_1, 0) < 0.$$

Следовательно, существуют функции $E_i = \phi_i(E_j)$, $i, j \in \{1, 2\}, i \neq j$, однозначно определенные при неотрицательных значениях аргумента, положительные и такие, что

$$F_1(\phi_1(E_2), E_2) \equiv 0 \quad \text{и} \quad F_2(E_1, \phi_2(E_1)) \equiv 0, \quad \text{при} \quad E_1 \geq 0, \;\; E_2 \geq 0.$$

Эти функции невозрастающие, поскольку функции f_j невозрастающие по обоим аргументам. Следовательно, в положительном квадранте существует точка пересечения графиков функций $E_i = \phi_i(E_j)$, $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$ (рис. 3). По построению координаты (E_1, E_2), такой точки доставляют значения параметров, которые совпадают с показателями конкуренции, вычисляемыми на стационарных решениях, соответствующих этим параметрам.

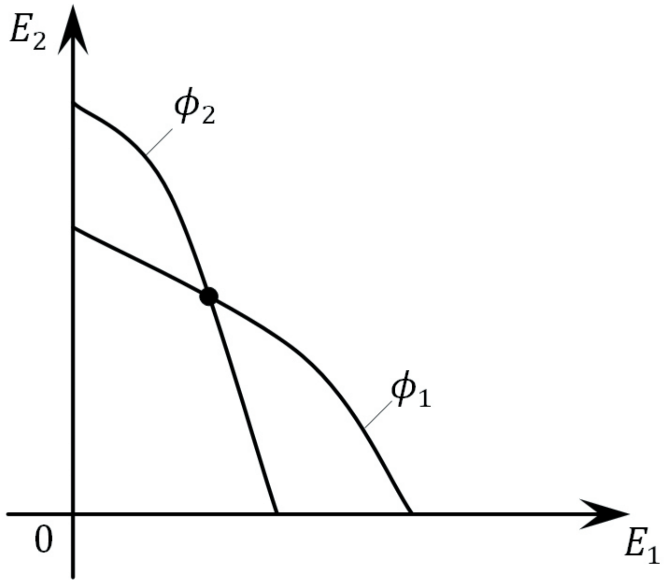

Рис. 3.

Таким образом, ненулевое стационарное решение существует. Покажем, что оно единственно, если выполнены условия (31).

Нам достаточно доказать, что в этих условиях ограничение функции F_2 на график функции ϕ_1 является строго монотонной функцией от E_2, и, следовательно, обращается в нуль не более, чем в одной точки. С этой целью посчитаем полную производную этого ограничения по E_2. Имеем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E_2}\left(E_2 - f_2(\phi_1(E_2), E_2)\right) = 1 - \frac{\partial f_2}{\partial E_1}\frac{\mathrm{d}\phi_1(E_2)}{\mathrm{d}E_2} - \frac{\partial f_2}{\partial E_2}. \tag{33}$$

Производная $\partial f_2/\partial E_2$ неположительна в силу условий (**A1**)-(**A3**), а по теореме о неявной функции из уравнения $F_1 = 0$ находим

$$\frac{\mathrm{d}\phi_1(E_2)}{\mathrm{d}E_2} = \frac{\partial f_1}{\partial E_2}\Big/\left(1 - \frac{\partial f_1}{\partial E_1}\right).$$

Далее, в силу условий (31) имеем оценку

$$|\,\mathrm{d}\phi_1(E_2)/\,\mathrm{d}E_2| < 1.$$

Отсюда, учитывая эти же условия в (33), находим

$$\mathrm{d}F_2(\phi_1(E_2), E_2)/\,\mathrm{d}E_2 > 0.$$

Таким образом, ограничение функции F_2 на график функции ϕ_1 действительно является строго монотонной функцией от E_2. Следовательно, искомый показатель конкуренции $E = (E_1, E_2)$ и соответствующие ему стационарное решение (30) определяются однозначно.

Теорема 2 доказана. $\square$

2. Оптимальное управление

Здесь мы формулируем задачи оптимального управления популяциями на стационарных состояниях и показываем, что решения этих задач существуют.

2.1. Задача оптимального управления совокупностью популяций.

Здесь мы оптимизируем стационарное состояние совокупности популяций, взаимодействующих через суммарный уровень конкуренции.

Как критерий «качества» управления мы рассматриваем функционал выгоды от эксплуатации популяции:

$$J_N(\boldsymbol{u}, p) := \sum_{i=1}^{N} \left(\int_0^{S_i} c_i(s) u_i(s) x_i(s) \, \mathrm{d}s + c_{S,i} x_i(S_i) - p_i c_{i,0} \right) \tag{34}$$

где $c_i(s)$, $c_{S,i}$ – агрегированные цены от эксплуатации i-ой популяции при размере индивидуумов s и полного изъятия индивидуумов размера S из i-ой популяции, соответственно. Значения $c_{i,0}$ характеризуют цену промышленного восстановления i-ой популяции. Интеграл в скобках (34) означает выгоду при эксплуатации i-ой популяции на всем промежутке размеров $[0, S_i)$. Второе же слагаемое в скобках (34) отвечает за выгоду от полного изъятия индивидуумов максимального размера из популяции.

Функции $x_i(s)$ являются стационарными решениями системы (7),(8),(9) и должны удовлетворять следующей интегро-дифференциальной системе уравнений

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(g_i(E, s) x_i(s)\big) = -(\mu_i(E, s) + u_i(s)) x_i(s), \tag{35}$$

$$x_i(0) = \int\limits_0^{S_i} r_i(E,s) x_i^{\beta_i}(s)\,\mathrm{d}s + p_i, \tag{36}$$

$$E = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^{S_i} \chi_i(s) x_i(s)\,\mathrm{d}s. \tag{37}$$

Здесь все параметры модели имеют тот же смысл, что и выше в модели динамики одной популяции.

Предполагается, что p_i и u_i удовлетворяют ограничениям

$$0 \le P_{i,1} \le p_i \le P_{i,2}, \qquad 0 \le U_{i,1} \le u_i \le U_{i,2}, \tag{38}$$

с некоторыми константами $P_{i,1}$, $P_{i,2}$ и непрерывными функциями ограничения $U_{i,1}$, $U_{i,2}$. Эти ограничения можно характеризовать как технологические или экологические. Пару $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) = \big((u_1, \dots, u_N), (p_1, \dots, p_N)\big)$ с компонентами удовлетворяющими этим ограничениям, будем называть *допустимой.*

Наша задача оптимального управления – максимизировать функционал выгоды (34) на множестве допустимых пар $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})$

$$J_N(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) \to \max_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}},$$

при условиях (35)-(37).

2.2. Существование оптимального управления совокупности взаимодействующих популяций

Здесь мы показываем что существует решение задачи оптимального управления совокупностью популяций. Сначала мы преобразуем исходную задачу к более удобному виду, затем формулируем теорему и доказываем её с помощью полезных вспомогательных утверждений.

Рассматривая E как фиксированный параметр и интегрируя (35) по s, для всех $i = \overline{1,N}$ получим

$$x_i(s,E) = x_{i,0}\frac{g_i(E,0)}{g_i(E,s)}e^{-\int\limits_0^s \frac{\mu_i(E,\tau)+u_i(\tau)}{g_i(E,\tau)}\,\mathrm{d}\tau}, \tag{39}$$

где $x_{i,0} := x_i(0,E)$.

Подстановка полученного стационарного решения (39) в функционал (34), приводит к следующему виду этого функционала:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(x_{i,0}g_i(E,0)\left[\int\limits_0^{S_i} c_i(s)e^{-\int\limits_0^s \frac{\mu_i(E,\tau)}{g_i(E,\tau)}\,\mathrm{d}\tau-\phi_i(E,s)}\,\mathrm{d}\phi_i(E,s)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{c_{S,i}x_i(S_i,E)}{g_i(E,S_i)}e^{-\int\limits_0^{S_i} \frac{\mu_i(E,\tau)}{g_i(E,\tau)}\,\mathrm{d}s-\phi_i(E,S_i)}\right]-p_ic_{i,0}\right), \tag{40}$$

где

$$\phi_i(E,s) = \int\limits_0^s \frac{u_i(\tau)}{g_i(E,\tau)}\,\mathrm{d}\tau. \tag{41}$$

Покажем, что этот функционал выгоды ограничен на множестве допустимых управлений. Полезна

Лемма 1. *Пусть для каждого $i = \overline{1,N}$ коэффициенты g_i, μ_i, r_i непрерывны на множестве $\mathbb{R}_+ \times [0,S_i)$ и удовлетворяют ограничениям* (**A1**)-(**A3**) *а цена c_i непрерывна на $[0,S_i)$. Тогда функционал выгоды (34) ограничен на множестве допустимых $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})$.*

Доказательство. Введём новую функцию f от E, полагая

$$f(E) = \sum_{i=1}^{N}\int_0^{S_i}\chi_i(s)x_i(s,E)\,\mathrm{d}s.$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условий (**A1**)-(**A3**), функция f не возрастает по E.

Для доказательства леммы достаточно доказать ограниченность каждого из слагаемых суммы (40). Имеем

$$\left| x_{i,0} g_i(E,0) \left[\int\limits_0^{S_i} c_i(s) e^{-\int\limits_0^s \frac{\mu_i(E,\tau)}{g_i(E,\tau)}\,\mathrm{d}\tau - \phi_i(E,s)}\,\mathrm{d}\phi_i(E,s) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{c_{S,i} x_i(S_i,E)}{g_i(E,S_i)} e^{-\int\limits_0^{S_i} \frac{\mu_i(s,E)}{g_i(s,E)}\,\mathrm{d}s - \phi_i(E,S_i)} \right] - p_i c_{i,0} \right| \leq$$

$$\leq x_{i,0} g_i(E,0) \left(\left| \int\limits_0^{S_i} c_i(s) e^{-\phi_i(E,s)}\,\mathrm{d}\phi_i(E,s) \right| + \frac{|c_{S,i}|}{g_i(f(0),S_i)} \right) + |P_{i,1} c_{i,0}| \leq$$

$$\leq x_{i,0} g_i(0,0) \left(C_i + \frac{|c_{S,i}|}{g_i(f(0),S_i)} \right) + |P_{i,1} c_{i,0}| < \infty.$$

В самой правой части этой цепочки неравенств величины $x_{i,0}$ ограничены, $g_i(0,0)$, $p_{i,0}$, $1/g_i(f(0),S_i)$ конечны в силу наших предположений, а $C_i = \max_{s\in[0,S_i]} |c_i(s)|$ конечны благодаря непрерывности c_i на $[0,S_i]$. Следовательно эта часть, а значит, и функционал выгоды ограничены на множестве допустимых пар. $\square$

Напомним некоторые понятия, которые будут полезны при доказательстве теоремы.

Определение 1 ([13])**.** *Семейство Φ функций, определённых на некотором отрезке $[a,b]$, называется равномерно ограниченным, если существует такое число K, что $|\varphi(s)| < K$ для всех $l \in [a,b]$ и всех $\varphi \in \Phi$.*

Определение 2 ([13])**.** *Семейство Φ называется равностепенно непрерывным, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что*

$$|\varphi(s_1) \ - \ \varphi(s_2)| < \varepsilon$$

для всех $\varphi \in \Phi$ и всех s_1 и s_2 из $[a,b]$ таких, что $|s_1 - s_2| < \delta$.

Следующее утверждение устанавливает существование решения задачи оптимального управления совокупностью популяций на стационарном состоянии.

Теорема 3. [52] *Пусть при всех $i = \overline{1, N}$ цены c_i являются непрерывными функциями, коэффициенты g_i, μ_i, r_i непрерывны и удовлетворяют ограничениям* (**A1**)-(**A3**), *функции g_i и μ_i отделены от нуля. Тогда, существует допустимая пара $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) = \big((u_1, \ldots, u_N), (p_1, \ldots, p_N)\big)$, доставляющая максимум функционала выгоды (34) на соответствующем им положительном стационарном состоянии.*

Доказательство. В силу леммы 1, функционал (34) имеет точную верхнюю грань своих значений на множестве допустимых пар из векторов воспроизводства и управления.

Рассмотрим эту точную верхнюю грань и некоторую максимизирующую последовательность пар допустимых векторов $\big((u_1, \ldots, u_N), (p_1, \ldots, p_N)\big)$. Обозначим через E_k члены соответствующей последовательности значений уровня конкуренции E_k.

По условию все компоненты допустимого вектора возобновления ограничены, поэтому по теореме Больцано - Вейерштрасса можно выбрать сходящуюся подпоследовательность этих векторов [14]. Без потери общности считаем, что исходная последовательность векторов воспроизводства сама является сходящейся, то есть $(p_{1,k}, .., p_{N,k}) \to (p_{1,\infty}, .., p_{N,\infty})$. Понятно, что предельный вектор воспроизводства также является допустимым.

Далее, нетрудно видеть, что соответствующие значения показателя конкуренции также ограничены, поэтому из соответствующей последовательности уровней конкуренции также можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Снова, как и в случае с векторами воспроизводства, не нарушая общности рассуждений, саму эту последовательность считаем сходящейся, то есть $E_k \to E_\infty$ при $k \to \infty$.

Наконец, для компоненты $u_{i,k}$ вектора интенсивностей эксплуатации и любых значений $s_1, s_2 \in [0, S_i]$, $s_1 \le s_2$, соответствующая функция $\phi_{i,k}$

удовлетворяет неравенству

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{U_{i,1}(s)}{g_i(E_\infty, s)} ds \le \phi_{i,k}(s_2) - \phi_{i,k}(s_1) \le \int_{s_1}^{s_2} \frac{U_{i,2}(s)}{g_i(E_\infty, s)} ds. \qquad (42)$$

В частности, эта функция удовлетворяет условию Липшица с константой равной $\max_{s\in[0,S_i]} \left(U_{i,2}(s)/g_i(f(0), s)\right)$, где функция $f(E)$ была определена в доказательстве леммы 1. Таким образом, последовательность функций $\phi_{i,k}$ ограничена и равностепенно непрерывна на отрезке $[0, S_i]$. Следовательно, по теореме Асколи - Арцела [4] существует подпоследовательность $\{\phi_{i,k_m}\}$ этих функций, которая равномерно сходится к некоторой функции $\phi_{i,\infty}$ при $k_m \to \infty$. Применяя этот выбор последовательно по i от 1 до N и выбирая при каждом шаге следующую подпоследовательность из индексов, оставшихся на предыдущем шаге, получим после N-го шага подпоследовательность индексов $\{k_m\}$, для которой последовательность $\{\phi_{i,k_m}\}$ сходится при всех $i = \overline{1, N}$.

Функционал выгоды (34) зависит непрерывно от уровня конкуренции E, начального вектора x_0 и набора функций $\phi = (\phi_1, \dots \phi_N)$, а начальный вектор, в свою очередь, непрерывно зависит от этого уровня, допустимого вектора воспроизводства и набора функций $\phi = (\phi_1, \dots \phi_N)$. Следовательно, этот функционал непрерывно зависит от уровня конкуренции E, допустимого вектора воспроизводства и набора функций $\phi = (\phi_1, \dots \phi_N)$, а, значит, на предельных значениях $\phi_\infty = (\phi_{1,\infty}, \dots, \phi_{N,\infty})$, $p_\infty = (p_{1,\infty}, .., p_{N,\infty})$ и $E = E_\infty$ этот функционал принимает максимальное значение.

Для завершения доказательства нам необходимо найти допустимый вектор интенсивностей эксплуатации u, который после интегрирования доставляет предельную вектор-функцию ϕ_∞. Но каждая компонента $\phi_{i,\infty}$ этой вектор-функции удовлетворяют условию (42) и является абсолютно непрерывной. Следовательно, производная этой компоненты существует почти всюду на интервале $[0, S_i]$ и удовлетворяет неравенствам

$$\frac{U_{i,1}(s)}{g_i(E_\infty, s)}ds \le \phi'_{1,\infty}(s) \le \frac{U_{i,2}(s)}{g_i(E_\infty, s)}ds$$

всюду, где она существует. Таким образом, соответствующую компоненту вектора управления можно определить по формуле

$$u_{i,\infty}(s) = g_i(E_\infty, s)\phi'_{i,\infty}(s)$$

в любой точке существования производной, а вне таких точек доопределить любым возможным значением из отрезка $[U_{i,1}, U_{i,2}]$. Полученное таким образом управление $u_{i,\infty}$ является допустимым и доставляет нужную функцию $\phi_{i,\infty}$.

Теорема 3 доказана. $\square$

Видно, что при $N = 1$ в (34),(35)-(35) мы получаем задачу оптимального управления одной популяцией. В работе [31] была доказана теорема о существовании оптимальной пары для этого случая. Приведём формулировку теоремы

Теорема 3'. [31] *Пусть параметры модели (35)-(35), при* $N = 1$, *непрерывны и удовлетворяют условиям* (**A1**)-(**A3**). *Тогда существуют допустимые управление и промышленное воспроизводство такие, что соответствующее им стационарное состояние этой модели доставляет максимум дохода от эксплуатации на стационарных состояниях.*

Доказательство данной теоремы проводится по той же схеме, что и в теореме 3. Здесь мы его опускаем. Подробное изложение доказательства можно найти в работе [31].

2.3. Существование оптимального управления совокупностью из двух взаимодействующих популяций с векторной конкуренцией.

Здесь мы приводим формулировку теоремы существования оптимальной пары векторов управления и промышленного возобновления для модели двух популяций, взаимодействующих через вектор конкуренции. В этом случае для задачи оптимизации интегро-дифференциальная связь для функционала (34) имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(g_i(E,s)x_i(s)\big) = -(\mu_i(E,s)+u_i(s))x_i(s), \tag{43}$$

$$x_i(0) = \int\limits_0^{S_i} r_i(E,s)x_i^{\beta_i}(s)\,\mathrm{d}s + p_i, \quad i=1,2, \tag{44}$$

$$E := (E_1,E_2) = \left(\int\limits_0^{S_1}\chi_1(s)x_2(s)\,\mathrm{d}s, \int\limits_0^{S_2}\chi_2(s)x_2(s)\,\mathrm{d}s\right). \tag{45}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. [6] *Пусть при всех $i=\overline{1,2}$, цены c_i являются непрерывными функциями, коэффициенты g_i, μ_i, r_i непрерывны и удовлетворяют ограничениям* (**A1**)-(**A3**), *функции g_i и μ_i отделены от нуля. Тогда, существует допустимая пара $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}) = \big((u_1,u_2),(p_1,p_2)\big)$, доставляющая максимум функционала выгоды (34) на соответствующем ей положительном стационарном состоянии.*

Замечание 6. Приведённая теорема существования доказывается по похожей схеме, что и теорема 3. Для доказательства необходимо добавить процесс выбора сходящейся подпоследовательности векторов $(E_{1,k},E_{2,k})$. Более детально это описано в работе [6].

3. Оптимизация

В данной главе мы предлагаем алгоритмы для численного решения задачи оптимального управления для модели из одной популяции. Для других рассмотренных случаев построения аналогичны. Мы предлагаем два подхода для численного поиска решения. Первый подход основан на вычислении первой вариации функционала по управлению и построении соответствующей функции переключения. Второй подход основан на сочетании принципа максимума Понтрягина и метода стрельбы по свободному параметру. В конце этой главу мы обсуждаем понятные обобщения алгоритмов на случай совокупности популяций и возникающие сложности на пути их реализации.

3.1. Вариационный подход

Здесь мы получаем необходимое условие оптимальности для наилучшего стационарного состояния при управлении одной популяцией. Это условие получается на основе вычисления первой вариации функционала выгоды по управлению. Сначала мы вводим более удобные обозначения, позволяющие упростить формулы вычислений, и доказываем полезное вспомогательное утверждение. Затем, получаем необходимое условие оптимальности и указываем путь использования этого условия для получения численного алгоритма для поиска оптимального решения. Наконец, мы рассматриваем обобщения необходимого условия оптимальности на случай оптимального управления совокупностью популяций.

Для более компактной записи формул необходимого условия оптимальности введём следующие обозначения

$$M(s_1, s_2, E) = \int\limits_{s_1}^{s_2} \chi(s) \frac{g(E,0)}{g(E,s)} e^{-\int\limits_0^s m(E,\tau)\,\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}s,$$

$$H(s_1,s_2,E)=\int\limits_{s_1}^{s_2} r(E,s)\left(\frac{g(E,0)}{g(E,s)}e^{-\int\limits_0^s m(E,\tau)\,\mathrm{d}\tau}\right)^{\beta}\mathrm{d}s,$$

$$F(x_0,E)=E-x_0M(0,S,E),$$

$$G(x_0,E)=x_0-p_0-x_0^{\beta}H(0,S,E),$$

$$I(s_1,s_2,E)=\int\limits_{s_1}^{s_2} c(s)u(s)\frac{g(E,0)}{g(E,s)}e^{-\int\limits_0^s m(E,\tau)\,\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}s+$$

$$+c_S\frac{g(0,E)}{g(L,E)}e^{-\int\limits_0^S m(s,E)\,\mathrm{d}s},$$

$$\mathfrak{M}(x_0,E):=\begin{pmatrix} F'_E(x_0,E) & F'_{x_0}(x_0,E)\\ G'_E(x_0,E) & G'_{x_0}(x_0,E)\end{pmatrix}, \tag{46}$$

где $m(E,s):=(\mu(E,s)+u(s))/g(E,s)$, $[s_1,s_2]\subset[0,S]$. Здесь мы предполагаем, что величины x_0 и E независимы.

Для вывода необходимого условия оптимальности полезно следующее утверждение.

Лемма 2. *Если функции r,μ и g дифференцируемы по E и удовлетворяют условиям* (**A1**)-(**A3**), *то матрица $\mathfrak{M}$ (46) невырождена при всех положительных E и x_0.*

Доказательство. Эту матрицу несложно посчитать, а именно

$$\mathfrak{M}(x_0,E)=\begin{pmatrix} 1-x_0M'_E(0,S,E) & -M(0,S,E)\\ -x_0H'_E(0,S,E) & 1-\beta x_0^{\beta-1}H(0,S,E)\end{pmatrix}.$$

В силу условий (**A1**)-(**A3**) и из дифференцируемости функций r,μ,g по E имеем

$$\left(\frac{g(E,0)}{g(E,s)}e^{-\int\limits_0^s m(E,\tau)\,\mathrm{d}\tau}\right)'_E\le 0.$$

Из последнего следует $M'_E(0,S,E)\le 0$ и $H'_E(0,S,E)\le 0$. Далее, для всех $\beta\in(0,1)$ имеем

$$1-\beta x_0^{\beta-1}H(0,S,E)=1-\frac{\beta}{x_0}\left(-p+p+x_0^{\beta}H(0,S,E)\right)=$$

$$= 1 - \frac{\beta}{x_0}(x_0 - p) = \frac{(1-\beta)x_0 + p}{x_0} > 0,$$

следовательно произведение элементов на главной диагонали положительно, а на побочной диагонали отрицательно. Следовательно, определитель этой матрицы положителен, то есть $\det \mathfrak{M} > 0$. Таким образом, матрица $\mathfrak{M}$ невырождена.

Лемма 2 доказана. $\square$

Необходимое условие оптимальности в модели управления одной популяцией даёт следующее утверждение.

Теорема 5. [33] *Пусть функции g, μ, r в модели непрерывно дифференцируемы по E, и удовлетворяют ограничениям (**A1**)-(**A3**), функция цены c непрерывна и допустимое управление u^* максимизирует функционал выгоды (34) при заданном промышленном воспроизводстве p. Тогда, в любой точке $s_0 \in [0, S)$ управление u^* имеет вид:*

$$u^*(s_0) := \begin{cases} U_1(s_0), & \text{если} \quad W(s_0) > 0; \\ (U_1(s_0), U_2(s_0)), & \text{если} \quad W(s_0) = 0; \\ U_2(s_0), & \text{если} \quad W(s_0) < 0, \end{cases}$$

где

$$W(s_0) := 2\frac{I(0,S,E)}{\det \mathfrak{M}}\Big(F'_E \beta x_0^{\beta-2} H(s_0,S,E) - G'_E M(s_0,S,E)\Big) + \\ + 2\frac{x_0 I'_E(0,S,E)}{\det \mathfrak{M}}\Big(G'_{x_0} M(s_0,S,E) - F'_{x_0}\beta x_0^{\beta-2} H(s_0,S,E)\Big) + \\ + c(s_0) g(E,0) e^{-\int\limits_0^{s_0} m(E,s)ds} - I(s_0,S,E). \quad (47)$$

Доказательство. Обоснования утверждения теоремы основано на вычисление первой вариации функционала (34). Предположим, что есть управление u доставляющее максимум функционала. Возьмём точку s_0, $s_0 \in$

$[0, S)$ в которой управление является производной своего интеграла и $u_1(s_0) \neq u_2(s_0)$.

Рассмотрим теперь достаточно малое $\delta > 0$, $[s_0, s_0 + \delta] \subset [0, S]$, и возмущенное управление $\tilde{u}$, такое, что разница $u - \tilde{u}$ равна нулю вне отрезка $[s_0, s_0 + \delta]$ и малой величине h внутри его (см Рис. 4). Следует отметить,

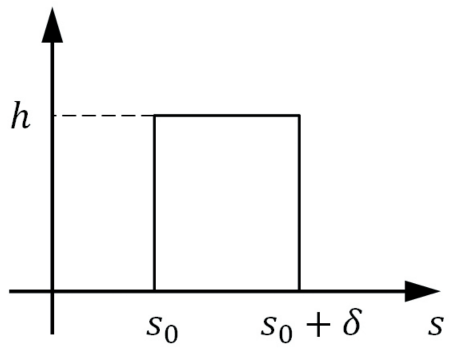

Рис. 4. Игольчатая вариация.

что при вариации управления возникает соответствующее изменение начального условия x_0 и параметра E для соответствующего стационарного решения. Соответствующии вариации ΔE и Δx_0 находятся из следующей системы уравнения из системы

$$\begin{aligned} F'_E \Delta E + F'_{x_0} \Delta x_0 + F'_\delta \delta + F'_h h + o(h\delta) = 0, \\ G'_E \Delta E + G'_{x_0} \Delta x_0 + G'_\delta \delta + G'_h h + o(h\delta) = 0. \end{aligned} \tag{48}$$

В этой системе и ниже, через $o(h\delta)$ мы обозначаем члены более высокого порядка малости по сравнению с $h\delta$, при $h, \delta \to 0$. Прямые вычисления дают следующие выражения для слагаемых при h и δ :

$$F'_\delta \delta = F'_h h = -\frac{x_0 h\delta}{g(E, s_0)} \int_{s_0}^{S} \chi(s) \frac{g(E, 0)}{g(E, s)} e^{-\int_0^s m(E,\tau)\, \mathrm{d}\tau} \mathrm{d}s + o(h\delta) =$$

$$= -\frac{x_0 h\delta}{g(E, s_0)} M(s_0, S, E) + o(h\delta),$$

$$G'_\delta \delta = G'_h h = -\frac{\beta x_0^{\beta-1} h\delta}{g(E,s_0)} \int\limits_{s_0}^{S} r(E,s) \left(\frac{g(E,0)}{g(E,s)} e^{-\int\limits_0^s m(E,\tau)\,\mathrm{d}\tau} \right)^{\beta} \mathrm{d}s + o(h\delta) =$$

$$= -\frac{\beta x_0^{\beta-1} h\delta}{g(E,s_0)} H(s_0,S,E) + o(h\delta).$$

Учитывая теперь, что линейная относительно ΔE и Δx_0 часть уравнений (48) имеет в силу леммы 2 невырожденную матрицу, находим, что эта система разрешима относительно ΔE и Δx_0. Соответствующее решение легко находится прямыми вычислениями, оно имеет вид

$$\Delta E = \frac{2x_0 h\delta [G'_{x_0} M(s_0,S,E) - F'_{x_0} \beta x_0^{\beta-2} H(s_0,S,E)]}{g(E,s_0)\det \mathfrak{M}} + o(h\delta), \qquad (49)$$

$$\Delta x_0 = \frac{2x_0 h\delta [F'_E \beta x_0^{\beta-2} H(s_0,S,E) - G'_E M(s_0,S,E)]}{g(E,s_0)\det \mathfrak{M}} + o(h\delta). \qquad (50)$$

Вычисляя первую вариацию функционала (34), соответствующую вариации управления, получаем следующее выражение

$$\Delta x_0 \left(\int\limits_0^S c(s)u(s) \frac{g(E,0)}{g(E,s)} e^{-\int\limits_0^s m(E,\tau)\,\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}s + c_S \frac{g(E,0)}{g(E,S)} e^{-\int\limits_0^S m(E,s)\,\mathrm{d}s} \right) +$$

$$+ x_0 \Delta E \left(\int\limits_0^S c(s)u(s) \frac{g(E,0)}{g(E,s)} e^{-\int\limits_0^s m(E,\tau)\,\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau + c_S \frac{g(E,0)}{g(E,S)} e^{-\int\limits_0^S m(E,\tau)\,\mathrm{d}\tau} \right)'_E +$$

$$+ \frac{h\delta x_0}{g(E,s_0)} \left(c(s_0) g(E,0) e^{-\int\limits_0^{s_0} m(E,s)\,\mathrm{d}s} - \int\limits_{s_0+\delta}^{S} c(s)u(s) \frac{g(E,0)}{g(E,s)} e^{-\int\limits_0^s m(E,\tau)\,\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}s - \right.$$

$$\left. - c_S \frac{g(E,0)}{g(E,S)} e^{-\int\limits_0^S m(E,s)\,\mathrm{d}s} \right) + o(h\delta) =$$

$$= \Delta x_0 \cdot I(0,S,E) + x_0 \Delta E \cdot I_E(0,S,E) +$$

$$+ \frac{h\delta x_0}{g(E,s_0)} \left(c(s_0) g(E,0) e^{-\int\limits_0^{s_0} m(s,E)\,\mathrm{d}s} - I(s_0,S,E) \right) + o(h\delta). \qquad (51)$$

Подставляя в эту вариацию ΔE и Δx_0 из выражений (49) и (50), получим следующее выражение для этой вариации

$$\frac{x_0 h\delta}{g(E,s_0)}\left[\frac{2I'_E(0,S,E)x_0[G'_{x_0}M(s_0,S,E)-F'_{x_0}\beta x_0^{\beta-2}H(s_0,S,E)]}{g(E,s_0)\det\mathfrak{M}}+\right.$$
$$+\frac{2I(0,S,E)[F'_E\beta x_0^{\beta-2}H(s_0,S,E)-G'_E M(s_0,S,E)]}{g(E,s_0)\det\mathfrak{M}}+$$
$$\left.+c(s_0)g(E,0)e^{-\int\limits_0^{s_0} m(E,s)\,\mathrm{d}s}-I(s_0,S,E)\right]+o(h\delta). \quad (52)$$

В этом выражении сомножитель $x_0/g(E,s_0)$ положителен, поэтому, при малых $\delta>0$ и $h\neq 0$ знак величины (52) определяется знаками h и величины в квадратных скобках, если последняя отлична от нуля. Понятно, что для управления u, доставляющего максимум выгоды, и его любого достаточно малого возмущения $\tilde{u}$ величина (52) должна быть неположительна.

Следовательно, выражение в квадратных скобках неположительно, неотрицательно или равно нулю, если значение $u(s_0)$ равно либо $U_1(s_0)$, либо $U_2(s_0)$, либо лежит в интервале $(U_1(s_0),U_2(s_0))$, соответственно, так как в этих случаях при $U_1(s_0)\neq U_2(s_0)$ возмущение h может принимать любые достаточно малые только неотрицательные, только неположительные и произвольные значения, соответственно.

Теорема 5 доказана. $\square$

Таким образом, функция W (47) играет роль функции переключения. Однако форма (47) этой функции при вычислении оптимального управления в точке $s\in[0,S)$ неудобна, поскольку её значение в точке s_0 зависит от интеграла по $[s,S]$ (если вычислять функцию управления от 0 к S). С целью устранения этого элементарными преобразованиями и интегрированием по частям функцию W мы преобразуем к виду

$$A + B \cdot H(0, s_0, E) + C \cdot M(0, s_0, E) + I(0, s_0, E) + \\ + c(s_0) g(E, 0) e^{-\int\limits_0^{s_0} m(E,s)\,\mathrm{d}s}, \quad (53)$$

где

$$A := \frac{2}{\det \mathfrak{M}} \Big(I(0, S, E) \big(F'_E \beta x_0^{\beta-2} H(0, S, E) - G'_E M(0, S, E) \big) + \\ + x_0 I'_E(0, S, E) \big(G'_{x_0} M(0, S, E) - F'_{x_0} \beta x_0^{\beta-2} H(0, S, E) \big) \Big) - I(0, S, E),$$

$$B = \frac{-2\beta x_0^{\beta-2}}{\det \mathfrak{M}} \left(F'_E I(0, S, E) - x_0 F'_{x_0} I'_E(0, S, E) \right),$$

$$C = \frac{2}{\det \mathfrak{M}} \left(G'_E I(0, S, E) - x_0 G'_{x_0} I'_E(0, S, E) \right).$$

Эта форма функции переключения более удобна для вычислений и позволяет создать численный алгоритм поиска оптимального управления. Без технических подробностей этот алгоритм выглядит следующим образом:

Шаг 0_1**:** Для множества допустимых управлений оцениваем границы интервалов, в которых изменяются коэффициенты A, B, C а также максимально возможный уровень конкуренции E, т.е. находим $[A_{\min}, A_{\max}]$, $[B_{\min}, B_{\max}]$, $[C_{\min}, C_{\max}]$ и $[0, E_{\max}]$, соответственно. Задаём $J_{\max} = 0$.

Шаг 0_2**:** Выбираем сеточное разбиение четырёхмерного параллелепипеда

$$K := [A_{\min}, A_{\max}] \times [B_{\min}, B_{\max}] \times [C_{\min}, C_{\max}] \times [0, E_{\max}],$$

разбивая найденные интервалы по каждому направлению на n_A, n_B, n_C и n_E частей, где $n_A, n_B, n_C, n_E \in \mathbb{N}$.

Шаг 1: Выбираем узел (A', B', C', E') из параллелепипеда K по заранее выбранной (произвольной) последовательности.

Шаг 2: Для выбранного узла, используя функцию переключения W в форме (53), получаем соответствующее управление u.

Шаг 3: С помощью построенного управления u и текущего значения E строим численное решение уравнения

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(g(E,s)x(s)\big) = -(\mu(E,s)+u(s))x(s),$$

на котором проверяется выполнение двух равенств

$$x(0) = \int\limits_0^S r(E,s)x^{\beta}(s)\,\mathrm{d}s + p,$$

$$E = \int\limits_0^S \chi(s)x(s)\,\mathrm{d}s,$$

с заранее выбранной точностью. Если последние два равенства выполняются с заранее выбранной точностью, то переходим к следующему шагу. Иначе, возвращаемся к шагу 1.

Шаг 4: Если $J(u) \geq J_{\max}$, то $J_{\max} = J(u)$, сохраняем управление u. Переходим к шагу 1.

По сути, идея алгоритма заключается в следующем. При последовательном переборе узлов сетки в параллелепипеде параметров A, B, C, E мы вычисляем функцию переключения и соответствующие управление (по теореме 5). Если после этого уравнения на воспроизводство и на уровень конкуренции оказались выполненными с точностью, вытекающей из точности вычислений x, то считаем значение функционала и сравниваем с уже вычисленным. Наибольшее значение сохраняем.

Большим недостатком указанного алгоритма, является его вычислительная сложность. Это связано с формой интегралов, участвующих в функции переключения (53) и размерностью параллелепипеда, по которому идёт перебор параметров. Естественно, что обобщение модели будет вести к увеличению вычислительной сложности, что в свою очередь потребует дополнительных вычислительных ресурсов.

Следующее замечание лишь указывает основные моменты при рассмотрении более общей постановки оптимизационной задачи.

Замечание 7. Для случая управления взаимодействующими популяциями, при учёте суммарной конкуренции необходимое условие оптимальности можно получить аналогичным путём, что и при доказательстве теоремы 5. При этом вычислительная сложность естественно будет расти с увеличением числа популяций в модели.

3.2. Комбинированный подход

В данном параграфе рассмотрен комбинированный подход к решению задачи оптимального управления популяциями структурированными по размеру. Сначала обсуждается вопрос оптимального управления одной популяцией; описывается сам подход и алгоритм. Затем обсуждается обобщения этого подхода на случай управления совокупностью популяций.

Предположим, что функция цены c дифференцируема. Во избежание введения дополнительных требований дифференцируемости на функцию g введём обозначение $z = gx$. Поскольку $g > 0$, то в новых обозначениях задача оптимального управления (34) при $N = 1$ примет вид:

$$\left\{ \int_0^S c(s)u(s)\frac{z(s)}{g(E,s)}\,\mathrm{d}s - pc_0 + c_S\frac{z(S)}{g(E,S)} \right\} \to \max_u \tag{54}$$

при условии, что выполняется

$$\dot{z}(s) = -\frac{\mu(E,s) + u(s)}{g(E,s)} \cdot z(s), \tag{55}$$

$$\frac{z(0)}{g(E,0)} = \int_0^S r(E,s)\left(\frac{z(s)}{g(E,s)}\right)^{\beta} \mathrm{d}s + p, \tag{56}$$

$$E = \int_0^S \chi(s)\frac{z(s)}{g(E,s)}\,\mathrm{d}s. \tag{57}$$

В силу ограничений (**A1**)-(**A3**), каждому решению z системы (55)-(57) будут соответствовать некоторые положительные величины $z_0 := z(0)$, E_0.

Рассмотрим величины z_0, E_0 как положительные параметры. Для каждой такой пары параметров будем решать новую оптимизационную задачу (54),(55). Для её решения воспользуемся принципом максимума Понтрягина [16].

С этой целью выпишем функцию Гамильтона

$$\mathcal{H}(z, u, \lambda, s, E_0) = \lambda_0 c(s) u \frac{z(s)}{g(E_0, s)} - \lambda(s) \left(\frac{\mu(E_0, s) + u}{g(E_0, s)} \right) z(s)$$

где $(\lambda_0, \lambda(s))$ – сопряжённые переменные. Согласно принципу максимума Понтрягина, для оптимальности управления u^* необходимо, чтобы существовали не равные одновременно нулю число λ_0 и функция $\lambda(s)$ такие, что:

$$\begin{cases} \dot{z}^* = -\dfrac{\mu(E, s) + u^*(s)}{g(E, s)} \cdot z, & z(0) := z_0, \\ \dot{\lambda} = -\lambda_0 \dfrac{c(s)}{g(E, s)} u^*(s) + \lambda \dfrac{\mu(E, s) + u(s)}{g(E, s)}, & \lambda(S) = c_S, \\ \mathcal{H}(z^*(s), u^*(s), \lambda(s), s, E_0) \geq \mathcal{H}(z^*(s), u, \lambda(s), s, E_0), \end{cases} \tag{58}$$

для всех $u \in [U_1(s), U_2(s)]$, $s \in [0, S]$.

Покажем, что λ_0 не может быть равной нулю. Действительно, если преобразовать функционал (54) следующим образом

$$\int_0^S c(s) \frac{z(s)}{g(E, s)} u(s) \, \mathrm{d}s + \left(c_S \frac{z(S)}{g(E, S)} - c_S \frac{z_0}{g(E, S)} \right) + c_S \frac{z_0}{g(E, S)} =$$

$$= \int_0^S \left(c(s) \frac{z(s)}{g(E, s)} u(s) + \frac{c_S}{g(E, S)} \dot{z}(s) \right) \mathrm{d}s + \underbrace{c_S \frac{z_0}{g(E, S)}}_{=const},$$

то функция Гамильтона примет вид

$$\mathcal{H}(z, u, \lambda, s, E_0) = \lambda_0 \left(c(s) u \frac{z(s)}{g(E_0, s)} + \frac{c_S}{g(E, S)} \dot{z}(s) \right) -$$
$$- \lambda(s) \left(\frac{\mu(E_0, s) + u}{g(E_0, s)} \right) z(s).$$

Если $\lambda_0 = 0$, то сопряжённая переменная λ должна удовлетворять системе уравнений

$$
\begin{cases}
\dot{\lambda} = \left(\dfrac{\mu(E,s) + u(s)}{g(E,s)} \right) \lambda, \\
\lambda(S) = 0.
\end{cases}
\tag{59}
$$

Поскольку коэффициенты g, μ и u ограничены и $g > 0$, то задача (59) имеет единственное решение $\lambda(s) \equiv 0$. Следовательно, $\lambda_0 \neq 0$. Далее полагаем $\lambda_0 = 1$.

Из формы функции Гамильтона $\mathcal{H}$ следует, что для выполнения третьего условия в (58) – условия максимальности при фиксированных z_0, E_0, – управление u^* должно иметь следующий вид

$$
u^*(s) := \begin{cases}
U_1(s), & W(s) < 0, \\
u \in [U_1(s), U_2(s)], & W(s) = 0, \\
U_2(s), & W(s) > 0.
\end{cases}
\tag{60}
$$

Здесь W – функция переключения, которая определяется следующим образом

$$
W(s) := c(s) - \lambda(s), \quad s \in [0, S].
\tag{61}
$$

Отметим, если дифференцируемая функция переключения W не обращается в ноль одновременно со своей производной, то получаемое управление будет релейного типа. Для возникновения сингулярного управления необходимо, чтобы на некотором интервале выполнялось $W = W' = 0$. После элементарных преобразований последнее условие примет вид

$$
c(s) = \lambda(s),
$$

$$
\dot{c}(s) g(E_0, s) = c(s) \mu(E_0, s).
$$

Поскольку коэффициенты g, μ и функция цены c получают с помощью калибровки реальных данных, то одновременное выполнение двух последних равенств на практике будет мало вероятным. Случай, когда эти два равенства одновременно не выполняются, будем называть *типичным.*

Таким образом, правило (60) в типичном случае является конструктивным и позволяет найти управление для заданного E_0 поскольку (60) не зависит от z и z_0. Следовательно, для решения оптимизационной задачи можно построить управление u для заданного E_0, а затем найти соответствующее z_0 из уравнения (56). Остаётся только найти значение E, которое бы удовлетворяло уравнению (57).

Всё это позволяет предложить следующий алгоритм

Шаг 0: Находим максимально возможное значение E. Для этого достаточно найти решение z при $E = 0$ и $u = 0$ и вычислить правую часть выражения (57), что и даст значение $E_{\max}$. Зададим $\varepsilon > 0$, которое будет ограничивать ошибку, с которой мы допускаем вычисление оптимального значения E.

Шаг 1: Выбираем E_0 из интервала $[0, E_{\max}]$.

Шаг 2: Находим решение λ сопряжённого уравнения (58). На каждом шаге построения траектории сопряжённой переменной мы также вычисляем значение функции переключения (61) и управление u по формуле (60).

Шаг 3: Подставляем управление, которое было найдено на Шаге 2, в первое уравнение системы (58) и находим решение $z := z(s, E_0)$ при $z(0, E_0) = 1$.

Шаг 4: Подставляем решение $z := z(s, E_0)$, найденное на Шаге 3, в (56) и находим единственное положительное решение z_0 из уравнения (56).

Шаг 5: Проверяем точность найденного уровня конкуренции E_0.

Если

$$\left| E_0 - \int_0^S \chi(s) \frac{z_0 z(s, E_0)}{g(E, s)} \, \mathrm{d}s \right| < \varepsilon,$$

то сохраняем E и соответствующее управление u и переходим к шагу 1.

Иначе переходим к шагу 1.

Шаг 6: Из полученных пар (u, E), выбираем те, на которых функционал J принимает наибольшее значение.

Замечание 8. Выбор E_0 в шаге 2 может быть реализован разделением интервала $[0, E_{max}]$ на K равных частей и последующем переборе узлов разбиения.

Замечание 9. Данный алгоритм может быть модифицирован для случая управления N популяциями с суммарной конкуренцией. Несмотря на то, что теперь мы имеем дело с управлением системой дифференциальных уравнений, перебор (шаг 2) будет осуществляться также по одному параметру E.

3.2.1. Примеры.

В данном параграфе представлены примеры задач оптимального управления одной популяцией и их численные решения. Для численного решение задачи был написан солвер на языке Python. В солвере реализуется комбинированный алгоритм решения оптимизационной задачи.

Пример 1: Рассмотрим модель, которая имеет следующие параметры, удовлетворяющие условиям (**A1**)-(**A3**)

$$\mu(E, s) = \frac{3}{10}s^{1/5} + 3E^{3/2}, \quad r(E, s) = 50e^{-E/10}s^{3/2},$$

$$g(E, s) = e^{-E/10}(10s + 1)(2.1 - s), \quad \chi(s) = \frac{2\pi}{4}s^2$$

и примем максимальный размер $S = 2$, темп возобновления $p = 1$ и коэффициент $\beta = 1/2$. Графики функций роста, возобновления и смертности представлены на Рис. 5.

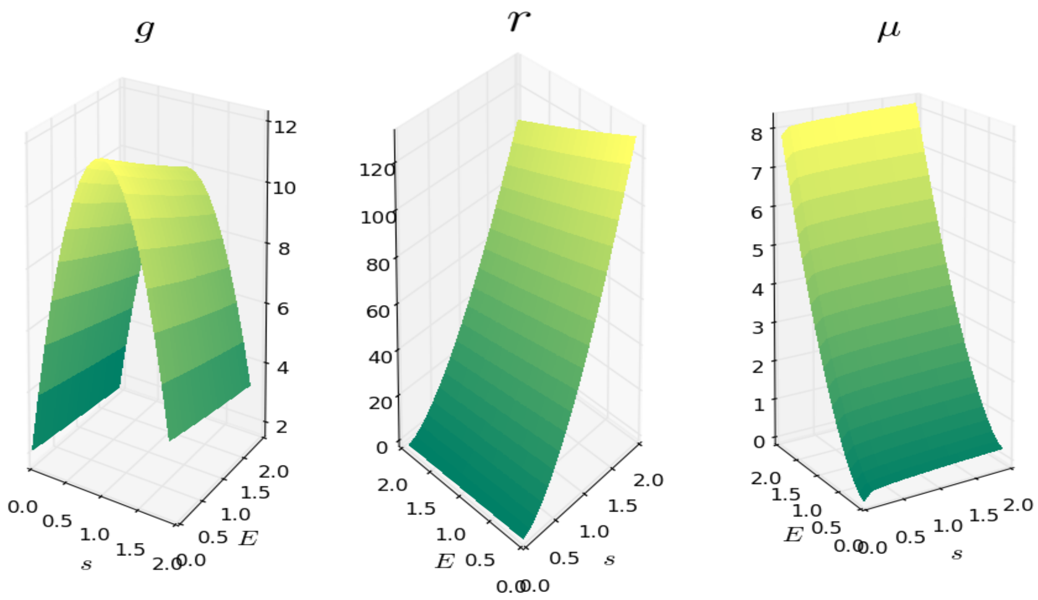

Рис. 5. Функции роста, возобновления и смертности.

В качестве цен принимаются

$$c(s) = 10s^{3/10} - 5, \quad c_0 = 0, \quad c_S = 11.$$

График функции c изображён на Рис. 6.

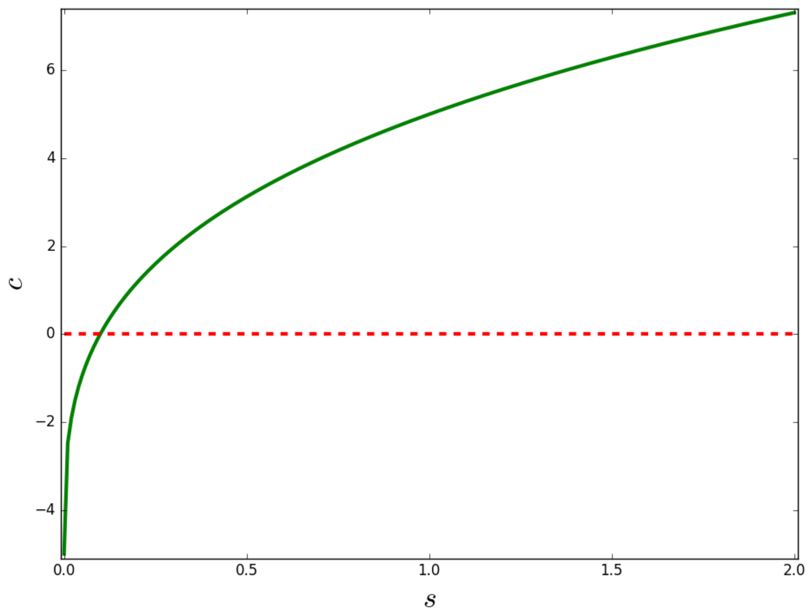

Рис. 6. Функция цены c.

Ограничения на управления возьмём постоянными $U_1 = 0, U_2 = 1$. Применением комбинированного алгоритма к решению данной задачи было получено следующее:

1) оптимальный уровень конкуренции $E_0 = 0.773$. Из Рис. 7, на котором изборажена функция $f(E) - E$, где $f(E) := \int_0^S \chi(s)x(s, E)\,\mathrm{d}s$, видно, что оптимальный уровень существует и единственный.

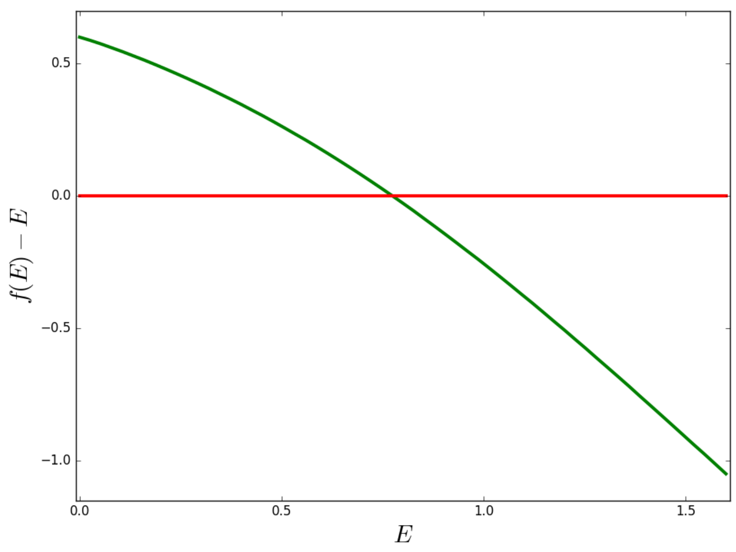

Рис. 7. Поиск оптимального уровня E

2) оптимальное значение функционала выгоды: 12.348;

3) время выполнения вычислений: 17.792 сек.

Также, для оптимального уровня E_0 на Рис. 8 изображены стационарное распределение популяции x, сопряжённая переменная λ и функция переключения W.

Вообще говоря, данный пример показывает, что стационарное распределение не обязано быть убывающей функцией от размера s.

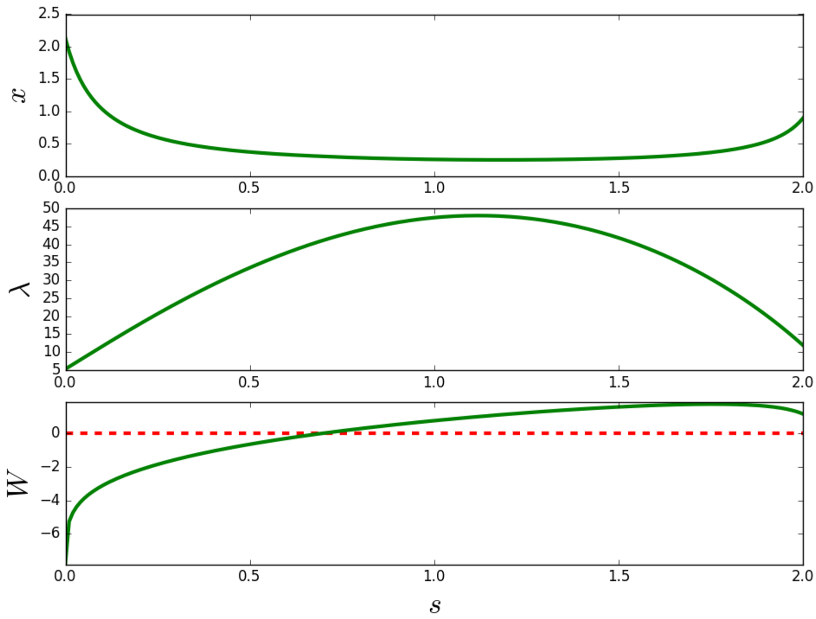

Рис. 8. x−стационарное распределение популяции, λ−сопряжённая переменная, W−функция переключения.

Полученное в этом примере оптимальное управление u^* имеет одну точку переключения (см. Рис. 9)

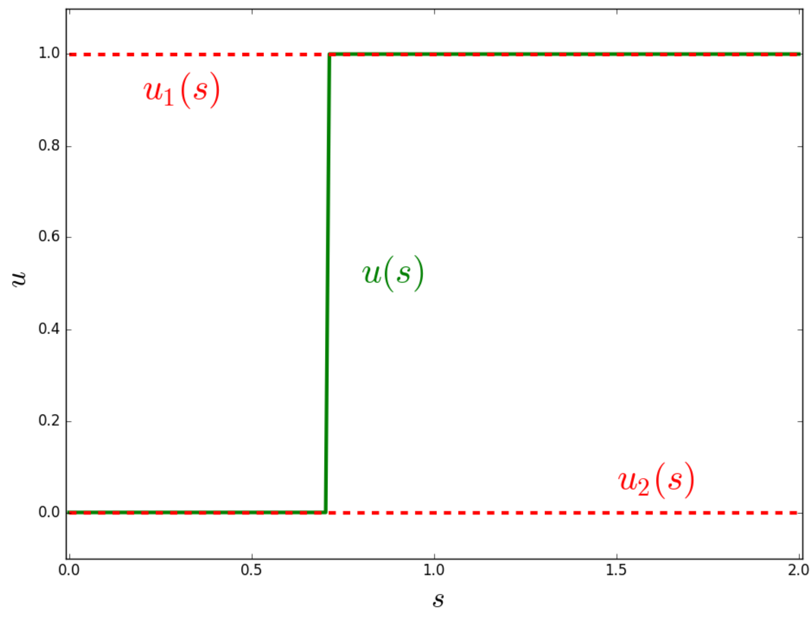

Рис. 9. Оптимальное управление u

Пример 2: Данный пример показывает, что оптимальное управление может иметь более одной точки переключения. Рассмотрим модель, которая имеет следующие удовлетворяющие ограничениям (**A1**)-(**A3**) параметры

$$\mu(E,s) = \frac{3}{10}s^{2/10} + 3E, \quad r(E,s) = 10e^{-E/100},$$
$$g(E,s) = \frac{6}{10}e^{-3E/10} + (S-s)\frac{2}{10}, \quad \chi(s) = \frac{2\pi}{4}s^2$$

и примем максимальный размер $S = 2$, темп возобновления $p = 1$ и коэффициент $\beta = 1/2$. Графики функций роста, возобновления и смертности представлены на Рис. 10.

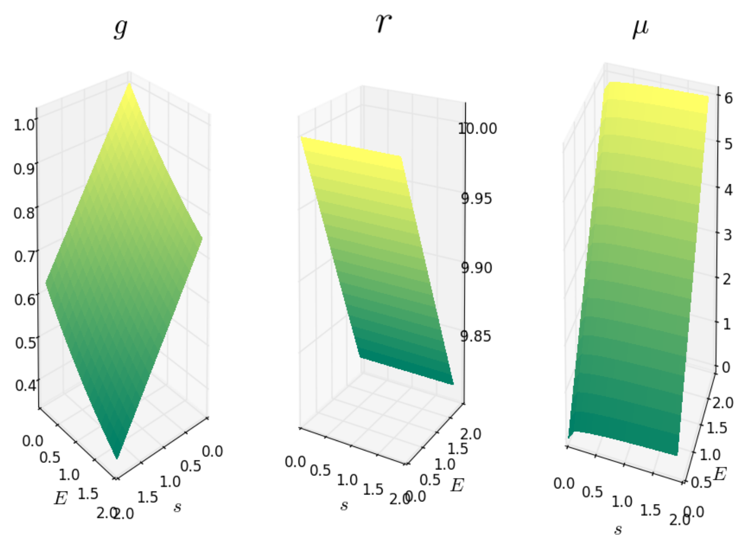

Рис. 10. Функции роста, возобновления и смертности

В качестве цен принимаются

$$c(s) = 10(\sin(8s)(s^2-1) + 0.1), \quad c_0 = 0, \quad c_S = 11.$$

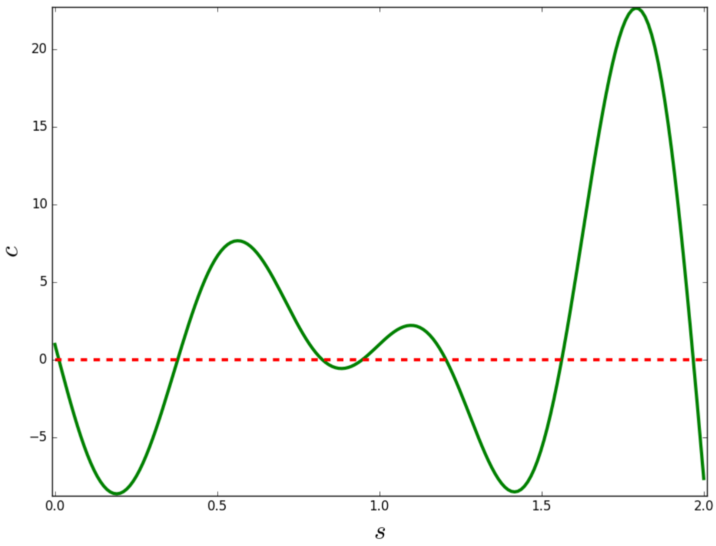

Рис. 11. Функция цены c

Также положим, что ограничение на управление имеют вид

$$U_1 = \frac{2}{10}|\sin(s)|, \quad U_2 = \frac{3}{10} + |\sin(s)|.$$

Применением комбинированного алгоритма к решению данной задачи было получено следующее:

1) оптимальный уровень конкуренции: $E_0 = 0.314$. Из Рис. 12, на котором изборажена функция $f(E) - E$, где $f(E) := \int_0^S \chi(s)x(s,E)\,\mathrm{d}s$, видно, что оптимальный уровень существует и единственный.

2) оптимальное значение функционала выгоды: 1.480;

3) время выполнения вычислений: 27.686 сек.

Также, для оптимального уровня E_0 на Рис. 13 изображены стационарное распределение популяции x, сопряжённая переменная λ и функция переключения W.

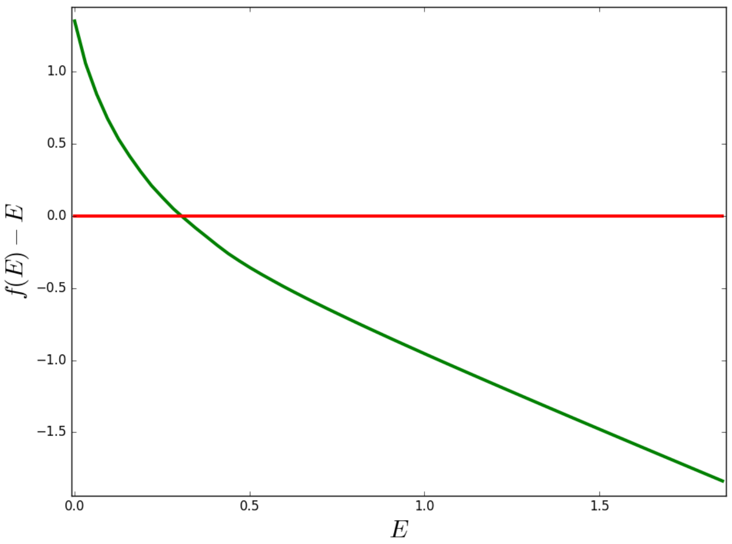

Рис. 12. Поиск оптимального уровня E.

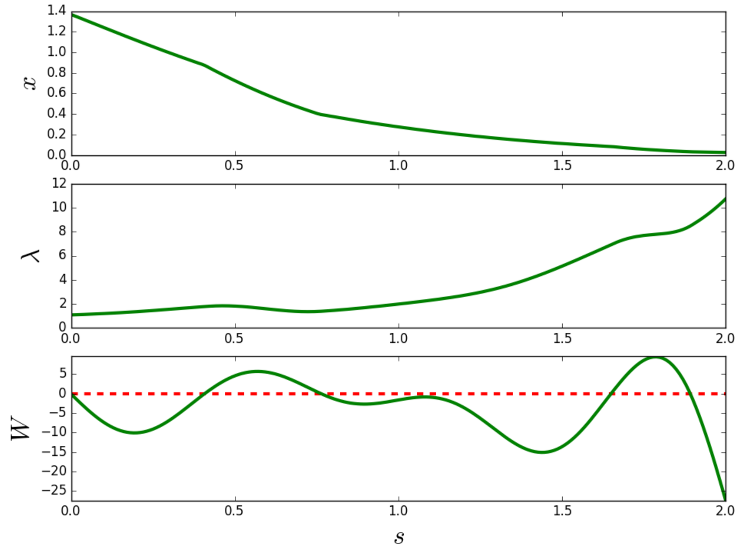

Рис. 13. $x-$стационарное распределение популяции, $\lambda-$сопряжённая переменная, $W-$функция переключения.

Соответствующее оптимальное управление u^* имеет четыре точки переключения (см. рис. 14)

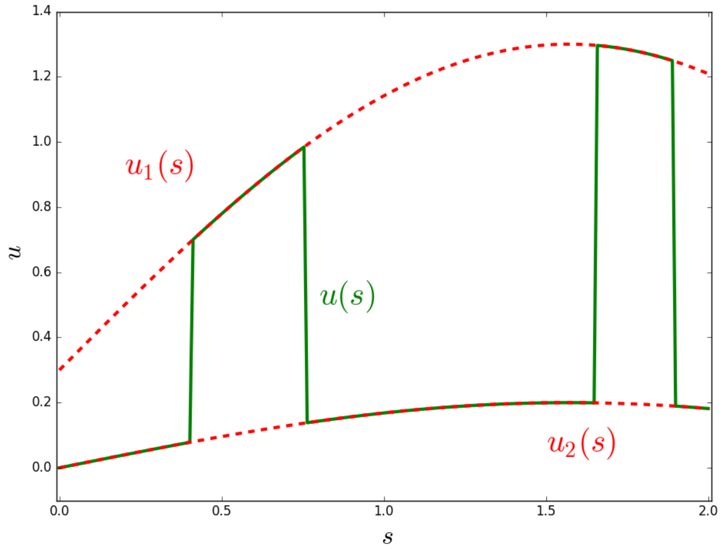

Рис. 14. Оптимальное управление u

4. Заключение

В данной диссертационной работе при «естественных» ограничениях, наложенных на параметры моделей, были получены следующие результаты:

- доказана теорема существования и единственности нетривиального стационарного состояния в модели управления структурированной по размеру популяцией с внутривидовой конкуренцией в симметричной форме;

- доказана теорема существования оптимального среди стационарных состояния в модели управления структурированной по размеру популяцией с внутривидовой конкуренцией в симметричной форме и найдено необходимое условие оптимальности;

- доказана теорема существования нетривиального стационарного состояния в модели управления совокупностью двух структурированных популяций с векторной симметричной формой конкуренции и единственность этого состояния при «маргинальном» превосходстве по влиянию на развитие внутривидовой конкуренции над межвидовой;

- доказана теорема существования оптимального среди стационарных состояния в модели управления совокупностью двух структурированных популяций с векторной симметричной формой конкуренции;

- доказана теорема существования оптимального среди стационарных состояния для модели управления совокупностью нескольких структурированных популяций со скалярной симметричной формой конкуренции.

Полученные результаты могут быть полезны как с теоретической точки зрения, при моделировании и анализе динамики конкретных эксплуатируемых популяций, так и с практической, при разумной стратегии управления эксплуатируемой популяцией.

Список литературы

[1] Арнольд В. И., «Жесткие» и «мягкие» математические модели – МЦНМО, 2004, - 32 с.

[2] Асеев С. М., Кряжимский А. В., Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Тр. МИАН, 257, ред. Е. Ф. Мищенко, Наука, М., 2007, 272 с.

[3] Бутковский А. Г., Методы управления системами с распределенными параметрами – Наука, М., 1975

[4] Давыдов А. А., Нассар А. Ф., О стационарном состоянии в динамике популяции с иерархической конкуренцией // УМН. - 2014.- 69:6(420).- С. 179 – 180.

[5] Давыдов А. А., Платов А. С., Оптимизация стационарного решения модели эксплуатации структурированной по размеру популяции // Проблемы математического анализа, Вып. 58, 2011-с. 135-142.

[6] Давыдов А. А., Платов А. С., Оптимальная эксплуатация двух структурированных по размеру конкурирующих популяций // Тр. ИММ УрО РАН, 19, № 4, 2013, 89–94.

[7] Давыдов А. А., Платов А. С., Стационарное решение модели лесопользования. // Тезисы докладов международной конференцио по математической теории управления и механике. Суздаль 1-5 июля 2011.- с. 74-76.

[8] Давыдов А. А., Платов А. С., Оптимизация эксплуатации структурированной по размеру популяции с внутривидовой конкуренцией // Тезисы докладов международной конференци по дифференциальным

уравнениям и динамическим системам. Суздаль 29 июня - 4 июля 2012.- с. 57-58.

[9] Давыдов А. А., Платов А. С., Оптимальная стационарная эксплуатация структурированных по размеру конкурирующих популяций // Тезисы докладов международной конференцио по математической теории управления и механике. Суздаль 5-9 июля 2013.- с. 87-89.

[10] Давыдов А. А., Платов А. С., Оптимальное управление структурированной по размеру популяцией на стационарном режиме. // Международная конференция по математической теории управления и механике: Тезисы докладов. - Суздаль 3-7 июля 2015. - с.53-54.

[11] Егоров А. И., Основы теории оптимального управления. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. —504с. – ISBN 978-5-9221-0543-9.

[12] Ильин О. И., Об оптимальной эксплуатации популяций рыб с возрастной структурой // Дальневост. матем. журн., 7:1-2, 2007, с.48–61.

[13] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.-572с.

[14] Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. — 5-е изд. — М.: «Дрофа», 2003. — Т. 1. — 704 с. — ISBN 5-7107-4119-1.

[15] Панеш А. А., Платов А. С., Оптимизация структурированной по размеру популяции с взаимодействующими видами // Проблемы математического анализа, Вып. 67, 2012-с. 107-112.

[16] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. 2-е изд. М.: Наука, 1969

[17] Aniţa S., Optimal Harvesting for a Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics // Journal of Mathematical Analysis and Applications Volume 226, Issue 1, 1 October 1998, Pages 6–22.

[18] Barucci E., Gozzi F., Investment in a vintage capital model. Research in Economics // 52:159-188, 1998.

[19] Bell, G. I. and Anderson, E. C., Cell growth and division I. A mathematical model with applications to cell volume distributions in mammalian suspension cultures. Biophysical Journal, 7, 329–351, 1967.

[20] Bell, G. I., Cell growth and division II. Conditions for balanced exponential growth in a mathematical model. Biophysical Journal, 8, 431–444, 1968.

[21] Benhabib J.,Rustichini A., A vintage capital model of investment and growth theory and evidence // General Equilibrium, Growth and Trade II, R. Becker et al., eds., Academic Press, San Diego, USA, 248-300, 1993.

[22] Brokate M., Pontryagin's principle for control problems in age-dependent population dynamics // J. Math. Biol. 23, 1985, 75–101.

[23] Busenberg S., Iannelli M., A class of nonlinear diffusion problems in age-dependent population dynamics // Nonl. Anal. Theory. Meth. Appl. 7, 1983, pp 501–529

[24] Calsina À., Saldaña J., Asymptotic behaviour of a model of hierarchically structured population dynamics // Journal of Mathematical Biology, 1997, 35, 967—987

[25] Calsina À., Saldaña J., Basic theory for a class of models of hierarchically structured population dynamics with distributed states in the recruitment

// Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 01/2006; 16(10):1695.

[26] Coale A., The Growth and Structure of Human Populations Princeton University Press, Princeton, 1972.

[27] Cushing J. M., An Introduction to Structured Population Dynamics // SIAM, Philadelphia, 1998.

[28] Cushing J. M., The dynamics of hierarchical age-structured populations // J. Math. Biol.-1994.- 32. P. 705 – 729.

[29] Davydov A.A., Platov A.S. Optimization of Steady State of Forest Management Model // The Sixth International Conference on Differential and Functional Differential Equations Moscow, Russia, August 14–21, 2011. – Pp. 15.

[30] Davydov A. A., Platov A. S. Optimization of Stationary Solution of a Model of Size-Structured Population. // Journal of Mathematical Sciences Vol. 176, № 6, 2011. – Pp. 860-869.

[31] Davydov A. A., Platov A. S. Optimal stationary solution in forest management model by accounting intra-species competition // Moscow Mathematical Journal, Vol. 12, №2, 2012, 269–273

[32] Davydov A. A., Platov A. S. Optimal Stationary Solution for a Model of Exploitation of a Population Under Intraspecific Competition // Journal of Mathematical Sciences, 2014, Vol. 201, Issue 6, pp 746–750

[33] Davydov A. A., Platov A. S., Optimal stationary exploitation of size-structured population with intra-specific competition // in the book «Geometric Control Theory and Sub-Riemannian Geometry», pp. 123-132, DOI: 10.1007/978-3-319-02132-4_8

[34] Euler L. Recherches generales sur la mortalite et la multiplication du genre humain // Memoires del'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres. 1760. Vol. XVI. P. 144–164.

[35] Feichtinger G., Hartl R. F., Peter M., Kort P. M., Veliov V. M., Anticipation effects of technological progress on capital accumulation: a vintage capital approach // Journal of Economic Theory. 2006. Vol. 126. № 1. P. 143–164.

[36] Feng Z., Huang W., Castillo-Chavez C., Global behavior of a multi-group SIS epidemic model with age structure // J. Diff. Eqs. 218(2), 2005, pp 292–324

[37] Fredrickson A. G., Ramkrishna D., Tsuchiya H. M., Statistics and dynamics of procaryotic cell populations. Mathematical Biosciences, 1, 327–374, 1967.

[38] Gasca-Leyvaa E., Hernándezb J. M., Veliov V. M., Optimal harvesting time in a size-heterogeneous population // Ecological Modelling 210, 2008, 161–168.

[39] Gurtin M. E., MacCamy R. C., Non-linear age-dependent population dynamics. // Archive for Rational Mechanics and Analysis, 54, 281–300, 1974.

[40] Hritonenko N., Yatsenko Yu., Goetz R., Xabadia A., A bang-bang regime in optimal harvesting of size-structured populations // Nonlinear Analysis, 71, 2009, e2331-e2336.

[41] N. Hritonenko, Y. Yatsenko , R.-U. Goetz, A. Xabadia Optimal harvesting in forestry: steady-state analysis and climate change impact // Journal of Biological Dynamics, 7:1, 41-58, 2013.

[42] Iannelli M., Mathematical theory of age-structured population dynamics. Pisa: Giadini Editori e Stampatori, 1994.

[43] Inaba H., Mathematical Models for Demography and Epidemics // University of Tokyo Press, Tokyo, 2002.

[44] Kato N., Optimal harvesting for nonlinear size-structured population dynamics // J. Math. Anal. Appl. 342, 2008, 1388–1398.

[45] Keyfitz N., Introduction to the Mathematics of Population // Addison Wesley, Reading, 1968.

[46] Lotka A. J., Relation between birth rates and death rates. Science, 26, 21–22, 1907.

[47] McKendrick A. G., Applications of mathematics to medical problems Kapil Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, vol 44, 1925, pp. 1–34.

[48] Metz, J. A. J., Diekmann O. (eds.), Dynamics of Physiologically Structured Populations. // Lecture Notes in Biomath. V 68, 1996, Springer Verlag.

[49] Murphy L. F., A nonlinear growth mechanism in size structured population dynamics // J. Theor. Biol. 104 (1983), 493-506.

[50] Murray J. D., Mathematical Biology. I. An Introduction // (Interdisciplinary Applied Mathematics. Vol. 17.). 3rd edition. New York–Berlin: Springer, 2002, 535 pp.

[51] Murray J. D., Mathematical Biology. II: Spatial Models and Biomedical Applications // (Interdisciplinary Applied Mathematics. Vol. 18.). 3rd edition. New York–Berlin: Springer, 2003, 811 pp.

[52] Panesh A. A., Platov A. S. Optimization of size-structured population with interacting species // Journal of Mathematical Sciences, January 2013, Volume 188, Issue 3, pp 293-298.

[53] Pollard J., Mathematical Models for the Growth of Human Populations // (Cambridge University Press), Cambridge, 1973.

[54] Roos A. M., A gentle introduction to models of physiologically structured populations, Structured population models in marine, terrestrial, and freshwater systems, Population and Community Biology, eds. S. Tuljapurkar, H. Caswell, Chapman and Hall, N. Y., 1997, 119–20

[55] Roos A. M., Modeling Population Dynamics // (lectures) `http://staff.science.uva.nl/~aroos/downloads/pdf_readers/syllabus.pdf`

[56] Sharpe, F. R. and Lotka, A. J., A problem in age-distribution. Philosophical Magazine, 1911.

[57] Sinko J. W., Streifer W., A new model for age–size structure of a population. Ecology, 48, 910–918, 1967.

[58] Tarniceriu O. C., Veliov V. M., Control of Size-Structured Systems. // Large-Scale Scientific Computing: 6th International Conference, LSSC 2007, Sozopol, Bulgaria, June 4-9, 2007,

[59] Veliov V. M., Optimal control of heterogeneous systems: Basic theory // J. Math. Anal. Appl. 346, 2008, 227–24

[60] Veliov V. M., Numerical approximations in optimal control of a class of heterogeneous systems // Computers & Mathematics with Applications, Volume 70, Issue 11, Pages 2652–2660.

[61] von Foerster H., Some remarks on changing populations // In: F. Stohlman (Ed.), The Kinetics of Cellular Proliferation. New York: Grune and Stratton, 1959. P. 382–407.

[62] Webb, G. F., Non-linear semigroups and age-dependent population models // Annali di Matematica Pura ed Applicata, 129, 43–55, 1981.

[63] Webb, G. F., A recovery-relapse epidemic model with spatial diffusion // J. Math. Biology 1982, 14: 177. doi:10.1007/BF01832843

[64] Webb, G. F., Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics. // 1985. Marcel Dekker, New York.

[65] Webb G. F., Population Models Structured by Age, Size, and Spatial Position // Lecture Notes in Mathematics. 2008. Vol. 1936. P. 1–49.

[66] Xabadia A., Goetz R., The optimal selective logging regime and the Faustman formula //Journal of forest economy, 16, 2010, 63-82.

[67] Yosida K., Functional Analysis, Fourth Ed., Springer-Verlag, Berlin, 1974.