Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)

На правах рукописи

ТАХИР ХАЛИД МИЗХИР ТАХИР

Теоремы сравнения краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений и их применение к исследованию вопросов существования и оценок решений

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук,
доцент Родина Людмила Ивановна

Владимир — 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория функционально-дифференциальных уравнений начала свое развитие с пятидесятых годов прошлого века. Первые публикации были посвящены исследованиям различных моделей, содержащих дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом (см. обзоры [63], [65], [71]). Дальнейшее развитие данная теория получила благодаря работам Н.В. Азбелева, Р. Беллмана, А.И. Булгакова, Е.С. Жуковского, А.М. Зверкина, В.И. Зубова, В.Б. Колмановского, Н.Н. Красовского, К. Кука, В.П. Максимова, А.Д. Мышкиса, С.Б. Норкина, В.Р. Носова, Л.Ф. Рахматуллиной, П.М. Симонова, А.Л. Скубачевского, Дж. Хейла, С.Н. Шиманова, Л.Э. Эльсгольца, а также их многочисленных учеников. Вопросам теории функционально-дифференциальных уравнений (и включений) с вольтерровыми и обобщенно вольтерровыми отображениями посвящены работы Н.В. Азбелева, А.И. Булгакова, С.А. Гусаренко, М.Е. Драхлина, Е.С. Жуковского, В.П. Максимова [4], [13], [16], [17], [23].

К важнейшим задачам теории функционально-дифференциальных уравнений, наряду с изучением устойчивости решений [5], [41], относятся исследования краевых задач [6], [49]-[51]. Для данных задач основными методами исследования являются методы априорных оценок [1], [62], [67]-[69], метод положительных операторов [2], [70] и применение теорем о неподвижных точках [38], [40], [61], в частности, теоремы Л.В. Канторовича о существовании неподвижной точки отображения, действующего в банаховом пространстве (см. [34, XVIII.1.2, теорема 1]). В работах участников Пермской школы Н.В. Азбелева при исследовании линейных функционально-дифференциальных уравнений широко используется сравнение с модельным уравнением, в частности, для получения условий разрешимости и построения оценок решений краевых задач (см. [9]-[12]), для получения условий устойчивости решений (см. [5], [44]). При исследовании нелинейных уравнений стандартным приемом является выделение линейного уравнения, обладающего «хорошими» свойствами и, если исходное уравнение оказывается в каком либо смысле близким к соответствующему линейному уравнению, то оно наследует эти «хорошие» свойства (см., например, [2], [61]). «Модельными» уравнениями могут являться как обыкновенные дифференциальные уравнения [64], [66], так и функционально-дифференциальные с постоянными или линейными отклонениями [48].

Диссертация посвящена вопросам разрешимости и оценкам решений задачи Коши и краевых задач для линейных и нелинейных функционально-дифференциальных уравнений. Систематически используется метод сравнения исследуемой краевой задачи с некоторой «эталонной задачей», обладающей требуемыми свойствами (такими, как однозначная разрешимость, справедливость неравенства типа Чаплыгина, неотрицательность решения).

Основными результатами работы являются новые теоремы сравнения краевых задач. Для применения этих утверждений получены решения некоторых конкретных классов уравнений с постоянным и переменным запаздыванием и уравнений нейтрального типа. В диссертации эти уравнения используются в качестве модельных для исследования задачи Коши и краевых задач для различных функционально-дифференциальных уравнений. Полученные формулы нахождения решений этих уравнений могут найти приложения в изучении проблем устойчивости, существования периодических решений и др. Заметим, что в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых случаи интегрируемости в квадратурах подробно изучены (см. [33]), в научной литературе содержится очень мало сведений о конкретных уравнениях с запаздыванием, интегро-дифференциальных уравнениях, уравнениях нейтрального типа и др., решение которых удается записать аналитически.

Стоит подчеркнуть, что в диссертации не просто сравниваются исследуемые краевые задачи с модельными, а получены утверждения – теоремы сравнения, которые устанавливают достаточные условия на разность между заданным и модельным отображением, обеспечивающие сохранение тех или иных свойств (разрешимость, единственность решения, справедливость теорем о дифференциальном неравенстве). Отметим, что рассматриваемые в диссертации «вольтерровы возмущения» функционально-дифференциальных уравнений ранее в литературе не рассматривались. В работах [4], [13], [16], [17], [23] прямо исследовались вопросы теории уравнений с вольтерровыми отображениями.

Диссертация содержит две главы, разбитые на параграфы, которые в свою очередь делятся на пункты и подпункты. Номера теорем, лемм, определений, замечаний и т.д. состоят из трех чисел: номера главы, параграфа и номера данного утверждения в данном параграфе.

В первой главе рассматриваются линейные функционально-дифференциальные уравнения. Эта глава состоит из четырех параграфов. В §1.1 приведены необходимые сведения из монографии Н.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматуллиной [2] о линейном функционально-дифференциальном уравнении общего вида и получены два основных утверждения: теорема сравнения задач Коши и теорема сравнения краевых задач. Для конкретных задач эти утверждения позволяют получать условия однозначной разрешимости, неотрицательности функции Коши, функции Грина и фундаментального решения соответствующего однородного уравнения. Для применения этих утверждений требуется задать «эталонную» краевую задачу, обладающую соответствующими свойствами и определить некоторый оператор по приведенному правилу через операторы, порожденные исследуемой и «эталонной» задачами. Если спектральный радиус этого оператора меньше единицы, то рассматриваемая задача однозначно разрешима. Аналогично, для получения условий неотрицательности функции Грина и фундаментального решения требуется определить специальный оператор и проверить его положительность. В параграфах 1.2 – 1.4 рассмотрены применения полученных утверждений к конкретным функционально-дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами. В заголовок каждого параграфа вынесено рассматриваемое в нем уравнение. Для каждого уравнения найдено общее решение, фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения и функция Коши. Получены также условия однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи (в частности, периодической задачи), определена ее функция Грина. В терминах коэффициентов уравнений и длины промежутка «времени» получены условия положительности функции Коши и функции Грина. На основании полученных в §1.1 теорем сравнения из этих результатов выводятся соответствующие утверждения для уравнений с переменными коэффициентами.

Во второй главе исследуются нелинейные функционально-дифференциальные уравнения вида

$$\mathcal{L}x = Fx, \tag{0.0.1}$$

где $\mathcal{L} : AC \to L$ — линейный оператор, $F : AC \to L$ — нелинейный оператор. В § 2.1 рассмотрена задача Коши. В пункте 1 приведены необходимые сведения об операторном уравнении Вольтерры. В пункте 2 исследуется задача Коши для уравнения (0.0.1). Используется сравнение нелинейного уравнения с «эталонным» эволюционным линейным уравнением $\mathcal{L}x = y$, для которого задача Коши предполагается однозначно разрешимой. Доказывается, что если нелинейное уравнение отличается от линейного на непрерывный вольтерров оператор $\widetilde{F} : C \to L$ (точнее, на оператор F, допускающий продолжение до непрерывного оператора, действующего из C в L), то исследуемая задача Коши разрешима, всякое локальное решение продолжаемо до глобального или предельно продолженного решения. Если оператор $\widetilde{F} : C \to L$ является вольтеррово q-липшицевым, а функция Коши «эталонного» уравнения удовлетворяет неравенству $|\mathcal{C}(t,s)| \leq 1/q$, то задача Коши для нелинейного уравнения имеет единственное глобальное или предельно продолженное решение, и всякое локальное решение является его частью. Если же оператор $\widetilde{F}$ равномерно вольтеррово q-липшицев и по-прежнему $|\mathcal{C}(t,s)| \leq 1/q$, то задача Коши для нелинейного уравнения имеет единственное глобальное решение и всякое локальное решение является его частью. Заключает пункт 2 исследование задачи Коши в случае, когда рассматриваемое уравнение отличается от «эталонного» линейного уравнения на вольтерров монотонный оператор $\widetilde{F}$. Показано, что если для задачи Коши линейного уравнения справедливо функционально-дифференциальное неравенство типа Чаплыгина (т. е. его функция Коши неотрицательна), то и для исследуемого нелинейного уравнения также имеет место соответствующее функционально-дифференциальное неравенство типа Чаплыгина.

Полученные в пункте 2 результаты о задаче Коши для функционально-дифференциального уравнения общего вида применяется в п.3 (заключающем § 2.1) к конкретным уравнениям вида (0.0.1), в которых линейная часть — это оператор одного из следующих типов:

$$(\mathcal{L}x)(t) \doteq \dot{x}(t) - p\,(S^0x)(t), \text{ где } p \in \mathbb{R},$$
$$(S^0x)(t) \doteq \begin{cases} x(t-1), & t \in [1, T], \\ 0, & t \in [0, 1); \end{cases} \tag{0.0.2}$$

$$(\mathcal{L}x)(t) \doteq \dot{x}(t) - p\,x(t/2), \quad \text{где } p \in \mathbb{R}; \tag{0.0.3}$$

$$(\mathcal{L}x)(t) \doteq \dot{x}(t) - p\,\dot{x}(t/2), \quad \text{где } p \in (-1/2,\, 1/2); \tag{0.0.4}$$

а правая часть задается соотношениями

$$(Fx)(t) \doteq f\big(t, x(t), (S_hx)(t)\big), \text{ где } (S_hx)(t) = \begin{cases} x(h(t)), & h(t) \in [0, T], \\ \theta(h(t)), & h(t) \notin [0, T] \end{cases} \tag{0.0.5}$$

(здесь $h : [0, T] \to \mathbb{R}$ и $\theta : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ — заданные измеримые функции, $t \in [0, T]$). В пункте 3.1 получены условия на функции f и h, при которых решение задачи Коши для рассматриваемых нелинейных уравнений существует, продолжаемо до глобального или предельно продолженного решения, а также условия единственности глобального решения. В пункте 3.2 доказывается утверждение о неравенстве типа Чаплыгина; здесь используется сравнение с линейным уравнением, функция Коши которого неотрицательна.

В § 2.2 исследуется краевая задачи для уравнения (0.0.1) с краевым условием

$$lx = \alpha, \tag{0.0.6}$$

где $l : AC \to \mathbb{R}$ — линейный ограниченный функционал, α — заданное число. В качестве «эталонной» рассматривается линейная краевая задача

$$\mathcal{L}x = f, \quad lx = \alpha,$$

которая предполагается однозначно разрешимой при всех $f \in L,\ \alpha \in \mathbb{R}$. В пункте 1 описан подход к исследованию задачи (0.0.1), (0.0.6), основанный на ее редукции либо к уравнению в пространстве AC:

$$x(t) = \alpha X(t) + \int\limits_0^T \mathcal{G}(t,s)\,(Fx)(s)\,ds, \quad t \in [0,T],$$

либо к уравнению в пространстве L:

$$y(t) = \Big(F\big(\alpha X + \int\limits_0^T \mathcal{G}(\cdot,s)\,y(s)\,ds\big)\Big)(t), \quad t \in [0,T]$$

(относительно неизвестного $y = \mathcal{L}x \in L$). Таким образом, появляется возможность применения к краевой задаче (0.0.1), (0.0.6) известных теорем о неподвижных точках.

В пункте 2 получены условия на операторы F и l, гарантирующие существование решения задачи (0.0.1), (0.0.6) и условия единственности ее решения. Далее в случае положительности функции Грина «эталонной» задачи и монотонности оператора F показано, что для краевой задачи (0.0.1), (0.0.6) имеет место утверждение о неравенстве типа Чаплыгина.

В п. 3 результаты из п. 2 о краевой задаче (0.0.1), (0.0.6) применены к исследованию двухточечной краевой задачи с условием

$$lx \doteq Ax(0) + Bx(T) = C$$

для конкретных нелинейных уравнений. Рассматриваются уравнения с оператором $\mathcal{L}$, определенным каждым из соотношений (0.0.2), (0.0.3) или (0.0.4), и оператором F, определенным соотношением (0.0.5). Получены условия существования и единственности решения такой краевой задачи, а также оценки решений. Рассмотрены частные случаи: апериодическая задача $(A = 1, B = 1)$ и периодическая задача $(A = -1, B = 1)$.

Материалы диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

1. Международная научная конференция «Колмогоровские чтения — VII. Общие проблемы управления и их приложения ОПУ-2015», посвященная памяти А.И. Булгакова (Тамбов, 2015 г.);

2. Международная школа молодых ученых «Многозначный анализ, выпуклый анализ и оптимальное управление», посвященная 85-летию Института математики, физики и информатики Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина (Тамбов, 2015 г.);

3. Международная конференция «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий ПМТУКТ-2016» (Воронеж, 2016 г.);

4. Школа для студентов, аспирантов и молодых ученых «Математическое и компьютерное моделирование, информационные технологии управления» (Воронеж, 2016 г.);

5. IV и V Международный научный семинар с элементами школы для молодых ученых «Функционально-дифференциальные уравнения и включения и их приложения в математическом моделировании» (Тамбов, 2016, 2017 гг.);

6. XX–XXIII Всероссийские конференции «Державинские чтения» (Тамбов, 2015–2018 гг.);

7. Тамбовский городской семинар по функционально-дифференциальным уравнениям и включениям (руководитель Е.С. Жуковский, Тамбов, 2016–2018 гг.).

8. Научный семинар «Нелинейный анализ и его приложения» кафедры «Функциональный анализ и его приложения» ВлГУ (Владимир, 2019, 2020 гг.).

9. Студенческая школа-конференция «Математическая весна — 2020. Приглашение в динамические системы» (Нижний Новгород, 2020 г.).

Результаты диссертации опубликованы в девяти работах, из которых одна монография [30] и восемь статей [8], [19], [29] – [31], [52] – [54]. Работы [8], [19], [29], [31], [53], [54] опубликованы в журналах из перечня ВАК, в том числе статьи [29], [31] опубликованы в журналах, входящих в базы данных Web of Science и Scopus.

Автор выражает благодарность профессору Е.С. Жуковскому за постановку задачи и помощь, оказанную при работе над диссертацией, а также профессору П.М. Симонову за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел;

$\mathbb{R}_+$ — множество действительных неотрицательных чисел;

$L \doteq L([0,T],\mathbb{R})$ — банахово пространство суммируемых (по Лебегу) функций $y : [0,T] \to \mathbb{R}$ с нормой $\|y\|_L = \int_0^T |y(t)|\,dt$;

L_+ — конус неотрицательных функций пространства L;

$AC \doteq AC([0,T],\mathbb{R})$ — банахово пространство определенных на $[0,T]$ абсолютно непрерывных функций, имеющих почти всюду производную $\dot{x} \in L$; норма определяется равенством $\|x\|_{AC} = \|\dot{x}\|_L + |x(0)|$;

AC_+ — конус неотрицательных функций пространства AC;

$\widetilde{AC} \doteq \widetilde{AC}([0,T],\mathbb{R})$ — пространство функций $x : [0,T] \to \mathbb{R}$, имеющих не более одного разрыва в $\tilde{t} \doteq \tilde{t}(x) \in (0,T]$, непрерывных справа в $\tilde{t}$; и абсолютно непрерывных на $[0,\tilde{t}\,)$ и $[\,\tilde{t},T]$;

$C \doteq C([0,T],\mathbb{R})$ — банахово пространство непрерывных функций $x : [0,T] \to \mathbb{R}$ с нормой $\|x\|_C = \max_{t\in[0,T]} |x(t)|$;

C_+ — конус неотрицательных функций пространства C;

$\chi_{[\tau_1,\tau_2]}(\cdot)$ — характеристическая функция отрезка $[\tau_1,\tau_2]$.

Глава 1. ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ КОШИ И ГРИНА

§ 1.1. Теоремы сравнения для линейных функционально-дифференциальных уравнений общего вида

1.1.1. Теорема сравнения задач Коши для линейных функционально-дифференциальных уравнений

1.1.1a. Линейное эволюционное функционально-дифференциальное уравнение. Задача Коши. Стандартно обозначаем:

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел;

$L \doteq L([0,T],\mathbb{R})$ — пространство суммируемых по Лебегу функций $y : [0,T] \to \mathbb{R}$ с нормой $\|y\|_L = \int_0^T |y(t)|\,dt$;

$AC \doteq AC([0,T],\mathbb{R})$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x : [0,T] \to \mathbb{R}$, $\|x\|_{AC} = \max\big\{\|\dot{x}\|_L, |x(0)|\big\}$; $AC_0 = \{x \in AC : x(0) = 0\}$.

Считаем, что в рассматриваемых функциональных пространствах задан естественный порядок, то есть для функций $x_1, x_2 \in L$ (или $x_1, x_2 \in AC$) полагаем $x_1 \geq x_2$, если функция $x_1 - x_2$ неотрицательна.

Пусть X, Y — некоторые пространства определенных на $[0,T]$ скалярных функций.

Определение 1.1.1. (см. [19]). Отображение $F : X \to Y$ называют вольтерровым (по А.Н. Тихонову), если для любого $\tau \in (0,T]$ и любых $x, u \in X$ из равенства $x(t) = u(t)$ на $[0,\tau]$ следует, что $(Fx)(t) = (Fu)(t)$ на $[0,\tau]$.

Определение 1.1.2. Отображение $F : X \to Y$ называют положительным, если для любой неотрицательной функции $x \in X$ функция Fx неотрицательна.

Пусть задан линейный ограниченный оператор $\mathcal{L} : AC \to L$, $f \in L$. Вначале приведем необходимые сведения из монографии [2] о линейном функционально-дифференциальном уравнении

$$\mathcal{L}x = f\,. \tag{1.1.1}$$

Если оператор $Q : L \to L$, $Qy = \mathcal{L}\Big(\int\limits_0^{(\cdot)} y(s)ds\Big)$ обратим и обратный оператор $Q^{-1} : L \to L$ вольтерров, то задача Коши с начальным условием $x(0) = \alpha$ однозначно разрешима при любых $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in L$ и ее решение представимо в виде

$$x(t) = \alpha X(t) + \int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s)\, f(s)\, ds, \tag{1.1.2}$$

где X — нормальное фундаментальное решение однородного уравнения $\mathcal{L}x = 0$ такое, что $X(0) = 1$, и $\mathcal{C} : \Delta_T \doteq \big\{(t,s) :\ s \in [0,t],\, t \in [0,T]\big\} \to \mathbb{R}$ — функция Коши.

Из соотношения (1.1.2) следует, что для монотонной зависимости решения x от начального значения α необходимо и достаточно, чтобы фундаментальное решение X было неотрицательным, а для монотонной зависимости решения x от правой части f необходимо и достаточно, чтобы неотрицательной была функция Коши. Итак, неравенства $X(t) \geq 0$, $\mathcal{C}(t,s) \geq 0$ являются критерием справедливости утверждений типа теоремы Чаплыгина о нестрогом неравенстве; если, более того, $X(t) > 0$ при любом t, $\mathcal{C}(t,s) > 0$ при всех $t > 0$ и почти всех s, то справедливы соответствующие строгие неравенства. Для оператора Коши $f \in L \mapsto$

$Cf \doteq \int_0^{(\cdot)} \mathcal{C}(\cdot,s)f(s)ds \in AC_0$ имеет место представление $C = \left(Q\frac{d}{dt}\right)^{-1}$, где $\frac{d}{dt} : AC_0 \to L$ — оператор дифференцирования.

Таким образом, неравенство $\mathcal{C}(t,s) \geq 0$ равносильно положительности вольтеррова оператора $\left(Q\frac{d}{dt}\right)^{-1} : L \to AC_0$. Отметим, что условия положительной обратимости достаточно широкого класса отображений, в том числе, возникающих в краевых задачах для функционально-дифференциальных уравнений, получены в [12], в [55] приведена схема исследований. Доказательство формулируемого ниже утверждения о положительности функции Коши основано на проверке положительности вольтеррова оператора $\left(Q\frac{d}{dt}\right)^{-1} : L \to AC_0$.

1.1.1b. Теорема сравнения задач Коши для линейных функционально-дифференциальных уравнений. Получим условия на линейный оператор $\triangle\mathcal{L} : AC \to L$, при выполнении которых однозначная разрешимость задачи Коши для функционально-дифференциального уравнения (1.1.1) влечет однозначную разрешимость задачи Коши для «возмущенного» уравнения

$$\widetilde{\mathcal{L}}x \doteq \mathcal{L}x - \triangle\mathcal{L}x = f. \tag{1.1.3}$$

Т е о р е м а 1.1.1. (см. [29]). *Пусть оператор* $\triangle\mathcal{L} : AC \to L$ *вольтерров и вполне непрерывен. Тогда, если задача Коши для функционально-дифференциального уравнения* (1.1.1) *однозначно разрешима и ее решение представимо в виде* (1.1.2), *то задача Коши для уравнения* (1.1.3) *также однозначно разрешима и ее решение* $\widetilde{x}$ *имеет представление* (1.1.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как задача Коши для уравнения (1.1.1) однозначно разрешима, оператор $x \mapsto \big(\mathcal{L}x, x(0)\big)$ является изоморфизмом

$AC \to L \times \mathbb{R}$, а обратный изоморфизм $L \times \mathbb{R} \to AC$ — это отображение $(y, \alpha) \mapsto X\alpha + Cy$, где X — нормальное фундаментальное решение, а $C : L \to AC$ — оператор Коши, то есть вольтерров ограниченный оператор, определяемый формулой $(Cy)(t) \doteq \int_0^t \mathcal{C}(t,s)\, y(s)\, ds$.

Используя этот изоморфизм, запишем задачу Коши для уравнения (1.1.3) в виде уравнения

$$y - \vartriangle\mathcal{L}Cy = f + \vartriangle\mathcal{L}X\alpha \tag{1.1.4}$$

относительно неизвестной $y = \mathcal{L}x$. Композиция $\vartriangle\mathcal{L}C : L \to L$ вольтерровых ограниченных операторов, один из которых вполне непрерывен, является вольтерровым вполне непрерывным оператором, поэтому имеет спектральный радиус равный нулю. Следовательно, оператор $I - \vartriangle\mathcal{L}C : L \to L$ обратим и обратный оператор $(I - \vartriangle\mathcal{L}C)^{-1}$ ограничен и вольтерров. Таким образом, уравнение (1.1.4) для каждых $f \in L$, $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет единственное решение $y \in L$, определяемое равенством

$$y = (I - \vartriangle\mathcal{L}C)^{-1} f + (I - \vartriangle\mathcal{L}C)^{-1} \vartriangle\mathcal{L}X\alpha.$$

Соответственно, задача Коши для уравнения (1.1.3) при любых $f \in L$, $\alpha \in \mathbb{R}$ однозначно разрешима, ее решение записывается в виде

$$\begin{aligned} x = X\alpha + Cy = X\alpha + C(I - \vartriangle\mathcal{L}C)^{-1} f + C(I - \vartriangle\mathcal{L}C)^{-1} \vartriangle\mathcal{L}X\alpha = \\ = \big(X + C(I - \vartriangle\mathcal{L}C)^{-1} \vartriangle\mathcal{L}X\big)\alpha + C(I - \vartriangle\mathcal{L}C)^{-1} f. \end{aligned}$$

Поскольку здесь оператор $\widetilde{C} \doteq C(I - \vartriangle\mathcal{L}C)^{-1} : L \to AC$ ограничен и вольтерров, общее решение уравнения (1.1.3), действительно, представимо в виде (1.1.2). $\square$

В условиях доказанного утверждения решение задачи Коши для уравнения (1.1.3) записывается в виде

$$\widetilde{x}(t) = \alpha \widetilde{X}(t) + \int\limits_0^t \widetilde{\mathcal{C}}(t,s)\, f(s)\, ds,$$

где $\widetilde{\mathcal{C}}$ — ее функция Коши, а $\widetilde{X}$ — фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения. Сформулируем теорему сравнения функций Коши $\widetilde{\mathcal{C}}$ и $\mathcal{C}$, а также нормальных фундаментальных решений $\widetilde{X}$ и X уравнений (1.1.3) и (1.1.1).

Т е о р е м а 1.1.2. (см. [29]). *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1.1 *и оператор*

$$V : AC \to AC, \quad (Vx)(t) \doteq (C \vartriangle \mathcal{L}x)(t) = \int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s)(\vartriangle \mathcal{L}x)(s)ds$$

положителен. Тогда справедливы утверждения:

(*a*) *если для функции Коши уравнения* (1.1.1) *выполнено* $\mathcal{C}(t,s) \geq 0$, *то функция Коши уравнения* (1.1.3) *удовлетворяет при* $(t,s) \in \Delta_T$ *неравенству* $\widetilde{\mathcal{C}}(t,s) \geq \mathcal{C}(t,s)$;

(*b*) *если для нормального фундаментального решения однородного уравнения* (1.1.1) *выполнено* $X(t) \geq 0$, *то нормальное фундаментальное решение однородного уравнения* (1.1.3) *удовлетворяет при* $t \in [0,T]$ *неравенству* $\widetilde{X}(t) \geq X(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оператор $(I - \vartriangle\mathcal{L}C)^{-1} : L \to L$ является суммой ряда Неймана (точнее, пределом по норме пространства линейных ограниченных операторов $L \to L$ последовательности частичных сумм ряда Неймана) $(I - \vartriangle\mathcal{L}C)^{-1} = I + \vartriangle\mathcal{L}C + (\vartriangle\mathcal{L}C)^2 + \ldots$.

Для оператора Коши $\widetilde{C} : L \to AC$ уравнения (1.1.3) имеем

$$\widetilde{C} = C(I - \vartriangle\mathcal{L}C)^{-1} = C\sum_{i=0}^{\infty}(\vartriangle\mathcal{L}C)^i =$$

$$= C + \sum_{i=1}^{\infty} C(\vartriangle\mathcal{L}C)^i = C + \sum_{i=1}^{\infty}(C\vartriangle\mathcal{L})^i C = C + \sum_{i=1}^{\infty} V^i C.$$

Если оператор Коши C положителен (что равносильно неотрицательности его функции Коши), то оператор $\sum\limits_{i=1}^{\infty} V^i C$ также положителен. Следовательно, положительным будет и оператор

$$\widetilde{C} - C : L \to AC, \quad \big((\widetilde{C} - C)f\big)(t) = \int_0^t \big(\widetilde{\mathcal{C}}(t,s) - \mathcal{C}(t,s)\big) f(s)\, ds,$$

что равносильно неравенству $\widetilde{\mathcal{C}}(t,s) \geq \mathcal{C}(t,s)$, $(t,s) \in \Delta_T$.

Для нормального фундаментального решения $\widetilde{X}$ однородного уравнения $\widetilde{\mathcal{L}}x = 0$ имеем

$$\widetilde{X} = X + C(I - \vartriangle\mathcal{L}C)^{-1} \vartriangle\mathcal{L}X = X + \Big(C + \sum_{i=1}^{\infty} V^i C\Big) \vartriangle\mathcal{L}X =$$

$$= X + VX + \sum_{i=1}^{\infty} V^i V X = \sum_{i=0}^{\infty} V^i X.$$

В силу положительности оператора V, очевидно, что если функция X неотрицательна, то $\widetilde{X} \geq X$. $\square$

Иллюстрацией теорем 1.1.1, 1.1.2 служит следующий пример уравнения с невольтерровым оператором $\mathcal{L} : AC \to L$, решение которого, тем не менее, может быть записано в виде (1.1.2), причем с неотрицательными функцией Коши и фундаментальным решением.

Пример 1.1.1. Определим функцию $h : [0,1] \to [0,1]$ равенством

$$h(t) = \begin{cases} 2t, & \text{если } t \in [0, 1/3], \\ (t+1)/2, & \text{если } t \in (1/3, 1]. \end{cases}$$

Отметим, что при всех $t \in [0,1]$ эта функция удовлетворяет неравенству $h(t) \geq t$, а обратная функция — неравенству $h^{-1}(t) \leq t$.

Задача Коши с начальным условием $x(0) = \alpha$ для уравнения

$$(\mathcal{L}x)(t) \doteq \dot{x}(h(t)) = f(t), \quad t \in [0,1],$$

очевидно, однозначно разрешима:

$$\dot{x}(t) = f(h^{-1}(t)),$$
$$x(t) = \alpha + \int_0^t f(h^{-1}(s))ds = \alpha + \int_0^t \chi_{[0,\, h^{-1}(t)]}(s)\dot{h}(s)f(s)ds$$

(здесь и ниже $\chi_{[\tau_1,\tau_2]}(\cdot)$ — характеристическая функция отрезка $[\tau_1, \tau_2]$). Итак, имеет место соотношение (1.1.2) с неотрицательной функцией Коши $\mathcal{C}(t,s) = \chi_{[0,\, h^{-1}(t)]}(s)\dot{h}(s)$ и фундаментальным решением $X(t) \equiv 1$ однородного уравнения. Согласно теореме 1.1.1, для любого вольтеррова, положительного, вполне непрерывного оператора $\triangle\mathcal{L} : AC \to L$ задача Коши

$$(\widetilde{\mathcal{L}}x)(t) \doteq \dot{x}(h(t)) - (\triangle\mathcal{L}x)(t) = f(t), \quad t \in [0,1], \quad x(0) = \alpha,$$

также однозначно разрешима, и ее решение представимо в виде (1.1.2) с неотрицательной функцией Коши и положительным фундаментальным решением.

1.1.2. Теорема сравнения краевых задач для линейных функционально-дифференциальных уравнений

1.1.2a. Краевая задача для линейного функционально-дифференциального уравнения. Пусть $\mathfrak{L}(E_1, E_2)$ — линейное пространство линейных отображений, действующих из E_1 в E_2, где E_i ($i = 1, 2$) — любое из пространств L, AC. Отображение

$F \in \mathfrak{L}(E_1, E_2)$ называют положительным, если образом произвольной неотрицательной функции $x \in E_1$ является неотрицательная функция $Fx \in E_2$. Для $F_1, F_2 \in \mathfrak{L}(E_1, E_2)$ полагаем, что выполнено неравенство $F_1 \geq F_2$, если оператор $F_1 - F_2$ положительный.

В этом пункте приводятся сведения о краевой задаче из монографии [2].

Пусть заданы: линейный ограниченный оператор $\mathcal{L} : AC \to L$, линейный ограниченный функционал $l : AC \to \mathbb{R}$, функция $y \in L$ и число $\gamma \in \mathbb{R}$. Краевой задачей называют систему уравнений

$$\mathcal{L}x = y, \quad lx = \gamma \tag{1.1.5}$$

относительно неизвестной функции $x \in AC$.

Если краевая задача (1.1.5) для любых правых частей $y \in L$, $\gamma \in \mathbb{R}$ однозначно разрешима, то существует линейный оператор

$$(G, X) \doteq \begin{pmatrix} \mathcal{L} \\ l \end{pmatrix}^{-1} : L \times \mathbb{R} \to AC,$$

который согласно теореме Банаха об обратном операторе (см. [37, с. 225]) является ограниченным. Оператор $X : \mathbb{R} \to AC$ можно отождествить с задающей его функцией $X \in AC$, называемой нормальным фундаментальным решением однородного уравнения, для этой функции выполнено $\mathcal{L}X = 0 \in L$, $lX = 1$. Оператор $G : L \to AC$ называют оператором Грина; заметим, что композиция $\mathcal{L}G : L \to L$ является тождественным оператором, а композиция $lG : L \to \mathbb{R}$ — нулевым функционалом. В силу интегрального представления линейного ограниченного функционала $lG : L \to \mathbb{R}$, существует функция $\mathcal{G} : [0, T] \times [0, T] \to \mathbb{R}$ такая, что оператор Грина представим в виде

$$(Gy)(t) \doteq \int_0^T \mathcal{G}(t, s) y(s)\, ds.$$

Отметим, что при каждом $t \in [0,T]$ функция $\mathcal{G}(t,\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}$ существенно ограничена. Функция $\mathcal{G}$ называется функцией Грина.

Таким образом, в случае однозначной разрешимости краевой задачи (1.1.5) при любых $y \in L,\ \gamma \in \mathbb{R}$ ее решение может быть записано в виде

$$x(t) = X(t)\gamma + \int_0^T \mathcal{G}(t,s)y(s)\,ds.$$

В связи с различными теоретическими и прикладными задачами представляют интерес условия применимости к краевой задаче теоремы Чаплыгина о неравенстве, то есть условия, при которых оператор Грина G является положительным, а нормальное фундаментальное решение X однородного уравнения неотрицательно. Оператор Грина положителен тогда и только тогда, когда функция $\mathcal{G}(t,\cdot)$ неотрицательна для всех $t \in [0,T]$.

Рассмотрим теперь краевую задачу для эволюционного уравнения (1.1.1) с условием

$$Ax(0) + Bx(T) = C. \tag{1.1.6}$$

Будем предполагать, что задача Коши для уравнения (1.1.1) однозначно разрешима и ее решение представимо в виде (1.1.2). Для однозначной разрешимости рассматриваемой краевой задачи с «двухточечным» условием (1.1.6) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$AX(0) + BX(T) \neq 0. \tag{1.1.7}$$

Итак, пусть выполнено неравенство (1.1.7). Подставив выражение (1.1.2) в краевые условия (1.1.6), получим

$$\alpha AX(0) + \alpha BX(T) + B\int\limits_0^T \mathcal{C}(T,s)f(s)\,ds = C.$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{C - B\int\limits_0^T \mathcal{C}(T,s)f(s)\,ds}{AX(0) + BX(T)},$$

и, следовательно, решением краевой задачи (1.1.1), (1.1.6) является

$$x(t) = \frac{C - B\int\limits_0^T \mathcal{C}(T,s)f(s)\,ds}{AX(0) + BX(T)}X(t) + \int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s)f(s)\,ds =$$

$$= \frac{CX(t)}{AX(0) + BX(T)} - \frac{\int\limits_0^T BX(t)\mathcal{C}(T,s)f(s)\,ds}{AX(0) + BX(T)} + \int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s)f(s)\,ds.$$

Таким образом, функция Грина равна

$$\mathcal{G}(t,s) = \begin{cases} \mathcal{C}(t,s) - \dfrac{BX(t)\mathcal{C}(T,s)}{AX(0) + BX(T)}, & \text{если} \quad t \geq s, \\ \\ -\dfrac{BX(t)\mathcal{C}(T,s)}{AX(0) + BX(T)}, & \text{если} \quad t < s. \end{cases} \tag{1.1.8}$$

1.1.2b. Теорема сравнения краевых задач для линейных функционально-дифференциальных уравнений. Здесь наряду с «эталонной» краевой задачей (1.1.5) рассматривается краевая задача

$$\widetilde{\mathcal{L}}x \doteq \mathcal{L}x - \triangle\mathcal{L}x = f, \quad \widetilde{l}x \doteq lx - \triangle lx = \alpha, \tag{1.1.9}$$

где $f \in L$, $\alpha \in \mathbb{R}$, линейные операторы $\triangle\mathcal{L} : AC \to L$ и $\triangle l : AC \to \mathbb{R}$ ограничены. Целью исследования является получение условий на операторы $\triangle\mathcal{L}$, $\triangle l$, при которых:

1) из однозначной разрешимости задачи (1.1.5) следует однозначная разрешимость задачи (1.1.9);

2) из неотрицательности функции Грина $\mathcal{G}$ и нормального фундаментального решения X задачи (1.1.5) следует неотрицательность функции Грина $\widetilde{\mathcal{G}}$ и нормального фундаментального решения $\widetilde{X}$ задачи (1.1.9).

Отметим, что в работе [2, с. 51–53] приведены соотношения, связывающие функции Грина однозначно разрешимых краевых задач, имеющих либо одинаковые краевые условия, либо одинаковые функционально-дифференциальные уравнения. В предлагаемых ниже утверждениях сравниваются краевые задачи, отличающиеся и уравнениями, и краевыми условиями, а целью исследования являются условия однозначной разрешимости и оценки решений.

Определим оператор $H : L \times \mathbb{R} \to L \times \mathbb{R}$ формулой

$$H \doteq \begin{pmatrix} \triangle\mathcal{L} \\ \triangle l \end{pmatrix}(G, X) = \begin{pmatrix} \triangle\mathcal{L}G & \triangle\mathcal{L}X \\ \triangle lG & \triangle lX \end{pmatrix}.$$

Т е о р е м а 1.1.3. (см. [31]). *Пусть краевая задача* (1.1.5) *для любых $y \in L$, $\gamma \in \mathbb{R}$ однозначно разрешима и для спектрального радиуса ρ оператора H выполнено неравенство $\rho(H) < 1$. Тогда краевая задача* (1.1.9) *при любых $f \in L$, $\alpha \in \mathbb{R}$ однозначно разрешима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждому $x \in AC$ взаимно однозначно соответствует пара $(y, \gamma) \in L \times \mathbb{R}$ правых частей в однозначно разрешимой краевой задаче (1.1.5), что позволяет в краевой задаче (1.1.9) сделать замену

$$x = X\gamma + Gy \tag{1.1.10}$$

(называемую подстановкой Азбелева). Таким образом, получаем систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}X\gamma+\mathcal{L}Gy-\vartriangle\mathcal{L}X\gamma-\vartriangle\mathcal{L}Gy=f,\\
&lX\gamma+lGy-\vartriangle lX\gamma-\vartriangle lGy=\alpha.
\end{aligned}
\tag{1.1.11}
$$

Однозначная разрешимость краевой задачи (1.1.9) равносильна однозначной разрешимости системы (1.1.11), а формула (1.1.10) позволяет по решению системы (1.1.11) определить решение задачи (1.1.9).

Так как имеют место соотношения

$$
\mathcal{L}X\gamma=0,\quad \mathcal{L}Gy=y,\quad lX\gamma=\gamma,\quad lGy=0,
$$

то систему (1.1.11) можно записать в виде

$$
\begin{pmatrix} y\\ \gamma\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\vartriangle\mathcal{L}G & \vartriangle\mathcal{L}X\\ \vartriangle lG & \vartriangle lX\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f\\ \alpha\end{pmatrix}. \tag{1.1.12}
$$

Остается заметить, что полученное уравнение для каждой правой части однозначно разрешимо вследствие предположения $\rho(H)<1$. $\square$

Для формулировки следующего утверждения определим оператор

$$
V:AC\to AC,\quad V\doteq(G,X)\begin{pmatrix}\vartriangle\mathcal{L}\\ \vartriangle l\end{pmatrix}=G\vartriangle\mathcal{L}+X\vartriangle l.
$$

Т е о р е м а 1.1.4. (см. [31]). *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1.3 *и оператор* $V:AC\to AC$ *является положительным. Тогда справедливы утверждения:*

(a) *если оператор Грина* $G:L\to AC$ *краевой задачи* (1.1.5) *положителен, то для оператора Грина* $\widetilde{G}$ *краевой задачи* (1.1.9) *выполнено неравенство* $\widetilde{G}\geq G$;

(b) *если нормальное фундаментальное решение* X *краевой задачи* (1.1.5) *неотрицательно, то для нормального фундаментального решения* $\widetilde{X}$ *краевой задачи* (1.1.9) *выполнено неравенство* $\widetilde{X}\geq X$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решением уравнения (1.1.12) является сумма ряда Неймана

$$\begin{pmatrix} y \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ \alpha \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{\infty} H^i \begin{pmatrix} f \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для решения x краевой задачи (1.1.5) выполнено

$$x = (G, X)\begin{pmatrix} y \\ \gamma \end{pmatrix} = Gf + X\alpha + (G, X)\sum_{i=1}^{\infty} H^i \begin{pmatrix} f \\ \alpha \end{pmatrix} =$$
$$= Gf + X\alpha + \sum_{i=1}^{\infty}(G, X)H^i \begin{pmatrix} f \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Для каждого члена полученного ряда в силу свойства ассоциативности произведения отображений имеем

$$(G, X)H^i = (G, X)\begin{pmatrix} \Delta\mathcal{L} \\ \Delta l \end{pmatrix}(G, X)\cdots\begin{pmatrix} \Delta\mathcal{L} \\ \Delta l \end{pmatrix}(G, X) = V^i(G, X).$$

Таким образом, решение задачи (1.1.5) определяется равенством

$$x = Gf + X\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} V^i(G, X)\begin{pmatrix} f \\ \alpha \end{pmatrix} = Gf + X\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} V^i(Gf + X\alpha) =$$
$$= Gf + \sum_{i=1}^{\infty} V^i Gf + X\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} V^i X\alpha.$$

Данное равенство позволяет определить оператор Грина и нормальное фундаментальное решение краевой задачи (1.1.9):

$$\widetilde{G} = G + \sum_{i=1}^{\infty} V^i G, \quad \widetilde{X} = X + \sum_{i=1}^{\infty} V^i X. \tag{1.1.13}$$

Так как оператор V положительный, то и сумма ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} V^i$ также положительна. Поэтому из (1.1.13) с очевидностью следует доказываемое утверждение: из положительности оператора G следует неравенство $\widetilde{G} \geq G$, а из $X \geq 0$ следует $\widetilde{X} \geq X$. $\square$

З а м е ч а н и е 1.1.1. Утверждение (a) теоремы 1.1.4 позволяет получать оценки функции Грина, так как оно равносильно следующему утверждению:

(a$'$) *если функция Грина* $\mathcal{G}$ *краевой задачи* (1.1.5) *неотрицательна, то есть* $\mathcal{G}(t,s) \geq 0$ *при любом* $t \in [0,T]$ *и п.в.* $s \in [0,T]$, *то для функции Грина* $\widetilde{\mathcal{G}}$ *краевой задачи* (1.1.9) *выполнено неравенство* $\widetilde{\mathcal{G}}(t,s) \geq \mathcal{G}(t,s)$ *при любом* $t \in [0,T]$ *и п.в.* $s \in [0,T]$.

Приведем частные случаи теорем 1.1.3, 1.1.4, относящиеся к ситуациям, когда сравниваемые краевые задачи имеют либо одинаковые уравнения, либо одинаковые краевые условия. Наряду с задачей (1.1.5) рассмотрим задачи

$$\widetilde{\mathcal{L}}x \doteq \mathcal{L}x - \triangle\mathcal{L}x = f, \quad lx = \alpha, \tag{1.1.14}$$

$$\mathcal{L}x = f, \quad \widetilde{l}x \doteq lx - \triangle lx = \alpha. \tag{1.1.15}$$

Следствие 1.1.1. *Пусть краевая задача* (1.1.5) *для любых* $y \in L$, $\gamma \in \mathbb{R}$ *однозначно разрешима и для спектрального радиуса* ρ *оператора* $\triangle\mathcal{L}G : L \to L$ *выполнено* $\rho(\triangle\mathcal{L}G) < 1$. *Тогда краевая задача* (1.1.14) *при любых* $f \in L$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *однозначно разрешима. Пусть, кроме того, оператор* $G\,\triangle\mathcal{L} : AC \to AC$ *является положительным. Тогда справедливы утверждения:*

(a) *если оператор Грина* $G : L \to AC$ *краевой задачи* (1.1.5) *положителен, то для оператора Грина* $\widetilde{G}$ *краевой задачи* (1.1.14) *выполнено неравенство* $\widetilde{G} \geq G$;

(b) *если нормальное фундаментальное решение* X *краевой задачи* (1.1.5) *неотрицательно, то для нормального фундаментального решения* $\widetilde{X}$ *краевой задачи* (1.1.14) *выполнено неравенство* $\widetilde{X} \geq X$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В рассматриваемой ситуации $\triangle l = 0$, поэтому оператор H здесь равен

$$H = \begin{pmatrix} \triangle\mathcal{L}G & \triangle\mathcal{L}X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для спектрального радиуса этого оператора выполнено $\rho(H)=\rho(\triangle\mathcal{L}G)<1$, и таким образом выполнены условия теоремы 1.1.3. Для проверки предположений теоремы 1.1.4 достаточно заметить, что $V = G\,\triangle\mathcal{L}$. $\square$

Для функций Коши двух функционально-дифференциальных уравнений аналогичный следствию 1.1.1 результат получен выше — это теоремы 1.1.1, 1.1.2. В случае начальной задачи с функционалом $lx \doteq x(0)$ оператор $G : L \to AC$ — это вольтерров оператор Коши. В теоремах 1.1.1, 1.1.2 предполагалось, что отображение $\triangle\,\mathcal{L} : AC \to L$ вольтеррово и вполне непрерывно. Тогда композиция $\triangle\,\mathcal{L}G : L \to L$ является вольтерровым вполне непрерывным оператором со спектральным радиусом $\rho(\triangle\mathcal{L}G) = 0$, что позволяет применить следствие 1.1.1.

Теперь приведем утверждение о сравнении краевых задач, отличающихся лишь краевыми условиями.

Следствие 1.1.2. *Пусть краевая задача* (1.1.5) *для любых* $y \in L$, $\gamma \in \mathbb{R}$ *однозначно разрешима и* $|\triangle lX| < 1$. *Тогда краевая задача* (1.1.15) *при любых* $f \in L$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *однозначно разрешима. Пусть, кроме того, оператор* $X\triangle l : AC \to AC$ *является положительным. Тогда справедливы утверждения:*

(a) *если оператор Грина* $G : L \to AC$ *краевой задачи* (1.1.5) *положителен, то для оператора Грина* $\widetilde{G}$ *краевой задачи* (1.1.15) *выполнено неравенство* $\widetilde{G} \geq G$;

(b) *если нормальное фундаментальное решение* X *краевой задачи* (1.1.5) *неотрицательно, то для нормального фундаментального решения* $\widetilde{X}$ *краевой задачи* (1.1.15) *выполнено неравенство* $\widetilde{X} \geq X$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В рассматриваемой ситуации $\triangle\mathcal{L} = 0$, и поэтому участвующие в формулировках теорем $1.1.3, 1.1.4$ отображения H, V определяются соотношениями

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \triangle lG & \triangle lX \end{pmatrix}, \quad V = X\triangle l.$$

Так как $\rho(H) = |\triangle lX| < 1$, выполнены все предположения теорем $1.1.3, 1.1.4$. $\square$

Чтобы продемонстрировать применения теорем $1.1.3, 1.1.4$, рассмотрим краевую задачу для функционально-дифференциального уравнения, содержащего отклонения в аргументе неизвестной функции и ее производной.

Пример 1.1.2. Положим

$$h(t) = \begin{cases} 2t, & t \in [0, 1/3], \\ (t+1)/2, & t \in (1/3, 1]. \end{cases}$$

Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{x}\big(h(t)\big) - p(t)x\big(g(t)\big) = f(t), \quad t \in [0, 1], \tag{1.1.16}$$

$$x(0) - \int_0^1 \varphi(s)\dot{x}(s)\, ds = \alpha. \tag{1.1.17}$$

Покажем, что если параметры $p, \varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g : [0, 1] \to [0, 1]$ — измеримые по Лебегу функции и выполнены условия

$$\operatorname*{vrai\ sup}_{t\in[0,1/3]} |\varphi(t)| < 1/2, \quad \operatorname*{vrai\ sup}_{t\in[1/3,1]} |\varphi(t)| < 2, \quad \int_0^1 |p(t)|\, dt < 1/3, \tag{1.1.18}$$

то при любых правых частях $f \in L$, $\alpha \in \mathbb{R}$ краевая задача $(1.1.16), (1.1.17)$ имеет единственное решение. Для этого потребуется задать «эталонную» краевую задачу. Использовать в качестве «эталонной» задачу Коши или какую-либо краевую задачу для уравнения (1.1.16) сложно, так как ее однозначная разрешимость потребует дополнительного изучения (осложненного отклоняющимся аргументом производной). Проще будет воспользоваться краевой задачей

$$\dot{x}\big(h(t)\big) = y(t), \quad t \in [0,1], \tag{1.1.19}$$

$$x(0) = \gamma. \tag{1.1.20}$$

Задача (1.1.19), (1.1.20), очевидно, однозначно разрешима:

$$\dot{x}(t) = y\big(h^{-1}(t)\big),$$

$$x(t) = \alpha + \int_0^t f(h^{-1}(s))ds = \gamma + \int_0^1 \chi_{[0,\,h^{-1}(t)]}(s)\dot{h}(s)y(s)ds.$$

Таким образом, операторы $G : L \to AC$, $X : \mathbb{R} \to AC$ в данном случае определяются соотношениями

$$(Gy)(t) = \int_0^1 \chi_{[0,\,h^{-1}(t)]}(s)\dot{h}(s)y(s)ds, \quad (X\gamma)(t) = \gamma, \quad t \in [0,1].$$

Для рассматриваемых краевых задач отображения $\triangle\mathcal{L} : AC \to L$, $\triangle l : AC \to \mathbb{R}$ определяются равенствами

$$(\triangle\mathcal{L}x)(t) = p(t)x\big(g(t)\big), \quad \triangle lx = \int_0^1 \varphi(s)\dot{x}(s)\,ds.$$

Таким образом, имеем

$$(\triangle\mathcal{L}Gy)(t) = p(t)\int_0^1 \chi_{[0,\,h^{-1}(g(t))]}(s)\dot{h}(s)y(s)ds, \quad (\triangle\mathcal{L}X\gamma)(t) = p(t)\gamma,$$

$$\triangle lGy = \int_0^1 \varphi(s)\dot{h}(s)y(s)ds, \quad \triangle lX\gamma = 0.$$

При задании нормы в $L\times\mathbb{R}$ формулой $\|(y,\gamma)\|_{L\times\mathbb{R}} = \max\big\{\|y\|_L, \|\gamma\|_{\mathbb{R}}\big\}$ норма оператора $H : L\times\mathbb{R} \to L\times\mathbb{R}$ оценивается неравенством

$$\|H\|_{L\times\mathbb{R}\to L\times\mathbb{R}} \le \max\big\{\|\triangle\mathcal{L}G\|_{L\to L} + \|\triangle\mathcal{L}X\|_{\mathbb{R}\to L},\, \|\triangle lG\|_{L\to\mathbb{R}} + \|\triangle lX\|_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\big\}.$$

В силу предположений (1.1.18) получаем $\|H\|_{L\times\mathbb{R}\to L\times\mathbb{R}} < 1$.

Таким образом, согласно теореме 1.1.3 краевая задача (1.1.16), (1.1.17) имеет единственное решение.

Потребуем теперь кроме принятых предположений, чтобы функции p, φ были неотрицательными. Тогда оператор $V : AC \to AC$, для рассматриваемых краевых задач равный

$$(Vx)(t) = (G\Delta\mathcal{L}x)(t) + (X\Delta lx)(t) =$$
$$= \int_0^1 \chi_{[0,\,h^{-1}(t)]}(s)\dot{h}(s)p(s)x\big(g(s)\big)ds + \int_0^1 \varphi(s)\dot{x}(s)\,ds,$$

является положительным. Следовательно, согласно теореме 1.1.4, для оператора Грина $\widetilde{G}$ краевой задачи (1.1.16), (1.1.17) выполнено $\widetilde{G} \geq G$. Соответственно, для функции Грина этой задачи при любом $t \in [0,1]$ и почти всех $s \in [0,1]$ справедливо неравенство

$$\widetilde{\mathcal{G}}(t,s) \geq \chi_{[0,\,h^{-1}(t)]}(s)\dot{h}(s) \geq 0.$$

§ 1.2. Неотрицательность функций Коши и Грина для уравнения $\dot{x}(t) - px(t-1) = f(t)$

1.2.1. Задача Коши

1.2.1a. Решение задачи Коши. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянным запаздыванием

$$\dot{x}(t) - px(t-1) = f(t), \quad t \geq 0, \quad x(\xi) = 0, \text{ если } \xi < 0 \tag{1.2.1}$$

при начальном условии

$$x(0) = \alpha.$$

Если $t \in [0,1)$, то $t-1 \in [-1,0)$, следовательно уравнение (1.2.1) принимает вид $\dot{x}(t) - 0 = f(t)$. Его решением будет $x(t) = \alpha + \int\limits_0^t f(s)ds$.

Если $t \in [1,2)$, то $t-1 \in [0,1)$, поэтому получаем

$$\dot{x}(t) - p\Big(\alpha + \int\limits_0^{t-1} f(s)ds\Big) = f(t).$$

Решением этого уравнения будет

$$x(t) = x(1) + \int\limits_1^t \Big(f(s) + \alpha p + \int\limits_0^{s-1} pf(\xi)d\xi\Big)ds.$$

Подставим $x(1)=\alpha+\int\limits_0^1 f(s)ds,$ получим

$$x(t)=\alpha+\int\limits_0^1 f(s)ds+\int\limits_1^t\Big(f(s)+\alpha p+\int\limits_0^{s-1} pf(\xi)d\xi\Big)ds=$$

$$=\alpha+\int\limits_0^1 f(s)ds+\int\limits_1^t f(s)ds+p\int\limits_1^t \alpha ds+\int\limits_1^t\int\limits_0^{s-1} pf(\xi)d\xi ds=$$

$$=\alpha+\alpha p(t-1)+\int\limits_0^t f(s)ds+p\int\limits_0^{t-1}\int\limits_{\xi+1}^t dsf(\xi)d\xi=$$

$$=\alpha\Big(1+p(t-1)\Big)+\int\limits_0^t f(s)ds+p\int\limits_0^{t-1}(t-s-1)f(s)ds.$$

Докажем методом математической индукции, что для любого n при всех $t\in[n,n+1)$ выполнено

$$x(t)=\alpha+\alpha p(t-1)+\frac{\alpha p^2(t-2)^2}{2!}+\ldots+\frac{\alpha p^n(t-n)^n}{n!}+\int\limits_0^t f(s)ds+$$

$$+p\int\limits_0^{t-1}(t-s-1)f(s)ds+\ldots+p^n\int\limits_0^{t-n}\frac{(t-s-n)^n}{n!}f(s)ds.$$

Это равенство проверено при $n=1$. Предположим, что равенство справедливо при $n=k-1$, то есть для $t\in(k-1,k]$, выполнено

$$x(t)=\alpha+\alpha p(t-1)+\frac{\alpha p^2(t-2)^2}{2!}+\ldots+\frac{\alpha p^{k-1}(t-k+1)^{k-1}}{(k-1)!}+\int\limits_0^t f(s)ds+$$

$$+p\int\limits_0^{t-1}(t-s-1)f(s)ds+\ldots+p^{k-1}\int\limits_0^{t-k+1}\frac{(t-s-k+1)^{k-1}}{(k-1)!}f(s)ds.$$

Тогда при $n=k$ для $t\in(k,k+1]$, так как $t-1\in(k-1,k]$, получаем

$$\dot{x}(t)-\alpha p\Big(1+p(t-2)\Big)+\ldots+\frac{\alpha p^k(t-k)^{k-1}}{(k-1)!}+p\int\limits_0^{t-1}f(s)ds+$$
$$+p^2\int\limits_0^{t-2}(t-s-2)f(s)ds+\ldots+p^k\int\limits_0^{t-k}\frac{(t-s-k)^{k-1}}{(k-1)!}f(s)ds\Big)=f(t).$$

Решением этого уравнения будет

$$x(t)=x(k)+\int\limits_k^t\Bigg(f(s)+\alpha p\Big(1+p(s-2)\Big)+\ldots+\frac{\alpha p^k(s-k)^{k-1}}{(k-1)!}+$$

$$+p\int\limits_0^{s-1}f(\xi)d\xi+p^2\int\limits_0^{s-2}(s-\xi-2)f(\xi)d\xi+\ldots+p^k\int\limits_0^{s-k}\frac{(s-\xi-k)^{k-1}}{(k-1)!}f(\xi)d\xi\Bigg)ds.$$

Подставим

$$x(k)=\alpha+\alpha p(k-1)+\frac{\alpha p^2(k-2)^2}{2!}+\ldots+\frac{\alpha p^{k-2}2^{k-2}}{(k-2)!}+\frac{\alpha p^{k-1}1^{k-1}}{(k-1)!}+\int\limits_0^k f(s)ds+$$
$$+p\int\limits_0^{k-1}(k-s-1)f(s)ds+p^2\int\limits_0^{k-2}\frac{(k-s-2)^2}{2!}f(s)ds+$$
$$+\ldots+p^{k-1}\int\limits_0^1\frac{(1-s)^{k-1}}{(k-1)!}f(s)ds,$$

получим

$$x(t)=x(k)+\int\limits_k^t\Big(f(s)+px(s-1)\Big)ds=$$

$$=\alpha+\alpha p(k-1)+\frac{\alpha p^2(k-2)^2}{2!}+\ldots+\frac{\alpha p^{k-2}2^{k-2}}{(k-2)!}+\frac{\alpha p^{k-1}1^{k-1}}{(k-1)!}+$$

$$+\int_0^k f(s)ds+p\int_0^{k-1}(k-s-1)f(s)ds+$$

$$+p^2\int_0^{k-2}\frac{(k-s-2)^2}{2!}f(s)ds+\ldots+p^{k-1}\int_0^1\frac{(1-s)^{k-1}}{(k-1)!}f(s)ds+\int_k^t f(s)ds+$$

$$+\int_k^t\Big(\alpha p\Big(1+p(k-1)\Big)+\ldots+\frac{\alpha p^k(s-k)^{k-1}}{(k-1)!}+p\int_0^{s-1}f(\xi)d\xi+$$

$$p^2\int_0^{s-2}(s-\xi-2)f(\xi)d\xi+\ldots+p^k\int_0^{s-k}\frac{(s-\xi-k)^{k-1}}{(k-1)!}f(\xi)d\xi\Big)ds=$$

$$=\alpha+\alpha p(k-1)+\frac{\alpha p^2(k-2)^2}{2!}+\ldots+\frac{\alpha p^{k-2}2^{k-2}}{(k-2)!}+\frac{\alpha p^{k-1}1^{k-1}}{(k-1)!}+$$

$$+\int_0^k f(s)ds+p\int_0^{k-1}(k-s-1)f(s)ds+p^2\int_0^{k-2}\frac{(k-s-2)^2}{2!}f(s)ds+$$

$$+\ldots+p^{k-1}\int_0^1\frac{(1-s)^{k-1}}{(k-1)!}f(s)ds+\int_k^t f(s)ds+p\int_k^t\alpha ds+p^2\int_k^t\alpha(s-2)ds+$$

$$+\ldots+p^k\int_k^t\frac{\alpha(s-k)^{k-1}}{(k-1)!}ds+p\int_0^{k-1}\int_k^t dsf(\xi)d\xi+p\int_{k-1}^{t-1}\int_{\xi+1}^t dsf(\xi)d\xi+$$

$$+\ldots+p^2\int_0^{k-2}\int_k^t(s-\xi-2)f(\xi)d\xi ds+p^2\int_{k-2}^{t-2}\int_{\xi+2}^t(s-\xi-2)dsf(\xi)d\xi+$$

$$+\ldots+p^k\int_0^{t-k}\int_{\xi+k}^t\frac{(s-\xi-k)^{k-1}}{(k-1)!}dsf(\xi)d\xi=$$

$$=\ \alpha\ +\ \alpha p(k\ -\ 1)\ +\ \frac{\alpha p^2(k-2)^2}{2!}\ +\ \ldots\ +\ \frac{\alpha p^{k-2}2^{k-2}}{(k-2)!}\ +\ \frac{\alpha p^{k-1}1^{k-1}}{(k-1)!}+$$

$$+\int\limits_0^k f(s)ds + p\int\limits_0^{k-1}(k-s-1)f(s)ds + p^2\int\limits_0^{k-2}\frac{(k-s-2)^2}{2!}f(s)ds+$$

$$+\ldots + p^{k-1}\int\limits_0^1\frac{(1-s)^{k-1}}{(k-1)!}f(s)ds + \int\limits_k^t f(s)ds + p\int\limits_k^t \alpha ds+$$

$$+p^2\int\limits_k^t \alpha(s-2)ds + \ldots + p^k\int\limits_k^t\frac{\alpha(s-k)^{k-1}}{(k-1)!}ds + p\int\limits_0^{k-1}(t-k)f(\xi)d\xi+$$

$$+p\int\limits_{k-1}^{t-1}(t-\xi-1)f(\xi)d\xi + \ldots + p^2\int\limits_0^{k-2}\frac{(t-\xi-2)^2-(k-\xi-2)^2}{2}d\xi+$$

$$+p\int\limits_{k-2}^{t-2}\frac{(t-\xi-2)^2}{2}f(\xi)d\xi + \ldots + p^k\int\limits_0^{t-k}\frac{(t-\xi-k)^k}{k!}f(\xi)d\xi.$$

Итак, при $t \in (k, k+1]$ имеем

$$x(t) = \alpha + \alpha p(t-1) + \frac{\alpha p^2(t-2)^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha p^k(t-k)^k}{k!} + \int\limits_0^t f(s)ds+$$

$$+p\int\limits_0^{t-1}(t-s-1)f(s)ds + \ldots + p^k\int\limits_0^{t-k}\frac{(t-s-k)^k}{k!}f(s)ds.$$

Таким образом, при любых $t \geq 0$ решение задачи Коши представимо в виде

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\chi_{[n,\infty)}(t)\Big(\frac{\alpha p^n(t-n)^n}{n!} + \int\limits_0^{t-n}\frac{p^n(t-s-n)^n}{n!}f(s)\,ds\Big). \qquad (1.2.2)$$

Отсюда для уравнения (1.2.1) определяем функцию Коши

$$\mathcal{C}(t,s) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n(t-s-n)^n\,\chi_{[n,\infty)}(t)\,\chi_{[0,t-n]}(s)}{n!} \qquad (1.2.3)$$

и фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n (t-n)^n \chi_{[n,\infty)}(t)}{n!}\,. \tag{1.2.4}$$

З а м е ч а н и е 1.2.1. Равенства (1.2.2), (1.2.3) для решения задачи Коши и функции Коши приведены и в некоторых других литературных источниках (в частности, в монографии [5, с. 66]). В диссертации приведено полное доказательство данных формул.

1.2.1b. Неотрицательность функции Коши. Пусть $1 < T \le 2$, тогда при $(t,s) \in \Delta_T$ функция Коши равна

$$\mathcal{C}(t,s) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ 0 \le t-s \le 1, \\ 1 + p(t-s-1), & \text{если } \ 1 < t-s \le T. \end{cases}$$

Поэтому $\mathcal{C}(t,s) > 0$, если $1 + p\gamma > 0$, где $\gamma = t-s-1 \in (0, T-1]$. Таким образом, функция Коши будет положительна на данном множестве, если

$$p > \sup_{\gamma \in (0,T-1]} \Big(-\frac{1}{\gamma} \Big) = -\frac{1}{T-1}.$$

Заметим, что число $z_{_T}^1 \doteq -\frac{1}{T-1}$ в правой части этого неравенства является корнем следующего многочлена первого порядка $1 + \frac{(T-1)}{1!}z$ (содержащего параметр $T \in (1,2]$).

Для получения условий на коэффициент p, обеспечивающих для произвольного $T > 0$ неотрицательность функции Коши при всех $(t,s) \in \Delta_T$, определим многочлен

$$F_{_T}^n(z) = 1 + \frac{(T-1)}{1!}z + \frac{(T-2)^2}{2!}z^2 + \ldots + \frac{(T-n)^n}{n!}z^n \tag{1.2.5}$$

переменной $z \in \mathbb{R}$. Здесь натуральное n — степень многочлена, параметр $T \in (n, n+1]$. Все коэффициенты этого многочлена положительны, следовательно у него нет неотрицательных действительных корней.

Т е о р е м а 1.2.1. (см. [28]). *Многочлен* $F^n_{\scriptscriptstyle T}(z)$ *при любых* $n \in \mathbb{N}$, $T \in (n, n+1]$ *имеет действительные корни, все действительные корни этого многочлена отрицательны; обозначим наибольший корень через* $z^n_{\scriptscriptstyle T}$, *тогда для любых* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ *и любых значений* $T_1 \in (n_1, n_1+1]$, $T_2 \in (n_2, n_2+1]$ *если* $n_2 \geq n_1$, $T_2 > T_1$, *то* $0 > z^{n_2}_{\scriptscriptstyle T_2} > z^{n_1}_{\scriptscriptstyle T_1}$.

Если для некоторых $n \in \mathbb{N}$, $T \in (n, n+1]$ *коэффициент* p *уравнения* (1.2.1) *удовлетворяет неравенству* $p > z^n_{\scriptscriptstyle T}$, *то функция Коши* $\mathcal{C}(t,s)$ *этого уравнения положительна на множестве*

$$\Delta_{\scriptscriptstyle T} \doteq \big\{(t,s) :\, s \in [0,t],\, t \in [0,T]\big\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $p \geq 0$, то очевидно $\mathcal{C}(t,s) > 0$ при любых (t,s).

Пусть $p < 0$. Так как функция Коши уравнения (1.2.1) фактически является функцией аргумента $t-s$ и, очевидно, зависит от коэффициента p этого уравнения, то можем задать функцию

$$\mathcal{K}_p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{K}_p(t-s) = \mathcal{C}(t,s).$$

Обозначим $\gamma = t - s$; тогда значения этой функции определяются соотношением $\mathcal{K}_p(\gamma) = \sum\limits_{i=0}^{k} p^i \frac{(\gamma-i)^i}{i!}$, $\quad \gamma \in (k, k+1], \quad k = \overline{1, n-1}$.

Докажем следующее свойство функции $\mathcal{K}_p$: для любого $\overline{\gamma} > 1$, если $\mathcal{K}_p(\gamma) > 0$ при всех $\gamma \in [1, \overline{\gamma}-1)$, то функция $\mathcal{K}_p(\cdot)$ убывает на $[1, \overline{\gamma}]$.

Во-первых, $\mathcal{K}_p(\gamma) = 1 > 0$ при $\gamma \in [0,1]$; во-вторых, при $\gamma \in [1,2]$ выполнено $\mathcal{K}_p(\gamma) = 1 + p\gamma$, а так как $p < 0$, то на отрезке $[1,2]$ функция $\mathcal{K}_p(\cdot)$ убывает.

Далее, для любого $k = 2, 3, \ldots$ и произвольного $\gamma \in (k, k+1]$ имеем

$$\mathcal{K}_p(\gamma) = 1 + p\frac{(\gamma-1)}{1!} + p^2\frac{(\gamma-2)^2}{2!} + \ldots + p^k\frac{(\gamma-k)^k}{k!}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\mathcal{K}_p(\gamma)}{d\gamma} = p + p^2\frac{(\gamma-2)}{1!} + \ldots + p^k\frac{(\gamma-k)^{k-1}}{(k-1)!} =$$
$$= p\Big(1 + p\frac{(\gamma-2)}{1!} + \ldots + p^{k-1}\frac{(\gamma-k)^{k-1}}{(k-1)!}\Big) = p\mathcal{K}_p(\gamma-1).$$

Отсюда получаем, что если $\mathcal{K}_p(\gamma) > 0$ при всех $\gamma \in [1, \overline{\gamma}-1),$ то $\frac{d\mathcal{K}_p(\gamma)}{d\gamma} < 0$ при всех $\gamma \in [1, \overline{\gamma}),$ таким образом, функция $\mathcal{K}_p(\cdot)$ убывает на $[1, \overline{\gamma}].$

Используя полученное свойство функции $\mathcal{K}_p(\cdot),$ докажем индукцией по $n \in \mathbb{N}$ справедливость утверждения теоремы.

Пусть $n = 1,$ $T \in (1, 2];$ в этом случае для $(t, s) \in \Delta_T$ получаем

$$\mathcal{C}(t,s) = \mathcal{K}_p(t-s) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \le \gamma \le 1, \\ 1 + p\dfrac{\gamma-1}{1!}, & \text{если} \quad 1 < \gamma \le T; \end{cases} \quad \text{где } \gamma \doteq t-s \in [0, T].$$

Так как $\mathcal{K}_p(\gamma) > 0$ при $\gamma \in [0, 1],$ то функция $\mathcal{K}_p(\gamma)$ является убывающей на $[1, 2].$ Для положительности функции Коши необходимо и достаточно, чтобы положительной была убывающая функция $\mathcal{K}_p(\gamma),$ а это равносильно неравенству $\mathcal{K}_p(T) > 0,$ решая которое, получаем

$$\mathcal{K}_p(T) = 1 + p\frac{T-1}{1!} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad p > -\frac{1}{T-1}.$$

Из этого соотношения замечаем, что многочлен первой степени $F^1_{\scriptscriptstyle T}(z) = 1 + p\frac{T-1}{1!}$ имеет единственный корень $z^1_{\scriptscriptstyle T} = -\frac{1}{T-1},$ увеличивающийся с возрастанием $T,$ и при $p > p^1_{\scriptscriptstyle T}$ функция Коши положительна. Итак, утверждение теоремы верно при $n = 1.$

Исходя из предположения, что утверждение теоремы верно при всех $n \le k-1,$ $T \in (n, n+1];$ докажем его для $n = k.$ Пусть $T \in (k, k+1];$

имеем

$$\mathcal{K}_p(\gamma) = \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \quad \dots\dots\dots \\ 1 + p\dfrac{\gamma - 1}{1!} + \ldots + p^{k-1}\dfrac{(\gamma - k + 1)^{k-1}}{(k-1)!}, & \text{если} \quad k - 1 \le \gamma \le k, \\ \\ 1 + p\dfrac{\gamma - 1}{1!} + \ldots + p^{k}\dfrac{(\gamma - k)^{k}}{k!}, & \text{если} \quad k < \gamma \le T. \end{cases}$$

Для выполнения неравенства

$$\mathcal{C}(t,s) > 0 \;\; \forall (t,s) \in \Delta_T \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{K}_p(\gamma) > 0 \;\; \forall \gamma \in [0,T]$$

необходимо и достаточно, чтобы неравенство $\mathcal{K}_p(\gamma) > 0$ выполнялось и на $[0,k]$, и на $(k, k+1]$. В силу предположения индукции, положительность $\mathcal{K}_p(\gamma)$ на первом из этих промежутков равносильна условию $p > z_k^{k-1}$, кроме того, как показано выше, при любом $p \ge z_k^{k-1}$, функция $\mathcal{K}_p(\cdot)$ убывает на $[k,T]$. Поэтому для ее положительности на этом промежутке необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\mathcal{K}_p(T) > 0$. Имеем

$$\mathcal{K}_p(T) = 1 + p\frac{T-1}{1!} + \ldots + p^k\frac{(T-k)^k}{k!} = F_{\scriptscriptstyle T}^k(p),$$

поэтому неравенство $\mathcal{K}_p(\gamma) > 0 \;\; \forall \gamma \in [k,T]$ равносильно неравенству

$$F_{\scriptscriptstyle T}^k(p) > 0. \tag{1.2.6}$$

Определим значения p, при которых выполнено неравенство (1.2.6).

Вследствие убывания при любом $p > z_k^{k-1}$ функции $\mathcal{K}_p(\cdot)$, справедливо неравенство $\mathcal{K}_p(T) < \mathcal{K}_p(k)$, которое можно записать в виде $F_{\scriptscriptstyle T}^k(p) < F_k^{k-1}(p)$. Следовательно, $F_{\scriptscriptstyle T}^k(z_k^{k-1}) < F_k^{k-1}(z_k^{k-1}) = 0$. В то же время, $F_{\scriptscriptstyle T}^k(0) = 1 > 0$. Таким образом, многочлен $F_{\scriptscriptstyle T}^k$ имеет корни (безусловно, отрицательные), большие, чем z_k^{k-1}. Для наибольшего корня $z_{\scriptscriptstyle T}^k$ выполнено $z_{\scriptscriptstyle T}^k > z_k^{k-1}$, и при всех $p > z_{\scriptscriptstyle T}^k$ выполнено неравенство (1.2.6).

Остается показать, что с увеличением $T \in (k, k+1]$ значение $z_{_T}^k$ также увеличивается. Для любых $T_1, T_2 \in (k, k+1]$, если $T_2 > T_1$, то в силу убывания при $p \geq z_k^{k-1}$ функции $\mathcal{K}_p(\cdot)$ справедливо неравенство $\mathcal{K}_p(T_2) < \mathcal{K}_p(T_1)$, то есть $F_{_{T_2}}^k(p) < F_{_{T_1}}^k(p)$. Следовательно, $F_{_{T_2}}^k(z_{_{T_1}}^k) < F_{_{T_1}}^k(z_{_{T_1}}^k) = 0$. А так как $F_{_{T_2}}^k(0) = 1 > 0$, то многочлен $F_{_{T_2}}^k$ имеет корень $z_{_{T_2}}^k > z_{_{T_1}}^k$. $\square$

Уравнение (1.2.1) можно теперь использовать в качестве «эталонного» для дифференциального уравнения с запаздыванием с переменным коэффициентом $p(t)$:

$$\dot{x}(t) - p(t)x(t-1) = f(t), \quad t \in [0, T], \quad x(\xi) = 0, \text{ если } \xi < 0, \tag{1.2.7}$$

где $T \in (n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$. Используя теорему 1.1.2, получим

Следствие 1.2.1. *Пусть* $\operatorname{vrai} \inf\limits_{t \in [0,T]} p(t) > z_{_T}^n$, *тогда для нормального фундаментального решения и функции Коши уравнения* (1.2.7) *имеют место неравенства* $X(t) > 0$ *при* $t \in [0, T]$ *и* $\mathcal{C}(t, s) > 0$ *при* $(t, s) \in \Delta_T$. *Если* $\operatorname{vrai} \inf\limits_{t \in [0,t]} p(t) = z_{_T}^n$, *то* $X(t) > 0$ *при* $t \in [0, T)$ *и* $\mathcal{C}(t, s) > 0$ *при* $(t, s) \in \Delta_T$, $(t, s) \neq (T, 0)$.

Отметим, что результаты этого пункта можно распространить на уравнения вида (1.2.1) и (1.2.7) с произвольным запаздыванием $\tau > 0$. Запаздывание $\tau = 1$ используется в работе для простоты изложения.

1.2.2. Двухточечная краевая задача

1.2.2a. Решение двухточечной краевой задачи. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $T \in (k-1, k]$. Рассмотрим задачу

$$\dot{x}(t) - px(t-1) = f(t), \quad t \in [0, T], \quad x(\xi) = 0, \text{ если } \xi < 0, \tag{1.2.8}$$

$$Ax(0) + Bx(T) = C. \tag{1.2.9}$$

Аналогично представлению (1.2.2) общего решения уравнения (1.2.1), для уравнения (1.2.8) получаем общее решение в виде

$$x(t)=\sum_{n=0}^{k-1}\chi_{[n,T]}(t)\Big(\frac{\alpha p^n(t-n)^n}{n!}+\int\limits_0^{t-n}\frac{p^n(t-s-n)^n}{n!}f(s)\,ds\Big),\quad t\in[0,T]. \tag{1.2.10}$$

Отсюда, учитывая равенства $\chi_{[n,T]}(T)=1, n=0,1,2,...,k-1,$ вычисляем

$$x(0)=\alpha,\quad x(T)=\alpha\sum_{n=0}^{k-1}\frac{p^n(T-n)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{k-1}\int\limits_0^{T-n}\frac{p^n(T-s-n)^n}{n!}f(s)\,ds.$$

Подставим эти соотношения в краевые условия (1.2.9):

$$\alpha\Big(A+B\sum_{n=0}^{k-1}\frac{p^n(T-n)^n}{n!}\Big)+B\sum_{n=0}^{k-1}\int\limits_0^{T-n}\frac{p^n(T-s-n)^n}{n!}f(s)\,ds=C.$$

Краевая задача (1.2.8), (1.2.9) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{D}\doteq A+B\sum_{n=0}^{k-1}\frac{p^n(T-n)^n}{n!}\neq 0.$$

В этом случае получаем

$$\alpha=\frac{C-B\sum\limits_{n=0}^{k-1}\int\limits_0^{T-n}\frac{p^n(T-s-n)^n}{n!}f(s)\,ds}{\mathcal{D}}$$

Таким образом, решением краевой задачи (1.2.8), (1.2.9) является

$$x(t)=\frac{C-B\sum\limits_{n=0}^{k-1}\int\limits_0^{T-n}\frac{p^n(T-s-n)^n}{n!}f(s)\,ds}{\mathcal{D}}\sum_{n=0}^{k-1}\chi_{[n,T]}(t)\frac{p^n(t-n)^n}{n!}+$$
$$+\int\limits_0^{t-n}\sum_{n=0}^{k-1}\chi_{[n,T]}(t)\frac{p^n(t-s-n)^n}{n!}f(s)\,ds,\quad t\in[0,T].$$

Преобразуем полученное выражение

$$x(t) = \frac{C}{\mathcal{D}} \sum_{j=0}^{k-1} \chi_{[j,T]}(t) \frac{p^j(t-j)^j}{j!} -$$

$$- \frac{B \sum\limits_{n=0}^{k-1} \int\limits_0^{T-n} \frac{p^n(T-s-n)^n}{n!} f(s)\, ds}{\mathcal{D}} \sum_{j=0}^{k-1} \chi_{[j,T]}(t) \frac{p^j(t-j)^j}{j!} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{k-1} \chi_{[j,T]}(t) \int\limits_0^{t-j} \frac{p^j(t-s-j)^j}{j!} f(s)\, ds =$$

$$= \frac{C}{\mathcal{D}} \sum_{j=0}^{k-1} \chi_{[j,T]}(t) \frac{p^j(t-j)^j}{j!} + \sum_{j=0}^{k-1} \chi_{[j,T]}(t) \int\limits_0^{T} \chi_{[0,t-j]}(s) \frac{p^j(t-s-j)^j}{j!} f(s)\, ds -$$

$$- \int\limits_0^T \frac{B}{\mathcal{D}} \sum_{n=0}^{k-1} \chi_{[0,T-n]}(s) \frac{p^n(T-s-n)^n}{n!} f(s)\, ds \cdot$$

$$\cdot \sum_{j=0}^{k-1} \chi_{[j,T]}(t) \frac{p^j(t-j)^j}{j!} .$$

Отсюда для задачи (1.2.8), (1.2.9) определяем функцию Грина

$$\mathcal{G}(t,s) = \sum_{j=0}^{k-1} \chi_{[j,T]}(t) \chi_{[0,t-j]}(s) \frac{p^j(t-s-j)^j}{j!} -$$

$$- \frac{B}{\mathcal{D}} \sum_{n=0}^{k-1} \chi_{[0,T-n]}(s) \frac{p^n(T-s-n)^n}{n!} \sum_{j=0}^{k-1} \chi_{[j,T]}(t) \frac{p^j(t-j)^j}{j!} \quad (1.2.11)$$

и фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения

$$X(t) = \frac{1}{\mathcal{D}} \sum_{j=0}^{k-1} \chi_{[j,T]}(t) \frac{p^j(t-j)^j}{j!}.$$

Рассмотрим частный случай задачи (1.2.8), (1.2.9) — периодическую краевую задачу с условием

$$x(T) - x(0) = C. \tag{1.2.12}$$

Это условие совпадает с (1.2.9), если $A = -1$, $B = 1$. Таким образом, задача (1.2.8), (1.2.12) однозначно разрешима при любых f, C тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=0}^{k-1} \frac{p^n (T-n)^n}{n!} \neq 1. \tag{1.2.13}$$

При $k = 1$, $T \in (0, 1]$ это условии нарушено, то есть задача (1.2.8), (1.2.12) не является однозначно разрешимой. При $k \geq 2$ условие (1.2.13) эквивалентно неравенству

$$\sum_{n=1}^{k-1} \frac{p^n (T-n)^n}{n!} \neq 0. \tag{1.2.14}$$

При выполнении (1.2.14), решение краевой задачи (1.2.9), (1.2.12) определяется формулой

$$x(t) = \frac{C}{\sum\limits_{n=1}^{k-1} \frac{p^n (T-n)^n}{n!}} \sum_{j=0}^{k-1} \chi_{[j,T]}(t) \frac{p^j (t-j)^j}{j!} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{k-1} \chi_{[j,T]}(t) \int\limits_0^T \chi_{[0,t-j]}(s) \frac{p^j (t-s-j)^j}{j!} f(s)\, ds -$$

$$- \int\limits_0^T \frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{k-1} \frac{p^n (T-n)^n}{n!}} \sum_{n=0}^{k-1} \chi_{[0,T-n]}(s) \frac{p^n (T-s-n)^n}{n!} f(s)\, ds \sum_{j=0}^{k-1} \chi_{[j,T]}(t) \frac{p^j (t-j)^j}{j!}.$$

Следовательно, функция Грина задачи (1.2.8), (1.2.12) равна

$$\mathcal{G}(t,s) = \sum_{j=0}^{k-1} \chi_{[j,T]}(t)\chi_{[0,t-j]}(s)\frac{p^j(t-s-j)^j}{j!} -$$
$$- \frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{k-1}\frac{p^n(T-n)^n}{n!}} \sum_{n=0}^{k-1} \chi_{[0,T-n]}(s)\frac{p^n(T-s-n)^n}{n!} \sum_{j=0}^{k-1} \chi_{[j,T]}(t)\frac{p^j(t-j)^j}{j!}. \quad (1.2.15)$$

Фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения равно

$$X(t) = \frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{k-1}\frac{p^n(T-n)^n}{n!}} \sum_{j=0}^{k-1} \chi_{[j,T]}(t)\frac{p^j(t-j)^j}{j!}.$$

1.2.2b. Неотрицательность функции Грина.

Для определения условий неотрицательности функции Грина задачи (1.2.8), (1.2.9) воспользуемся её представлением (1.1.8) через функцию Коши (условия неотрицательности которой получены в пункте 1.1.2).

Без потери общности полагаем $B > 0$.

Т е о р е м а 1.2.2. (см. [30]). *Пусть* $T \in (n, n+1]$, $p > z^n_{_T}$ *где* $z^n_{_T}$ *— корень многочлена* (1.2.5), *и пусть выполнены неравенства*

$$1 + p\frac{T-1}{1!} + \ldots + \frac{p^n(T-n)^n}{n!} < -\frac{A}{B}, \quad B > 0.$$

Тогда функция Грина задачи (1.2.8), (1.2.9) *положительна, то есть* $\mathcal{G}(t,s) > 0$ *при всех* $(t,s) \in [0,T] \times [0,T]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $p > z^n_{_T}$, то функции Коши $\mathcal{C}(t,s)$ положительна при всех $t \in [0,T]$, $s \in [0,t]$ (см. теорему 1.2.1). Для положительности функции Грина, согласно ее представлению (1.1.8) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$-\frac{BX(t)\mathcal{C}(T,s)}{AX(0)+BX(T)} > 0.$$

Вследствие равенств (1.2.3), (1.2.4) имеем $X(t) = \mathcal{C}(t,0)$, поэтому $X(t) > 0$ при всех $t \in [0,T]$. Следовательно,

$$-\frac{BX(t)\mathcal{C}(T,s)}{AX(0)+BX(T)} > 0 \quad \Leftrightarrow AX(0)+BX(T) < 0.$$

Подставим в полученное соотношение

$$X(0) = 1, \quad X(T) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{p^n(T-n)^n}{n!} > 0$$

и получим следующее условие положительности функции Грина:

$$A + B(\sum_{n=0}^{k-1} \frac{p^n(T-n)^n}{n!}) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{k-1} \frac{p^n(T-n)^n}{n!} < -\frac{A}{B}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1.2.2. *Функция Грина периодической краевой задачи* (1.2.8), (1.2.12) *положительна, если выполнены неравенства*

$$p > z_{_T}^n, \quad p\frac{T-1}{1!} + \ldots + \frac{p^n(T-n)^n}{n!} < 0.$$

Доказательство прямо следует из теоремы 1.2.2 при $A = -1$, $B = 1$.

Замечание 1.2.2. Существует такое $\overline{p} > z_{_T}^n$, что при любом $p \in (z_{_T}^n, \overline{p})$ функция Грина периодической краевой задачи (1.2.8), (1.2.12) положительна. Действительно, так или $z_{_T}^n$ является корнем многочлена (1.2.5), то

$$z_{_T}^n\frac{T-1}{1!} + \ldots + (z_{_T}^n)^n\frac{(T-n)^n}{n!} = -1 < 0,.$$

Следовательно, для p из некоторой окрестности точки z_T^n будет выполнено

$$p\frac{T-1}{1!}+\ldots+\frac{p^n(T-n)^n}{n!}<0\,.$$

З а м е ч а н и е 1.2.3. Отметим, что двухточечная краевая задача (1.2.8) рассматривается в диссертации для упрощения изложения. Предложенные методы без ограничения общности можно применить для исследования функции Грина многоточечной краевой задачи.

§ 1.3. Неотрицательность функций Коши и Грина для уравнения $\dot{x}(t)-p\,x(t/2)=f(t)$

1.3.1. Задача Коши.

1.3.1a. Решение задачи Коши.

Здесь рассматривается линейное дифференциальное уравнение с переменным запаздыванием вида

$$\dot{x}(t)-p\,x(t/2)=f(t),\quad t\geq 0. \tag{1.3.1}$$

Задача Коши с начальным условием $x(0)=0$ для уравнения (1.3.1) заменой $y=\dot{x}$ сводится к интегральному уравнению

$$y(t)=p\int\limits_0^{t/2}y(s)\,ds+f(t),\quad t\in[0,T], \tag{1.3.2}$$

где T — любое положительное число. Так как спектральный радиус линейного вольтеррова интегрального оператора

$$K:L([0,T],\mathbb{R})\to L([0,T],\mathbb{R}),\quad (Ky)(t)=p\int\limits_0^{t/2}y(s)\,ds$$

равен нулю, то существует единственное решение уравнения (1.3.2), и это решение представимо суммой ряда Неймана

$$y(t) = f(t) + (Kf)(t) + (K^2 f)(t) + \dots .$$

Имеем

$$(K^2 f)(t) = p^2 \int_0^{t/2} \int_0^{s/2} f(\xi)\, d\xi\, ds = p^2 \int_0^{t/4} \int_{2\xi}^{t/2} f(\xi)\, ds\, d\xi = p^2 \int_0^{t/4} \Bigl(\frac{t}{2} - 2\xi\Bigr) f(\xi)\, d\xi.$$

Аналогичными вычислениями по индукции устанавливаем

$$(K^n f)(t) = p^n \int_0^{t/2^n} \frac{2^0 2^1 \dots 2^{n-2}}{(n-1)!} \Bigl(\frac{t}{2^{n-1}} - 2\xi\Bigr)^{n-1} f(\xi)\, d\xi.$$

Таким образом

$$x(t) = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} (K^n f)(s)\, ds = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t (K^n f)(s)\, ds =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p^n \int_0^t \int_0^{s/2^n} \frac{2^0 2^1 \dots 2^{n-2}}{(n-1)!} \Bigl(\frac{s}{2^{n-1}} - 2\xi\Bigr)^{n-1} f(\xi)\, d\xi\, ds =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p^n \int_0^{t/2^n} \int_{2^n\xi}^{t} \frac{2^0 2^1 \dots 2^{n-2}}{(n-1)!} \Bigl(\frac{s}{2^{n-1}} - 2\xi\Bigr)^{n-1} f(\xi)\, ds\, d\xi =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p^n \int_0^{t/2^n} \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \Bigl(\frac{t}{2^{n-1}} - 2\xi\Bigr)^{n} f(\xi)\, d\xi.$$

Итак, получено общее решение уравнения (1.3.1)

$$x(t) = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0,t/2^n]}(s) \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \Bigl(\frac{t}{2^{n-1}} - 2s\Bigr)^{n} f(s)\, ds. \qquad (1.3.3)$$

Заметим, что справедливость этого равенства следует из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [15, с. 200]. Действительно, подынтегральная функция удовлетворяет при $t \in [0,T]$, $s \in [0,t]$ неравенству

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0,t/2^n]}(s) \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \Big(\frac{t}{2^{n-1}} - 2s\Big)^n f(s)\Big| \leq$$
$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} |p|^n \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \Big(\frac{T}{2^{n-1}}\Big)^n |f(s)| = |f(s)| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|p|^n T^n}{n! 2^{n(n-1)/2}},$$

где числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \big(n! 2^{n(n-1)/2}\big)^{-1} |p|^n T^n$ сходится.

Из (1.3.3) для уравнения (1.3.1) получаем функцию Коши

$$\mathcal{C}(t,s) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0,t/2^n]}(s) \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \Big(\frac{t}{2^{n-1}} - 2s\Big)^n \tag{1.3.4}$$

и фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения (см. [2, с. 63])

$$X(t) = \mathcal{C}(t,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n t^n}{n! 2^{n(n-1)/2}}. \tag{1.3.5}$$

1.3.1b. Неотрицательность функции Коши.

Рассмотрим уравнение (1.3.1) при $t \in [0,T]$. Запишем его функцию Коши (1.3.4) в следующем виде:

$$\mathcal{C}(t,s) = 1 + p(t-2s) + p^2 \frac{2}{2!}(\frac{t}{2} - 2s)^2 + \ldots + \frac{p^n}{n!} 2^{n(n-1)/2} \Big(\frac{t}{2^{n-1}} - 2s\Big)^n,$$
$$\frac{t}{2^{n+1}} < s \leq \frac{t}{2^n}. \tag{1.3.6}$$

Получим условия неотрицательности этой функции.

Т е о р е м а 1.3.1. (см. [30]). *Если $pT \geq -1$, то функция Коши уравнения* (1.3.1) *неотрицательна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала заметим что если $p \geq 0$, то $\mathcal{C}(t,s) \geq 0$ при всех s, t. Это с очевидностью следует из формулы (1.3.6), так как все слагаемые в этой формуле

$$\frac{p^i}{i!} 2^{i(i-1)/2} \Big(\frac{t}{2^{i-1}} - 2s \Big)^i \geq 0 \;\text{ при }\; \frac{t}{2^{n+1}} \leq s \leq \frac{t}{2^n}.$$

Интерес представляют условия положительности функции Коши при $p < 0$.

Докажем сначала теорему при $n = 2k+1$. Пусть $k = 0$, тогда $\mathcal{C}(t,s) = 1 + p(t-2s)$, где $\frac{t}{4} \leq s \leq \frac{t}{2}$. Имеем $\frac{t}{2} \leq 2s < t$, следовательно, $\frac{T}{2} \geq \frac{t}{2} > t - 2s > 0$. Неравенство $1 + p(t-2s) \geq 0$ выполнено при всех s, t тогда и только тогда, когда $1 + p\frac{T}{2} \geq 0$, то есть $pT \geq -2$.

Теперь пусть $k = 1, 2, 3, \ldots$, тогда при $\frac{t}{2^{2k+2}} \leq s \leq \frac{t}{2^{2k+1}}$ имеем

$$\mathcal{C}(t,s) = \Big(1 + p(t-2s)\Big) + \ldots + \Bigg(\frac{p^{2k}}{(2k)!} 2^{k(2k-1)} \Big(\frac{t}{2^{2k-1}} - 2s \Big)^{2k} + \\ + \frac{p^{2k+1}}{(2k+1)!} 2^{k(2k+1)} \Big(\frac{t}{2^{2k}} - 2s \Big)^{2k+1} \Bigg)$$

Если в полученной сумме каждое слагаемое неотрицательно, то $C(t,s) \geq 0$. Таким образом, достаточно, чтобы при любом i выполнялось неравенство

$$\frac{p^{2i}}{(2i)!} 2^{i(2i-1)} \Big(\frac{t}{2^{2i-1}} - 2s \Big)^{2i} + \frac{p^{2i+1}}{(2i+1)!} 2^{i(2i+1)} \Big(\frac{t}{2^{2i}} - 2s \Big)^{2i+1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Big(\frac{t}{2^{2i-1}} - 2s \Big)^{2i} + \frac{p}{2i+1} 2^{2i} \Big(\frac{t}{2^{2i}} - 2s \Big)^{2i+1} \geq 0.$$

Это неравенство будет выполнено, если

$$1 + \frac{p}{2i+1} 2^{2i} \Big(\frac{t}{2^{2i}} - 2s \Big) \geq 0. \tag{1.3.7}$$

Вследствие соотношений

$$0 \leq \frac{t}{2^{2i}} - 2s < \frac{t}{2^{2i}} - \frac{t}{2^{2i+1}} < \frac{T}{2^{2i}}$$

для выполнения (1.3.7) достаточно, чтобы

$$1 + \frac{pT}{(2i+1)} \geq 0.$$

А это неравенство имеет место при любом i, если $1 + pT \geq 0$.

Пусть теперь $n = 2k$. В этом случае функция Коши при $\frac{t}{2^{2k+1}} \leq s < \frac{t}{2^{2k}}$ записывается в виде суммы

$$\mathcal{C}(t,s) = \Big(1 + p(t-2s)\Big) + \ldots + \left(\frac{p^{2k-2}}{(2k-2)!} 2^{(k-1)(2k-3)} \Big(\frac{t}{2^{2k-3}} - 2s\Big)^{2k-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{p^{2k-1}}{(2k-1)!} 2^{(2k-1)(k-1)} \Big(\frac{t}{2^{2k-2}} - 2s\Big)^{2k-1}\right) + \frac{p^{2k}}{(2k)!} 2^{k(2k-1)} \Big(\frac{t}{2^{2k-1}} - 2s\Big)^{2k},$$

в которой каждое слагаемое положительно (доказательство см. выше).

Таким образом, если $pT \geq -1$, то при четных значения n функция Коши $\mathcal{C}(t,s) \geq 0$.

1.3.2. Двухточечная краевая задача.

1.3.2a. Решение двухточечной краевой задачи.

Рассмотрим задачу

$$\dot{x}(t) - p\, x(t/2) = f(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.3.8}$$

$$Ax(0) + Bx(T) = C. \tag{1.3.9}$$

Аналогично представлению (1.3.3) общего решения уравнения (1.3.1), для уравнения (1.3.8) получаем общее решение в виде

$$x(t) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n t^n}{n! 2^{n(n-1)/2}} + \int\limits_0^t \sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0,t/2^n]}(s) \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \Big(\frac{t}{2^{n-1}} - 2s\Big)^n f(s)\, ds. \tag{1.3.10}$$

Из предоставления (1.3.10) получаем, $x(0)=\alpha$,

$$x(T)=\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^nT^n}{n!2^{n(n-1)/2}}+\int\limits_0^T\sum_{n=0}^{\infty}p^n\chi_{[0,T/2^n]}(s)\frac{2^{n(n-1)/2}}{n!}\left(\frac{T}{2^{n-1}}-2s\right)^n f(s)\,ds.$$

Подставим эти соотношения в краевые условия (1.3.9):

$$A\alpha+B\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^nT^n}{n!2^{n(n-1)/2}}+$$
$$+B\int\limits_0^T\sum_{n=0}^{\infty}p^n\chi_{[0,T/2^n]}(s)\frac{2^{n(n-1)/2}}{n!}\left(\frac{T}{2^{n-1}}-2s\right)^n f)\,ds=C.$$

Краевая задача имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$A+B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^nT^n}{n!2^{n(n-1)/2}}\neq 0.$$

В этом случае получаем

$$\alpha=\frac{C-B\int\limits_0^T\sum\limits_{n=0}^{\infty}p^n\chi_{[0,T/2^n]}(s)\frac{2^{n(n-1)/2}}{n!}\left(\frac{T}{2^{n-1}}-2s\right)^n f(s)\,ds}{A+B\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{p^nT^n}{n!2^{n(n-1)/2}}}.$$

Следовательно, решением краевой задачи (1.3.8), (1.3.9) является

$$x(t)=\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^nt^n}{n!2^{n(n-1)/2}}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^t p^n\chi_{[0,t/2^n]}(s)\frac{2^{n(n-1)/2}}{n!}\left(\frac{t}{2^{n-1}}-2s\right)^n f(s)\,ds=\frac{C\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{p^nt^n}{n!2^{n(n-1)/2}}}{A+B\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{p^nT^n}{n!2^{n(n-1)/2}}}-$$

$$-\frac{B\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\limits_{0}^{T}p^n\chi_{[0,T/2^n]}(s)\frac{2^{n(n-1)/2}}{n!}\left(\frac{T}{2^{n-1}}-2s\right)^n\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{p^kt^k}{k!2^{k(k-1)/2}}f(s)\,ds}{A+B\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{p^nT^n}{n!2^{nn-1)/2}}}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{0}^{T}p^n\chi_{[0,t/2^n]}(s)\frac{2^{n(n-1)/2}}{n!}\left(\frac{t}{2^{n-1}}-2s\right)^n f(s)\,ds.$$

Таким образом, получена функция Грина уравнения (1.3.8), (1.3.9)

$$\mathcal{G}(t,s)=-\frac{B}{A+B\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{p^nT^n}{n!2^{n(n-1)/2}}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n\chi_{[0,T/2^n]}(s)(T-2^ns)^n}{n!2^{n(n-1)/2}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^kt^k}{k!2^{k(k-1)/2}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n\chi_{[0,t/2^n]}(s)(t-2^ns)^n}{n!2^{n(n-1)/2}}.$$

Для уравнения (1.3.8) рассмотрим периодическую краевую задачу с условием

$$x(T)-x(0)=C. \tag{1.3.11}$$

Условие (1.3.11) — частный случай условия (1.3.9) при $A=-1$, $B=1$. Из приведенных выше результатов получаем, что краевая задача (1.3.8),(1.3.11) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^nT^n}{n!2^{n(n-1)/2}}\neq 1 \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^nT^n}{n!2^{n(n-1)/2}}\neq 0.$$

Таким образом, получена функция Грина задачи (1.3.8), (1.3.11)

$$\mathcal{G}(t,s)=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}p^n\chi_{[0,T/2^n]}(s)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p^nT^n}{n!2^{n(n-1)/2}}}\frac{(T-2^ns)^n}{n!2^{n(n-1)/2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^kt^k}{k!2^{k(k-1)/2}}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n\chi_{[0,t/2^n]}(s)(t-2^ns)^n}{n!2^{n(n-1)/2}}.$$

1.3.2b. Неотрицательность функции Грина. Используем представление (1.1.8) функции Грина краевой задачи (1.3.8), (1.3.9) для определения условий ее неотрицательности. Нам также потребуется теорема 1.3.1 (см. п. 2.1.2), содержащая условия неотрицательности функции Коши. Можем считать, что $B > 0$.

Т е о р е м а 1.3.2. (см. [30]). *Пусть выполнены неравенства*

$$pT \geq -1, \quad \frac{A}{B} < -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n T^n}{n! 2^{n(n-1)/2}}.$$

Тогда функция Грина задачи (1.3.8), (1.3.9) *будет положительна, то есть* $\mathcal{G}(t,s) > 0$ *при всех* $(t,s) \in [0,T] \times [0,T]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $pT \geq -1$, то функции Коши $\mathcal{C}(t,s)$ положительна при всех $t \in [0,T]$, $s \in [0,t]$ (см. теорему 1.1.3). Для положительности функции Грина, согласно ее представлению (1.1.8) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$-\frac{BX(t)\mathcal{C}(T,s)}{AX(0)+BX(T)} > 0.$$

Вследствие равенства (1.3.5) имеем $X(t) = \mathcal{C}(t,0)$, поэтому $X(t) > 0$ при всех $t \in [0,T]$. Следовательно,

$$-\frac{BX(t)\mathcal{C}(T,s)}{AX(0)+BX(T)} > 0 \quad \Leftrightarrow AX(0)+BX(T) < 0.$$

Подставим в полученное соотношение

$$X(0) = 1, \quad X(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n T^n}{n! 2^{n(n-1)/2}}.$$

Тогда получим следующее условие положительности функции Грина:

$$A + B\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n T^n}{n! 2^{n(n-1)/2}} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n T^n}{n! 2^{n(n-1)/2}} < -\frac{A}{B}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1.3.1. *Функция Грина периодической краевой задачи* (1.3.8), (1.3.11) *положительна, если* $\frac{-1}{T} \leq p < 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Периодическое условие (1.3.11) получается из условия (1.3.9) при $A = -1, B = 1$. Из теоремы 1.3.2 для этого случая получаем, что для положительности функции Грина достаточно выполнения неравенств

$$pT \geq -1, \quad pT + \frac{p^2 T^2}{(2!)2} + \frac{p^3 T^3}{(3!)2^3} + \ldots < 0. \tag{1.3.12}$$

Докажем, что при $-\frac{1}{T} \leq p < 0$ эти неравенства выполнены.

При $i = 2, 3, \cdots$ имеем

$$\left| \frac{p^i T^i}{i! 2^{i(i-1)/2}} \right| \leq \frac{p^i T^i}{2^i}$$

Поэтому справедливы неравенства

$$pT + \frac{p^2 T^2}{(2!)2} + \frac{p^3 T^3}{(3!)2^3} + \ldots < pT + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{|p|^i T^i}{2^i} = pT + \frac{p^2 T^2}{2^2(1 - \frac{|p|T}{2})} \leq$$

$$\leq pT + \frac{pT}{2^2(|p|T - \frac{|p|T}{2})} = pT + \frac{|p|T}{2} = \frac{pT}{2} < 0.$$

Таким образом, неравенства (1.3.12) выполнены, и следствие доказано.

§ 1.4. Неотрицательность функций Коши и Грина для уравнения $\dot{x}(t) - p\,\dot{x}\big(t/2\big) = f(t)$

1.4.1. Задача Коши.

1.4.1а. Решение задачи Коши.

Рассмотрим линейное уравнение нейтрального типа

$$\dot{x}(t) - p\,\dot{x}\big(h(t)\big) = f(t), \quad t \geq 0, \quad x(\xi) = 0, \text{ если } \xi < 0. \tag{1.4.1}$$

Будем предполагать, что измеримая функция $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству $h(t) \leq t$ и выполнено следующее условие

$$|p|\,\frac{\mu\big(h^{-1}(\Omega)\big)}{\mu\,(\Omega)} < 1, \tag{1.4.2}$$

где символом μ обозначена мера Лебега, Ω — любое измеримое подмножество $\mathbb{R}$ такое, что $0 < \mu\,(\Omega) < \infty$.

Определим оператор

$$(S_h y)(t) = \begin{cases} y\big(h(t)\big), & \text{если} \quad h(t) \geq 0, \\ 0, & \text{если} \quad h(t) < 0. \end{cases}$$

Вследствие принятых предположений, при любом $T > 0$ оператор S_h действует в $L([0,T],\mathbb{R})$ и $\|S_h\| < 1$ (см. [2, с. 21]), следовательно, при любых α, f задача Коши с начальным условием $x(0) = \alpha$ однозначно разрешима. Решение может быть определено через ряд Неймана

$$\dot{x}(t) = f(t) + p\,(S_h f)(t) + p^2\,(S_{h^2} f)(t) + \ldots. \tag{1.4.3}$$

Для упрощения выкладок приведем решение уравнения (1.4.1) в частном случае при $h(t) = t/2$. Итак, рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - p\,\dot{x}\big(t/2\big) = f(t), \quad t \geq 0. \tag{1.4.4}$$

Условие (1.4.2) приобретает вид неравенства $|p| < 1/2$. В силу (1.4.3) имеем

$$\dot{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n f(t/2^n), \quad x(t) = \alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^{t/2^n} (2p)^n f(s)\, ds. \tag{1.4.5}$$

Таким образом, фундаментальное решение уравнения (1.4.4) есть $X(t) = 1$; а функция Коши этого уравнения равна

$$\mathcal{C}(t,s) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{[0,\, t/2^n]}(s)\, (2p)^n, \tag{1.4.6}$$

или, что то же самое

$$\mathcal{C}(t,s) = \frac{1-(2p)^{n+1}}{1-2p}, \text{ если } s \in [t/2^{n+1},\, t/2^n], \quad n = 0,1,2,\dots . \tag{1.4.7}$$

1.4.1b. Неотрицательность функции Коши.

Т е о р е м а 1.4.1. (см. [30]). *Пусть* $|p| < \frac{1}{2}$. *Тогда функция Коши уравнения* (1.4.4) *положительна, то есть* $\mathcal{C}(t,s) > 0$ *при всех* $t \geq 0$, $0 \leq s \leq t$.

Д о к а з а т е л ь с т в о прямо следует из формулы (1.4.7).

1.4.2. Двухточечная краевая задача

1.4.2a. Решение двухточечной краевой задачи.

Рассмотрим краевую задачу для линейного уравнения

$$\dot{x}(t) - p\,\dot{x}(t/2) = f(t), \quad t \in [0,T] \tag{1.4.8}$$

с условием

$$Ax(0) + Bx(T) = C. \tag{1.4.9}$$

Как и выше, предполагаем выполнение неравенства $|p| < \frac{1}{2}$. Представление (1.4.5) общего решения уравнения (1.4.4) при $t \in [0, T]$ дает и общее решение уравнения (1.4.8). Таким образом, получаем

$$x(t) = \alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^{t/2^n} (2p)^n f(s)\, ds, \quad t \in [0, T]. \tag{1.4.10}$$

Отсюда имеем

$$x(0) = \alpha, \quad x(T) = \alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^{T/2^n} (2p)^n f(s)\, ds.$$

Подставим эти соотношения в краевые условия (1.4.9):

$$\alpha(A + B) = C - B \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^{T/2^n} (2p)^n f(s)\, ds.$$

Краевая задача имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $A + B \neq 0$. В этом случае получаем

$$\alpha = \frac{C - B \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^{T/2^n} (2p)^n f(s) ds}{A + B}.$$

Таким образом, решением краевой задачи (1.4.8), (1.4.9) является

$$x(t) = \frac{C - B \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^{T/2^n} (2p)^n f(s) ds}{A + B} + \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^{t/2^n} (2p)^n f(s)\, ds.$$

Таким образом, получена функция Грина краевой задачи (1.4.8), (1.4.9)

$$\mathcal{G}(t, s) = -\frac{B \sum\limits_{n=0}^{\infty} \chi_{[0,\, T/2^n]}(s)\, (2p)^n}{A + B} + \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{[0,\, t/2^n]}(s)\, (2p)^n.$$

Для уравнения (1.4.8) рассмотрим периодическую краевую задачу с условием

$$x(T) - x(0) = C. \tag{1.4.11}$$

Как уже отмечалось, условие (1.4.11) — частный случай условия (1.4.9) при $A = -1, \ B = 1$. Так как $A + B = 0$, периодическая задача не является однозначна разрешимой ни при каких значениях p, T.

В отличие от периодической задачи, апериодическая задача с условием

$$x(T) + x(0) = C \tag{1.4.12}$$

однозначно разрешима при любых p, T, так как $A+B = 2 \neq 0$. Её функция Грина равна

$$\mathcal{G}(t,s) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{[0,\,T/2^n]}(s)\,(2p)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{[0,\,t/2^n]}(s)\,(2p)^n.$$

1.4.2b. Неотрицательность функции Грина.

Получим условия неотрицательности функции Грина краевой задачи (1.4.8), (1.4.9). Будем считать, что $B > 0$.

Т е о р е м а 1.4.2. (см. [30]). *Пусть выполнены неравенства*

$$|p| < \frac{1}{2}, \quad A + B < 0. \tag{1.4.13}$$

Тогда функция Грина задачи (1.4.8), (1.4.9) *положительна, то есть* $\mathcal{G}(t,s) > 0$ *при всех* $(t,s) \in [0,T] \times [0,T]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условия (1.4.13) краевая задача однозначно разрешима. Используем представление (1.1.8) функции Грина.

При $|p| < \frac{1}{2}$ функция Коши положительна для всех $t \in [0,T], \ s \in [0,t]$ (см. теорему 1.4.1). Для выполнения неравенства $\mathcal{G}(t,s) > 0$ достаточно,

чтобы
$$-\frac{BX(t)\mathcal{C}(T,s)}{AX(0)+BX(T)} > 0.$$
Подставим $X(t)=1,$ получим неравенство $A+B<0.$ Теорема доказана.

Глава 2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

§ 2.1. Задача Коши для нелинейного уравнения

2.1.1. Определение решения уравнения с вольтерровым оператором.

Пусть заданы банаховы пространства $E_i = E_i([0,T],\mathbb{R}^n)$, $i = 1,2$, функций, определенных на $[0,T]$ и имеющих значения в $\mathbb{R}^n$.

Напомним, что оператор $F : E_1 \to E_2$ называют *вольтерровым* (по А.Н. Тихонову), если для любого $\tau \in (0,T]$ и любых $x, u \in E_1$ из равенства $x(t) = u(t)$ на $[0,\tau]$ следует, что $(Fx)(t) = (Fu)(t)$ на $[0,\tau]$. Пусть задана функция $y \in E_2$. Рассмотрим уравнение

$$(Fx)(t) = y(t), \quad t \in [0,T]. \tag{2.1.1}$$

Вольтерровость оператора $F : E_1 \to E_2$ позволяет определить решение этого уравнения не только всем $[0,T]$, но и на отрезке $[0,\tau]$, $\tau \in (0,T]$. Приведем соответствующие определения из [14], [25].

Определим пространства $E_i([0,\tau],\mathbb{R})$, $i = 1,2$, функций $x_\tau : [0,\tau] \to \mathbb{R}$, являющихся сужениями на $[0,\tau]$ функций из $E_i([0,T],\mathbb{R})$. Положим

$$\|x_\tau\|_{E_i([0,\tau],\mathbb{R})} = \inf\big\{ \|x\|_{E([0,T],\mathbb{R})} : \ x(t) = x_\tau(t), \ t \in [0,\tau] \big\}.$$

С такой нормой пространство $E_i([0,\tau],\mathbb{R})$ становится банаховым (см. [34, с. 129]).

Определим оператор $P^\tau_{E_i}$ сужения функций из $E_i([0,T],\mathbb{R})$ на отрезок $[0,\tau]$, то есть

$$P^\tau_{E_i} : E_i([0,T],\mathbb{R}) \to E_i([0,\tau],\mathbb{R}), \quad (P^\tau_{E_i}x)(t) = x(t) \;\; \forall t \in [0,\tau].$$

Далее определим оператор $\Pi^\tau_{E_i} \; : \; E_i([0,\tau],\mathbb{R}) \; \to \; E_i([0,T],\mathbb{R})$, продолжающий произвольно функцию $x_\tau \in E_i([0,\tau],\mathbb{R})$ до определенной из всем $[0,T]$ функции $x \in E_i([0,T],\mathbb{R})$.

Функцию $x_\tau \in E_1([0,\tau],\mathbb{R})$ называют *определенным на* $[0,\tau]$ *решением* уравнения (2.1.1), если ее продолжение $x \in E_1([0,T],\mathbb{R})$ удовлетворяет этому уравнению при $t \in [0,\tau]$, или, другими словами, если выполнено

$$P^\tau_{E_2} F \, \Pi^\tau_{E_1} x_\tau = P^\tau_{E_2} \, y.$$

Определенное на $[0,\tau]$ решение при $\tau < T$ называют *локальным*; определенное на всем $[0,T]$ решение — *глобальным.* Если для функции $x_\nu : [0,\nu) \to \mathbb{R}$, $\nu \in (0,T]$, ее сужение x_τ на $[0,\tau]$ при любом $\tau \in (0,\nu)$ является локальным решением уравнения (2.1.1) и $\|x_\tau\|_{E_1([0,\tau],\mathbb{R})} \to \infty$ при $\tau \to \nu - 0$, то x_ν называют *предельно продолженным решением* уравнения (2.1.1). Локальное решение x_τ называют *частью локального, глобального или предельно продолженного решения* x_ς, а решение x_ς — *продолжением решения* x_τ, если $\varsigma > \tau$ и $x_\tau(t) = x_\varsigma(t)$ при $t \in [0,\tau]$.

2.1.2. Существование и оценки решений задачи Коши для нелинейного функционально-дифференциального уравнения общего вида.

Будем обозначать: $L = L([0,T],\mathbb{R})$ — банахово пространство суммируемых функций $y : [0,T] \to \mathbb{R}$, $\|y\|_L = \int\limits_0^t |y(t)|dt$; $AC = AC([0,T],\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство абсолютно непрерывных функций $x : [0,T] \to \mathbb{R}$, производная которых $\dot{x} \in L$, с нормой $\|x\|_{AC} = |x(0)| + \|\dot{x}\|_L$; $C = C([0,T],\mathbb{R})$ — банахово пространство непрерывных функций $x : [0,T] \to \mathbb{R}$, $\|x\|_C = \max_{t\in[0,T]} |x(t)|$.

Пусть заданы: линейный вольтерров оператор $\mathcal{L} : AC([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$, произвольный (вообще говоря, нелинейный) вольтерров оператор $F : AC([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Для функционально-дифференциального уравнения

$$\mathcal{L}x = Fx \tag{2.1.2}$$

рассмотрим задачу Коши с начальным условием

$$x(0) = \alpha. \tag{2.1.3}$$

Для редукции этой задачи к операторному уравнению выберем произвольную функцию $f \in L([0,T],\mathbb{R})$ и введем задачу Коши для соответствующего линейного уравнения

$$\mathcal{L}x = f, \quad x(0) = \alpha. \tag{2.1.4}$$

При естественных предположениях (а именно, в случае вольтерровой обратимости главной части оператора $\mathcal{L}$, подробнее (см. [2, с.35]) задача (2.1.4) имеет единственное решение, и это решение представимо в виде

$$x(t) = \alpha X(t) + \int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s)\, f(s)\, ds, \tag{2.1.5}$$

где $X(\cdot) \in AC([0,T],\mathbb{R})$ — фундаментальное решение однородного уравнения $\mathcal{L}x = 0$, $\mathcal{C}(t,s)$ — функция Коши, а выражение $\int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s)\, f(s)\, ds$ называют оператором Коши. Такая запись линейного ограниченного оператора Коши

$$f \in L([0,T],\mathbb{R}) \mapsto \int\limits_0^{(\cdot)} \mathcal{C}(\cdot,s)\, f(s)\, ds \in AC([0,T],\mathbb{R})$$

является следствием интегрального представления любого линейного ограниченного оператора $L([0,T],\mathbb{R}) \to AC([0,T],\mathbb{R})$ (см. [34, с. 302–305]).

Согласно этому представлению функция Коши $\mathcal{C}(t,s)$ измерима (по плоской мере) и существенно ограничена. Вследствие вольтерровости интегрального оператора Коши выполнено $\mathcal{C}(t,s) = 0$ при $s > t$ (см., например, [23, теорема 3]), что позволяет этот оператор записывать как интеграл на множестве $[0,t]$, а не на всем отрезке $[0,T]$. Свойства функции Коши конкретных линейных функционально-дифференциальных уравнений изучены в [43].

Используя соотношение (2.1.5), перепишем задачу (2.1.2), (2.1.3) в виде эквивалентного уравнения

$$x(t) = \alpha X(t) + \int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s)\,(Fx)(s)\, ds. \tag{2.1.6}$$

Для исследования уравнения (2.1.6) мы воспользуемся предложенными в [14], [24], [25], [32] подходами и полученными в этих работах результатами об операторных уравнениях Вольтерры.

2.1.2a. Условия единственности решений. Для формулировки условий единственности решения используется следующее свойство вольтерровых отображений.

Определение 2.1.1. (см. [19]). Пусть задано число $q \geq 0$. Вольтерров оператор $\widetilde{F}: C([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$ назовем *вольтеррово q-липшицевым,* если для любых $\varsigma \in [0,T)$, $x_\varsigma^0 \in C([0,\varsigma],\mathbb{R})$ и $r > 0$ существует такое $\tau = \tau(\varsigma, x_\varsigma^0, r) \in (0, T-\varsigma]$, что для произвольных $u, \tilde{u} \in C([0,T],\mathbb{R})$, удовлетворяющих соотношениям

$$u(t) = \tilde{u}(t) = x_\varsigma^0(t) \;\; \forall t \in [0,\varsigma],$$
$$\max_{t\in[\varsigma,\varsigma+\tau]} |u(t) - u(\varsigma)| \leq r, \quad \max_{t\in[\varsigma,\varsigma+\tau]} |\tilde{u}(t) - \tilde{u}(\varsigma)| \leq r,$$

выполнено неравенство

$$\int\limits_{\varsigma}^{\varsigma+\tau} \big|(\widetilde{F}u)(t) - (\widetilde{F}\tilde{u})(t)\big|\, dt \leq q \max_{t\in[\varsigma,\varsigma+\tau]} |u(t) - \tilde{u}(t)|. \qquad (2.1.7)$$

Покажем, что если $\widetilde{F}$ удовлетворяет определению 2.1.1, то при любом положительном $\tilde{\tau} < \tau(\varsigma, x_\varsigma, r)$, для произвольных $u, \tilde{u} \in C([0,T],\mathbb{R})$ из соотношений

$$u(t) = \tilde{u}(t) = x_\varsigma^0(t) \;\; \forall t \in [0,\varsigma], \quad \max_{t\in[\varsigma,\varsigma+\tilde{\tau}]} |u(t) - u(\varsigma)| \leq r,$$
$$\max_{t\in[\varsigma,\varsigma+\tilde{\tau}]} |\tilde{u}(t) - \tilde{u}(\varsigma)| \leq r$$

следует неравенство

$$\int\limits_{\varsigma}^{\varsigma+\tilde{\tau}} \big|(\widetilde{F}u)(t) - (\widetilde{F}\tilde{u})(t)\big|\, dt \leq q \max_{t\in[\varsigma,\varsigma+\tilde{\tau}]} |u(t) - \tilde{u}(t)|.$$

Действительно, функции $\mathfrak{u}, \tilde{\mathfrak{u}} \in C([0,T],\mathbb{R})$,

$$\mathfrak{u}(t) = \begin{cases} u(t), & \text{при } t \in [0,\tilde{\tau}], \\ u(\tilde{\tau}), & \text{при } t \in (\tilde{\tau}, T]; \end{cases} \qquad \tilde{\mathfrak{u}}(t) = \begin{cases} \tilde{u}(t), & \text{при } t \in [0,\tilde{\tau}], \\ \tilde{u}(\tilde{\tau}), & \text{при } t \in (\tilde{\tau}, T], \end{cases}$$

удовлетворяют оценкам $\max\limits_{t\in[\varsigma,\varsigma+\tau]} |\mathfrak{u}(t) - \mathfrak{u}(\varsigma)| \leq r$, $\max\limits_{t\in[\varsigma,\varsigma+\tau]} |\tilde{\mathfrak{u}}(t) - \tilde{\mathfrak{u}}(\varsigma)| \leq r$, что позволяет воспользоваться неравенством (2.1.7) и получить требуемое неравенство.

Заметим, что при $\varsigma = 0$ для вольтеррово q-липшицева оператора имеет место соотношение

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \;\; \forall r > 0 \;\; \exists \tau = \tau(0, x_0, r) \;\; \forall u, \tilde{u} \in C([0,T], \mathbb{R})$$
$$u(0) = \tilde{u}(0) = x_0, \quad \max_{t \in [0,\tau]} |u(t) - x_0| \le r, \quad \max_{t \in [0,\tau]} |\tilde{u}(t) - x_0| \le r \;\; \Rightarrow$$
$$\int\limits_0^\tau |(\widetilde{F}u)(t) - (\widetilde{F}\tilde{u})(t)|\, dt \le q \max_{t \in [0,\tau]} |u(t) - \tilde{u}(t)|.$$

Определение 2.1.2. (см. [19]). Оператор

$$\widetilde{F} : C([0,T], \mathbb{R}) \to L([0,T], \mathbb{R})$$

назовем *равномерно вольтеррово q-липшицевым,* если этот оператор вольтеррово q-липшицев и константа τ не зависит от значений ς, x_ς^0, r.

Важно, что даже равномерно вольтеррово q-липшицев оператор $\widetilde{F}$ не обязательно является ограниченным и непрерывным. Приведем соответствующий

Пример 2.1.1. Пусть $\varphi : C([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ — линейный неограниченный функционал, $P_C^1 : C([0,3], \mathbb{R}) \to C([0,1], \mathbb{R})$ — оператор сужения функций из $C([0,3], \mathbb{R})$ не отрезок $[0,1]$. Определим линейный оператор $\widetilde{F} : C([0,3], \mathbb{R}) \to L([0,3], \mathbb{R})$ соотношением

$$(\widetilde{F}x)(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \in [0,2), \\ \varphi P_C^1 x, & \text{при } t \in [2,3]. \end{cases}$$

Этот оператор, очевидно, не является ограниченным и, соответственно, непрерывным. В то же время $\widetilde{F}$ равномерно вольтеррово q-липшицев с константой $q = 0$. Действительно, при $\tau = 1$ для любых $x, u \in C([0,3], \mathbb{R})$ выполнено $(\widetilde{F}x)(t) = (\widetilde{F}u)(t) = 0$, $t \in [0,2]$, и для произвольного $\varsigma \in [0,2)$, если $x(t) = u(t)$ на $[0,\varsigma]$, то $(\widetilde{F}x)(t) = (\widetilde{F}u)(t)$, $t \in [0, \varsigma + 1]$.

Т е о р е м а 2.1.1. (см. [19]). *Пусть для некоторого* $c_0 \geq 0$ *выполнено* $|\mathcal{C}(t,s)| \leq c_0, \ (t,s) \in \Delta_T,$ *и вольтерров оператор* $F : AC([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$ *допускает продолжение до вольтеррова ограниченного оператора* $\widetilde{F} : C([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$. *Тогда, если оператор* $\widetilde{F}$ *вольтеррово* q*-липшицев и* $q < 1/c_0,$ *то задача Коши* (2.1.2), (2.1.3) *разрешима, имеет единственное глобальное или предельно продолженное решение, а всякое локальное решение является его частью.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим эквивалентное задаче (2.1.2), (2.1.3) уравнение (2.1.6), которое в свою очередь, равносильно уравнению

$$x(t) = \alpha X(t) + \int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s)\,(\widetilde{F}x)(s)\,ds \qquad (2.1.8)$$

в пространстве $C([0,T],\mathbb{R})$. Уравнение (2.1.8) — это уравнение вида $x = \Phi x,$ в котором оператор

$$\Phi : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R}), \quad (\Phi x)(t) = \alpha X(t) + \int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s)\,(\widetilde{F}x)(s)\,ds$$

вольтерров. Покажем, что уравнение (2.1.8) имеет локальное решение.

Для произвольного $\tau \in (0,T)$ определим отображения:

$$\Pi^\tau \doteq \Pi^\tau_{C([0,T],\mathbb{R})} : C([0,\tau],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R}),$$

$$(\Pi^\tau x_\tau)(t) = \begin{cases} x_\tau(t), & \text{если} \ \ t \in [0,\tau], \\ x_\tau(\tau), & \text{если} \ \ t \in (\tau,T], \end{cases} \qquad \forall x_\tau \in C([0,\tau],\mathbb{R});$$

$$P^\tau \doteq P^\tau_{C([0,T],\mathbb{R})} : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,\tau],\mathbb{R}), \ \ (P^\tau x)(t) = x(t), \ \ t \in [0,\tau],$$

$x \in C([0,T],\mathbb{R})$. Определим постоянную функцию $a(t) \doteq \alpha, \ t \in [0,T]$. Если $a - \Phi a = 0,$ то уравнение (2.1.8) разрешимо, функция a — его глобальное решение. Пусть $a - \Phi a \neq 0,$ вычислим

$$r_0 = \frac{\|a - \Phi a\|_{C([0,T],\mathbb{R})}}{1 - c_0 q}$$

и найдем значение $\tau = \tau(0, \alpha, r_0)$, удовлетворяющее определению 2.1.1.

Действующий в пространстве $C([0,\tau],\mathbb{R})$ оператор $\Phi^\tau = P^\tau \Phi\, \Pi^\tau$ отображает в себя шар $\mathrm{B}^0 \doteq \mathrm{B}_{C([0,\tau],\mathbb{R})}(P^\tau a,\, r_0) \subset C([0,\tau],\mathbb{R})$ с центром в $P^\tau \Phi a$ и радиуса r_0. Действительно, для любого $x_\tau \in \mathrm{B}^0$ выполнены неравенства

$$\|\Phi^\tau x_\tau - P^\tau a\|_{C([0,\tau],\mathbb{R})} \le \|\Phi^\tau x_\tau - P^\tau \Phi a\|_{C([0,\tau],\mathbb{R})} + \|P^\tau \Phi a - P^\tau a\|_{C([0,\tau],\mathbb{R})} =$$
$$= \max_{t\in[0,\tau]} \Big| \int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s)\,(\widetilde{F}\Pi^\tau x_\tau)(s)\,ds - \int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s)\,(\widetilde{F}a)(s)ds\Big| +$$
$$+\|P^\tau \Phi a - P^\tau a\|_{C([0,\tau],\mathbb{R})} \le \max_{t\in[0,\tau]} \int\limits_0^\tau |\mathcal{C}(t,s)|\,\big|(\widetilde{F}\Pi^\tau x_\tau)(s) - (\widetilde{F}a)(s)\big|\,ds +$$
$$+\|a - \Phi a\|_{C([0,T],\mathbb{R})} \le c_0 q \|x_\tau - P^\tau a\|_{C([0,\tau],\mathbb{R})} + \|a - \Phi a\|_{C([0,T],\mathbb{R})} \le$$
$$\le c_0 q r_0 + (1 - c_0 q) r_0 = r_0.$$

Кроме того, на шаре B^0 оператор Φ^τ является сжимающим с коэффициентом $c_0 q < 1$. Согласно теореме Банаха [37, глава 2, §4] в шаре B^0 существует единственный элемент x_τ, удовлетворяющий уравнению $x_\tau = \Phi^\tau x_\tau$, и таким образом, уравнение (2.1.8) локально разрешимо.

Покажем, что уравнение (2.1.8) не может иметь два различных решения, определенных на одном и том же отрезке. Предположим противное, пусть такими решениями являются $u_\zeta, \tilde{u}_\zeta \in C([0,\zeta],\mathbb{R})$. Положим

$$\sigma = \inf\{t \in [0,\varsigma] \,:\, u_\zeta(t) \ne \tilde{u}_\zeta(t)\}$$

(следовательно, $u_\zeta(t) = \tilde{u}_\zeta(t)$ на $[0,\sigma]$). Определим функцию $x_\sigma^0 \in C([0,\sigma],\mathbb{R})$ соотношением $x_\sigma^0(t) = u_\zeta(t)$ $\forall t \in [0,\sigma]$ и положим

$$r_\sigma \doteq \frac{\|\Pi^\sigma x_\sigma^0 - \Phi \Pi^\sigma x_\sigma^0\|_{C([0,T],\mathbb{R})}}{1 - c_0 q} + 1, \quad \tau \doteq \tau(\sigma, x_\sigma^0, r_\sigma).$$

Вследствие непрерывности функций $u_\zeta, \tilde u_\zeta$ можем так определить $\tilde\tau \in (0,\tau]$, $\tilde\tau \le \zeta - \sigma$, чтобы выполнялись неравенства

$$\max_{t\in[\sigma,\sigma+\tilde\tau]} |u_\zeta(t) - u_\zeta(\sigma)| \le r_\sigma, \quad \max_{t\in[\sigma,\sigma+\tilde\tau]} |\tilde u_\zeta(t) - \tilde u_\zeta(\sigma)| \le r_\sigma.$$

Положим $\varsigma \doteq \sigma + \tilde\tau$ и определим множество

$$B^\sigma \doteq \big\{ x_\varsigma \in C([0,\varsigma],\mathbb{R}) : \\ x_\varsigma(t) = x^0_\sigma(t)\ \forall t \in [0,\sigma],\ \ \|x_\varsigma - P^\varsigma \Pi^\sigma x^0_\sigma\|_{C([0,\varsigma],\mathbb{R})} \le r_\sigma \big\}.$$

Заметим, что сужения на $[0,\varsigma]$ решений $u_\zeta, \tilde u_\zeta$ являются элементами множества B^σ.

Оператор $\Phi^\varsigma = P^\varsigma \Phi\, \Pi^\varsigma$ отображает в себя замкнутое множество $B^\sigma \subset C([0,\varsigma],\mathbb{R})$. Действительно, при любом $x_\varsigma \in B^\sigma$, во-первых, выполнено $(\Phi\Pi^\varsigma x_\varsigma)(t) = x^0_\sigma(t)$ на $[0,\sigma]$; и во-вторых, справедливы неравенства

$$\|\Phi^\varsigma x_\varsigma - P^\varsigma \Pi^\sigma x^0_\sigma\|_{C([0,\varsigma],\mathbb{R})} \le \|\Phi^\varsigma x_\varsigma - P^\varsigma \Phi \Pi^\sigma x^0_\sigma\|_{C([0,\varsigma],\mathbb{R})} + \\ + \|P^\varsigma \Phi \Pi^\sigma x^0_\sigma - P^\varsigma \Pi^\sigma x^0_\sigma\|_{C([0,\varsigma],\mathbb{R})} = \max_{t\in[\sigma,\varsigma]} \Big| \int_\sigma^t \mathcal{C}(t,s)\,(\widetilde F \Pi^\varsigma x_\varsigma)(s)\,ds - \\ - \int_\sigma^t \mathcal{C}(t,s)\,(\widetilde F \Pi^\sigma x^0_\sigma)(s) ds \Big| + \|P^\varsigma \Phi \Pi^\sigma x^0_\sigma - P^\varsigma \Pi^\sigma x^0_\sigma\|_{C([0,\varsigma],\mathbb{R})} \le$$

$$\le \max_{t\in[\sigma,\varsigma]} \int_\sigma^\varsigma |\mathcal{C}(t,s)|\, \big|(\widetilde F \Pi^\varsigma x_\varsigma)(s) - (\widetilde F \Pi^\sigma x^0_\sigma)(s) ds)\big|\, ds + \\ + \|\Phi \Pi^\sigma x^0_\sigma - \Pi^\sigma x^0_\sigma\|_{C([0,T],\mathbb{R})} \le c_0 q \|x_\varsigma - P^\varsigma \Pi^\sigma x^0_\sigma\|_{C([0,\varsigma],\mathbb{R})} + \\ + \|\Phi \Pi^\sigma x^0_\sigma - \Pi^\sigma x^0_\sigma\|_{C([0,T],\mathbb{R})} \le c_0 q r_\sigma + (1 - c_0 q)(r_\sigma - 1) \le r_\sigma.$$

Таким образом, согласно теореме Банаха [37, глава $2, \S 4$] во множестве B^σ существует единственное определенное на $[0,\varsigma]$ решение x_ς, уравнения

(2.1.8). Это противоречит существованию в B^σ двух различных локальных решений — сужений на $[0,\varsigma]$ решений $u_\zeta, \tilde{u}_\zeta$.

Покажем, что любое локальное решение продолжаемо до глобального или предельно продолженного решения. Локальному решению x_ξ, так как оно единственное на $[0,\xi]$, взаимно однозначно соответствует его область определения и, соответственно, число ξ. Для множества Ξ таких чисел найдем точную верхнюю границу $\eta \doteq \sup \Xi$ и определим на $[0,\eta)$ функцию x_η, $x_\eta(t) = x_\xi(t)$, где значение ξ — любое, удовлетворяющее неравенству $\xi > t$ (это определение корректно в силу единственности на каждом отрезке локального решения). При увеличении ξ значение $\|x_\xi\|_{C([0,\xi],\mathbb{R})}$ не убывает. Положим $R \doteq \lim\limits_{\xi \to \eta - 0} \|x_\xi\|_{C([0,\xi],\mathbb{R})}$. Если $R = +\infty$, то функция x_η, $t \in [0,\eta)$, является предельно продолженным решением.

Пусть $R < +\infty$. Сначала покажем, что в этом случае функцию x_η, $t \in [0,\eta)$ можно доопределить в точке η до непрерывной на отрезке $[0,\eta]$ функции (т. е. существует $\lim_{t\to\eta} x_\eta(t)$), которую мы будем обозначать $\tilde{x}_\eta$.

Для любого $\xi \in \Xi$ продолжение $\Pi^\xi x_\xi \in C([0,T],\mathbb{R})$ на $[0,T]$ функции $x_\xi \in C([0,\xi],\mathbb{R})$ удовлетворяет оценке $\|\Pi^\xi x_\xi\|_{C([0,T],\mathbb{R})} \le R$. Вследствие ограниченности отображения $\widetilde{F} : C([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$ существует такое R', что $\|\widetilde{F}\Pi^\xi x_\xi\|_{L([0,T],\mathbb{R})} \le R'$. Определим некоторую последовательность $\{\xi_i\}$, сходящуюся к η. Вследствие вольтерровости отображения $\widetilde{F}$ при п.в. $t \in [0,\eta]$ последовательность $\{(P^\eta \widetilde{F}\Pi^{\xi_i} x_{\xi_i})(t)\}$ сходится к измеримой функции f_η, равной $f_\eta(t) = (\widetilde{F}\Pi^{\xi_i} x_{\xi_i})(t)$, где $\xi_i > t$ может быть выбрано любым. Так как $\int\limits_0^\eta |(\widetilde{F}\Pi^{\xi_i} x_{\xi_i})(t)|\,dt \le R'$, то в силу теоремы Фату (см. [46, с.133]). имеем $\int\limits_0^\eta |f_\eta(t)|\,dt \le R'$, таким образом, $f_\eta \in L([0,\eta],\mathbb{R})$. Функция $t \in [0,\eta] \mapsto \alpha X(t) + \int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s) f_\eta(s)\,ds$ непрерывна на отрезке $[0,\eta]$, а на полуинтервале $[0,\eta)$ выполнено равенство $x_\eta(t) =$

$\alpha X(t)+\int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s)f_\eta(s)\,ds$. Итак, $\tilde{x}_\eta(t)=\alpha X(t)+\int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s)f_\eta(s)\,ds,\ t\in[0,\eta]$.

Теперь покажем, что найденное локальное решение $\tilde{x}_\eta$ может быть продолжено, и тогда будет получено противоречие с найденной выше верхней гранью η областей существования всех локальных решений.

Если $\Pi^\eta\tilde{x}_\eta-\Phi\Pi^\eta\tilde{x}_\eta=0$, то $\Pi^\eta\tilde{x}_\eta$ является глобальным решением, продолжающим локальное решение $\tilde{x}_\eta$. Пусть $\Pi^\eta\tilde{x}_\eta-\Phi\Pi^\eta\tilde{x}_\eta\neq 0$. Положим

$$r_\eta\doteq\frac{\|\Pi^\eta\tilde{x}_\eta-\Phi\Pi^\eta\tilde{x}_\eta\|_{C([0,T],\mathbb{R})}}{1-c_0q},\quad \tau\doteq\tau(\eta,\tilde{x}_\eta,r_\eta).$$

Положим $\tilde{\xi}\doteq\eta+\tau$ и определим множество

$$B^\eta\doteq\big\{x_{\tilde{\xi}}\in C([0,\tilde{\xi}],\mathbb{R})\ :\ x_{\tilde{\xi}}(t)=\\ =\tilde{x}_\eta(t)\ \forall t\in[0,\eta],\ \ \|x_{\tilde{\xi}}-P^{\tilde{\xi}}\Pi^\eta\tilde{x}_\eta\|_{C([0,\tilde{\xi}],\mathbb{R})}\leq r_\eta\big\}.$$

Оператор $\Phi^{\tilde{\xi}}=P^{\tilde{\xi}}\Phi\,\Pi^{\tilde{\xi}}$ отображает в себя замкнутое множество $B^\eta\subset C([0,\tilde{\xi}],\mathbb{R})$. Действительно, при любом $x_{\tilde{\xi}}\in B^\eta$ выполнено

$$(\Phi\Pi^{\tilde{\xi}}x_{\tilde{\xi}})(t)=\tilde{x}_\eta(t)\ \ \forall t\in[0,\eta];$$

$$\|\Phi^{\tilde{\xi}}x_{\tilde{\xi}}-P^{\tilde{\xi}}\Pi^\eta\tilde{x}_\eta\|_{C([0,\tilde{\xi}],\mathbb{R})}\leq\|\Phi^{\tilde{\xi}}x_{\tilde{\xi}}-P^{\tilde{\xi}}\Phi\Pi^\eta\tilde{x}_\eta\|_{C([0,\tilde{\xi}],\mathbb{R})}+\\ +\|P^{\tilde{\xi}}\Phi\Pi^\eta\tilde{x}_\eta-P^{\tilde{\xi}}\Pi^\eta\tilde{x}_\eta\|_{C([0,\tilde{\xi}],\mathbb{R})}=\max_{t\in[\eta,\tilde{\xi}]}\Big|\int\limits_\eta^t\mathcal{C}(t,s)\,(\widetilde{F}\Pi^{\tilde{\xi}}x_{\tilde{\xi}})(s)\,ds-\\ -\int\limits_\eta^t\mathcal{C}(t,s)\,(\widetilde{F}\Pi^\eta\tilde{x}_\eta)(s)ds\Big|+\|P^{\tilde{\xi}}\Phi\Pi^\eta\tilde{x}_\eta-P^{\tilde{\xi}}\Pi^\eta\tilde{x}_\eta\|_{C([0,\tilde{\xi}],\mathbb{R})}\leq\\ \leq\max_{t\in[\eta,\tilde{\xi}]}\int\limits_\eta^t|\mathcal{C}(t,s)|\,\big|(\widetilde{F}\Pi^{\tilde{\xi}}x_{\tilde{\xi}})(s)-(\widetilde{F}\Pi^\eta\tilde{x}_\eta)(s)\big|\,ds+\\ +\|\Phi\Pi^\eta\tilde{x}_\eta-\Pi^\eta\tilde{x}_\eta\|_{C([0,T],\mathbb{R})}\leq c_0q\|x_{\tilde{\xi}}-P^{\tilde{\xi}}\Pi^\eta\tilde{x}_\eta\|_{C([0,\tilde{\xi}],\mathbb{R})}+\\ +\|\Phi\Pi^\eta\tilde{x}_\eta-\Pi^\eta\tilde{x}_\eta\|_{C([0,T],\mathbb{R})}\leq c_0qr_\eta+(1-c_0q)r_\eta=r_\eta.$$

Согласно теореме Банаха [37, глава 2, §4] во множестве B^η существует единственное определенное на $[0,\tilde{\xi}]$ решение уравнения (2.1.8).

Таким образом, в ситуации $R < +\infty$ получено противоречие. □

В теореме 2.1.1 свойство ограниченности оператора $\widetilde{F}$ используется для доказательства продолжаемости локальных решений, позволяя установить, что если определенная на полуинтервале $[0,\eta)$ функция x_η ограничена и ее сужение на любой отрезок является локальным решением, то ее можно доопределить в точке η до непрерывной на отрезке $[0,\eta]$ функции. Это утверждение не потребуется, если предположить, что оператор $\widetilde{F}$ равномерно вольтеррово q-липшицев.

Т е о р е м а 2.1.2. (см. [19]). *Пусть для некоторого* $c_0 > 0$ *выполнено* $|\mathcal{C}(t,s)| \leq c_0$, $(t,s) \in \Delta_T$, *и вольтерров оператор* $F : AC([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$ *допускает продолжение до вольтеррова оператора* $\widetilde{F} : C([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$. *Тогда, если оператор* $\widetilde{F}$ *равномерно вольтеррово* q*-липшицев и* $q < 1/c_0$, *то задача Коши* (2.1.2), (2.1.3) *имеет единственное глобальное решение, а всякое локальное решение является его частью.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя приведенные в доказательстве теоремы 2.1.1 рассуждения и построения, можно показать, что уравнение (2.1.8) имеет определенное на $[0,\tau]$ решение. Далее, аналогично определяется продолжение локального решения. Так как теперь оператор $\widetilde{F}$ равномерно вольтеррово q-липшицев, то продолжение решения будет определено на $[0,2\tau]$. Полученное решение можно снова продолжить, причем, в силу равномерной вольтрровой липшицевости на $[0,3\tau]$. Продолжая аналогичные построения за конечное число шагов будет получено единственное глобальное решение уравнения (2.1.8).

З а м е ч а н и е 2.1.1. В теоремах 2.1.1, 2.1.2 используется условие ограниченности функция Коши $|\mathcal{C}(t,s)| \le c_0,\ t \in [0,T],\ s \in [0,t].$ Важно, что для любого линейного функционально-дифференциального уравнения функция Коши ограничена. Это следует из того, что оператор Коши

$$K : L([0,T],R) \to AC([0,T],R), \quad (Kf)(t) = \int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s)\, f(s)\, ds$$

непрерывен, а для непрерывности интегрального оператора, действующего из $L([0,T],R)$ в $C([0,T],R)$ необходимо, чтобы его ядро было ограниченным (см. [56, с.160]).

2.1.2b. Условия существования решений. Здесь получены условия существования решения задачи Коши, основанные на принципе Шаудера неподвижной точки вполне непрерывного оператора (см. [34, с. 627]). Как и выше, будем предполагать, что задача Коши (2.1.4) для линейного уравнения однозначно разрешима. Тогда и имеет место

Т е о р е м а 2.1.3. (см. [30]). *Пусть вольтерров оператор $F : AC([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$ допускает продолжение до вольтеррова непрерывного оператора $\widetilde{F} : C([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$, причем, для любого $r > 0$ существует такая суммируемая функция $\eta_r : [0,T] \to \mathbb{R}_+$, что при всех $x \in C([0,T],\mathbb{R})$, $||x||_C \le r$ выполнено неравенство $|(\widetilde{F}x)(t)| \le \eta_r(t)$ п.в. на $[0,T]$. Тогда задача Коши (2.1.2), (2.1.3) разрешима, любое локальное решение является частью некоторого глобального или предельно продолженного решения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как отмечено при доказательстве теоремы 2.1.1, задача (2.1.2), (2.1.3) равносильна уравнению (2.1.8) в пространстве $C([0,T],\mathbb{R})$. Согласно замечанию 1, функция Коши $\mathcal{C}(t,s)$ ограничена:

существует число c_0, для которого $|\mathcal{C}(t,s)| \le c_0$ при всех t,s. Используя эту оценку, докажем существование локального решения уравнения (2.1.8).

Покажем, что оператор

$$\Phi : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,\tau],\mathbb{R}), \quad (\Phi x)(t) = \alpha X(t) + \int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s)\,(\widetilde{F}x)(s)\,ds$$

отображает любой шар

$$\mathrm{B} = \mathrm{B}_{C([0,T],\mathbb{R})}(0,r) = \big\{x \in C([0,T],\mathbb{R}) : \|x\|_C \le r\big\}$$

в предкомпактное множество. Действительно, для любого $x \in \mathrm{B}$ выполнены соотношения

$$|\int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s)(\widetilde{F}x)(s)ds| \le c_0 \int\limits_0^t \eta_r(s)ds;$$

$$|\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathcal{C}(t,s)(\widetilde{F}x)(s)ds| \le c_0 |\int\limits_{t_1}^{t_2} \eta_r(s)ds|.$$

Так как интеграл от суммируемой функции η_r есть абсолютно непрерывная функция предела интегрирования, то множество $\Phi\mathrm{B} \subset C([0,T],\mathbb{R})$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Определим функцию $a(t) \equiv \alpha$ и для некоторого $r_0 > 0$ определим суммируемую функцию η_0 такую, что если $\|x - a\|_C \le r_0$, то $|(\widetilde{F}x)(t)| \le \eta_0(t)$ на $[0,T]$. Найдем $\tau_0 > 0$, удовлетворяющее неравенству $c_0 \int\limits_0^{\tau_0} \eta_0(s)\,ds \le r_0$ (такое τ_0 существует, так как интеграл есть непрерывная функция предела интегрирования и $\int\limits_0^0 \eta_0(s)\,ds = 0$). Для найденного значения τ_0 при всех x, удовлетворяющих оценке $\|x - a\|_C \le r_0$, выполнено

$$\Big|\int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s)\,(\widetilde{F}x)(s)\,ds\Big| \le \int\limits_0^t c_0\,\eta_0(s)\,ds \le r_0 \quad \forall t \in [0,\tau_0].$$

Действующий в пространстве $C([0,\tau_0],\mathbb{R})$. оператор $\Phi^{\tau_0} = P^{\tau_0}\Phi\Pi^{\tau_0}$ отображает в себя шар $\mathrm{B}^0 = \mathrm{B}_{C([0,\tau_0],\mathbb{R})} \subset C([0,\tau_0],\mathbb{R})$. Кроме того, отображение Φ^{τ_0} является вполне непрерывным, как композиция непрерывных операторов P^{τ_0}, Π^{τ_0} и вполне непрерывного оператора Φ. Поэтому в силу теоремы Шаудера отображение Φ^{τ_0} имеет в шаре B^0 неподвижную точку x_{τ_0}, которая и является локальным решением уравнения (2.1.8).

Докажем, что любое локальное решение уравнения (2.1.8) продолжаемо до глобального или предельно продолженного.

На множестве локальных решений определим порядок, полагая, что для решений x_τ и $x_{\tilde{\tau}}$ выполнено $x_{\tilde{\tau}} \preceq x_\tau$ если $\tilde{\tau} \leq \tau$ и $x_{\tilde{\tau}}(t) = x_\tau(t)$ на $[0,\tilde{\tau}]$. В силу теоремы Хаусдорфа [37, с. 40] для любого решения $x_{\tilde{\tau}}$ существует максимальная (относительно порядка $\preceq$) цепь S, содержащая $x_{\tilde{\tau}}$. Определим $\nu = \sup\{\tau : x_\tau \in S\}$ и функцию $x_\nu : [0,\nu) \to \mathbb{R}$, сужение которой на любой отрезок $[0,\tau] \subset [0,\nu)$ является решением $x_\tau \in S$. Докажем, что либо $\lim\limits_{t\to\nu-0} x_\nu(t)$ существует, либо $\lim\limits_{\tau\to\nu-0} \|x_\tau\|_{C([0,\tau],\mathbb{R})} = \infty$.

Так как $\|x_\tau\|_{C([0,\tau],\mathbb{R})}$ не убывает по τ, то существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{\tau\to\nu-0} \|x_\tau\|_{C([0,\tau],\mathbb{R})}$. Если $\lim\limits_{\tau\to\nu-0} \|x_\tau\|_{C([0,\tau],\mathbb{R})} = \infty$, то функция $x_\nu : [0,\nu] \to \mathbb{R}$ является предельно продолженным решением, то есть утверждение теоремы верно.

Пусть $\lim\limits_{\tau\to\nu-0} \|x_\tau\|_{C([0,\tau],\mathbb{R})} = \bar{r} < \infty$. Тогда непрерывная функция $x_\nu :$ $[0,\nu) \to \mathbb{R}$ ограничена, кроме того,

$$|x_\nu(t_1) - x_\nu(t_2)| = |\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathcal{C}(t,s)\,(\widetilde{F}x)(s)\,ds| \leq c_0|\int\limits_{t_1}^{t_2} \eta_{\bar{r}}(s)ds|.$$

Следовательно, эта функция равномерно непрерывна. Отсюда следует, что существует $\lim\limits_{\tau\to\nu-0} x_\tau(t)$, то есть функцию x_ν можно доопределить до функции, непрерывной на всем отрезке $[0,\nu]$. Таким образом, получим локальное решение $\tilde{x}_\nu : [0,\nu] \to \mathbb{R}$. Если $\nu = T$, то это решение глобальное, и теорема доказана. Пусть $\nu < T$. Далее покажем, что решение $\tilde{x}_\nu$ можно продолжить. Тем самым мы получим противоречие с определением величины $\nu = \sup\bigl\{\tau : x_\tau \in S\bigr\}$. Это будет означать, что $\nu = T$, и решение $\tilde{x}_\nu : [0,T] \to \mathbb{R}$ глобальное.

Заметим, что $\|\tilde{x}_\nu\| = \bar{r} < \infty$. Если $\Pi^\nu \tilde{x}_\nu - \Phi\Pi^\nu \tilde{x}_\nu = 0,$то функция $\Pi^\nu \tilde{x}_\nu$ является глобальным решением, продолжающим локальное решение $\tilde{x}_\nu$.

Пусть $\Pi^\nu \tilde{x}_\nu - \Phi\Pi^\nu \tilde{x}_\nu \neq 0$. Положим $r = \bar{r} + 1$ и определим суммируемую функцию $\eta_r : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ так, чтобы $\bigl|(\tilde{F}x)(t)\bigr| \leq \eta_r(t)$, $t \in [0,T]$, при любых $x \in C([0,T],\mathbb{R})$, $\|x\|_c \leq r$. Найдем $\Delta > 0$, при котором имеют место неравенства

$$\max_{t\in[\nu,\nu+\Delta]} |\alpha X(t) - \alpha X(\nu)| \leq 1/2, \quad \int\limits_{\nu}^{\nu+\Delta} c_0 \eta_r(t)\, dt \leq 1/2$$

(это возможно вследствие непрерывности функции X и интеграла как функции предела интегрирования).

Теперь определим множество

$$B^\nu = \{x_{\nu+\Delta} \in C([0,\nu+\Delta],\mathbb{R}) : \\ x_{\nu+\Delta}(t) = \tilde{x}_\nu(t)\ \forall t \in [0,\nu],\ \|x_{\nu+\Delta} - P^{\nu+\Delta}\Pi^\nu \tilde{x}_\nu\|_{C([0,\nu+\Delta],\mathbb{R})} \leq 1\}.$$

Множество $B^\nu \subset C([0,\nu+\Delta],\mathbb{R})$ является выпуклым. Действительно, для любых двух его элементов $x_{\nu+\Delta}$, $u_{\nu+\Delta}$ из соотношений $x_{\nu+\Delta}(t) = \tilde{x}_\nu(t)$, $u_{\nu+\Delta}(t) = \tilde{x}_\nu(t)$, $t \in [0,\nu]$, при любым $\lambda \in (0,1)$ следует

$$\lambda x_{\nu+\Delta}(t) + (1-\lambda) u_{\nu+\Delta}(t) = \tilde{x}_\nu(t),\ t \in [0,\nu];$$

а из $\|x_{\nu+\Delta} - P^{\nu+\Delta}\Pi^\nu \tilde{x}_\nu\|_{C([0,\nu+\Delta],\mathbb{R})} \leq 1$ и $\|u_{\nu+\Delta} - P^{\nu+\Delta}\Pi^\nu \tilde{x}_\nu\|_{C([0,\nu+\Delta],\mathbb{R})} \leq 1$

следует
$$\|\lambda x_{\nu+\Delta} + (1-\lambda)u_{\nu+\Delta} - P^{\nu+\Delta}\Pi^{\nu}\tilde{x}_{\nu}\|_{C([0,\nu+\Delta],\mathbb{R})} \leq 1.$$
Также легко проверяется замкнутость множества B^{ν} в пространстве $C([0,\nu+\Delta],\mathbb{R})$.

Покажем, что оператор $\Phi^{\nu+\Delta} = P^{\nu+\Delta}\Phi\Pi^{\nu+\Delta}$ отображает в себя множество $B^{\nu} \subset C([0,\nu+\Delta],\mathbb{R})$. Для любого $x_{\nu+\Delta} \subset B^{\nu}$, во-первых, при $t \in [0,\nu]$ выполнению $(\Phi^{\nu+\Delta}x_{\nu+\Delta})(t) = \tilde{x}_{\nu}(t)$, так как $\tilde{x}_{\nu}$ есть локальное решение уравнения (2.1.8). Во-вторых, имеет место оценка

$$\|\Phi^{\nu+\Delta}x_{\nu+\Delta} - P^{\nu+\Delta}\Pi^{\nu}\tilde{x}_{\nu}\|_{C([0,\nu+\Delta],\mathbb{R})} = \max_{t\in[\nu,\nu+\Delta]}|(\Phi^{\nu+\Delta}x_{\nu+\Delta})(t) - \tilde{x}_{\nu}(\nu)| =$$
$$= \max_{t\in[\nu,\nu+\Delta]}\Big|\alpha X(t) + \int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s)(\tilde{F}\Pi^{\nu+\Delta}x_{\nu+\Delta})(s)\,ds - \alpha X(\nu) -$$
$$- \int\limits_0^{\nu} \mathcal{C}(t,s)(\tilde{F}\Pi^{\nu}\tilde{x}_{\nu})(s)\,ds\Big| \leq \max_{t\in[\nu,\nu+\Delta]}\Big(|\alpha X(t) - \alpha X(\nu)| +$$
$$+ \int\limits_0^{\nu} |\mathcal{C}(t,s)(\tilde{F}\Pi^{\nu+\Delta}x_{\nu+\Delta})(s) - (\tilde{F}\Pi^{\nu}\tilde{x}_{\nu})(s)|ds +$$
$$+ \int\limits_{\nu}^{\nu+\Delta} |\mathcal{C}(t,s)(\tilde{F}\Pi^{\nu+\Delta}x_{\nu+\Delta})(s)|ds\Big) \leq \max_{t\in[\nu,\nu+\Delta]}|\alpha X(t) - \alpha X(\nu)| +$$
$$+ \int\limits_{\nu}^{\nu+\Delta} |c_0\eta_r(s)|ds \leq 1.$$

Покажем, что множество $\Phi^{\nu+\Delta}(B^{\nu})$ является предкомпактным. Для любого элемента $x_{\nu+\Delta} \in B^{\nu}$ выполнено неравенство $\|\Phi^{\nu+\Delta}x_{\nu+\Delta}\|_{C([0,\nu+\Delta],\mathbb{R})} \leq \bar{r} + 1$. Так как $(\Phi^{\nu+\Delta}x_{\nu+\Delta})(t) = \tilde{x}_{\nu}(t)$ при $t \in [0,\nu]$, то в силу равномерной непрерывности функции x_{ν} не отрезке

$[0,\nu]$ получим

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall t_1 t_2 \in [0,\nu]$$
$$|t_1 - t_2| < \delta \ \Rightarrow \ \Big|(\Phi^{\nu+\Delta} x_{\nu+\Delta})(t_1) - (\Phi^{\nu+\Delta} x_{\nu+\Delta})(t_2)\Big| = |\tilde{x}_\nu(t_1) - \tilde{x}_\nu(t_2)| < \epsilon.$$

Если же $t_1 t_2 \in [\nu, \nu+\Delta]$, то справедлива оценка

$$\Big|(\Phi^{\nu+\Delta} x_{\nu+\Delta})(t_1) - (\Phi^{\nu+\Delta}\, x_{\nu+\Delta})(t_2)\Big| \le \Big|\tilde{x}_\nu(\nu) + \int\limits_{\nu}^{t_1} \mathcal{C}(t,s)(\tilde{F}\,\Pi^{\nu+\Delta}\, x_{\nu+\Delta})$$
$$(s)ds - \tilde{x}_\nu(\nu) - \int\limits_{\nu}^{t_2} \mathcal{C}(t,s)(\tilde{F}\,\Pi^{\nu+\Delta}\, x_{\nu+\Delta})(s)ds\Big| \le$$
$$\le \Big|\int\limits_{t_2}^{t_1} |\mathcal{C}(t,s)|(\tilde{F}\,\Pi^{\nu+\Delta} x_{\nu+\Delta})(s)ds\Big| \le c_0 \Big|\int\limits_{t_2}^{t_1} \eta_r(s)ds\Big|.$$

Отсюда следует равностепенная непрерывность функций из множества $\Phi^{\nu+\Delta}(B^\nu)$. Итак, множество $\Phi^{\nu+\Delta}(B^\nu) \subset B^\nu$ предкомпактно, следовательно, согласно теореме Шаудера в множестве B^ν существует неподвижная точка $\tilde{x}^{\nu+\Delta}$ отображения $\Phi^{\nu+\Delta}$. Функция $\tilde{x}^{\nu+\Delta}$ является определенным на $[0,\nu+\Delta]$ решением уравнения (2.1.8), продолжающим решение $\tilde{x}^\nu$. Мы получим противоречие с определением величины $\nu = \sup\big\{\tau : x_\tau \in S\big\}$. Таким образом, $\nu = T$, и решение $\tilde{x}_\nu : [0,T] \to \mathbb{R}$ глобальное. $\square$

2.1.2c. Оценки решений. Здесь на основании утверждений о неподвижных точках монотонных операторов в нормированных пространствах (см. §33, §38 [40]) получены условия существования решения задачи Коши и найдены оценки решений.

Определим в пространстве $C = C([0,T],\mathbb{R})$ конус C_+ неотрицательных функций и зададим упорядоченность, полагая для любых $x, u \in C$ выполненным неравенство $x \geq u$, если $x - u \in C_+$, то есть, если $x(t) - u(t) \geq 0$ при всех $t \in [0,T]$. Аналогично, определим в $L = L([0,T],\mathbb{R})$ и $AC = AC([0,T],\mathbb{R})$ конусы L_+ и AC_+ неотрицательных функций и порядок

$$\forall y, z \in L \ \ y \geq z \ \Leftrightarrow \ y - z \in L_+, \quad \forall y, z \in AC \ \ y \geq z \ \Leftrightarrow \ y - z \in AC_+.$$

Отметим, что в пространстве L конус L_+ является *сильно миниэдральным*, то есть каждое ограниченное сверху (снизу) по норме множество обладает точной верхней (нижней) границей, и *вполне правильным*, то есть любая монотонная ограниченная по норме последовательность сходится (см.[40], с. $256, 257$). Конусы $C_+ \subset C$, $AC_+ \subset AC$, перечисленными свойствами не обладают.

Определим еще множество $\widetilde{AC} \doteq \widetilde{AC}([0,T],\mathbb{R})$ функций $x : [0,T] \to \mathbb{R}$, имеющих не более одного разрыва в любой точке $\tilde{t} \doteq \tilde{t}(x) \in (0,T]$, непрерывных справа в этой точке и абсолютно непрерывных на каждом интервале $[0,\tilde{t})$ и $[\tilde{t},T]$. Для произвольных функций $x, u \in \widetilde{AC}$ полагаем $x \leq u$, если $x(t) \leq u(t)$ при всех $t \in [0,T]$.

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Т е о р е м а 2.1.4. (см. [54]). *Пусть функция Коши линейного уравнения $\mathcal{L}x = f$ удовлетворяет неравенству $\mathcal{C}(t,s) \geq 0$, $(t,s) \in \Delta_T$. Пусть, далее, оператор $F : AC([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$ допускает продолжение до вольтеррова монотонного оператора $\widetilde{F} : \widetilde{AC}([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$. Тогда, если для некоторой абсолютно непрерывной функции u_0, отвечающей начальному условию $u_0(0) = \alpha$, справедливо неравенство*

$$\mathcal{L}u_0 \geq Fu_0, \tag{2.1.9}$$

то существует глобальное или предельно продолженное решение $\tilde{x}$ задачи Коши (2.1.2), (2.1.3), *удовлетворяющее на своей области* *определения неравенствам*

$$(\mathcal{L}\tilde{x})(t) \le (\mathcal{L}u_0)(t), \quad \tilde{x}(t) \le u_0(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $x \in AC([0,T],\mathbb{R})$ выполнено

$$\mathcal{L}x = \alpha X + \int\limits_0^{(\cdot)} \mathcal{C}(\cdot,s)\,(\mathcal{L}x)(s)\,ds,$$

поэтому задача (2.1.2), (2.1.3) равносильна уравнению

$$\mathcal{L}x = F\Big(\alpha X + \int\limits_0^{(\cdot)} \mathcal{C}(\cdot,s)\,(\mathcal{L}x)(s)\,ds\Big),$$

а предположение (2.1.9) — неравенству

$$\mathcal{L}u_0 \ge \widetilde{F}\Big(\alpha X + \int\limits_0^{(\cdot)} \mathcal{C}(\cdot,s)\,(\mathcal{L}u_0)(s)\,ds\Big).$$

Обозначим $\mathcal{L}x = z$, получим уравнение

$$z = F\Big(\alpha X + \int\limits_0^{(\cdot)} \mathcal{C}(\cdot,s)\,z(s)\,ds\Big) \;\Leftrightarrow\; z = \widetilde{F}\Big(\alpha X + \int\limits_0^{(\cdot)} \mathcal{C}(\cdot,s)\,z(s)\,ds\Big) \quad (2.1.10)$$

в пространстве $L = L([0,T],\mathbb{R})$. Определим отображение

$$\Psi : L([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R}), \;\; \Psi z = \widetilde{F}\Big(\alpha X + \int\limits_0^{(\cdot)} \mathcal{C}(\cdot,s)\,z(s)\,ds\Big).$$

Заметим, что являясь композицией вольтерровых отображений, оператор Ψ вольтерров.

Покажем, что уравнение (2.1.10) имеет локальное решение.

Для произвольного $\tau \in (0,T)$ определим отображения:

$$\Pi^\tau \doteq \Pi^\tau_{L([0,T],\mathbb{R})} : L([0,\tau],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R}),$$

$$(\Pi^\tau z_\tau)(t) = \begin{cases} z_\tau(t), & \text{если} \;\; t \in [0,\tau], \\ 0, & \text{если} \;\; t \in (\tau,T], \end{cases} \qquad \forall z_\tau \in L([0,\tau],\mathbb{R});$$

$$P^\tau \doteq P^\tau_{L([0,T],\mathbb{R})} : L([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,\tau],\mathbb{R}), \;\; (P^\tau z)(t) = z(t), \;\; t \in [0,\tau],$$
$$z \in L([0,T],\mathbb{R}).$$

Определим функции $x_0(t) = \alpha X(t) - 1$, $v_0(t) = (Fx_0)(t)$, $w_0(t) = \min\{v_0(t), (\mathcal{L}u_0)(t)\}$, $t \in [0,T]$. Найдем $\tau > 0$ так, чтобы $\int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s)\, w_0(s)\, ds \geq -1$ при $t \in [0,\tau]$. Это возможно, так как вследствие ограниченности функции Коши функция $\int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s)\, w_0(s)\, ds$ непрерывна по t и $\int\limits_0^0 \mathcal{C}(0,s)\, w_0(s)\, ds = 0$. Тогда на отрезке $[0,\tau]$ выполнено

$$w_0(t) \leq v_0(t) = (Fx_0)(t) = \big(F(\alpha X(\cdot) - 1)\big)(t) \leq$$
$$\leq F\Big(\alpha X(\cdot) + \int\limits_0^{(\cdot)} \mathcal{C}(\cdot,s)\, w_0(s)\, ds\Big)(t).$$

При $t \in [0,\tau]$ уравнение (2.1.10) запишем в виде операторного уравнения

$$z_\tau = P^\tau \Psi \Pi^\tau z_\tau. \tag{2.1.11}$$

Для функций $w_{0\tau} = P^\tau w_0$ и $(\mathcal{L}u_0)_\tau = P^\tau \mathcal{L} u_0$ выполнены неравенства

$$w_{0\tau} \leq (\mathcal{L}u_0)_\tau, \;\; w_{0\tau} \leq P^\tau \Psi \Pi^\tau w_{0\tau}, \;\; (\mathcal{L}u_0)_\tau \geq P^\tau \Psi \Pi^\tau (\mathcal{L}u_0)_\tau.$$

Таким образом, монотонный оператор $P^\tau \Psi \Pi^\tau : L([0,\tau],\mathbb{R}) \to L([0,\tau],\mathbb{R})$ отображает в себя ограниченное по конусу множество

$$[w_{0\tau}, (\mathcal{L}u_0)_\tau]_{L([0,\tau],\mathbb{R})} = \{z \in L([0,\tau],\mathbb{R}) : \, w_{0\tau} \leq z \leq (\mathcal{L}u_0)_\tau\}.$$

Так как конус $L_+ \subset L$ является вполне правильным, то монотонный оператор $P^\tau \Psi \Pi^\tau$ обладает свойством предельной монотонной компактности (см. [40], с. 307, 308), и согласно теореме 38.2 из [40] существует решение $\tilde{z}_\tau \in L([0,\tau],\mathbb{R})$ уравнения (2.1.11), удовлетворяющее неравенствам

$$w_{0\tau} \le \tilde{z}_\tau \le (\mathcal{L}u_0)_\tau.$$

Это значит, что существует локальное решение $\tilde{x}_\tau$ задачи (2.1.2), (2.1.3), для которого при п.в $t \in [0,\tau]$ выполнено $(\mathcal{L}\Pi^\tau \tilde{x}_\tau)_\tau(t) \le (\mathcal{L}u_0)_\tau(t)$.

Теперь докажем, что любое локальное решение $\tilde{x}_\nu : [0,\nu] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее неравенству $(\mathcal{L}\Pi^\nu \tilde{x}_\nu)_\nu(t) \le (\mathcal{L}u_0)_\nu(t)$, $t \in [0,\nu]$, можно продолжить на некоторый больший отрезок.

Определим $\tilde{z}_\nu = (\mathcal{L}\Pi^\nu \tilde{x}_\nu)_\nu$, эта функция является локальным решением уравнения (2.1.10). Определим функции

$$\tilde{x}_0 \in \widetilde{AC}([0,T],\mathbb{R}), \quad \tilde{x}_0(t) = \begin{cases} \alpha X(t) + \int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s)\tilde{z}_\nu(s)ds, & t \in [0,\nu], \\ \alpha X(t) + \int\limits_0^\nu \mathcal{C}(t,s)\tilde{z}_\nu(s)ds - 1, & t \in (\nu,T], \end{cases}$$

$$\tilde{v}_0 \in L([0,T],\mathbb{R}), \quad \tilde{v}_0(t) = (\widetilde{F}\tilde{x}_0)(t), \quad t \in [0,T].$$

Имеем $\tilde{v}_0(t) = \tilde{z}_\nu(t)$ на $[0,\nu]$. Далее определим функции

$$\vartheta(t) = \begin{cases} \tilde{z}_\nu(t), & t \in [0,\nu], \\ (\mathcal{L}u_0)(t), & t \in (\nu,T], \end{cases} \quad \tilde{w}_0(t) = \min\{\tilde{v}_0(t), \vartheta(t)\}, \quad t \in [0,T].$$

Найдем $\Delta_0 > 0$ так, чтобы $\int\limits_\nu^t \mathcal{C}(t,s)\tilde{w}_0(s)ds \ge -1$ при $t \in [\nu, \nu + \Delta_0]$. Это возможно, так как функция $\int\limits_\nu^t \mathcal{C}(t,s)\tilde{w}_0(s)ds$ непрерывна но t и $\int\limits_\nu^\nu \mathcal{C}(t,s)\tilde{w}_0(s) = 0$. Тогда на отрезке $[0,\nu]$ выполнено $\tilde{w}_0(t) = \tilde{z}_\nu(t) = \tilde{x}_0(t)$, а на $(\nu, \nu + \Delta_0]$ имеем

$$\tilde{x}_0(t) = \alpha X(t) + \int\limits_0^{\nu} \mathcal{C}(t,s)\tilde{z}_\nu(s)ds - 1 \le \alpha X(t) + \int\limits_0^{\nu} \mathcal{C}(t,s)\tilde{z}_\nu(s)ds +$$

$$+ \int\limits_{\nu}^{t} \mathcal{C}(t,s)\tilde{w}_0(s)ds \le \alpha X(t) + \int\limits_0^{t} \mathcal{C}(t,s)\tilde{w}_0(s)ds.$$

Следовательно

$$\tilde{w}_0(t) \le \tilde{v}_0(t) = (\widetilde{F}\tilde{x}_0)(t) \le F\Big(\alpha X(\cdot) + \int\limits_0^{(\cdot)} \mathcal{C}(\cdot,s)\tilde{w}_0(s)ds\Big)(t).$$

Определим

$$\tilde{x}^0(t) = \begin{cases} \alpha X(t) + \int\limits_0^{t} \mathcal{C}(t,s)\tilde{z}_\nu(s)ds, & t \in [0,\nu], \\ \alpha X(t) + \int\limits_0^{\nu} \mathcal{C}(t,s)\tilde{z}_\nu(s)ds + 1, & t \in (\nu, T]. \end{cases}$$

Для этой функции справедливо неравенство $\tilde{x}^0(t) \ge \tilde{x}_0(t)$ при всех $t \in [0,T]$. Положим $\tilde{v}^0(t) = \big(\widetilde{F}\tilde{x}^0\big)(t), t \in [0,T]$. Очевидно, $\tilde{v}^0(t) = \tilde{z}_\nu(t)$ на $[0,\nu]$, и $\tilde{v}^0(t) \ge \tilde{v}_0(t)$ на всем отрезке $[0,T]$. Далее, определим функцию $\tilde{w}^0(t) = \max\{\tilde{v}^0(t), \vartheta(t)\}$, $t \in [0,T]$. Имеем $\tilde{w}^0(t) \ge \tilde{w}_0(t)$, $t \in [0,T]$.

Так как функция $\int\limits_{\nu}^{t} \mathcal{C}(t,s)\tilde{w}^0(s)ds$ непрерывна по t и $\int\limits_{\nu}^{\nu} \mathcal{C}(t,s)\tilde{w}^0(s)ds = 0$, то существует $\Delta^0 > 0$, для которого $\int\limits_{\nu}^{t} \mathcal{C}(t,s)\tilde{w}^0(s)ds \le 1$ при всех $t \in [\nu, \nu + \Delta^0]$. Тогда на отрезке $[0,\nu]$ выполнено $\tilde{w}^0(t) = \tilde{z}_\nu(t)$, а не интервале $[\nu, \nu + \Delta^0]$ справедливы соотношения

$$\tilde{x}^0(t) = \alpha X(t) + \int\limits_0^{\nu} \mathcal{C}(t,s)\tilde{z}_\nu(s)ds + 1 \ge \alpha X(t) + \int\limits_0^{\nu} \mathcal{C}(t,s)\tilde{z}_\nu(s)ds +$$

$$+ \int\limits_{\nu}^{t} \mathcal{C}(t,s)\tilde{w}^0(s)ds = \alpha X(t) + \int\limits_0^{t} \mathcal{C}(t,s)\tilde{w}^0(s)ds.$$

Следовательно

$$\tilde{w}^0(t) \geq \tilde{v}^0(t) = (\widetilde{F}\tilde{x}^0)(t) \geq F\Big(\alpha X(\cdot) + \int\limits_0^{(\cdot)} \mathcal{C}(\cdot,s)\tilde{w}^0(s)ds\Big)(t).$$

Пусть $\Delta = \min\{\Delta_0, \Delta^0\}$. При п.в $t \in [0, \nu+\Delta]$ выполнены неравенства

$$\tilde{w}(t) \leq (\Psi\tilde{w}_0)(t), \quad \tilde{w}^0(t) \geq (\Psi w^0)(t), \quad \tilde{w}_0(t) \leq \tilde{w}^0(t).$$

Таким образом монотонный оператор $P^{\nu+\Delta}\Psi\Pi^{\nu+\Delta} : L([0,\nu+\Delta],\mathbb{R}) \to L([0,\nu+\Delta],\mathbb{R})$ отображает в себя ограниченное по конусу множество

$$[\tilde{w}_{0\,\nu+\Delta},\, \tilde{w}^0_{\nu+\Delta}]_{L([0,\nu+\Delta],\mathbb{R})} = \{z \in L([0,\nu+\Delta],\mathbb{R}) : \tilde{w}_{0\,\nu+\Delta} \leq z \leq \tilde{w}^0_{\nu+\Delta}\}.$$

Согласно теореме 38.2 из [40] существует решение $\tilde{z}_{\nu+\Delta} \in L([0,\nu+\Delta],\mathbb{R})$ уравнения $\tilde{z}_{\nu+\Delta} = P^{\nu+\Delta}\Psi\Pi^{\nu+\Delta}z_{\nu+\Delta}$, удовлетворяющее неравенствам $\tilde{w}_0(t) \leq \tilde{z}_{\nu+\Delta}(t) \leq \tilde{w}^0(t)$, $t \in [0,\nu+\Delta]$. Так как $\tilde{w}_0(t) = \tilde{w}^0(t) = \tilde{z}_\nu(t)$, $t \in [0,\nu]$, то $\tilde{z}_{\nu+\Delta}(t) = \tilde{z}_\nu(t)$, $t \in [0,\nu]$, то есть $\tilde{z}_{\nu+\Delta}$ это продолжение решения $\tilde{z}_\nu$.

Итак, показано, что произвольное локальное решение $\tilde{x}_\nu$ задачи (2.1.2), (2.1.3) продолжаемо на некоторый больший отрезок $[0,\nu+\Delta]$, причем существует продолжение $x_{\nu+\Delta}$ этого решения, удовлетворяющее оценке

$$(\mathcal{L}\Pi^{\nu+\Delta}x_{\nu+\Delta})(t) \leq (\mathcal{L}u_0)(t), \quad t \in [0,\nu+\Delta].$$

Определим на множестве Ξ всех локальных решений x_ν задачи (2.1.2), (2.1.3), удовлетворяющих неравенству $(\mathcal{L}\Pi^\nu x_\nu)(t) \leq (\mathcal{L}u_0)(t)$, $t \in [0,\nu]$, порядок

$$x_\nu \leq x_\eta \;\Leftrightarrow\; \nu \leq \eta, \;\; \forall t \in [0,\nu] \;\; x_\nu(t) = x_\eta(t).$$

Относительно этого порядка согласно теореме Хаусдорфа [37, с. 40] существует максимальная цепь $S \subset \Xi$, содержащая произвольное заданное локальное решение x_ν. Каждому $x_\eta \in S$ сопоставим число $\eta \in [0,T]$ и найдем $\bar\eta = \sup\{\eta :\ x_\eta \in S\}$. Определим функцию $\tilde x_{\bar\eta} : [0,\bar\eta) \to \mathbb{R},\ x_{\bar\eta}(t) = x_\eta(t),$ где $\eta = \frac{t+\bar\eta}{2}$. С увеличением $\eta \in (0,\bar\eta)$ значение $\|x_\eta\|_{AC([0,\eta],\mathbb{R})}$ не убывает. Если $\lim\limits_{\eta\to\bar\eta-0} \|x_\eta\|_{AC([0,\eta],\mathbb{R})} = \infty$ то $\tilde x_{\bar\eta}$ — предельно продолженное решение.

Пусть $\lim\limits_{\eta\to\bar\eta-0} \|x_\eta\|_{AC([0,\eta],\mathbb{R})} = r_0 < \infty$, т.е. выполнено $|x_\eta(0)| + \int\limits_0^\eta |\dot x_\eta(s)|ds \to r_0$ при $\eta \to \bar\eta - 0$. Тогда $|\tilde x_{\bar\eta}(0)| + \int\limits_0^{\bar\eta} |\dot{\tilde x}_{\bar\eta}(s)|ds = r_0$ (это следует из теоремы Леви [15], с. 202, примененной к функциям, равным $x_\eta(t)$ при $t \in [0,\eta]$, и нулю на $(\eta,\bar\eta]$). Таким образом функцию $\tilde x_{\bar\eta}$ можно произвольно доопределить в одной точке $t = \bar\eta$, и мы получим локальное решение, определенное на отрезке $[0,\bar\eta]$. В случае $\bar\eta < T$ это локальное решение, согласно доказанному выше, можно продолжить на больший отрезок $[0,\bar\eta+\Delta]$, что противоречит определению числа $\bar\eta$. Таким образом, $\bar\eta = T$, т.е. получено глобальное решение.

Итак, доказано существование глобального или предельно продолженного решения задачи Коши (2.1.2), (2.1.3), удовлетворяющего на своей области определения неравенству $(\mathcal{L}\tilde x)(t) \le (\mathcal{L}u_0)(t)$. Так как имеет место равенства

$$\tilde x(t) = \alpha X(t) + \int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s)\,(\mathcal{L}\tilde x)(s)\,ds, \quad u_0(t) = u_0(0)X(t) +$$

$$+ \int\limits_0^t \mathcal{C}(t,s)\,(\mathcal{L}\tilde{u_0})(s)\,ds,$$

в которых $\mathcal{C}(t,s) \ge 0,\ X(t) = \mathcal{C}(t,0) \ge 0,$ то $\tilde x(t) \le u_0(t)$. $\square$

З а м е ч а н и е 2.1.2. В доказанном утверждении (в отличие от теорем 2.1.1,2.1.2) не требуется, чтобы отображение F (и тем более, его продолжение $\widetilde F$) было непрерывным.

2.1.3. Задача Коши для конкретных нелинейных уравнений.

Теоремы 2.1.1–2.1.4 позволяют получить для конкретных нелинейных функционально-дифференциальных уравнений в терминах входящих в них функций условия существования, единственности решений и их оценки. Для применения теорем 2.1.1, 2.1.2 к конкретным уравнениям необходимы оценки функции Коши $\mathcal{C}(t,s)$ линейной части этих уравнений (т. е. требуется знать значение c_0, при котором для всех t,s справедливо неравенство $|\mathcal{C}(t,s)| \leq c_0$). С этой целью могут быть использованы результаты главы 1. Чтобы получить оценки решений с помощью теоремы 2.1.4 требуется неотрицательность функции Коши. Условия неотрицательности этой функции для некоторых линейных уравнений также приведены в главе 1.

2.1.3a. Условия существования и единственности решений. Вначале получим значение c_0 для рассмотренных в главе 1 линейных операторов вида:

$$(\mathcal{L}x)(t) \doteq \dot{x}(t) - p(S^0x)(t),\ \ (S^0x)(t) \doteq \begin{cases} x(t-1), & t \in [1,T], \\ 0, & t \in [0,1); \end{cases} \quad \text{где } p \in \mathbb{R}, \tag{2.1.12}$$

$$(\mathcal{L}x)(t) \doteq \dot{x}(t) - px(t/2), \quad t \in [0,T], \ \text{ где } p \in \mathbb{R}; \tag{2.1.13}$$

$$(\mathcal{L}x)(t) \doteq \dot{x}(t) - p\dot{x}(t/2), \quad t \in [0,T], \ \text{ где } p \in (-1/2,\, 1/2). \tag{2.1.14}$$

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть k — такое целое число, что $T \in (k-1,k]$. В случае* (2.1.12) *для функции Коши выполнено*

$$|\mathcal{C}(t,s)| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k-i)^i}{i!}|p|^i, \tag{2.1.15}$$

то есть $c_0 = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \frac{(k-i)^i}{i!}|p|^i$.

Доказательство. Воспользуемся формулой (1.2.3) для функции Коши. Имеем $\mathcal{C}(t,s)=1$ при $s\in[t-1,t)$. При $s\in[t-2,t-1)$ выполнено

$$|\mathcal{C}(t,s)|\le 1+|p|(t-s-1)\le 1+|p|.$$

Далее, при $s\in[t-3,t-2)$ получим неравенство

$$|\mathcal{C}(t,s)|\le 1+|p|\frac{(t-s-1)}{1!}+p^2\frac{(t-s-2)^2}{2!}\le 1+2\frac{|p|}{1!}+\frac{p^2}{2!}.$$

На каждом следующем множестве $s\in[t-j-1,t-j)$ получим аналогичные неравенства, а именно

$$|\mathcal{C}(t,s)|\le 1+|p|\frac{(t-s-1)}{1!}+p^2\frac{(t-s-2)^2}{2!}+\ldots+p^j\frac{(t-s-j)^j}{j!}\le$$
$$\le 1+|p|\frac{j}{1!}+p^2\frac{(j-1)^2}{2!}+\ldots+|p|^j\frac{1^j}{j!}.$$

Так как выражения в правой части неравенства увеличиваются с возрастанием j, то при всех (t,s) получаем оценку (2.1.15).

Предложение 2. *В случае* (2.1.13) *для функции Коши при всех* $t\in[0,T]$, $s\in[0,t]$ *выполнено неравенство*

$$|\mathcal{C}(t,s)|\le e^{|p|T}, \tag{2.1.16}$$

то есть $c_0=e^{|p|T}$.

Доказательство. Воспользуемся формулой (1.3.4) для функции Коши. Имеем $\mathcal{C}(t,s)=1$ при $s\in[t/2,t)$. При $s\in[t/4,t/2)$ выполнено

$$|\mathcal{C}(t,s)|\le 1+|p|(t-2s)\le 1+|p|\Big(t-\frac{t}{2}\Big)=1+|p|\frac{t}{2}\le 1+|p|\frac{T}{2}.$$

Далее, при $s\in[t/8,t/4)$ получим неравенство

$$|\mathcal{C}(t,s)|\le 1+|p|(t-2s)+p^2\frac{2}{2!}\Big(\frac{t}{2}-2s\Big)^2\le 1+|p|\frac{3t}{4}+\frac{2}{2!}p^2\Big(\frac{t}{4}\Big)^2\le$$
$$\le 1+|p|\frac{3T}{4}+\frac{2}{2!}p^2\Big(\frac{T}{4}\Big)^2.$$

На каждом следующем множестве $s \in [t/2^n, t/2^{n-1})$ получим аналогичные неравенства, а именно

$$|\mathcal{C}(t,s)| = |\sum_{j=0}^{n} p^j \frac{2^{j(j-1)/2}}{j!}\Big(\frac{t}{2^{j-1}} - 2s\Big)^j| \le \sum_{j=0}^{n} |p|^j \frac{2^{j(j-1)/2}}{j!}\Big(\frac{t}{2^{j-1}} - \frac{t}{2^{n-1}}\Big)^j \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{n} |p|^j 2^{j(j-1)/2} \frac{T^j}{j!}\Big(\frac{1}{2^{j-1}} - \frac{1}{2^{n-1}}\Big)^j \le \sum_{j=0}^{n} |p|^j \ \frac{T^j}{j!} \ \frac{2^{j(j-1)/2}}{2^{j(j-1)}} \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{n} |p|^j \frac{T^j}{j!} \le e^{|p|T}.$$

Предложение 2 доказано.

П р е д л о ж е н и е 3. *В случае* (2.1.14) *функция Коши при всех* $t \in [0,T]$, $s \in [0,t]$ *удовлетворяем неравенству*

$$|\mathcal{C}(t,s)| \le \frac{1}{1-2|p|}, \tag{2.1.17}$$

то есть $c_0 = \dfrac{1}{1-2|p|}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При любом натуральном n, при всех $s \in [t/2^n, t/2^{n-1})$ согласно формуле (1.4.6) для функции Коши выполнено

$$|\mathcal{C}(t,s)| = |\sum_{i=0}^{n-1} \Big(2p\Big)^i| \le \sum_{i=0}^{n-1} \Big(2|p|\Big)^i.$$

Это сумма членов геометрической профессии со знаменателем $2|p| < 1$, следовательно, при всех при всех $t \in [0,T]$, $s \in [0,t]$ имеем

$$|\mathcal{C}(t,s)| \le \frac{1}{1-2|p|}.$$

Теперь применим теоремы 2.1.1, 2.1.2 и исследованию задачи Коши с условием (2.1.3) для функционально-дифференциального уравнения (2.1.2) в ситуации, когда линейное отображение $\mathcal{L}$ задано одним из равенств

(2.1.12), (2.1.13), (2.1.14), а правая часть есть оператор $F : AC([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$ определенный соотношениями

$$(Fx)(t) = f\big(t, x(t), (S_h x)(t)\big), \quad t \in [0,T], \tag{2.1.18}$$

$$\text{где } (S_h x)(t) = \begin{cases} x(h(t)), & h(t) \in [0,T], \\ \theta(h(t)) & h(t) \notin [0,T]. \end{cases}$$

Здесь функция $f : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям Каратеодори (измерима по первому аргументу и непрерывна по второму и третьему аргументам) и удовлетворяет условию интегральной ограниченности:

$$\forall r > 0 \ \ \exists m_r \in L([0,T],\mathbb{R}) \ \ \forall x_1, x_2 \in [-r,r] \ \ |f(t,x_1,x_2)| \leq m_r(t); \tag{2.1.19}$$

функция $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ измерима и $h(t) \leq t$ при почти всех $t \in [0,T]$; функция $\theta : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ измерима по Борелю. Для $\tau > 0$ определим очевидно измеримое множество $E_\tau = \{t : [0,T] : \, h(t) \geq t - \tau\}$.

Отметим, что заданный формулой (2.1.18) оператор $F : AC([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$ допускает продолжение до оператора $\widetilde{F} : C([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$, и это продолжение определяется тем же соотношением (2.1.18).

Будем говорить, что функция $f : [0,\tau] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $(\mathbf{U})$, *если для любых* $\varsigma \in [0,T)$, $r > 0$ *существуют такое число* $\bar{\tau} \doteq \bar{\tau}_{\varsigma,r} \in (0, T-\varsigma]$ *и такая измеримая суммируемая функция* $\eta \doteq \eta_{\varsigma,r} : [\varsigma, \varsigma+\bar{\tau}] \to \mathbb{R}$, *что*

$$\forall x_1, \tilde{x}_1, x_2 \in [-r,r] \ \ |f(t,x_1,x_2) - f(t,\tilde{x}_1,x_2)| \leq \eta_{\varsigma,r}(t)|x_1 - \tilde{x}_1|, \ \ t \in [\varsigma, \varsigma+\bar{\tau}],$$

$$\forall x_1, x_2, \tilde{x}_2 \in [-r,r] \ \ |f(t,x_1,x_2) - f(t,x_1,\tilde{x}_2)| \leq \eta_{\varsigma,r}(t)|x_2 - \tilde{x}_2|, \quad t \in E_{\bar{\tau}} \cap [\varsigma, \varsigma+\bar{\tau}].$$

Если в приведенных соотношениях *значения* $\bar\tau > 0$ *и* $\eta \in L([\varsigma,\varsigma+\bar\tau],\mathbb{R})$ *не зависят от* $\varsigma \in [0,T)$ *и* $r > 0$, то будем говорить, что функция $f : [0,\tau]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условию $(\mathbf{U}_0)$.

П р е д л о ж е н и е 4. *Если функция* $f:[0,\tau]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *удовлетворяет условию* $(\mathbf{U})$, *то оператор* $\widetilde{F}: C([0,T],\mathbb{R})\to L([0,T],\mathbb{R})$, *определяемый равенством (2.1.18), является вольтеррово* q*-липшицевым. А если для* f *справедливо предположение* $(\mathbf{U}_0)$, *то оператор* $\widetilde{F} : C([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$ *является равномерно вольтеррово* q*-липшицевым.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зададим любое $q > 0$. Для произвольных $\varsigma \in [0,T)$, $r>0$ определим $\tau \in (0,\bar\tau_{\varsigma,r}]$ так, чтобы выполнялось неравенство $2\int\limits_{\varsigma}^{\varsigma+\tau}\eta_{\varsigma,r}(t)dt \le q$ (это возможно вследствие равномерной непрерывности интеграла как функции пределов интегрирования). Покажем, что справедливо соотношение (2.1.7). Пусть заданы $u,\widetilde{u}\in C([0,T],\mathbb{R})$ такие, что $u(t)=\widetilde{u}(t)$ при $t\in[0,\varsigma]$. Имеем

$$\int\limits_{\varsigma}^{\varsigma+\tau}|f(t,u(t),(S_hu)(t))-f(t,\widetilde{u}(t),(S_h\widetilde{u})(t))|dt \le$$

$$\le \int\limits_{\varsigma}^{\varsigma+\tau}|f(t,u(t),(S_hu)(t)-f(t,u(t),(S_h\widetilde{u})(t)|dt+$$

$$+\int\limits_{\varsigma}^{\varsigma+\tau}|f(t,u(t),(S_h\widetilde{u})(t)-f(t,\widetilde{u}(t),(S_h\widetilde{u})(t)|dt. \quad (2.1.20)$$

В подынтегральных функциях аргумент t пробегает значения из отрезка $[\varsigma,\varsigma+\tau]$. Если $t\notin E_{\bar\tau}$, то $h(t) < t-\bar\tau \le t-\tau \le \xi$. В этом случае $(S_hu)(t)=(S_h\widetilde{u})(t)$, то есть первое слагаемое в полученной оценке (2.1.20) равно нулю. Если $t\in E_{\bar\tau}$, то это первое слагаемое оценивается неравенством

$$\int\limits_{\varsigma}^{\varsigma+\tau} |f(t,u(t),(S_h u)(t)) - f(t,u(t),(S_h\widetilde{u})(t))|dt \leq \int\limits_{\varsigma}^{\varsigma+\tau} \eta_{\varsigma,r}(t)|u(t)-\widetilde{u}(t)|dt \leq$$
$$\leq \frac{q}{2} \max_{t\in[\varsigma,\varsigma+\tau]} |u(t)-\tilde{u}(t)|.$$

Для второго слагаемого имеем

$$\int\limits_{\varsigma}^{\varsigma+\tau} |f(t,u(t),(S_h\widetilde{u})(t) - f(t,\widetilde{u}(t),(S_h\widetilde{u})(t)|dt \leq \int\limits_{\varsigma}^{\varsigma+\tau} \eta_{\varsigma,r}(t)|u(t)-\widetilde{u}(t))|dt \leq$$
$$\leq \int\limits_{\varsigma}^{\varsigma+\tau} \eta_{\varsigma,r}(t)dt \max_{t\in[\varsigma,\varsigma+\tau]} |u(t)-\tilde{u}(t)| \leq \frac{q}{2} \max_{t\in[\varsigma,\varsigma+\tau]} |u(t)-\tilde{u}(t)|.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\varsigma}^{\varsigma+\tau} |f(t,u(t),(S_h u)(t) - f(t,\widetilde{u}(t),(S_h\widetilde{u})(t)|dt \leq q \max_{t\in[\varsigma,\varsigma+\tau]} |u(t)-\tilde{u}(t)|,$$

и соотношение (2.1.7) выполнено.

Непосредственно из определения 2.1.2 следует, что если $\bar{\tau}$ и η не зависят от выбора ς и r, то оператор $\widetilde{F}$ будет равномерно вольтеррово q-липшицевым.

Предложение 4 доказано.

Используя доказанные предложения 1–4, из теорем 2.1.1, 2.1.2 получаем условия однозначной разрешимости задачи Коши для дифференциального уравнения с запаздыванием.

Следствие 2.1.1. *Пусть функция $f : [0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условию* $(\mathbf{U})$, *тогда функционально-дифференциального уравнение (2.1.2), в котором оператор $\mathcal{L}$ определен любым из* *соотношений (2.1.12), (2.1.13), (2.1.14), а F — соотношением (2.1.18), с начальным условием (2.1.3) при каждом $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет единственное глобальное или предельно продолженное решение, и всякое локальное решение является его частью.*

Доказательство. Согласно предложениям 1, 2, 3 функция Коши линейной части данного функционально-дифференциального уравнения ограничена, а оператор $\widetilde{F}$, согласно предложению 4, вольтеррово q-липшицев с любой константой $q > 0$. Таким образом, данное утверждение прямо следует из теоремы 2.1.1.

Следствие 2.1.2. *Пусть функция $f : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $(\mathbf{U}_0)$, тогда функционально-дифференциального уравнение (2.1.2), в котором оператор $\mathcal{L}$ определен любым из соотношений (2.1.12), (2.1.13), (2.1.14), а оператор F — соотношением (2.1.18), с начальным условием (2.1.3) при каждом $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет единственное глобальное решение, и всякое локальное решение является его частью.*

Доказательство прямо следует из теоремы 2.1.2, так как согласно предложениям 1, 2, 3 функция Коши линейной части данного функционально-дифференциального уравнения ограничена, а оператор $\widetilde{F}$, согласно предложению 4, равномерно вольтеррово q-липшицев с любой константой $q > 0$.

Теперь из теоремы 2.1.3 выведем условия разрешимости (не гарантирующие единственность решения) задачи Коши для дифференциального уравнения с запаздыванием.

Следствие 2.1.3. *Если для функции $f : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выполнено только условие интегральной ограниченности (2.1.19), то функционально-дифференциальное уравнение (2.1.2), в котором оператор*

$\mathcal{L}$ определен любым из соотношений (2.1.12), (2.1.13), (2.1.14), а F — соотношением (2.1.18), с начальным условием (2.1.3) при каждом $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет глобальное или предельно продолженное решение и всякое локальное решение является его частью.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия (2.1.19), следует

$$|(\widetilde{F}x)(t)| = |f\big(t, x(t), (S_h x)(t)\big)| \leq m_r(t),\ t \in [0, r]$$

при любых $x \in C([0,T], \mathbb{R})$ таких, что $\|x\|_C \leq r$. Поэтому, в силу теоремы 2.1.3, задача Коши при каждом $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет глобальное или предельно продолженное решение и всякое локальное решение является его частью.

2.1.3b. Оценки решений. Здесь нам потребуются условия неотрицательности функции Коши линейной части рассматриваемых нелинейных функционально-дифференциальных уравнений. Напомним, что для линейных уравнений с операторами (2.1.12), (2.1.13), (2.1.14) такие условия получены в главе 1. Приведем их.

1) Для линейного уравнения с оператором (2.1.12) неравенство $\mathcal{C}(t,s) \geq 0$ выполнено при всех t, s в случае, если $p > z_T^n$, где z_T^n — наибольший действительный корень многочлена, определяемого формулой (1.2.5).

2) Для линейного уравнения с оператором (2.1.13) неравенство $\mathcal{C}(t,s) \geq 0$ справедливо при всех $t, s,$ если $pT \geq -1$.

3) Для линейного уравнения с оператором (2.1.14) неравенство $\mathcal{C}(t,s) \geq 0$ выполнено при всех $t, s,$ если $|p| < \frac{1}{2}$.

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение (2.1.2) в ситуации, когда линейное отображение $\mathcal{L} : AC([0,T], \mathbb{R}) \to AC([0,T], \mathbb{R})$ задано одним из соотношений (2.1.12), (2.1.13), (2.1.14), а правая часть — оператор $F : AC([0,T], \mathbb{R}) \to AC([0,T], \mathbb{R})$ — соотношением (2.1.18). В этом соотношении нам теперь на требуется, чтобы функция $f : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяла условиям Каратеодори. Будем предполагать, что f измерима по первому аргументу и непрерывная справа по второму и по третьему аргументам. Этих условий достаточно для действия соответствующего оператора Немыцкого в пространстве измеримых функций (см. [57, с. 476–478]). Как и выше, будем также полагать выполненными условия измеримости функции $h : [0,T] \to \mathbb{R}$, измеримости по Борелю функции $\theta : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, условие (2.1.19) интегральной ограниченности, а также справедливость неравенства $h(t) \le t,\ t \in [0,T]$.

Отметим, что оператор $F : AC([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$, заданный формулой (2.1.18), является монотонным, если функция f не убывает по второму и по третьему аргументам.

Учитывая приведенные результаты, непосредственно из теоремы 2.1.4 получаем условия существования и оценки решений некоторых конкретных частных случаев функционально-дифференциального уравнения (2.1.2).

Вначале рассмотрим уравнение:

$$\dot{x}(t) - px(t-1) = f\big(t, x(t), (S_h x)(t)\big), \quad t \in [0,T], \tag{2.1.21}$$

$$\text{где } (S_h x)(t) = \begin{cases} x(h(t)), & h(t) \in [0,T], \\ \theta(h(t)) & h(t) \notin [0,T]. \end{cases}$$

Следствие 2.1.4. *Пусть для коэффициента p выполнено неравенство $p > z_T^n$, где z_T^n — наибольший действительный корень многочлена, определяемого формулой (1.2.5). Далее, пусть функция $f : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не убывает по второму и по третьему аргументам. Тогда, если для некоторой абсолютно непрерывной функции $u_0 : [0,T] \to \mathbb{R}$ справедливы неравенства*

$$\dot{u}_0(t) - pu_0(t-1) \ge f\big(t, u_0(t), (S_h u_0)(t)\big), \quad u_0(0) \ge \alpha,$$

то существует глобальное или предельно продолженное решение $\tilde{x}$ *уравнения (2.1.21) с начальным условием* $x(0) = \alpha$, *удовлетворяющее на своей области определения неравенствам*

$$\dot{\tilde{x}}(t) - p\tilde{x}(t-1) \le \dot{u}_0(t) - pu_0(t-1), \quad \tilde{x}(t) \le u_0(t).$$

Теперь рассмотрим уравнение:

$$\dot{x}(t) - px(t/2) = f\big(t, x(t), (S_h x)(t)\big), \quad t \in [0, T], \tag{2.1.22}$$

Следствие 2.1.5. *Пусть* $pT \ge -1$, *функция* $f : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *не убывает по второму и по третьему аргументам. Тогда, если для некоторой абсолютно непрерывной функции* $u_0 : [0,T] \to \mathbb{R}$ *справедливы неравенства*

$$\dot{u}_0(t) - pu_0(t/2) \ge f\big(t, u_0(t), (S_h u_0)(t)\big), \quad u_0(0) \ge \alpha,$$

то существует глобальное или предельно продолженное решение $\tilde{x}$ *уравнения (2.1.22) с начальным условием* $x(0) = \alpha$, *удовлетворяющее на своей области определения неравенствам*

$$\dot{\tilde{x}}(t) - p\tilde{x}(t/2) \le \dot{u}_0(t) - pu_0(t/2), \quad \tilde{x}(t) \le u_0(t).$$

Заключим параграф рассмотрением функционально-дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) - p\dot{x}(t/2) = f\big(t, x(t), (S_h x)(t)\big), \quad t \in [0, T]. \tag{2.1.23}$$

Следствие 2.1.6. *Пусть* $|p| < \frac{1}{2}$, *функция* $f : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *не убывает по второму и по третьему аргументам. Тогда, если для некоторой абсолютно непрерывной функции* $u_0 : [0,T] \to \mathbb{R}$ *справедливы неравенства*

$$\dot{u}_0(t) - p\dot{u}_0(t/2) \ge f\big(t, u_0(t), (S_h u_0)(t)\big), \quad u_0(0) \ge \alpha,$$

то существует глобальное или предельно продолженное решение $\tilde{x}$ *уравнения (2.1.22) с начальным условием* $x(0) = \alpha$, *удовлетворяющее на своей области определения неравенствам*

$$\dot{\tilde{x}}(t) - p\dot{\tilde{x}}(t/2) \leq \dot{u}_0(t) - p\dot{u}_0(t/2), \quad \tilde{x}(t) \leq u_0(t).$$

§ 2.2. Краевая задача для нелинейного уравнения

2.2.1. Эквивалентное интегральное уравнение.

Пусть заданы: линейный оператор $\mathcal{L} : AC([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$, линейный функционал $l : AC([0,T],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, (вообще говоря, нелинейный) оператор $F : AC([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$ и число $\alpha \in \mathbb{R}$. Здесь рассматривается квазилинейная краевая зада вида

$$\mathcal{L}x = Fx, \tag{2.2.1}$$

$$lx = \alpha. \tag{2.2.2}$$

Отметим, что в отличие от предыдущего параграфа, в котором исследовалась задача Коши, здесь мы не предполагаем вольтерровость операторов $\mathcal{L}, F$.

В рассмотренных в главе 1 линейных краевых задачах функционал l был определен соотношением $lx = Ax(0) + Bx(T)$. Конечно, могут быть заданы и другие, отличные от (2.1.3) краевые условия; важно, что произвольный ограниченный линейный функционал $l : AC([0,T],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ представим в виде $lx = Ax(0) + \int_0^T \Lambda(s)\dot{x}(s)\,ds$, где измеримая функция $\Lambda : [0,t] \to \mathbb{R}$ существенно ограничена.

Для редукции задачи (2.2.1), (2.2.2) к операторному уравнению выберем произвольную функцию $f \in L([0,T],\mathbb{R})$ и рассмотрим краевую задачу для соответствующего линейного уравнения

$$\mathcal{L}x = f, \quad lx = \alpha. \tag{2.2.3}$$

В случае однозначной разрешимости задачи (2.2.3) ее решение представимо в виде (подробнее см. [2, глава 3])

$$x(t) = \alpha X(t) + \int\limits_0^T \mathcal{G}(t,s)\, f(s)\,ds, \tag{2.2.4}$$

где $X(\cdot) \in AC([0,T],\mathbb{R})$ — фундаментальное решение однородного уравнения $\mathcal{L}x = 0$, $\mathcal{G}(t,s)$ — функция Грина, а выражение $\int\limits_0^T \mathcal{G}(t,s)\, f(s)\, ds$ определяет линейный ограниченный оператор $\mathrm{G} : L([0,T],\mathbb{R}) \to AC([0,T],\mathbb{R})$, называемый оператором Грина.

В силу ограниченности оператора вложения

$$\mathcal{I} : AC([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R}), \quad \mathcal{I}x = x,$$

(его норма $\|\mathcal{I}\|_{AC\to C} = 1$) оператор Грина является ограниченным, и как действующий из $L([0,T],\mathbb{R})$ в $C([0,T],\mathbb{R})$. Для некоторых конкретных краевых задач в главе 1 найдены функция Грина и фундаментальное решение. Свойства функции Грина общей линейной краевой задачи рассмотрены в [2, глава 3]. Для нас важно, что функция Грина измерима (по плоской мере) и существенно ограничена.

Везде далее предполагается, что задача (2.2.3) однозначно разрешима.

Соотношение (2.2.4) позволяет записать задачу (2.2.1), (2.2.2) в виде любого из следующих интегральных уравнений

$$x(t) = \alpha X(t) + \int\limits_0^T \mathcal{G}(t,s)\,(Fx)(s)\, ds, \quad t \in [0,T]. \tag{2.2.5}$$

$$(\mathcal{L}x)(t) = \Big(F\big(\alpha X + \int\limits_0^T \mathcal{G}(\cdot,s)\,(\mathcal{L}x)(s)\, ds\big)\Big)(t), \quad t \in [0,T]. \tag{2.2.6}$$

Для исследования уравнений (2.2.5), (2.2.6) можно воспользоваться классическим теоремами о неподвижных точках.

2.2.2. Существование и оценки решений краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения общего вида.

2.2.2а. Условия единственности решений.

Определим в пространстве $C([0,T],\mathbb{R})$ конус C_+ неотрицательных функций. Для функции $x \in C([0,T],\mathbb{R})$ обозначаем $|x|$ функцию $|x|(t) = |x(t)|$; очевидно выполнено $|x| \in L_+$. Линейный ограниченный оператор $Q : C([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$ называют *положительным,* если $Q(C_+) \subset C_+$.

Пусть оператор $F : AC([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$ допускает продолжение до оператора $\widetilde{F} : C([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$, и оператор $\widetilde{F}$ обладает следующим свойством, обозначаемым далее $(\mathcal{Q})$: *существует такой линейный ограниченный положительный оператор* $Q : C([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$, *что для любых* $x, u \in C([0,T],\mathbb{R})$ *выполнено*

$$|\widetilde{F}x - \widetilde{F}u| \le Q(|x - u|).$$

Рассмотрим линейный оператор $K : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$, заданный для любой функции $v \in C([0,T],\mathbb{R})$ равенством

$$(Kv)(t) = \int_0^T |\mathcal{G}(t,s)|(Qv)(s)\,ds.$$

Т е о р е м а 2.2.1. (см. [30]). *Пусть выполнено условие* $(\mathcal{Q})$. *Если спектральный радиус* ϱ *линейного оператора* $K : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$ *удовлетворяет неравенству* $\varrho(K) < 1$, *то краевая задача* (0.0.1), (0.0.6) *при любом действительном* α *имеет единственное решение (в пространстве* $AC([0,T],\mathbb{R})$*).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любых $x, u \in C([0,T],\mathbb{R})$ выполнено

$$
\Big|\int\limits_0^T \mathcal{G}(t,s)\,(\widetilde{F}x)(s)\,ds - \int\limits_0^T \mathcal{G}(t,s)\,(\widetilde{F}u)(s)\,ds\Big| \le
$$

$$
\le \int\limits_0^T \big|\mathcal{G}(t,s)\big|\,\big|(\widetilde{F}x)(s)\,ds - (\widetilde{F}u)(s)\big|\,ds \le \int\limits_0^T \big|\mathcal{G}(t,s)\big|\,Q\big(|x-u|\big)(s)\,ds \tag{2.2.7}
$$

Так как $\varrho_0 \doteq \varrho(K) < 1$, то существует эквивалентная норма $\|\cdot\|'_C$ в пространстве $C([0,T],\mathbb{R})$, относительно которой $\|K\|'_{C\to C} < 1$. Эта норма определяется через стандартную норму $\|v\|_C = \max_{t\in[0,T}\big|x(t)\big|$ соотношением (см. [39], с. 15)

$$
\|v\|'_C = (\varrho_0+\varepsilon)^n\|v\|_C + (\varrho_0+\varepsilon)^{n-1}\|Kv\|_C + \ldots + \|K^n v\|_C,
$$

где n некоторое достаточно большое натуральное число, $0 < \varepsilon < 1-\varrho_0$. Из этого соотношения следует, что $\|\big|v\big|\|'_C = \|v\|'_C$.

Таким образом, из (2.2.7) получаем неравенство

$$
\Big\|\int\limits_0^T W(\cdot,s)\,(\widetilde{F}x)(s)\,ds - \int\limits_0^T W(\cdot,s)\,(\widetilde{F}u)(s)\,ds\Big\|'_C \le \|K\|'_{C\to C}\|x-u\|'_C.
$$

Итак, уравнение (2.2.5) — это уравнение в пространстве $C([0,T],\mathbb{R})$ со сжимающим оператором. Согласно теореме Банаха данное уравнение, а вместе с ним и краевая задача (2.2.1), (2.2.2) имеет единственное решение.

Теорема доказана.

2.2.2b. Условия существования решений.

Здесь на основании теоремы Шаудера о существовании неподвижной точки вполне непрерывного оператора получены условия разрешимости краевой задачи (2.2.1), (2.2.2).

Т е о р е м а 2.2.2. (см. [30]). *Пусть оператор* $F : AC([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$ *допускает продолжение до непрерывного оператора* $\widetilde{F} : C([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$. *Предположим, что существуют такое* $R > 0$ *и такая суммируемая функция* $\eta_R : [0,T] \to \mathbb{R}_+$, *что при всех* $x \in C([0,T],\mathbb{R})$, $||x||_C \le R$ *выполнены неравенства:*

$$|(\widetilde{F}x)(t)| \le \eta_R(t), \quad t \in [0,T], \tag{2.2.8}$$

$$|\alpha X(t)| + \int\limits_0^T |\mathcal{G}(t,s)|\, \eta_R(s)\, ds \le R, \quad t \in [0,T]. \tag{2.2.9}$$

(здесь $\mathcal{G}(t,s)$ *— функция Грина задачи* (2.2.3)*). Тогда краевая задача (2.2.1), (2.2.2) имеет решение* $\tilde{x} \in AC([0,T],\mathbb{R})$, $||\tilde{x}||_C \le R$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задача (2.2.1), (2.2.2) равносильна уравнению (2.2.5) в пространстве $C([0,T],\mathbb{R})$. Как уже отмечалось, функция Грина $\mathcal{G}(t,s)$ ограничена: существует число c_0, для которого $|\mathcal{G}(t,s)| \le c_0$ при всех t,s. Используя эту оценку и предположения (2.2.8), (2.2.9), покажем, что оператор

$$\Phi : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,\tau],\mathbb{R}), \quad (\Phi x)(t) = \alpha X(t) + \int\limits_0^T \mathcal{G}(t,s)\, (\widetilde{F}x)(s)\, ds$$

отображает шар $\mathrm{B} = \mathrm{B}_{C([0,T],\mathbb{R})}(0,R) = \big\{x \in C([0,T],\mathbb{R}) : \|x\|_C \le R\big\}$ в предкомпактное множество. Действительно, для любого $x \in \mathrm{B}$ выполнены соотношения

$$|\int\limits_0^T \mathcal{G}(t,s)(\widetilde{F}x)(s)ds| \le c_0 \int\limits_0^t \eta_R(s)ds;$$

$$|\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathcal{G}(t,s)(Fx)(s)ds| \le c_0 \int\limits_{t_1}^{t_2} \eta_R(s)ds.$$

Так как интеграл от суммируемой функции η_R есть абсолютно непрерывная функция предела интегрирования, то множество ФВ $\subset C([0,T],\mathbb{R})$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Согласно теореме Арцела (см. [37, с. 110]) множество Ф(В) предкомпактно. Из неравенства (2.2.2) следует вложение Ф(В) $\subset$ В. Таким образом, в силу теоремы Шаудера (см. [47, с. 36]) уравнение (2.2.5) имеет решение $\tilde{x} \in$ В.

Теорема доказана.

В отличие от теоремы 2.2.1, в доказанной здесь теореме 2.2.2 мы не гарантируем разрешимость краевой задачи при всех α, только лишь при значениях, удовлетворяющих предположениям доказываемого утверждения. Но можно описать ситуацию, в которой такие предположения будут выполнены при любых значениях α.

Следствие 2.2.1. *Пусть при некотором* $c_0 \in \mathbb{R}$ *для функции Грина* $\mathcal{G}(t,s)$ *задачи* (2.2.3) *выполнено* $|\mathcal{G}(t,s)| \leq c_0$. *Далее, пусть для любого* $r > 0$ *существует* $\eta_r \in L([0,T],\mathbb{R}_+)$, *что для любого* $x \in C([0,T],\mathbb{R})$, $||x||_C \leq r$, *выполнено неравенство* $|(\widetilde{F}x)(t)| \leq \eta_r(t)$, $t \in [0,T]$. *Тогда, если справедливо неравенство*

$$q_0 \doteq \varlimsup_{r\to\infty} \int_0^T \frac{c_0\,\eta_r(s)}{r}\,ds < 1, \tag{2.2.10}$$

то при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ *краевая задача (2.2.1), (2.2.2) имеет решение* $\tilde{x} \in AC([0,T],\mathbb{R})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия (2.2.10) заключаем, что существует такое значение $r = R$, что

$$R > \frac{2}{1-q_0} \max_{t\in[0,T]} |\alpha X(t)|, \quad \int_0^T \frac{c_0\,\eta_R(s)}{R}\,ds < \frac{q_0+1}{2}.$$

Из этих соотношений, очевидно, следует неравенство (2.2.8):

$$|\alpha X(t)| + \int\limits_0^T \left|\mathcal{G}(t,s)\right| \eta_R(s)\, ds < \frac{(1-q_0)R}{2} + \frac{(1+q_0)R}{2} \le R.$$

Таким образом, для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнены все условия теоремы 2.2.2.

2.2.2c. Оценки решений. Здесь получены условия существования и оценки решений краевой задачи (2.2.1), (2.2.2) в предположениях монотонности отображения $F : AC([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$ и неотрицательности функции Грина "линейной части" рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения. Используются утверждения о неподвижных точках монотонных операторов в нормированных пространствах (см. §33, §38 [40]).

Напомним, что в пространстве $L = L([0,T],\mathbb{R})$ конус L_+ неотрицательных функций является сильно миниэдральным (то есть каждое ограниченное сверху (снизу) по норме множество обладает точной верхней (нижней) границей) и вполне правильным (то есть любая монотонная ограниченная по норме последовательность сходится). Конусы $C_+ \subset C([0,T],\mathbb{R})$, $AC_+ \subset AC([0,T],\mathbb{R})$ перечисленными свойствами не обладают.

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Т е о р е м а 2.2.3. (см. [30]). *Пусть* $\mathcal{G}(t,s) \ge 0$ *для всех* $(t,s) \in [0,T]^2$, *отображение* $F : AC([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$ *монотонное, и для некоторых* $R > 0$, $u_0 \in AC([0,T],\mathbb{R})$ *справедливы соотношения*

$$\int_0^T \left|(\mathcal{L}u_0)(t)\right| dt \le R, \quad \mathcal{L}u_0 \ge Fu_0, \quad lu_0 = \alpha,$$

Пусть, кроме того, для любых $z \in L([0,T],\mathbb{R})$ *из неравенства*

$\int_0^T |z(t)|\,dt \le R$ *следует*

$$\int_0^T \Big| F\big(\alpha X + \int\limits_0^T \mathcal{G}(\cdot, s)\, z(s)\, ds\big)\Big|(t)\, dt \le R. \tag{2.2.11}$$

Тогда существует решение $\tilde{x} \in AC([0,T],\mathbb{R})$ *краевой задачи* $(2.2.1), (2.2.2)$, *удовлетворяющее неравенствам*

$$\int_0^T \big|(\mathcal{L}\tilde{x})(t)\big|\, dt \le R, \quad \mathcal{L}\tilde{x} \le \mathcal{L}u_0, \quad \tilde{x} \le u_0.$$

Доказательство. Задача (2.2.1), (2.2.2) равносильна уравнению (2.2.6). Это уравнение заменой $\mathcal{L}x = z$ приводится к уравнению

$$z = F\Big(\alpha X + \int\limits_0^{(\cdot)} \mathcal{G}(\cdot, s)\, z(s)\, ds\Big), \tag{2.2.12}$$

с неизвестной функцией $z \in L([0,T],\mathbb{R})$. Уравнение (2.2.12) — это уравнение вида

$$z = \Psi z$$

с оператором $\Psi : L([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$, определяемым равенством

$$\Psi z = F\Big(\alpha X + \int\limits_0^{(\cdot)} \mathcal{G}(\cdot, s)\, z(s)\, ds\Big). \tag{2.2.13}$$

Из предположений доказываемой теоремы следует, что оператор Ψ является монотонным, и что для функции $u_0 \in AC([0,T],\mathbb{R})$ выполнено

$$\mathcal{L}u_0 \ge \Psi\mathcal{L}u_0 = F\Big(\alpha X + \int\limits_0^{(\cdot)} \mathcal{G}(\cdot, s)\, (\mathcal{L}u_0)(s)\, ds\Big).$$

Далее, $\mathcal{L}u_0 \in \mathrm{B} \doteq \{z \in L([0,T],\mathbb{R}) : \|z\|_L \le R\}$ и, согласно (2.2.11), $\Psi(\mathrm{B}) \subset \mathrm{B}$. Так как конус $L_+ \subset L$ является вполне правильным, то монотонный оператор Ψ обладает свойством предельной монотонной компактности (см. [40], с. $307, 308$), и согласно теореме 38.2 из [40] существует решение $\tilde{z} \in L([0,T],\mathbb{R})$ уравнения (2.2.12), удовлетворяющее неравенству $\tilde{z} \leq \mathcal{L}u_0$. Тогда $\tilde{x} = \alpha X + \int\limits_0^{(\cdot)} \mathcal{G}(\cdot,s)\,\tilde{z}(s)\,ds$ является решением краевой задачи (2.2.1), (2.2.2). Для функции $\tilde{x}$ выполнено

$$\mathcal{L}\tilde{x} = \tilde{z} \leq \mathcal{L}u_0, \quad \tilde{x} = \alpha X + \int\limits_0^{(\cdot)} \mathcal{G}(\cdot,s)\,\tilde{z}(s)\,ds \leq \alpha X +$$

$$+ \int\limits_0^{(\cdot)} \mathcal{G}(\cdot,s)\,(\mathcal{L}u_0)(s)\,ds = u_0.$$

Теорема доказана.

Сформулируем еще утверждение, дающее двухстороннюю оценку решения краевой задачи (2.2.1), (2.2.2).

Т е о р е м а 2.2.4. (см. [30]). *Пусть $\mathcal{G}(t,s) \geq 0$, для всех $(t,s) \in [0,T]^2$, отображение $F : AC([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$ монотонное и для некоторых $v_0, u_0 \in AC([0,T],\mathbb{R})$ справедливы соотношения*

$$\mathcal{L}v_0 \leq \mathcal{L}u_0, \quad lv_0 = lu_0 = \alpha, \quad \mathcal{L}v_0 \leq Fv_0, \quad \mathcal{L}u_0 \geq Fu_0,$$

Тогда существует решение $\tilde{x} \in AC([0,T],\mathbb{R})$ краевой задачи (2.2.1), (2.2.2), удовлетворяющее неравенствам

$$\mathcal{L}v_0 \leq \mathcal{L}\tilde{x} \leq \mathcal{L}u_0, \quad v_0 \leq \tilde{x} \leq u_0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий теоремы 2.2.4 следует, что определенный равенством (2.2.13) оператор $\Psi : L([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$ является монотонным, и справедливы неравенства

$$\mathcal{L}v_0 \leq \Psi\mathcal{L}v_0, \quad \mathcal{L}u_0 \geq \Psi\mathcal{L}u_0.$$

Множество $\left[\mathcal{L}v_0, \mathcal{L}u_0\right]_L \doteq \left\{y \in L([0,T],\mathbb{R}) : \mathcal{L}v_0 \le y \le \mathcal{L}u_0\right\}$ отображается оператором Ψ в себя. Согласно теореме 38.2 из [40] существует решение $\tilde{z} \in L([0,T],\mathbb{R})$ уравнения (2.2.12), удовлетворяющее оценке $\mathcal{L}v_0 \le \tilde{z} \le \mathcal{L}u_0$.

Таким образом, функция $\tilde{x} = \alpha X + \int\limits_0^{(\cdot)} \mathcal{G}(\cdot, s)\,\tilde{z}(s)\,ds$ является решением краевой задачи (2.2.1), (2.2.2). Для этой функции выполнено $\mathcal{L}\tilde{x} = \tilde{z} \le \mathcal{L}u_0$, $\mathcal{L}\tilde{x} = \tilde{z} \ge \mathcal{L}v_0$, и следовательно, в силу неотрицательности функции Грина, имеем

$$\tilde{x} = \alpha X + \int\limits_0^{(\cdot)} \mathcal{G}(\cdot, s)\,\tilde{z}(s)\,ds \le \alpha X + \int\limits_0^{(\cdot)} \mathcal{G}(\cdot, s)\,(\mathcal{L}u_0)(s)\,ds = u_0,$$

$$\tilde{x} = \alpha X + \int\limits_0^{(\cdot)} \mathcal{G}(\cdot, s)\,\tilde{z}(s)\,ds \le \alpha X + \int\limits_0^{(\cdot)} \mathcal{G}(\cdot, s)\,(\mathcal{L}v_0)(s)\,ds = v_0.$$

Теорема доказана.

2.2.3. Двухточечная краевая задача для конкретных нелинейных уравнений.

Теоремы 2.2.1–2.2.4 позволяют получить условия существования и единственности решений, оценки решений конкретных краевых задач. Для таких условий требуется либо явное выражение функции Грина линейной части уравнения, либо ее свойства. В связи с этим, напомним, что в главе 1 получена функция Грина двухточечной краевой задачи для линейных уравнений с отображением $\mathcal{L} : AC([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$ трех видов: (2.1.12), (2.1.13) и (2.1.14). Для таких типов отображений $\mathcal{L}$ рассмотрим уравнение

$$(\mathcal{L}x)(t) = f\big(t, x(t), (S_h x)(t)\big), \quad t \in [0,T], \tag{2.2.14}$$

$$\text{где } (S_h x)(t) = \begin{cases} x(h(t)), & h(t) \in [0,T], \\ \theta(h(t)), & h(t) \notin [0,T]. \end{cases}$$

с краевым условием

$$Ax(0) + Bx(T) = \alpha. \tag{2.2.15}$$

Здесь функция $f : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям Каратеодори (измерима по первому аргументу и непрерывна по второму и третьему аргументам), функция $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ измерима, функция $\theta : (-\infty, 0) \cup (T, +\infty) \to \mathbb{R}$ измерима по Борелю. В отличие от параграфа 4.3, где исследовалась задача Коши методами теории уравнений Вольтерры и поэтому предполагалось неравенство $h(t) \leq t$, для исследования краевых задач это неравенство не требуется.

Будем использовать тот очевидный факт, что заданный формулой

$$(Fx)(t) = f\big(t, x(t), (S_h x)(t)\big), \quad t \in [0,T], \tag{2.2.16}$$

оператор $F : AC([0,T], \mathbb{R}) \to L([0,T], \mathbb{R})$ можно продолжить на пространство $C([0,T], \mathbb{R})$, и это продолжение $\widetilde{F} : C([0,T], \mathbb{R}) \to L([0,T], \mathbb{R})$ определяется тем же соотношением (2.2.16).

2.2.3a. Условия существования и единственности решений.

Определим множество $E = \{t : [0,T] : h(t) \in [0,T]\}$.

Здесь будем предполагать, что функция $f : [0,\tau] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица: *существуют такие измеримые суммируемые функции* $\eta_1, \eta_2 : [0,T] \to \mathbb{R}_+$, *что*

$$\forall x_1, \tilde{x}_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad |f(t, x_1, x_2) - f(t, \tilde{x}_1, x_2)| \leq \eta_1(t)|x_1 - \tilde{x}_1|, \quad t \in [0,T],$$

$$\forall x_1, x_2, \tilde{x}_2 \in \mathbb{R} \quad |f(t, x_1, x_2) - f(t, x_1, \tilde{x}_2)| \leq \eta_2(t)|x_2 - \tilde{x}_2|, \quad t \in E.$$

Покажем, что из этого предположения следует справедливость условия $\mathcal{Q}$ для отображения $\widetilde{F}$.

Учитывая, что второе неравенство должно быть справедливо только при $t \in E$, значение $\eta_2(t)$ на $[0,T] \setminus E$ может быть любым; нам удобно будет полагать $\eta_2(t) = 0,\ t \in [0,T] \setminus E$.

Для произвольных $x, u \in C([0,T],\mathbb{R})$ при $t \in [0,T]$ имеем

$$\big|(Fx)(t) - (Fu)(t)\big| = \big|f\big(t, x(t), (S_h x)(t)\big) - f\big(t, u(t), (S_h u)(t)\big)\big| \leq$$
$$\leq \eta_1(t)\big|x(t) - u(t)\big| + \eta_2(t)\big|(\widetilde{S}_h(x-u))(t)\big|,$$

$$\text{где } (\widetilde{S}_h x)(t) = \begin{cases} x(h(t)), & h(t) \in [0,T], \\ 0, & h(t) \notin [0,T]. \end{cases}$$

Таким образом, справедливо условие $\mathcal{Q}$, в котором оператор $Q : C([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$ определен формулой $(Qv)(t) = \eta_1(t)v(t) + \eta_2(t)(\widetilde{S}_h v)(t),\ t \in [0,T]$, при всех $v \in C([0,T],\mathbb{R})$.

Из теоремы 2.2.1 получаем следующее утверждение.

Следствие 2.2.2. *Если для спектрального радиуса ϱ интегрального оператора $K : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$,*

$$(Kv)(t) = \int_0^T \mathcal{G}(t,s)\big(\eta_1(s)v(s) + \eta_2(s)(\widetilde{S}_h v)(s)\big)\,ds,$$

выполнено $\varrho(K) < 1$, то краевая задача для уравнения (2.2.14) с условием (2.2.15) однозначно разрешима при любом $\alpha \in \mathbb{R}$.

Для получения условий однозначной разрешимости конкретных краевых задач остается подставить в полученное представление оператора K выражения для функции Грина. Однако, вследствие того, что эти выражения громоздкие (см. главу 1), получение достаточно точных и "удобных" условий однозначной разрешимости краевой задачи оказывается технически сложным. Получение "грубых" условий не представляет больших сложностей.

Рассмотрим, например, задачу

$$(\mathcal{L}x)(t) \doteq \dot{x}(t) - p\dot{x}(t/2) = f\big(t, x(t), (S_h x)(t)\big), \quad t \in [0,T], \quad x(0) + x(T) = C, \tag{2.2.17}$$

где $p \in (-1/2,\, 1/2)$. Согласно пункту 3.2.1, апериодическая задача для линейного уравнения $\mathcal{L}x = f$ однозначно разрешима, её функция Грина равна

$$\mathcal{G}(t,s) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{[0,\,T/2^n]}(s)\,(2p)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{[0,\,t/2^n]}(s)\,(2p)^n.$$

Имеем очевидные оценки

$$|\mathcal{G}(t,s)| \le \frac{3}{2(1-2p)},$$

$$\|Kv\|_C \le \|v\|_C \max_{t\in[0,T]} \int_0^T \mathcal{G}(t,s)\big(\eta_1(s) + \eta_2(s)\,ds \le \frac{3\|v\|_C}{2(1-2p)}.$$

Таким образом, получаем

П р е д л о ж е н и е 5. *Если*

$$\frac{3\|v\|_C}{2(1-2p)} < 1,$$

то краевая задача (2.2.17) однозначно разрешима при любом значении $\alpha \in \mathbb{R}$.

Условия существования решений конкретных краевых задач, не требующие единственность решения, могут быть получены на основании теоремы 2.2.2 и ее следствия 2.2.1.

Рассмотрим краевую задачу (2.2.14), (2.2.15), где оператор $\mathcal{L}$ определен соотношением (2.1.12). Будем предполагать, что функция f удовлетворяет условию интегральной ограниченности (2.1.19):

$$\forall r > 0 \quad \exists m_r \in L([0,T],\mathbb{R}) \quad \forall x_1, x_2 \in [-r,r] \quad \forall t \in [0,T]$$
$$|f(t,x_1,x_2)| \le m_r(t).$$

Пусть $k \in \mathbb{N},\ T \in (k-1,k],\ p \geq 0,\ AB > 0$. Из представления (1.2.11) функции Грина $\mathcal{G}(t,s)$ двухточечной краевой задачи для линейного уравнения с таким оператором $\mathcal{L}$ получаем оценку

$$\left|\mathcal{G}(t,s)\right| \leq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{p^j (T-j)^j}{j!}.$$

Используя это неравенство и условие (2.1.19) из следствия 2.2.1 получаем

П р е д л о ж е н и е 6. *Пусть* $k \in \mathbb{N},\ T \in (k-1,k],\ p \geq 0,\ AB > 0$. *Если справедливо неравенство*

$$\varliminf_{r \to \infty} \ \frac{1}{r} \int_0^T \sum_{j=0}^{k-1} \frac{p^j (T-j)^j}{j!} m_r(s)\, ds < 1,$$

то при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ *краевая задача (2.2.14), (2.2.15), где оператор* $\mathcal{L}$ *задан формулой* (2.1.12), *имеет решение* $\tilde{x} \in AC([0,T],\mathbb{R})$.

Рассмотрим теперь периодическую краевую задачу (т.е. $A = -1$, $B = 1$) для уравнения (2.2.14) с оператором $\mathcal{L}$ вида (2.1.12). По-прежнему предполагаем, что $k \in \mathbb{N},\ T \in (k-1,k]$. Функции Грина $\mathcal{G}(t,s)$ такой краевой задачи удовлетворяет оценке

$$\left|\mathcal{G}(t,s)\right| \leq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2|p|^j (T-j)^j}{j!},$$

прямо следующей их соотношения (1.2.15).

Таким образом, из следствия 2.2.1 получаем

П р е д л о ж е н и е 7. *Пусть* $k \in \mathbb{N},\ T \in (k-1,k]$. *Если справедливо неравенство*

$$\varliminf_{r \to \infty} \ \frac{1}{r} \int_0^T \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2|p|^j (T-j)^j}{j!} m_r(s)\, ds < 1,$$

то периодическая краевая задача с условием $x(T) - x(0) = \alpha$ *для* *уравнения (2.2.14), где оператор* $\mathcal{L}$ *задан равенством* (2.1.12), *при любом* $\alpha \in \mathbb{R}$ *имеет решение* $\tilde{x} \in AC([0,T],\mathbb{R})$.

2.2.3b. Оценки решений.

Здесь нам потребуются условия неотрицательности функции Грина линейной части рассматриваемых нелинейных функционально-дифференциальных уравнений. Напомним, что для линейных уравнений с операторами (2.1.12), (2.1.13), (2.1.14) и апериодическим краевым условием (2.2.15) такие условия получены в главе 1. Приведем эти условия и, используя их, сформулируем утверждения о двухсторонних оценках решений апериодической краевой задачи для уравнения (2.2.14) с соответствующей линейной частью.

1) Для линейного уравнения с оператором (2.1.12) согласно теореме 2.1.2 функция Грина двухточечной краевой задачи положительна, т.е. $\mathcal{G}(t,s) > 0$ при всех $(t,s) \in [0,T] \times [0,T]$ в случае, если выполнены неравенства

$$\frac{A}{B} < -\Big(1 + p\frac{T-1}{1!} + \ldots + \frac{p^{T-1}}{(T-1)!}\Big), \quad B > 0, \quad p > z_{T}^{n}, \qquad (2.2.18)$$

где z_{T}^{n} — корень многочлена (1.2.5), $T \in (n, n+1]$.

Таким образом, из теоремы 2.2.4 следует

П р е д л о ж е н и е 8. *Пусть функция* $f : [0,\tau]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *не убывает по второму и третьему аргументам, выполнено условие (2.2.18), и для некоторых абсолютно непрерывных функций* $v_0, u_0 : [0,t] \to \mathbb{R}$ *таких, что*

$$Av_0(0) + Bv_0(T) = Au_0(0) + Bu_0(T) = \alpha,$$

при п.в. $t \in [0,T]$ *справедливы соотношения*

$$\dot v_0(t) - p(S^0 v_0)(t) \le \dot u_0(t) - p(S^0 u_0)(t),$$
$$\dot v_0(t) - p(S^0 v_0)(t) \le f\big(t, v_0(t), (S_h v_0 x)(t)\big),$$
$$\dot u_0(t) - p(S^0 u_0)(t) \ge f\big(t, u_0(t), (S_h u_0)(t)\big).$$

Тогда краевая задача (2.2.14), (2.2.15), где оператор $\mathcal{L}$ *задан равенством* (2.1.12), *имеет решение* $\tilde x \in AC([0,T],\mathbb{R})$, *удовлетворяющее на* $[0,T]$ *неравенствам*

$$v_0(t) \le \tilde x(t) \le u_0(t),$$
$$\dot v_0(t) - p(S^0 v_0)(t) \le \dot{\tilde x}(t) - p(S^0 \tilde x)(t) \le \dot u_0(t) - p(S^0 u_0)(t).$$

2) Согласно теореме 2.1.4 для линейного уравнения с оператором (2.1.13) функция Грина удовлетворяет неравенству $\mathcal{G}(t,s) \ge 0 \ \ \forall\, t, s,$ если

$$pT \ge -1, \quad B > 0, \quad \frac{A}{B} < -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n T^n}{n! 2^{n(n-1)/2}}. \tag{2.2.19}$$

Поэтому, в силу теоремы 2.2.4 имеет место

П р е д л о ж е н и е 9. *Пусть функция* $f : [0,\tau]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *не убывает по второму и третьему аргументам, выполнено условие (2.2.19), и для некоторых абсолютно непрерывных функций* $v_0, u_0 : [0,t] \to \mathbb{R}$ *таких, что*

$$A v_0(0) + B v_0(T) = A u_0(0) + B u_0(T) = \alpha,$$

при п.в. $t \in [0,T]$ *справедливы соотношения*

$$\dot v_0(t) - p\, v_0(t/2) \le \dot u_0(t) - p\, u_0(t/2),$$
$$\dot v_0(t) - p\, v_0(t/2) \le f\big(t, v_0(t), (S_h v_0 x)(t)\big),$$
$$\dot u_0(t) - p\, u_0(t/2) \ge f\big(t, u_0(t), (S_h u_0)(t)\big).$$

Тогда краевая задача (2.2.14), (2.2.15), где оператор $\mathcal{L}$ задан равенством (2.1.13), *имеет решение* $\tilde{x} \in AC([0,T],\mathbb{R})$, *удовлетворяющее на* $[0,T]$ *неравенствам*

$$v_0(t) \le \tilde{x}(t) \le u_0(t),$$
$$\dot{v}_0(t) - p\, v_0(t/2) \le \dot{\tilde{x}}(t) - p\, \tilde{x}(t/2) \le \dot{u}_0(t) - p\, u_0(t/2).$$

3) Функция Грина двухточечной краевой задачи для линейного уравнения с оператором (2.1.14) неотрицательна, если

$$|p| < \frac{1}{2}, \quad A + B < 0. \tag{2.2.20}$$

Таким образом, получаем

П р е д л о ж е н и е 10. *Пусть функция* $f : [0,\tau] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *не убывает по второму и третьему аргументам, выполнено условие (2.2.20), и для некоторых абсолютно непрерывных функций* $v_0, u_0 : [0,t] \to \mathbb{R}$ *таких, что*

$$Av_0(0) + Bv_0(T) = Au_0(0) + Bu_0(T) = \alpha,$$

при п.в. $t \in [0,T]$ *справедливы соотношения*

$$\dot{v}_0(t) - p\, \dot{v}_0(t/2) \le \dot{u}_0(t) - p\, \dot{u}_0(t/2),$$
$$\dot{v}_0(t) - p\, \dot{v}_0(t/2) \le f\big(t, v_0(t), (S_h v_0 x)(t)\big),$$
$$\dot{u}_0(t) - p\, \dot{u}_0(t/2) \ge f\big(t, u_0(t), (S_h u_0)(t)\big).$$

Тогда краевая задача (2.2.14), (2.2.15), где оператор $\mathcal{L}$ задан равенством (2.1.14), *имеет решение* $\tilde{x} \in AC([0,T],\mathbb{R})$, *удовлетворяющее на* $[0,T]$

неравенствам

$$v_0(t) \le \tilde{x}(t) \le u_0(t),$$
$$\dot{v}_0(t) - p\,\dot{v}_0(t/2) \le \dot{\tilde{x}}(t) - p\,\dot{\tilde{x}}(t/2) \le \dot{u}_0(t) - p\,\dot{u}_0(t/2).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена вопросам разрешимости и оценкам решений задачи Коши и краевых задач для линейных и нелинейных функционально-дифференциальных уравнений. Основным методом исследования является метод сравнения исследуемой задачи с некоторой «эталонной задачей», обладающей требуемыми свойствами (такими, как однозначная разрешимость, справедливость неравенства типа Чаплыгина, неотрицательность решения).

В диссертационной работе получены следующие **основные результаты:**

1. Доказаны теоремы сравнения линейных функционально-дифференциальных уравнений с начальными и краевыми условиями.

2. Получены условия неотрицаиельности функции Коши и функции Грина двухточечной краевой задачи следующих «эталонных» уравнений с постоянным коэффициентом p :

$$\dot{x}(t) - px(t-1) = f(t),$$
$$\dot{x}(t) - px(t/2) = f(t),$$
$$\dot{x}(t) - p\dot{x}(t/2) = f(t).$$

3. На основании сравнения с «эталонным» линейным уравнением получены условия разрешимости, однозначной

разрешимости и даны оценки решений задачи Коши для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений общего вида.

4. Получены условия разрешимости, однозначной разрешимости и даны оценки решений двухточечной краевой задачи для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений.

Результаты, полученные в диссертации, могут найти приложения в изучении проблем устойчивости, исследовании существования периодических решений для различных функционально- дифференциальных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П.* Априорные оценки решений задачи Коши и разрешимость краевых задач для уравнений с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 10. С. 1731–1747.

2. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.

3. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.

4. *Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф.* Теорема Валле Пуссена о дифференциальном неравенстве для уравнений с последействием // Труды МИАН. 1995. Т. 211, С. 32-–39.

5. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Пемского университета, 2001. 230 с.

6. *Бекларян Л.А.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений и их приложений. Групповой подход // Современная математика. Фундаментальные направления. 2004. Т. 8, С. 3–147.

7. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

8. *Борзова М.В., Козадаев А.В., Тахир Х.М.Т.* Некоторые интегрируемые в квадратурах линейные функционально-дифферен-

циальные уравнения // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20, № 5. С. 1079–1083.

9. *Бравый Е.И.* О разрешимости задачи Коши для линейных функционально-дифференциальных уравнений высших порядков // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 4. С. 459–470.

10. *Бравый Е.И.* О разрешимости периодической задачи для линейных функционально-дифференциальных уравнений высших порядков // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 4. С. 563–577.

11. *Бравый Е.И.* Краевые задачи для семейств функционально-дифференциальных уравнений высших порядков // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 11. С. 1576–1577.

12. *Бравый Е.И.* Краевые задачи для семейств линейных функционально-дифференциальных уравнений // Дисс. .... доктора физ.-мат. н. Пермь, 2017. 334 с.

13. *Булгакова А.И., Максимов В.П.* Функциональные и функционально-дифференциальные включения с вольтерровыми операторами // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 8. С. 1362–1374.

14. *Бурлаков Е.О., Жуковский Е.С.* Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра с локально сжимающими операторами // Известия вузов. Математика. 2010. № 8. С. 16–29.

15. *Вулих Б.З.* Краткий курс теории функций вещественной переменной. М.: Наука, 1973. 352 с.

16. *Гусаренко С.А., Жуковский Е.С., Максимов В.П.* К теории функционально-дифференциальных уравнений с локально вольтерровым операторами // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287, № 2. С. 268–272.

17. *Драхлин М.Е.* Некоторые вопросы теории устойчивости функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 8. С. 1325–1332.

18. *Жуковская Т.В.* Интерполяция функции Коши // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2002. Т. 7, № 1. С. 110–111.

19. *Жуковская Т.В., Жуковский Е.С., Тахир Х.М.Т.* О разрешимости задачи Коши для нелинейного функционально-дифференциального уравнения // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2017. Т. 22, № 3. С. 523–532.

20. *Жуковская Т.В.* Метод построения функции Коши уравнения с обобщенновольтерровым оператором // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2003. Т. 8, № 1. С. 162–163.

21. *Жуковская Т.В., Молоканова Е.А.* Численные методы решения эволюционных функционально-дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2012. Т. 17, № 5. С. 1352–1359.

22. *Жуковский Е.С.* Использование ряда Неймана для построения функции Грина // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 1997. Т. 2, № 2. С. 205–206.

23. *Жуковский Е.С.* К теории уравнений Вольтерра // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 9. С. 1599–1605.

24. *Жуковский Е.С.* Нелинейное уравнение Вольтерра в банаховом функциональном пространстве // Известия вузов. Математика. 2005. № 10. С. 17–28.

25. *Жуковский Е.С.* Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра // Математический сборник. 2006. Т. 197, № 10. С. 33–56.

26. *Жуковский Е.С.* Неравенства Вольтерра в функциональных пространствах // Математический сборник. 2004. Т. 195, № 9. С. 3–18.

27. *Жуковский Е.С., Алвеш М.Ж.* Абстрактные вольтерровы операторы. Изв. вузов. Матем. 2008. № 3. С. 3–17.

28. *Жуковский Е.С., Тахир Х.М.Т.* О неотрицательности функции Коши дифференциального уравнения с постоянным запаздыванием // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2016). Сборник трудов IX международной конференции. 2016. С. 154–158.

29. *Жуковский Е.С., Тахир Х.М.Т.* Об условиях положительности функции Коши функционально-дифференциальных уравнений // Известия вузов. Математика. 2018. № 11. С. 82–85.

30. *Жуковский Е.С., Тахир Х.М.Т.* Вопросы теории краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений // Тамбов: Издательский дом ТГУ им. Г.Р. Державина, 2017. 97 с.

31. *Жуковский Е.С., Тахир Х.М.Т.* Сравнение решений краевых задач для линейных функционально-дифференциальных уравнений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28, № 3. С. 284–292.

32. *Жуковский Е.С.* Вольтерровость и спектральные свойства оператора внутренней суперпозиции // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 2. С. 250–255.

33. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.

34. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.

35. *Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.-Л.: Гос. изд-во техн.-теор. литературы, 1950. 548 с.

36. *Ким А.В., Пименов В.Г.* i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений // Москва, Изд-во: Регулярная и хаотическая динамика, 2004. 256 с.

37. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.

38. *Короткий Д.А.* Системы с опережением и запаздыванием: численное решение // Изв. ИМИ УдГУ. 2006. № 2(36). С. 185–188.

39. *Красносельский М.А., Вайнико Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 456 с.

40. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975. 512 с.

41. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

42. *Максимов В.П.* Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений. Избранные труды. Пермь: Изд-во ПГУ, ПСИ, ПССГК, 2003. 306 с.

43. *Максимов В.П.* О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 4. С. 601–606.

44. *Малыгина В.В., Чудинов К.М.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. I. // Известия вузов. Математика. 2013. № 6. С. 25–36.

45. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М. Наука, 1972. 352 с.

46. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.

47. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. М.: Мир, 1977. 232 с.

48. *Россовский Л.Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции // Современная математика. Фундаментальные направления. 2014. Т. 54. С. 3–138.

49. *Скубачевский А.Л.* Неклассические краевые задачи. I // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 26. С. 3–132.

50. *Скубачевский А.Л.* Неклассические краевые задачи. II // Современная математика. Фундаментальные направления. 2009. Т. 33. С. 3–179.

51. *Скубачевский А.Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Успехи математических наук. 2016. Т. 71, № 5(431). С. 3–112.

52. *Тахир Х.М.Т.* Об одном методе решения линейных

функционально-дифференциальных уравнений // Математическое и компьютерное моделирование, информационные технологии управления (МКМИТУ-2016). Сборник трудов Школы для студентов, аспирантов и молодых ученых. Воронеж, 3–8 октября 2016 г. Воронеж: Издательство «Научная книга», 2016. С. 212–214.

53. *Тахир Х.М.Т.* О решении линейных функционально-дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2016. Т. 21, № 2. С. 417–431.

54. *Тахир Х.М.Т.* Существование и оценки решений задачи Коши для нелинейного функционально-дифференциального уравнения // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2017. Т. 22, № 6. С. 1329–1334.

55. *Терентьев А.Г.* Об одном классе линейных отображений и их положительной обратимости // Успехи математических наук. 1996. Т. 51, № 6(312). С. 223–224.

56. Функциональный анализ. Под редакцией С.Г.Крейна. Серия: Справочная математическая литература. М.: Наука, 1972. 544 с.

57. *Шрагин И.В.* Суперпозиционная измеримость при обобщенных условиях Каратеодори // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2014. Т.19. № 2. С. 476–478.

58. *Эльсгольц Э.Л.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1964. 130 с.

59. *Эльсгольц Э.Л., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.

60. *Azbelev N.V., Simonov P.M.* Stability of differential equations with aftereffect. London and New York: Taylor and Francis. 2002. 256 p.

61. *Gaines R.E., Mawhin J.L.* Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1977.

62. *Hakl R., Lomtatidze A., Sremr J.* Some Boundary Value Problems For First Order Scalar Functional Differential Equations. Folia Facult. Scien. Natur. Masar. Brunensis. Mathematica, 10. Brno: Masaryk University, 2002.

63. *Hale J.K., Lunel S.M.V.* Introduction to functional differential equations. Springer Science and Business Media, 2013. Vol. 99.

64. *Jiang D., Nieto J.J., Zuo W.* On monotone method for first and second order periodic boundary value problems and periodic solutions of functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. 2004. Vol. 289, no. 2. P. 691–699.

65. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Introduction to the theory and applications of functional differential equations. Springer. Mathematics and Its Applications, 2013. Vol. 463.

66. *Li Q., Li Y.* Existence and multiplicity of positive periodic solutions for second-order functional differential equations with infinite delay // Elecrronic Journal of Differential Equations. 2014. Vol. 2014, no 93. P. 1–14.

67. *Lomtatidze A., Mukhigulashvili S.* On periodic solutions of second order functional differential equations // Met. Differ. Equ. Math. Phys. 1995. Vol. 5. P. 125–126.

68. *Lomtatidze A., Mukhigulashvili S.* On a two-point boundary value prob-

lem for second-order functional-differential equations. I // Met. Differ. Equ. Math. Phys. 1997. Vol. 10. P. 125–128.

69. *Lomtatidze A., Mukhigulashvili S.* On a two-point boundary value problem for second-order functional-differential equations. II // Met. Differ. Equ. Math. Phys. 1997. Vol. 10. P. 150–152.

70. *Nieto J.J., Rodriguez-Lopez R.* Periodic boundary value problem for non-lipschitzian impulsive functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. 2006. Vol. 318, no. 2. P. 593–610.

71. *Wu J.* Theory and applications of partial functional differential equations. Springer Science and Business Media, 2012. Vol. 119.