Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

ЗАЙЦЕВА НАТАЛЬЯ ВЛАДИМИРОВНА

ГЛАДКИЕ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
А. Б. Муравник

Москва — 2022

Оглавление

Введение

Теория задач для функционально-дифференциальных и, в частности, дифференциально-разностных уравнений представляет собой один из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Это объясняется ее многочисленными приложениями: в механике деформируемого твердого тела при изучении упругопластических процессов, многослойных оболочек и пластин [56]; в релятивистской электродинамике [102, 107]; при исследовании процессов вихреобразования и формирования сложных когерентных пятен; при решении некоторых задач, связанных с плазмой [72]; в моделировании колебаний кристаллической решетки [36]; в задачах нелинейной оптики [4, 45]; при исследовании нейронных сетей [69]; при изучении моделей популяционной динамики в математической биологии, при исследовании экологических и экономических процессов [14, 96, 97]; в широком спектре задач в теории автоматического управления [13, 17]; при решении проблем оптимизации лечения онкологических заболеваний [10] и др.

Впервые дифференциальное уравнение с оператором сдвига встречается в работе И. Бернулли [93] в задаче о невесомой натянутой струне конечной длины, вдоль которой распределены равные и равноудаленные массы. По аналогии с известными на тот момент задачами механики он жестко ограничивал начальные данные и смог получить лишь некоторые частные решения уравнения. Далее уравнение с оператором сдвига встречается в работе Л. Эйлера [95] в геометрической задаче о нахождении линии, подобной своей эволюте.

С обыкновенным дифференциальным уравнением, описанным И. Бернулли, математики XVIII века встретились при разработке теории звука, чем был вызван большой интерес к нахождению его решений и последовало несколько сотен работ, обзор которых в полной мере представлен в книге Г. Буркхардта [94].

Систематическое изучение уравнений с операторами сдвига было начато только с сороковых годов XX века, благодаря приложениям к теории автоматического управления и связано с работами А. Д. Мышкиса [49, 50, 51, 52], Э. Пинни [57], Р. Беллмана и К. Л. Кука [2], Г. А. Каменского [27, 28, 29, 30, 31], Л. Э. Эльсгольца [91, 92], Дж. Хейла [89].

Существенные результаты в исследовании задач для функционально-дифференциальных уравнений различных классов были получены А. Л. Скубачевским [75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 103, 104, 105, 106], В. В. Власовым [6, 7, 8, 9], А. Н. Зарубиным [15, 16, 17, 18, 19], А. Б. Муравником [38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 98, 99, 100], А. В. Разгулиным [62, 63, 64, 65, 101], Л. Е. Россовским [66, 67, 68, 69, 70, 71], В. Ж. Сакбаевым [1, 26] и другими авторами, на некоторые работы которых укажем ссылки [20, 37, 59, 60, 61, 88, 90].

Специальный класс функционально-дифференциальных уравнений составляют дифференциально-разностные уравнения, теория краевых задач для которых продолжает развиваться.

В настоящее время достаточно полно исследованы задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений в ограниченных областях, разработка и развитие теории для которых принадлежит А. Л. Скубачевскому. Краевые задачи для таких уравнений тесно связаны с нелокальными задачами для эллиптических дифференциальных уравнений, внимание к которым привлекла работа А. В. Бицадзе и А. А. Самарского [3]. Согласно разработанной теории [105], нелокальные задачи для эллиптических уравнений связаны с краевыми задачами в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ для дифференциально-разностных уравнений, содержащих сдвиги аргументов в старших производных, отображающих точки границы внутрь области. Наличие таких сдвигов в уравнении приводит к появлению решений, гладкость которых может нарушаться внутри области (даже при бесконечно дифференцируемых правых частях и бесконечно гладкой границе) и к принципиально новым свойствам решений. Были получены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства типа Гординга; исследованы вопросы однозначной, фредгольмовой и нетеровой разрешимости в пространствах Соболева и весовых пространствах, а также гладкости обобщенных решений; подробно рассмотрены приложения эллиптических дифференциально-разностных уравнений в механике деформируемого твердого тела.

Отметим также работы, продолжающие исследования сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений в ограниченных областях: А. Л. Скубачевского и Е. Л. Цветкова [80], Е. П. Ивановой [21, 22, 23, 24, 25], Д. А. Неверовой [53, 54, 55], В. В. Лийко [34, 35].

В неограниченных областях задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений изучены в значительно меньшей степени. Обширное исследование таких задач представлено в работах А. Б. Муравника. В частности, в работах [45, 46, 100] рассматриваются сильно эллиптические уравнения с нелокальными потенциалами по одной из пространственных переменных, встречающиеся в моделях нелинейной оптики.

В работах [46, 47, 48] исследуются модельные задачи для многомерных эллиптических дифференциально-разностных уравнений в полупространстве.

Параболические уравнения с отклонениями по времени (или с переменными запаздываниями) в старших производных были исследованы в работах В. В. Власова [6, 7]. Краевые задачи в ограниченных областях для параболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами по пространственным переменным изучались в работах А. Л. Скубачевского, Р. В. Шамина и А. М. Селицкого [73, 74, 83], А. Йаакбариеха и В. Ж. Сакбаева [26]. В случае же неограниченной области задачи для таких уравнений были изучены в работах А. Б. Муравника [38, 39, 40, 41].

В работе А. Н. Зарубина [18] рассмотрена задача Коши для гиперболического уравнения с запаздыванием, встречающимся при математическом моделировании процессов в средах с фрактальной геометрией [32].

В работах В. В. Власова и Д. А. Медведева [9], А. Акбари Фаллахи, А. Йаакбириеха и В. Ж. Сакбаева [1] гиперболические дифференциально-разностные уравнения были исследованы для случая, когда операторы сдвига также действуют по времени.

Классическая теория дифференциальных уравнений с частными производными строится, как показано, например, в книге [33], следующим образом: сначала изучаются уравнения эллиптического типа, от которых затем переходят к параболическим уравнениям, и наконец к уравнениям гиперболического типа. И если, как уже было отмечено, эллиптические и параболические дифференциально-разностные уравнения в настоящее время изучены в достаточной полной мере — глубоко и подробно, то исследованию гиперболических дифференциально-разностных уравнений посвящено совсем незначительное число работ, и в тех, что известны, операторы сдвига действуют по времени.

Диссертационная работа посвящена исследованию в полуплоскости и полупространстве гиперболических дифференциально-разностных уравнений, содержащих операторы сдвига по пространственным переменным и построению их решений. Причем интересовать нас будут классические решения.

Определение. Функция $u(x,t)$ называется *классическим решением* уравнения, если в каждой точке полуплоскости (полупространстве) существуют классические, т. е. определенные в смысле пределов отношений конечных разностей, производные u_{tt} и u_{xx} (u_{tt} и $u_{x_j x_j}$, $j=\overline{1,n}$), и в каждой точке этой полуплоскости (этого полупространства) выполняется указанное уравнение.

Целью работы является построение гладких решений двумерных и многомерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений, содержащих суперпозиции дифференциальных операторов и операторов сдвига, действующих по пространственным переменным, и содержащих суммы дифференциальных операторов и операторов сдвига, действующих по пространственным переменным.

Диссертация состоит из введения, трех основных глав, которые, в свою очередь, делятся на параграфы и пункты. В заключении приводится список литературы.

Во введении дается исторический обзор, приводятся исследуемые уравнения, кратко формулируются основные результаты.

В первой главе в полуплоскости $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times (0,+\infty)$ рассматриваются гиперболические дифференциально-разностные уравнения, содержащие суперпозиции дифференциальных операторов и операторов сдвига по пространственной переменной, изменяющейся на всей вещественной оси. А именно уравнения:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a_1 \frac{\partial^2 u(x-h_1,t)}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 u(x-h_2,t)}{\partial x^2}$$

и

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \frac{\partial^2 u(x-h_j,t)}{\partial x^2}.$$

Коэффициенты и сдвиги в уравнениях — заданные вещественные числа, причем на сдвиги никакие условия соизмеримости не накладываются.

Природа физических задач, приводящих к таким уравнениям, принципиально отличается от задач для классических уравнений математической физики.

Для построения решений уравнений использовалась классическая операционная схема, согласно которой к уравнению формально применяются сначала прямое, а затем обратное преобразования Фурье. Однако, если в классическом случае применение преобразования Фурье приводит к исследованию полиномов относительно двойственной переменной, то в данном случае, с учетом того, что в образах Фурье оператор сдвига является мультипликатором, символ дифференциально-разностного оператора представляет собой уже не полином, а комбинацию степенной функции и тригонометрических функций с несоизмеримыми аргументами. Это приводит к вычислительным трудностям и совершенно иным эффектам в решении.

Основными результатами главы 1 являются теоремы 1.1.1 и 1.2.1, свидетельствующие о том, что необходимым условием существования гладких решений таких уравнений является условие положительности вещественной части символа оператора сдвига в уравнениях.

Получены достаточные условия на коэффициенты и сдвиги уравнений для существования гладких решений этих уравнений.

При этом был получен неожиданный результат, что для существования гладких решений уравнений, содержащих суперпозиции дифференциальных операторов и операторов сдвига (если их несколько), одна из старших производных по пространственной переменной должна иметь сдвиг, равный нулю.

Случай уравнения с одним единственным нелокальным слагаемым, т.е. уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a \, \frac{\partial^2 u(x-h,t)}{\partial x^2} \tag{0.1}$$

оказался особым.

Необходимым условием существования классических решений для него оказалось только условие положительности коэффициента уравнения, о чем свидетельствует теорема 1.1.2.

Для этого уравнения также построено однопараметрическое семейство решений.

Во второй главе в полуплоскости $(x,t)\in\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$ исследуются дифференциально-разностные уравнения, содержащие суммы дифференциальных операторов и операторов сдвига:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-b\,u(x-h,t) \tag{0.2}$$

и

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\sum_{k=1}^{n}b_k u(x-h_k,t), \tag{0.3}$$

в которых все коэффициенты и сдвиги — заданные вещественные числа.

Хорошо известны задачи математической физики, приводящие к классическим гиперболическим уравнениям с частными производными, которые, помимо производных, содержат искомую функцию или потенциал. Примером является уравнение малых колебаний тяжелой однородной нити с закрепленным верхним концом около своего вертикального положения равновесия.

При изучении электрических колебаний в проводах уравнение для силы тока (или уравнение для напряжения) содержит неизвестную функцию, если не пренебрегать потерями (утечкой) через изоляцию проводов и величиной сопротивления.

Распространение электрических колебаний описывается телеграфными уравнениями. Можно ввести акустические аналоги сопротивления и утечки — трение газа о стенки сосуда и пористость среды, соответственно, и получить гиперболические уравнения с классическим потенциалом.

Решения гиперболического уравнения $u_{tt}-a^2u_{xx}+c\,u=0$, в которых фазовая скорость гармонических волн зависит от частоты, то есть описывают дисперсию волн, получаются при коэффициенте $c\neq 0$ в уравнении.

В уравнениях, рассматриваемых в главе 2 потенциалы являются нелокальными, так как все вещественные сдвиги не являются бесконечно малыми величинами и могут принимать сколь угодно большие значения. Отметим также, что операторы сдвига не являются подчиненными по отношению к дифференциальному оператору.

Решения уравнений построены с помощью операционной схемы. Доказана теорема 2.1.1, что при выполнении условия

$$a^2\xi^2 + b\cos(h\xi) > 0$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^1$ построенные решения уравнения (0.2) являются классическими.

В доказанной теореме 2.2.1 говорится о том, что если выполняется условие

$$a^2\xi^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k \cos(h_k\xi) > 0$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^1$, то построенные решения уравнения (0.3) являются гладкими (классическими).

Приведены классы уравнений, для которых указанные условия выполнены.

Третья глава посвящена исследованию вопроса существования гладких решений в полупространстве $\{(x,t)|\, x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0\}$ гиперболических дифференциально-разностных уравнений двух типов.

Первый тип — уравнения, содержащие суперпозиции вторых производных и операторов сдвига по любым пространственным координатным направлениям:

$$u_{tt}(x,t) = a^2 \sum_{j=1}^{n} u_{x_jx_j}(x,t) + \sum_{j=1}^{n} b_j u_{x_jx_j}(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j-h_j,x_{j+1},\ldots,x_n,t)$$

и

$$u_{tt}(x,t) = a^2 \sum_{j=1}^{n} u_{x_jx_j}(x,t) + \\ + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{kj} u_{x_jx_j}(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k-h_k,x_{k+1},\ldots,x_n,t).$$

Второй рассмотренный тип — уравнения, содержащие сдвиги в потенциалах, также действующие по всем направлениям:

$$u_{tt}(x,t) = c^2 \sum_{j=1}^{n} u_{x_jx_j}(x,t) - \sum_{j=1}^{n} d_j u(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j-l_j,x_{j+1},\ldots,x_n,t)$$

и

$$u_{tt}(x,t) = c^2 \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j}(x,t) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} d_{jk} u(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j - l_{jk}, x_{j+1}, \ldots, x_n, t).$$

Все коэффициенты и сдвиги в уравнениях — заданные вещественные числа. Никакие условия соизмеримости на сдвиги не накладываются.

Для всех приведенных уравнений построены трехпараметрические семейства решений. Теоремы 3.1.1, 3.2.1, 3.3.1 и 3.4.1 доказывают, что полученные решения являются классическими.

Нумерация формул принята своя в каждой главе и параграфе. Первая цифра номера формулы означает главу.

Нумерация теорем, следствий и замечаний — своя в каждом параграфе. Первая цифра номера означает главу, следующая — номер параграфа и третья — номер теоремы в данном параграфе.

Таким образом, **на защиту выносятся следующие результаты:**

- Существование гладких решений в полуплоскости двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений, содержащих суперпозиции дифференциальных операторов и операторов сдвига, действующих по пространственной переменной, изменяющейся на всей вещественной оси.

- Существование гладких решений в полуплоскости двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений, содержащих суммы дифференциальных операторов и операторов сдвига, действующих по пространственной переменной, принимающей все вещественные значения.

- Существование гладких решений в полупространстве многомерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений, содержащих суперпозиции и суммы дифференциальных операторов и операторов сдвига, действующих по пространственным переменным, принимающим все действительные значения.

- Для уравнений, рассматриваемых в работе, получены достаточные условия на коэффициенты и сдвиги в уравнениях, гарантирующие существование семейств гладких решений.

Результаты диссертационной работы докладывались автором и обсуждались

- на научных семинарах Математического института имени С. М. Никольского Российского университета дружбы народов по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям под руководством профессора А. Л. Скубачевсого;
- на научно-исследовательских семинарах факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова ”Спектральная теория дифференциальных операторов и актуальные проблемы математической физики“ под руководством академика Е. И. Моисеева и профессора И. С. Ломова;
- на математическом семинаре Белгородского государственного национального исследовательского университета под руководством профессоров В. Б. Васильева, С. М. Ситника и А. П. Солдатова;
- на научном семинаре кафедры высшей математики Московского физико-технического института (национального исследовательского университета) под руководством профессора В. П. Бурского;
- на научном семинаре ”Интегральные уравнения“ кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством профессора Е. А. Бадерко;
- на научном семинаре кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством профессора В. В. Власова;
- на научном семинаре ”Обратные задачи математической физики и естествознания“ МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством академика В. А. Садовничего и профессора А. И. Прилепко;
- на научном семинаре ”Нелинейный анализ и его приложения“ кафедры функционального анализа и его приложений Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых под руководством профессоров М. С. Беспалова, А. А. Давыдова, В. И. Данченко и Л. И. Родиной,

а также на следующих всероссийских и международных конференциях:

1. XXX Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2019) (Крым, пос. Батилиман, Россия, 17 – 29 сентября 2019 г.);

2. XXМеждународная Саратовская зимняя школа "Современные проблемы теории функций и их приложения" (Саратов, Россия, 28 января – 1 февраля 2020 г.);

3. XXXIII Международная конференция "Современные методы теории краевых задач": Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения - XXXI" (Воронеж, Россия, 3 – 9 мая 2020 г.);

4. Научная конференция, посвященная памяти академика А.Н. Тихонова "Тихоновские чтения – 2020" (Москва, Россия, 26 – 31 октября 2020 г.);

5. Международная научная конференция "Уфимская осенняя математическая школа – 2020" (Уфа, Россия, 11 – 14 ноября 2020 г.);

6. Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых "Современные методы математической физики и их приложения" (Ташкент, Узбекистан, 17 – 18 ноября 2020 г.);

7. XIX Всероссийская научная школа-конференция "Лобачевские чтения — 2020" (Казань, Россия, 1 – 4 декабря 2020 г.);

8. XXXIV Международная конференция "Современные методы теории краевых задач": Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения - XXXII" (Воронеж, Россия, 3 – 9 мая 2021 г.);

9. XXXV Международная конференция "Современные методы теории краевых задач": Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения - XXXIII" (Воронеж, Россия, 3 – 9 мая 2021 г.).

Основные результаты диссертации опубликованы в работах автора [108, 109, 110, 111, 112, 113].

Глава 1. Уравнения с суперпозициями операторов

В этой главе в полуплоскости $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times (0,+\infty)$ координатной плоскости Oxt (для определенности считаем систему координат Oxt правой) с помощью классической операционной схемы построено однопараметрическое семейство гладких решений двумерного гиперболического дифференциально-разностного уравнения, содержащего суперпозиции дифференциальных операторов и операторов сдвига по пространственной переменной, изменяющейся на всей действительной оси.

Согласно операционной схеме к уравнению формально применяются сначала прямое, а затем обратное преобразования Фурье. Однако, если в классическом случае применение преобразования Фурье приводит к исследованию полиномов относительно двойственной переменной, то в данном случае, с учетом того, что в образах Фурье оператор сдвига является мультипликатором, символ дифференциально-разностного оператора представляет собой уже не полином, а комбинации степенных и тригонометрических функций. Это привело к вычислительным трудностям и совершенно иным эффектам в решении.

Доказана теорема, что полученные решения являются классическими при всех значениях действительного параметра, если вещественная часть символа оператора сдвига положительна. Приведены классы уравнений, для которых указанное условие выполнено.

Для частного случая рассматриваемого уравнения (уравнения с одним сдвигом по пространственной переменной) построено семейство решений и показано, что и оно является классическим. Однако, в данном случае требование положительности вещественной части символа оператора сдвига не требуется.

В этой же главе в полуплоскости $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times (0,+\infty)$ с помощью операционной схемы построено однопараметрическое семейство гладких решений гиперболического дифференциально-разностного уравнения, содержащего n суперпозиций дифференциальных операторов и операторов сдвига по пространственной переменной, изменяющейся на всей действительной оси. Искомая функция, удовлетворяющая уравнению рассматривается в $(n+1)$ различной точке полуплоскости.

Вообще говоря, данная схема приводит к решениям в смысле обобщенных функций. Однако, в данном случае удалось доказать, что полученные решения являются классическими.

Доказана теорема, что полученные решения являются классическими, если вещественная часть символа оператора сдвига, входящего в уравнение, положительна. Приведены классы уравнений, для которых указанное условие выполнено.

§1.1. Уравнения с двумя несоизмеримыми сдвигами

1.1.1. Построение решений уравнения.

В полуплоскости $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times (0,+\infty)$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a_1 \frac{\partial^2 u(x-h_1,t)}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 u(x-h_2,t)}{\partial x^2}, \tag{1.1}$$

где a_j, h_j $(j=1,2)$ — заданные вещественные числа, причем на параметры h_1 и h_2 не накладывается никаких условий соизмеримости.

Для нахождения решений уравнения (1.1) используем классическую операционную схему Гельфанда—Шилова (см. [11, §10]). Вообще говоря, эта схема приводит к решениям в смысле обобщенных функций, однако в данном случае удается доказать, что найденные решения являются классическими, т. е. являются функциями, у которых все производные, входящие в уравнение (указанные производные понимаются в классическом смысле, т. е. как пределы соответствующих отношений конечных разностей), существуют в каждой точке полуплоскости $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times (0,+\infty)$ и уравнение (1.1) выполняется для них в каждой точке этой полуплоскости.

Итак, наряду с уравнением (1.1), рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}(x,t)}{\partial t^2} - a_1 \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-h_1,t)}{\partial x^2} - a_2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-h_2,t)}{\partial x^2} = \delta(x,t), \tag{1.2}$$

где $\delta(x,t)$ — δ-функция Дирака.

Применив к (1.2) преобразование Фурье $F_x := F$ (формально), переходим к двойственной переменной ξ и, учитывая, что оператор сдвига, так же, как и дифференциальные операторы, является мультипликатором Фурье, а именно,

$$F[f(x-h)] = e^{ih\xi}F[f],$$

получаем (согласно указанной операционной схеме) начальную задачу

$$Z''(t) + \left(a_1 e^{ih_1\xi} + a_2 e^{ih_2\xi}\right)\xi^2 Z(t) = 0,$$

$$Z(0) = 0,$$

$$Z'(0) = 1,$$

решение которой определяется по формуле

$$Z(t) = \frac{\sin\sqrt{a_1 e^{ih_1\xi} + a_2 e^{ih_2\xi}}\,\xi t}{\sqrt{a_1 e^{ih_1\xi} + a_2 e^{ih_2\xi}}\,\xi}. \tag{1.3}$$

Введем для удобства в дальнейших вычислениях функции

$$\rho(\xi) := \left[a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos\left((h_1 - h_2)\xi\right)\right]^{1/4} \tag{1.4}$$

и

$$\theta(\xi) := \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{a_1\sin(h_1\xi) + a_2\sin(h_2\xi)}{a_1\cos(h_1\xi) + a_2\cos(h_2\xi)}. \tag{1.5}$$

Отметим, что функция $\rho(\xi)$ корректно определена при всех вещественных значениях a_j, h_j $(j = 1,2)$ и ξ.

Теперь преобразуем подкоренное выражение функции (1.3) следующим образом:

$$\begin{aligned} &a_1 e^{ih_1\xi} + a_2 e^{ih_2\xi} = \\ &\quad = (a_1\cos(h_1\xi) + a_2\cos(h_2\xi)) + i(a_1\sin(h_1\xi) + a_2\sin(h_2\xi)) = \\ &\quad = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos((h_1-h_2)\xi)}\times \\ &\quad \times e^{i\,\mathrm{arctg}\frac{a_1\sin(h_1\xi) + a_2\sin(h_2\xi)}{a_1\cos(h_1\xi) + a_2\cos(h_2\xi)}} = \rho^2(\xi)e^{2i\,\theta(\xi)}. \end{aligned}$$

Таким образом, функция (1.3) принимает следующий вид:

$$Z(t) = \frac{\sin\left(t\xi\rho(\xi)e^{i\,\theta(\xi)}\right)}{\xi\rho(\xi)e^{i\,\theta(\xi)}}.$$

Применим к последнему выражению обратное преобразование Фурье F_ξ^{-1} (формально) и получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\left(t\xi\rho(\xi)e^{i\,\theta(\xi)}\right)}{\xi\rho(\xi)e^{i\,\theta(\xi)}}e^{-i\xi x}d\xi = \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\sin\left(t\xi\rho(\xi)e^{i\,\theta(\xi)}\right)}{\xi\rho(\xi)e^{i\,\theta(\xi)}}e^{-i\xi x}d\xi + \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin\left(t\xi\rho(\xi)e^{i\,\theta(\xi)}\right)}{\xi\rho(\xi)e^{i\,\theta(\xi)}}e^{-i\xi x}d\xi\right] = \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin\left(t\xi\rho(\xi)e^{-i\,\theta(\xi)}\right)}{\xi\rho(\xi)e^{-i\,\theta(\xi)}}e^{i\xi x}d\xi + \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin\left(t\xi\rho(\xi)e^{i\,\theta(\xi)}\right)}{\xi\rho(\xi)e^{i\,\theta(\xi)}}e^{-i\xi x}d\xi\right] = \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left[\frac{\sin\left(t\xi\rho(\xi)e^{-i\,\theta(\xi)}\right)}{\xi\rho(\xi)}e^{i(\theta(\xi)+\xi x)} + \frac{\sin\left(t\xi\rho(\xi)e^{i\,\theta(\xi)}\right)}{\xi\rho(\xi)}e^{-i(\theta(\xi)+\xi x)}\right]d\xi.
\end{aligned}
$$

Преобразуем подынтегральную функцию, предварительно обозначив для удобства вычислений следующие функции:

$$
\alpha := t\xi\rho(\xi)\cos\theta(\xi),\quad \beta := i\,t\xi\rho(\xi)\sin\theta(\xi),\quad \gamma := \theta(\xi)+\xi x. \tag{1.6}
$$

Получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sin\left(t\xi\rho(\xi)e^{-i\,\theta(\xi)}\right)}{\xi\rho(\xi)}e^{i(\theta(\xi)+\xi x)} + \frac{\sin\left(t\xi\rho(\xi)e^{i\,\theta(\xi)}\right)}{\xi\rho(\xi)}e^{-i(\theta(\xi)+\xi x)} = \\
&\qquad = \frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\rho(\xi)\xi}(\cos\gamma+i\sin\gamma) + \\
&\qquad + \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\rho(\xi)\xi}(\cos\gamma-i\sin\gamma) = \\
&\qquad = 2\frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma-i\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\rho(\xi)\xi}.
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

Далее преобразуем функции

$$
\cos\beta = \cos\left(i\,t\xi\rho(\xi)\sin\theta(\xi)\right) = \mathrm{ch}\left(\varphi\right),
$$

$$
\sin\beta = \sin\left(i\,t\xi\rho(\xi)\sin\theta(\xi)\right) = i\,\mathrm{sh}\left(\varphi\right),
$$

где

$$
\varphi := t\xi\rho(\xi)\sin\theta(\xi). \tag{1.8}
$$

В результате из (1.7) получим

$$2\frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma - i\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\rho(\xi)\xi} =$$
$$= 2\frac{\sin\alpha\,\mathrm{ch}(\varphi)\cos\gamma + \cos\alpha\,\mathrm{sh}(\varphi)\sin\gamma}{\rho(\xi)\xi} =$$
$$= \frac{\sin\alpha\cos\gamma\,(e^{\varphi}+e^{-\varphi}) + \cos\alpha\sin\gamma\,(e^{\varphi}-e^{-\varphi})}{\rho(\xi)\xi} =$$
$$= \frac{(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma)\,e^{\varphi} + (\sin\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma)\,e^{-\varphi}}{\rho(\xi)\xi} =$$
$$= \frac{\sin{(\alpha+\gamma)}e^{\varphi} + \sin{(\alpha-\gamma)}e^{-\varphi}}{\rho(\xi)\xi}.$$

Таким образом с учетом формул (1.6) и (1.7) результатом обратного преобразования Фурье F_{ξ}^{-1} является выражение

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left[\frac{\sin{(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) + \theta(\xi) + \xi x)}}{\rho(\xi)\xi}e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin{(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) - \theta(\xi) - \xi x)}}{\rho(\xi)\xi}e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}\right]d\xi.$$

Отсюда сделаем вывод, что гладкие решения уравнения (1.1) следует искать в виде

$$G(x,t;\xi) := \sin{(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) + \theta(\xi) + \xi x)}e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)} +$$
$$+ \sin{(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) - \theta(\xi) - \xi x)}e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}. \quad (1.9)$$

То, что последняя формула дает семейство гладких решений уравнения (1.1), доказывается в следующем разделе.

1.1.2. Существование классических решений.

Теорема 1.1.1. *Если выполняется неравенство*

$$a_1\cos{(h_1\xi)} + a_2\cos{(h_2\xi)} > 0 \quad (1.10)$$

для любого вещественного ξ, *то функция* $G(x,t;\xi)$, *определенная формулой* (1.9), *удовлетворяет уравнению* (1.1) *при любом вещественном значении параметра* ξ.

Доказательство. Подставим непосредственно функцию (1.9) в уравнение (1.1). Сначала вычислим

$$\begin{aligned}G_t(x,t;\xi) = \rho(\xi)\xi\left[\cos\theta(\xi)\cos\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)+\theta(\xi)+\xi x\right)+\right.\\ \left.+\sin\theta(\xi)\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)+\theta(\xi)+\xi x\right)\right]e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}+\\ +\rho(\xi)\xi\left[\cos\theta(\xi)\cos\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)-\theta(\xi)-\xi x\right)-\right.\\ \left.-\sin\theta(\xi)\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)-\theta(\xi)-\xi x\right)\right]e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)} =\\ =\rho(\xi)\xi\cos\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)+\xi x\right)e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}+\\ +\rho(\xi)\xi\cos\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)-\xi x\right)e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}.\end{aligned}$$

Теперь найдем

$$\begin{aligned}G_{tt}(x,t;\xi) = -\rho^2(\xi)\xi^2\left[\cos\theta(\xi)\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)+\xi x\right)-\right.\\ \left.-\sin\theta(\xi)\cos\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)+\xi x\right)\right]e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}-\\ -\rho^2(\xi)\xi^2\left[\cos\theta(\xi)\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)-\xi x\right)+\right.\\ \left.+\sin\theta(\xi)\cos\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)-\xi x\right)\right]e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)} =\\ =-\rho^2(\xi)\xi^2\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)-\theta(\xi)+\xi x\right)e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}-\\ -\rho^2(\xi)\xi^2\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)+\theta(\xi)-\xi x\right)e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}.\end{aligned}$$

Производные по пространственной переменной вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}G_x(x,t;\xi) = \xi\cos\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)+\theta(\xi)+x\xi\right)e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}-\\ -\xi\cos\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)-\theta(\xi)-x\xi\right)e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_{xx}(x,t;\xi) = -\xi^2\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)+\theta(\xi)+x\xi\right)e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}-\\ -\xi^2\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)-\theta(\xi)-x\xi\right)e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}.\end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned}G_{xx}(x-h_j,t;\xi) =\\ = -\xi^2\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)+\theta(\xi)+\xi x-h_j\xi\right)e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}-\\ -\xi^2\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)-\theta(\xi)-\xi x+h_j\xi\right)e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}.\end{aligned}$$

Подставив найденные производные в уравнение (1.1), видим, что мы должны доказать равенство

$$-\xi^2\Big[\rho^2(\xi)\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)-\theta(\xi)+\xi x\right)e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}+ \\ +\rho^2(\xi)\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)+\theta(\xi)-\xi x\right)e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}\Big]=$$

$$=-\xi^2a_1\Big[\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)+\theta(\xi)+\xi x-h_1\xi\right)e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}+ \\ +\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)-\theta(\xi)-\xi x+h_1\xi\right)e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}\Big]- \\ -\xi^2a_2\Big[\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)+\theta(\xi)+\xi x-h_2\xi\right)e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}+ \\ +\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)-\theta(\xi)-\xi x+h_2\xi\right)e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}\Big],$$

т. е. равенство

$$\rho^2(\xi)\Big[\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)-\theta(\xi)+\xi x\right)e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}+ \\ +\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)+\theta(\xi)-\xi x\right)e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}\Big]= \\ =\left[a_1\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)+\theta(\xi)+\xi x-h_1\xi\right)+\right. \\ \left.+a_2\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)+\theta(\xi)+\xi x-h_2\xi\right)\right]e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}+ \\ +\left[a_1\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)-\theta(\xi)-\xi x+h_1\xi\right)+\right. \\ \left.+a_2\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)-\theta(\xi)-\xi x+h_2\xi\right)\right]e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}. \quad (1.11)$$

Равенство (1.11) выполняется, если выполняются тождества:

$$\rho^2(\xi)\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)-\theta(\xi)+\xi x\right)= \\ =a_1\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)+\theta(\xi)+\xi x-h_1\xi\right)+ \\ +a_2\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)+\theta(\xi)+\xi x-h_2\xi\right) \quad (1.12)$$

и

$$\rho^2(\xi)\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)+\theta(\xi)-\xi x\right)= \\ =a_1\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)-\theta(\xi)-\xi x+h_1\xi\right)+ \\ +a_2\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)-\theta(\xi)-\xi x+h_2\xi\right). \quad (1.13)$$

Проверим справедливость первого из них. Введем для удобства в дальнейших вычислениях обозначение

$$\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) - \theta(\xi) + \xi x =: \varphi = \varphi(x,t,\xi)$$

и преобразуем правую часть равенства (1.12) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&a_1\sin(\varphi + (2\theta(\xi) - h_1\xi)) + a_2\sin(\varphi + (2\theta(\xi) - h_2\xi)) = \\
&\qquad = a_1[\sin\varphi\cos(2\theta(\xi) - h_1\xi) + \cos\varphi\sin(2\theta(\xi) - h_1\xi)] + \\
&\qquad + a_2[\sin\varphi\cos(2\theta(\xi) - h_2\xi) + \cos\varphi\sin(2\theta(\xi) - h_2\xi)] = \\
&\qquad = a_1[\sin\varphi(\cos 2\theta(\xi)\cos(h_1\xi) + \sin 2\theta(\xi)\sin(h_1\xi)) + \\
&\qquad + \cos\varphi(\sin 2\theta(\xi)\cos(h_1\xi) - \cos 2\theta(\xi)\sin(h_1\xi))] + \\
&\qquad + a_2[\sin\varphi(\cos 2\theta(\xi)\cos(h_2\xi) + \sin 2\theta(\xi)\sin(h_2\xi)) + \\
&\qquad + \cos\varphi(\sin 2\theta(\xi)\cos(h_2\xi) - \cos 2\theta(\xi)\sin(h_2\xi))] = \\
&\qquad = (a_1\cos(h_1\xi) + a_2\cos(h_2\xi))\sin\varphi\cos 2\theta(\xi) + \\
&\qquad + (a_1\sin(h_1\xi) + a_2\sin(h_2\xi))\sin\varphi\sin 2\theta(\xi) + \\
&\qquad + (a_1\cos(h_1\xi) + a_2\cos(h_2\xi))\cos\varphi\sin 2\theta(\xi) - \\
&\qquad - (a_1\sin(h_1\xi) + a_2\sin(h_2\xi))\cos\varphi\cos 2\theta(\xi). \qquad (1.14)
\end{aligned}$$

Теперь с учетом $\rho(\xi)$ и (1.5) и использовав соотношения

$$\operatorname{arctg} x = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

преобразуем функции $\cos 2\theta(\xi)$ и $\sin 2\theta(\xi)$, возникшие в выражении (1.14), следующим образом:

$$\begin{aligned}
\cos 2\theta(\xi) &= \cos\left(\operatorname{arctg}\frac{a_1\sin(h_1\xi) + a_2\sin(h_2\xi)}{a_1\cos(h_1\xi) + a_2\cos(h_2\xi)}\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_1\sin(h_1\xi)+a_2\sin(h_2\xi)}{a_1\cos(h_1\xi)+a_2\cos(h_2\xi)}\right)^2}} = \\
&= \frac{\sqrt{(a_1\cos(h_1\xi) + a_2\cos(h_2\xi))^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(h_1 - h_2)\xi}} = \frac{|a_1\cos(h_1\xi) + a_2\cos(h_2\xi)|}{\rho^2(\xi)},
\end{aligned}$$

$$\sin 2\theta(\xi) = \sin\left(\operatorname{arctg}\frac{a_1 \sin(h_1\xi) + a_2 \sin(h_2\xi)}{a_1 \cos(h_1\xi) + a_2 \cos(h_2\xi)}\right) =$$
$$= \frac{(a_1 \sin(h_1\xi) + a_2 \sin(h_2\xi))|a_1 \cos(h_1\xi) + a_2 \cos(h_2\xi)|}{(a_1 \cos(h_1\xi) + a_2 \cos(h_2\xi))\rho^2(\xi)}.$$

По условию теоремы неравенство (1.10) справедливо для любого вещественного ξ, а значит, имеют место соотношения

$$\cos 2\theta(\xi) = \frac{a_1 \cos(h_1\xi) + a_2 \cos(h_2\xi)}{\rho^2(\xi)},$$

$$\sin 2\theta(\xi) = \frac{a_1 \sin(h_1\xi) + a_2 \sin(h_2\xi)}{\rho^2(\xi)}.$$

Подставив найденные $\cos 2\theta(\xi)$ и $\sin 2\theta(\xi)$ в выражение (1.14), получим

$$\rho^{-2}(\xi)[(a_1 \cos(h_1\xi) + a_2 \cos(h_2\xi))^2 \sin\varphi +$$
$$+ (a_1 \sin(h_1\xi) + a_2 \sin(h_2\xi))^2 \sin\varphi +$$
$$+ (a_1 \cos(h_1\xi) + a_2 \cos(h_2\xi))(a_1 \sin(h_1\xi) + a_2 \sin(h_2\xi)) \cos\varphi -$$
$$-(a_1 \cos(h_1\xi) + a_2 \cos(h_2\xi))(a_1 \sin(h_1\xi) + a_2 \sin(h_2\xi)) \cos\varphi] =$$
$$= \rho^{-2}(\xi)[(a_1 \cos(h_1\xi) + a_2 \cos(h_2\xi))^2 +$$
$$+ (a_1 \sin(h_1\xi) + a_2 \sin(h_2\xi))^2] \sin\varphi =$$
$$= \rho^{-2}(\xi)\left[a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(h_1 - h_2)\xi\right] \sin\varphi =$$
$$= \rho^{-2}(\xi)\rho^4(\xi) \sin\varphi = \rho^2(\xi) \sin(\rho(\xi)\xi t \cos\theta(\xi) - \theta(\xi) + \xi x).$$

Тем самым, справедливость равенства (1.12) доказана.

Для доказательства равенства (1.13) введем обозначение

$$\rho(\xi)\xi t \cos\theta(\xi) + \theta(\xi) - \xi x =: \psi = \psi(x, t, \xi)$$

и проведем преобразования в правой части формулы (1.13).

В результате получим соотношение

$$a_1 \sin(\psi - (2\theta(\xi) - h_1\xi)) + a_2 \sin(\psi - (2\theta(\xi) - h_2\xi)) =$$
$$= (a_1 \cos(h_1\xi) + a_2 \cos(h_2\xi)) \sin\psi \cos 2\theta(\xi) +$$
$$+ (a_1 \sin(h_1\xi) + a_2 \sin(h_2\xi)) \sin\psi \sin 2\theta(\xi) -$$

$$
\begin{aligned}
-\,(a_1\cos(h_1\xi)+a_2\cos(h_2\xi))\cos\psi\sin 2\theta(\xi)+\\
+\,(a_1\sin(h_1\xi)+a_2\sin(h_2\xi))\cos\psi\cos 2\theta(\xi)=\\
=\rho^{-2}(\xi)\left[a_1^2+a_2^2+2a_1a_2\cos(h_1-h_2)\xi\right]\sin\psi=\\
=\rho^{-2}(\xi)\rho^4(\xi)\sin\psi=\\
=\rho^2(\xi)\sin(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)+\theta(\xi)-\xi x),
\end{aligned}
$$

что доказывает справедливость равенства (1.13), а следовательно, и равенства (1.11).

Таким образом, при выполнении условия (1.10) при любом вещественном значении ξ функция (1.9) удовлетворяет уравнению (1.1) в классическом смысле при любом вещественном значении параметра ξ. Теорема доказана.

Если ослабить условие теоремы, разрешив неравенству (1.10) нарушаться на некоторых подмножествах вещественной оси, то, полностью повторив рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы, получим справедливость следующего утверждения.

Следствие 1.1.1. *Функция $G(x,t;\xi)$, определенная формулой* (1.9)*, удовлетворяет уравнению* (1.1) *при любом вещественном значении параметра ξ, для которого выполнено неравенство* (1.10).

Замечание 1.1.1. Если неравенство (1.10) выполнено, то знаменатель в формуле (1.5) в ноль не обращается, а значит, в условиях теоремы и следствия любое решение, представляемое формулой (1.9), действительно является гладким.

1.1.3. Смысл условия на коэффициенты уравнения и классы уравнений, удовлетворяющих этому условию.

Дифференциально-разностный оператор, содержащийся в правой части уравнения (1.1), представляет собой суперпозицию дифференциального оператора D_x^2 и оператора сдвига R, действующего следующим образом:

$$Ru(x,t)=a_1u(x-h_1,t)+a_2u(x-h_2,t).$$

Его символ равен

$$a_1\cos(h_1\xi)+a_2\cos(h_2\xi)+i(a_1\sin(h_1\xi)+a_2\sin(h_2\xi)),$$

т. е. неравенство (1.10) означает положительность вещественной части символа оператора R в точке ξ. Таким образом, условие теоремы равносильно условию положительности вещественной части символа оператора сдвига, содержащегося в уравнении (1.1), на всей вещественной оси (см. [105, §8-9] и [41, разд. 1.6]).

Возникает естественный вопрос о том, для каких уравнений указанное условие положительности вещественной части символа оператора сдвига выполняется.

Предположим, что в уравнении (1.1) все $a_j \neq 0$ и $h_j \neq 0$, $j = 1, 2$.

Обозначив $\widetilde{h}_j = h_j/2$ ($j = 1, 2$), получим, что неравенство (1.10) равносильно неравенству

$$2a_1 \cos^2(\widetilde{h}_1\xi) + 2a_2 \cos^2(\widetilde{h}_2\xi) > a_1 + a_2. \tag{1.15}$$

Для знаков коэффициентов a_1 и a_2 возможны следующие четыре случая:

1. Пусть $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Зафиксируем $\xi = \pi/(2\widetilde{h}_2)$. Тогда $\cos^2(\widetilde{h}_2\xi) = 0$, а $\cos^2(\widetilde{h}_1\xi)$ не больше единицы. При выбранном ξ, поскольку $a_1 > 0$, левая часть неравенства (1.15) не больше $2a_1$, а значит, должно выполняться неравенство $2a_1 > a_1 + a_2$, т. е. $a_1 > a_2$. При выборе значения $\xi = \pi/(2\widetilde{h}_1)$ аналогично получим обратное неравенство $a_2 > a_1$. Следовательно, при $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$ неравенство (1.15), а значит, и неравенство (1.10) выполняться при всех $\xi \in \mathbb{R}^1$ не могут.

2. Пусть $a_1 < 0$, $a_2 < 0$. Возьмем $\xi = \pi/\widetilde{h}_2$. Тогда $\cos^2(\widetilde{h}_2\xi) = 1$, а $\cos^2(\widetilde{h}_1\xi)$ неотрицателен. Поэтому при этом ξ, поскольку $a_1 < 0$, левая часть неравенства (1.15) не больше $2a_2$, а значит, должно выполняться неравенство $2a_2 > a_1 + a_2$, т. е. $a_2 > a_1$. Взяв $\xi = \pi/\widetilde{h}_1$, аналогично получим обратное неравенство $a_1 > a_2$. Следовательно, и при $a_1 < 0$, $a_2 < 0$ равносильные неравенства (1.10) и (1.15) выполняться при всех $\xi \in \mathbb{R}^1$ не могут.

3. Пусть теперь $a_1 > 0$, $a_2 < 0$. Возьмем $\xi = \pi/(2\widetilde{h}_1)$. Тогда $\cos^2(\widetilde{h}_1\xi) = 0$, а значит, левая часть неравенства (1.15), поскольку $a_2 < 0$, не положительна, поэтому $a_1 + a_2 < 0$. Если взять $\xi = \pi/\widetilde{h}_2$, тогда $\cos^2(\widetilde{h}_2\xi) = 0$, а значит, левая часть неравенства (1.15), поскольку $a_1 > 0$, не больше $2a_1 + 2a_2$. Поэтому должно выполняться неравенство $2a_1 + 2a_2 > a_1 + a_2$, т. е. неравенство $a_1 + a_2 > 0$, обратное установленному. Следовательно, при $a_1 > 0$ и

$a_2 < 0$ неравенство (1.15), а значит, и неравенство (1.10) выполняться при всех $\xi \in \mathbb{R}^1$ не могут.

4. $a_1 < 0$, $a_2 > 0$. Этот случай рассматривается так же, как и случай 3.

Таким образом мы доказали, что если ни один из параметров a_1, a_2 и h_1, h_2 не равен нулю, то выполнение условия (1.10) теоремы при всех $\xi \in \mathbb{R}^1$ невозможно.

Рассмотрим теперь уравнения вида (1.1), в которых один из сдвигов равен нулю, а модуль коэффициента при оставшемся (единственном) нелокальном слагаемом не превосходит коэффициента при первом слагаемом в правой части, т. е. уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 u(x-h,t)}{\partial x^2}. \tag{1.16}$$

Для уравнений из этого класса символ соответствующего оператора сдвига равен

$$a_1 + a_2 \cos(h\xi) + a_2 i \sin(h\xi),$$

а значит, условие теоремы примет вид $a_1 + a_2 \cos(h\xi) > 0$.

Следствие 1.1.2. *Если выполняется неравенство $a_1 + a_2 \cos(h\xi) > 0$ при всех вещественных ξ, то функция* (1.9), *у которой*

$$\rho(\xi) := \left[a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(h\xi)\right]^{1/4} \tag{1.17}$$

и

$$\theta(\xi) := \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{a_2 \sin(h\xi)}{a_1 + a_2 \cos(h\xi)}, \tag{1.18}$$

является классическим решением уравнения (1.16).

Для доказательства функцию (1.9) с видоизмененными выражениями (1.17) и (1.18) подставляем по аналогии с теоремой 1.1.1 непосредственно в уравнение (1.16) и убеждаемся, что она ему удовлетворяет.

Условие $a_1 + a_2 \cos(h\xi) > 0$ выполняется при всех вещественных ξ, если коэффициенты уравнения удовлетворяют неравенству $|a_2| < a_1$.

Пусть теперь в уравнении (1.1) в ноль обращается не один из сдвигов, а один из коэффициентов в правой части. В этом случае уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u(x-h,t)}{\partial x^2}, \tag{1.19}$$

а однопараметрическое семейство его решений — вид:

$$G(x,t;\xi) = \sin\left[\left(\sqrt{a}\,t\cos\frac{h\xi}{2} + x + \frac{h}{2}\right)\xi\right] e^{\sqrt{a}\,\xi t \sin\frac{h\xi}{2}} + \\ + \sin\left[\left(\sqrt{a}\,t\cos\frac{h\xi}{2} - x - \frac{h}{2}\right)\xi\right] e^{-\sqrt{a}\,\xi t \sin\frac{h\xi}{2}}. \quad (1.20)$$

Этот случай — особый: здесь условие положительности вещественной части символа оператора сдвига не накладывается, а для существования функции $G(x,t;\xi)$ при любом вещественном значении параметра достаточно положительности (единственного) коэффициента в правой части уравнения.

Докажем это утверждение.

Теорема 1.1.2. *Если коэффициент $a > 0$, то, независимо от вещественного значения h, функция* (1.20) *является гладким (классическим) решением уравнения* (1.19) *при любом вещественном значении ξ.*

Доказательство. Подставим непосредственно функцию (1.20) в уравнение (1.19). Для этого вычислим производные.

$$G_x(x,t;\xi) = \xi\cos\left[\left(\sqrt{a}\,t\cos\frac{h\xi}{2} + x + \frac{h}{2}\right)\xi\right] e^{\sqrt{a}\,\xi t \sin\frac{h\xi}{2}} - \\ - \xi\cos\left[\left(\sqrt{a}\,t\cos\frac{h\xi}{2} - x - \frac{h}{2}\right)\xi\right] e^{-\sqrt{a}\,\xi t \sin\frac{h\xi}{2}};$$

$$G_{xx}(x,t;\xi) = -\xi^2\sin\left[\left(\sqrt{a}\,t\cos\frac{h\xi}{2} + x + \frac{h}{2}\right)\xi\right] e^{\sqrt{a}\,\xi t \sin\frac{h\xi}{2}} - \\ - \xi^2\sin\left[\left(\sqrt{a}\,t\cos\frac{h\xi}{2} - x - \frac{h}{2}\right)\xi\right] e^{-\sqrt{a}\,\xi t \sin\frac{h\xi}{2}},$$

откуда имеем

$$G_{xx}(x-h,t;\xi) = -\xi^2\sin\left[\left(\sqrt{a}\,t\cos\frac{h\xi}{2} + x - \frac{h}{2}\right)\xi\right] e^{\sqrt{a}\,\xi t \sin\frac{h\xi}{2}} - \\ - \xi^2\sin\left[\left(\sqrt{a}\,t\cos\frac{h\xi}{2} - x + \frac{h}{2}\right)\xi\right] e^{-\sqrt{a}\,\xi t \sin\frac{h\xi}{2}}. \quad (1.21)$$

Теперь вычислим производные по времени.

$$
\begin{aligned}
G_t(x,t;\xi) = {} & \sqrt{a}\,\xi\cos\frac{h\xi}{2}\cos\left[\left(\sqrt{a}\,t\cos\frac{h\xi}{2}+x+\frac{h}{2}\right)\xi\right]e^{\sqrt{a}\,\xi t\sin\frac{h\xi}{2}}+\\
& +\sqrt{a}\,\xi\sin\frac{h\xi}{2}\sin\left[\left(\sqrt{a}\,t\cos\frac{h\xi}{2}+x+\frac{h}{2}\right)\xi\right]e^{\sqrt{a}\,\xi t\sin\frac{h\xi}{2}}+\\
& +\sqrt{a}\,\xi\cos\frac{h\xi}{2}\cos\left[\left(\sqrt{a}\,t\cos\frac{h\xi}{2}-x-\frac{h}{2}\right)\xi\right]e^{-\sqrt{a}\,\xi t\sin\frac{h\xi}{2}}-\\
& -\sqrt{a}\,\xi\sin\frac{h\xi}{2}\sin\left[\left(\sqrt{a}\,t\cos\frac{h\xi}{2}-x-\frac{h}{2}\right)\xi\right]e^{-\sqrt{a}\,\xi t\sin\frac{h\xi}{2}}=\\
& =\sqrt{a}\,\xi\left(\cos\frac{h\xi}{2}\cdot\cos\left[\left(\sqrt{a}\,t\cos\frac{h\xi}{2}+x+\frac{h}{2}\right)\xi\right]+\right.\\
& \left.+\sin\frac{h\xi}{2}\cdot\sin\left[\left(\sqrt{a}\,t\cos\frac{h\xi}{2}+x+\frac{h}{2}\right)\xi\right]\right)e^{\sqrt{a}\,\xi t\sin\frac{h\xi}{2}}+\\
& +\sqrt{a}\,\xi\left(\cos\frac{h\xi}{2}\cdot\cos\left[\left(\sqrt{a}\,t\cos\frac{h\xi}{2}-x-\frac{h}{2}\right)\xi\right]+\right.\\
& \left.+\sin\frac{h\xi}{2}\cdot\sin\left[\left(\sqrt{a}\,t\cos\frac{h\xi}{2}-x-\frac{h}{2}\right)\xi\right]\right)e^{-\sqrt{a}\,\xi t\sin\frac{h\xi}{2}}=\\
& =\sqrt{a}\,\xi\cos\left[\left(\sqrt{a}\,t\cos\frac{h\xi}{2}+x\right)\xi\right]e^{\sqrt{a}\,\xi t\sin\frac{h\xi}{2}}+\\
& \qquad+\sqrt{a}\,\xi\cos\left[\left(\sqrt{a}\,t\cos\frac{h\xi}{2}-x\right)\xi\right]e^{-\sqrt{a}\,\xi t\sin\frac{h\xi}{2}};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{tt}(x,t;\xi) = {} & -a\xi^2\cos\frac{h\xi}{2}\cdot\sin\left[\left(\sqrt{a}\,t\cos\frac{h\xi}{2}+x\right)\xi\right]e^{\sqrt{a}\,\xi t\sin\frac{h\xi}{2}}+\\
& +a\xi^2\sin\frac{h\xi}{2}\cdot\cos\left[\left(\sqrt{a}\,t\cos\frac{h\xi}{2}+x\right)\xi\right]e^{\sqrt{a}\,\xi t\sin\frac{h\xi}{2}}-\\
& -a\xi^2\cos\frac{h\xi}{2}\cdot\sin\left[\left(\sqrt{a}\,t\cos\frac{h\xi}{2}-x\right)\xi\right]e^{-\sqrt{a}\,\xi t\sin\frac{h\xi}{2}}-\\
& -a\xi^2\sin\frac{h\xi}{2}\cdot\cos\left[\left(\sqrt{a}\,t\cos\frac{h\xi}{2}-x\right)\xi\right]e^{-\sqrt{a}\,\xi t\sin\frac{h\xi}{2}}=\\
& =-a\xi^2\left(\sin\left[\left(\sqrt{a}\,t\cos\frac{h\xi}{2}+x\right)\xi\right]\cdot\cos\frac{h\xi}{2}-\right.\\
& \qquad\left.-\cos\left[\left(\sqrt{a}\,t\cos\frac{h\xi}{2}+x\right)\xi\right]\cdot\sin\frac{h\xi}{2}\right)e^{\sqrt{a}\,\xi t\sin\frac{h\xi}{2}}-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- a\xi^2 \left(\sin\left[\left(\sqrt{a}\, t\cos\frac{h\xi}{2} - x\right)\xi\right] \cdot \cos\frac{h\xi}{2} + \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \cos\left[\left(\sqrt{a}\, t\cos\frac{h\xi}{2} - x\right)\xi\right] \cdot \sin\frac{h\xi}{2} \right) e^{-\sqrt{a}\,\xi t \sin\frac{h\xi}{2}} = \\
&\qquad\qquad = -a\xi^2 \sin\left[\left(\sqrt{a}\, t\cos\frac{h\xi}{2} + x - \frac{h}{2}\right)\xi\right] e^{\sqrt{a}\,\xi t \sin\frac{h\xi}{2}} - \\
&\qquad\qquad\qquad - a\xi^2 \sin\left[\left(\sqrt{a}\, t\cos\frac{h\xi}{2} - x + \frac{h}{2}\right)\xi\right] e^{-\sqrt{a}\,\xi t \sin\frac{h\xi}{2}}.
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

Подставим найденные производные (1.21) и (1.22) в уравнение (1.19):

$$
\begin{aligned}
&G_{tt}(x,t;\xi) - a\, G_{xx}(x-h,t;\xi) = \\
&\qquad = -a\xi^2 \left(\sin\left[\left(\sqrt{a}\, t\cos\frac{h\xi}{2} + x - \frac{h}{2}\right)\xi\right] - \right.\\
&\qquad \left. - \sin\left[\left(\sqrt{a}\, t\cos\frac{h\xi}{2} + x - \frac{h}{2}\right)\xi\right] \right) e^{\sqrt{a}\,\xi t \sin\frac{h\xi}{2}} - \\
&\qquad - a\xi^2 \left(\sin\left[\left(\sqrt{a}\, t\cos\frac{h\xi}{2} - x + \frac{h}{2}\right)\xi\right] - \right.\\
&\qquad\qquad \left. - \sin\left[\left(\sqrt{a}\, t\cos\frac{h\xi}{2} - x + \frac{h}{2}\right)\xi\right] \right) e^{-\sqrt{a}\,\xi t \sin\frac{h\xi}{2}} = 0.
\end{aligned}
$$

Теорема доказана.

§1.2. Уравнения с n сдвигами общего вида

1.2.1. Построение решений уравнения.

Рассмотрим в полуплоскости $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times (0,+\infty)$ уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \frac{\partial^2 u(x-h_j,t)}{\partial x^2}, \tag{1.23}$$

где a_j и h_j $(j = \overline{1,n})$ — заданные вещественные числа, на сдвиги h_j никакие условия соизмеримости не накладываются.

Положим, что для любого значения $\xi \in \mathbb{R}^1$ выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \cos{(h_j \xi)} > 0, \tag{1.24}$$

что равносильно условию положительности вещественной части символа оператора сдвига в уравнении.

Используем для построения решений уравнения (1.23) операционную схему, согласно которой после формального применения к уравнению преобразования Фурье $F_x := F$ и с учетом формулы $F[f(x-h)] = e^{ih\xi}F[f]$ рассмотрим следующую задачу:

$$Z''(t) + \xi^2 \sum_{j=1}^{n} a_j e^{ih_j\xi} \, Z(t) = 0, \tag{1.25}$$

$$Z(0) = 0, \quad Z'(0) = 1. \tag{1.26}$$

Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (1.25), имеет корни

$$k_{1,2} = \pm i \, \xi \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j e^{ih_j\xi}}.$$

Тогда общее решение уравнения (1.25) имеет вид

$$Z(t) = C_1(\xi) \cos\left(t\xi \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j e^{ih_j\xi}} \right) + C_2(\xi) \sin\left(t\xi \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j e^{ih_j\xi}} \right),$$

где $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ — произвольные постоянные, зависящие от параметра ξ.

Подставив последнее выражение в начальные условия (1.26), найдем значения констант

$$C_1(\xi) = 0, \quad C_2(\xi) = \xi\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j e^{ih_j\xi}}.$$

В результате получили решение задачи (1.25), (1.26):

$$Z(t) = \frac{\sin\left(t\xi\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j e^{ih_j\xi}}\right)}{\xi\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j e^{ih_j\xi}}}. \tag{1.27}$$

Для удобства в дальнейших вычислениях введем функции

$$\rho(\xi) := \left[\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \cos(h_j\xi)\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \sin(h_j\xi)\right)^2\right]^{1/4}, \tag{1.28}$$

$$\theta(\xi) := \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j \sin(h_j\xi)}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j \cos(h_j\xi)}. \tag{1.29}$$

Отметим, что при выполнении условия (1.24) функции (1.28) и (1.29) при всех значениях a_j, h_j $(j = \overline{1,n})$ и ξ определены корректно.

Теперь преобразуем подкоренное выражение в формуле (1.27) следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j e^{ih_j\xi} = \sum_{j=1}^{n} a_j(\cos(h_j\xi) + i\sin(h_j\xi)) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(h_j\xi) + i\sum_{j=1}^{n} a_j \sin(h_j\xi) =$$

$$= \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \cos(h_j\xi)\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \sin(h_j\xi)\right)^2} \times$$

$$\times\exp\left(i\,\mathrm{arctg}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j\sin(h_j\xi)}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j\cos(h_j\xi)}\right)=\rho^2(\xi)e^{i\,2\theta(\xi)}.$$

Таким образом, функция (1.27) принимает вид

$$Z(t)=\frac{\sin\left(t\xi\rho(\xi)e^{i\,\theta(\xi)}\right)}{\xi\rho(\xi)e^{i\,\theta(\xi)}}.$$

Применим к последнему выражению обратное преобразование Фурье F_ξ^{-1} и проведем преобразования как в п. 1.1.1 главы §1.1. В результате получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\left(t\xi\rho(\xi)e^{i\,\theta(\xi)}\right)}{\xi\rho(\xi)e^{i\,\theta(\xi)}}e^{-i\xi x}d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left[\frac{\sin(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)+\theta(\xi)+\xi x)}{\rho(\xi)\xi}e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\sin(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)-\theta(\xi)-\xi x)}{\rho(\xi)\xi}e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}\right]d\xi.$$

Из полученного интегрального выражения выберем следующее однопараметрическое семейство функций:

$$G(x,t;\xi):=\sin(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)+\theta(\xi)+\xi x)e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}+$$
$$+\sin(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)-\theta(\xi)-\xi x)e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}. \quad (1.30)$$

В следующем пункте покажем, что формула (1.30) определяет семейство гладких классических решений уравнения (1.23).

1.2.2. Существование классических решений.

Теорема 1.2.1. *При выполнении условия* (1.24) *функция* (1.30) *удовлетворяет уравнению* (1.23) *при любом вещественном значении параметра* ξ.

Доказательство. Вычислим сначала производные

$$G_t(x,t;\xi)=\rho(\xi)\xi\cos(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)+\xi x)e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}+$$
$$+\rho(\xi)\xi\cos(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)-\xi x)e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)},$$

$$G_{tt}(x,t;\xi) = -\rho^2(\xi)\xi^2 \sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) - \theta(\xi) + \xi x\right) e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)} - \\ - \rho^2(\xi)\xi^2 \sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) + \theta(\xi) - \xi x\right) e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}. \quad (1.31)$$

Из (1.30) будем иметь

$$G(x-h_j,t;\xi) = \sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) + \theta(\xi) + \xi x - h_j\xi\right) e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)} + \\ + \sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) - \theta(\xi) - \xi x + h_j\xi\right) e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}.$$

Теперь найдем частные производные по пространственной переменной.

$$G_x(x-h_j,t;\xi) = \\ = \xi\cos\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) + \theta(\xi) + \xi x - h_j\xi\right) e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)} - \\ - \xi\cos\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) - \theta(\xi) - \xi x + h_j\xi\right) e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)},$$

$$G_{xx}(x-h_j,t;\xi) = \\ = -\xi^2\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) + \theta(\xi) + \xi x - h_j\xi\right) e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)} - \\ - \xi^2\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) - \theta(\xi) - \xi x + h_j\xi\right) e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}. \quad (1.32)$$

Подставив (1.31) и (1.32) в уравнение (1.23), получим

$$\rho^2(\xi)\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) - \theta(\xi) + \xi x\right) e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)} + \\ + \rho^2(\xi)\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) + \theta(\xi) - \xi x\right) e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)} = \\ = e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)} \sum_{j=1}^{n} a_j \sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) + \theta(\xi) + \xi x - h_j\xi\right) + \\ + e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)} \sum_{j=1}^{n} a_j \sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) - \theta(\xi) - \xi x + h_j\xi\right). \quad (1.33)$$

Равенство (1.33) выполняется, если выполняются следующие тождества:

$$\rho^2(\xi)\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) - \theta(\xi) + \xi x\right) = \\ = \sum_{j=1}^{n} a_j \sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) + \theta(\xi) + \xi x - h_j\xi\right), \quad (1.34)$$

$$\rho^2(\xi)\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)+\theta(\xi)-\xi x\right)=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}a_j\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)-\theta(\xi)-\xi x+h_j\xi\right). \quad (1.35)$$

Проверим справедливость формулы (1.34). Найдем сначала

$$\cos 2\theta(\xi)=\cos\operatorname{arctg}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\sin\left(h_j\xi\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\cos\left(h_j\xi\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\sin\left(h_j\xi\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\cos\left(h_j\xi\right)}\right)^2}}=$$

$$=\frac{\left|\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\cos\left(h_j\xi\right)\right|}{\sqrt{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\cos\left(h_j\xi\right)\right)^2+\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\sin\left(h_j\xi\right)\right)^2}}=\frac{\left|\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\cos\left(h_j\xi\right)\right|}{\rho^2(\xi)}. \quad (1.36)$$

В силу условия (1.24) из последнего выражения получим

$$\cos 2\theta(\xi)=\frac{\left|\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\cos\left(h_j\xi\right)\right|}{\rho^2(\xi)}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\cos\left(h_j\xi\right)}{\rho^2(\xi)}. \quad (1.37)$$

Теперь вычислим

$$\sin 2\theta(\xi)=\sin\operatorname{arctg}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\sin\left(h_j\xi\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\cos\left(h_j\xi\right)}=\frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\sin\left(h_j\xi\right)\right)\left|\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\cos\left(h_j\xi\right)\right|}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\cos\left(h_j\xi\right)\right)\rho^2(\xi)}.$$

И с учетом условия (1.24) из последнего выражения получим

$$\sin 2\theta(\xi)=\frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\sin\left(h_j\xi\right)\right)\left|\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\cos\left(h_j\xi\right)\right|}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\cos\left(h_j\xi\right)\right)\rho^2(\xi)}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\sin\left(h_j\xi\right)}{\rho^2(\xi)}. \quad (1.38)$$

Введем для удобства в дальнейших вычислениях обозначение

$$\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) - \theta(\xi) + \xi x =: \varphi,$$

и с учетом выражений (1.37) и (1.38) преобразуем правую часть (1.34):

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \sin\left(\varphi + (2\theta(\xi) - h_j\xi)\right) =$$

$$= \sin\varphi\cos 2\theta(\xi)\sum_{j=1}^{n} a_j\cos\left(h_j\xi\right) + \sin\varphi\sin 2\theta(\xi)\sum_{j=1}^{n} a_j\sin\left(h_j\xi\right) +$$

$$+ \cos\varphi\sin 2\theta(\xi)\sum_{j=1}^{n} a_j\cos\left(h_j\xi\right) - \cos\varphi\cos 2\theta(\xi)\sum_{j=1}^{n} a_j\sin\left(h_j\xi\right) =$$

$$= \frac{\sin\varphi}{\rho^2(\xi)}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\cos\left(h_j\xi\right)\right)^2 + \frac{\sin\varphi}{\rho^2(\xi)}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\sin\left(h_j\xi\right)\right)^2 +$$

$$+ \frac{\cos\varphi}{\rho^2(\xi)}\sum_{j=1}^{n} a_j\cos\left(h_j\xi\right)\sum_{j=1}^{n} a_j\sin\left(h_j\xi\right) -$$

$$- \frac{\cos\varphi}{\rho^2(\xi)}\sum_{j=1}^{n} a_j\sin\left(h_j\xi\right)\sum_{j=1}^{n} a_j\cos\left(h_j\xi\right) =$$

$$= \rho^2(\xi)\sin\varphi = \rho^2(\xi)\sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) - \theta(\xi) + \xi x\right).$$

Таким образом, справедливость равенства (1.34) доказана.

Для доказательства формулы (1.35) введем обозначение

$$\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) + \theta(\xi) - \xi x =: \psi$$

и проведем преобразования в правой части (1.35).

С учетом (1.37) и (1.38) в результате получим

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \sin\left(\psi - (2\theta(\xi) - h_j\xi)\right) =$$

$$= \sin\psi\cos 2\theta(\xi)\sum_{j=1}^{n} a_j\cos\left(h_j\xi\right) + \sin\psi\sin 2\theta(\xi)\sum_{j=1}^{n} a_j\sin\left(h_j\xi\right) -$$

$$-\cos\psi\sin 2\theta(\xi)\sum_{j=1}^{n} a_j\cos(h_j\xi)+\cos\psi\cos 2\theta(\xi)\sum_{j=1}^{n} a_j\sin(h_j\xi)=$$

$$=\frac{\sin\psi}{\rho^2(\xi)}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\cos(h_j\xi)\right)^2+\frac{\sin\psi}{\rho^2(\xi)}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\sin(h_j\xi)\right)^2-$$

$$-\frac{\cos\psi}{\rho^2(\xi)}\sum_{j=1}^{n} a_j\sin(h_j\xi)\sum_{j=1}^{n} a_j\cos(h_j\xi)+$$

$$+\frac{\cos\psi}{\rho^2(\xi)}\sum_{j=1}^{n} a_j\cos(h_j\xi)\sum_{j=1}^{n} a_j\sin(h_j\xi)=$$

$$=\rho^2(\xi)\sin\psi=\rho^2(\xi)\sin(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi)+\theta(\xi)-\xi x).$$

Тем самым, показана справедливость тождества (1.35). Теорема доказана.

1.2.3. Смысл условия на коэффициенты уравнения и классы уравнений, удовлетворяющих этому условию.

Выясним при каких коэффициентах в уравнении (1.23) выполняется условие условие теоремы (1.24).

Пусть в уравнении (1.23) все $a_j \neq 0$ и $h_j \neq 0$ ($j=\overline{1,n}$).

Обозначим $\widetilde{h}_j = h_j/2$ и воспользуемся формулой

$$\cos(h_j\xi)=\cos(2\widetilde{h}_j\xi)=2\cos^2(\widetilde{h}_j\xi)-1, \quad j=\overline{1,n}.$$

Тогда условие (1.24) равносильно неравенству

$$2\sum_{j=1}^{n} a_j\cos^2(\widetilde{h}_j\xi)>\sum_{j=1}^{n} a_j. \tag{1.39}$$

Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. $a_j>0, \quad h_j\neq 0, \quad j=\overline{1,n}.$

   Возьмем значение $\xi=\pi/(2\widetilde{h}_1)$, тогда $\cos^2(\widetilde{h}_1\xi)=0$, а все остальные значения $\cos^2(\widetilde{h}_k\xi)\leq 1$, $k=\overline{2,n}$. Получаем, что левая часть неравенства (1.39) не превосходит $2\sum\limits_{k=2}^{n} a_k$, то есть из (1.39) имеем

$$2a_2+2a_3+2a_4+\ldots+2a_{n-1}+2a_n>a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{n-1}+a_n$$

или

$$a_2 + [a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n] > a_1.$$

Пусть теперь $\xi = \pi/(2\widetilde{h}_2)$, тогда из (1.39) получим

$$a_1 + [a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n] > a_2.$$

Очевидно, что при $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$ последние два неравенства противоречат друг другу.

Следовательно, при всех $a_j > 0$ $(j = \overline{1,n})$ условие (1.39), а значит, и неравенство (1.24) выполняться при всех $\xi \in \mathbb{R}^1$ не могут.

2. $a_1 > 0, \quad a_2, a_3, \ldots, a_n < 0, \quad h_j \neq 0, \quad j = \overline{1,n}.$

Возьмем $\xi = \pi/\widetilde{h}_2$, тогда $\cos^2(\widetilde{h}_2\xi) = 1$. Так как $a_1 > 0$, $a_2, a_3, \ldots, a_n < 0$, то левая часть неравенства (1.39) не превосходит $2a_1 + 2a_2$, то есть из (1.39) будем иметь

$$2a_1 + 2a_2 > a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$

откуда

$$a_1 + a_2 > a_3 + [a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n].$$

Выберем теперь значение $\xi = \pi/\widetilde{h}_3$, тогда из (1.39) получим неравенство

$$a_1 + a_3 > a_2 + [a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n],$$

обратное, установленному выше.

Таким образом, при $a_1 > 0$, $a_2, a_3, \ldots, a_n < 0$ и $h_j \neq 0$ $(j = \overline{1,n})$ неравенства (1.39) и (1.24) выполняться при всех $\xi \in \mathbb{R}^1$ также не могут.

3. $a_1, a_2 > 0, \quad a_3, \ldots, a_n < 0, \quad h_j \neq 0, \quad j = \overline{1,n}.$

Этот случай рассматривается аналогично случаю 2. Если выбрать значения $\xi = \pi/\widetilde{h}_3$, а затем $\xi = \pi/\widetilde{h}_4$, то получим два неравенства

$$(a_1 + a_2) + a_3 > a_4 + [a_5 + \ldots + a_{n-1} + a_n],$$

$$(a_1 + a_2) + a_4 > a_3 + [a_5 + \ldots + a_{n-1} + a_n],$$

противоречащие друг другу.

Аналогично рассматриваются и все случаи, когда число положительных коэффициентов в уравнении увеличивается на единицу, а число отрицательных становится на единицу меньше. Во всех этих случаях неравенства (1.39) и (1.24) выполняться при всех $\xi \in \mathbb{R}^1$ не могут.

4. $a_j < 0, \quad h_j \neq 0, \quad j = \overline{1, n}.$

   Если $\xi = \pi/\widetilde{h}_1$, то $\cos^2(\widetilde{h}_1\xi) = 1$, а $\cos^2(\widetilde{h}_k\xi) \geq 0$, $k = \overline{2, n}$, и левая часть (1.39) не превосходит $2a_1$, то есть

$$2a_1 > a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

   или

$$a_1 > a_2 + [a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n].$$

   При $\xi = \pi/\widetilde{h}_2$ получим неравенство

$$a_2 > a_1 + [a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n],$$

   противоречащее неравенству, полученному выше. Тем самым, мы показали, что при всех $a_j < 0$ и $h_j \neq 0$ $(j = \overline{1, n})$ неравенства (1.39) и (1.24) для всех $\xi \in \mathbb{R}^1$ не выполняются.

Остается рассмотреть единственный класс уравнений (1.23) с n слагаемыми в правой части, когда один из сдвигов равен нулю, пусть для определенности $h_1 = 0$. Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \sum_{j=2}^{n} a_j \, \frac{\partial^2 u(x - h_j, t)}{\partial x^2}. \tag{1.40}$$

Следствие 1.2.1. *Если* $a_1 > \sum\limits_{j=2}^{n} |a_j|$, *то условие теоремы*

$$a_1 + \sum_{j=2}^{n} a_j \cos(h_j\xi) > 0$$

для уравнения (1.40) *выполняется.*

Глава 2. Уравнения с суммами операторов

В этой главе в области $(x, t) \in \mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$ рассматривается двумерное гиперболическое дифференциально-разностное уравнение, содержащее сумму дифференциального оператора и оператора сдвига по пространственной переменной, изменяющейся на всей вещественной оси. Другими словами уравнение содержит один нелокальный потенциал.

С помощью операционной схемы построено трехпараметрическое семейство решений. Доказана теорема, что если выполняется условие, связывающее коэффициенты и сдвиг уравнения, то построенные решения являются гладкими. Приведены классы уравнений, для которых указанное условие теоремы выполнено.

В следующем параграфе этой главы в области $(x, t) \in \mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$ рассматривается двумерное гиперболическое дифференциально-разностное уравнение, содержащее сумму дифференциального оператора и операторы сдвига по пространственной переменной, изменяющейся на всей вещественной оси (т.е. содержит n нелокальных потенциалов), все сдвиги в которых — произвольные вещественные величины, никакие условия соизмеримости на них не накладываются. Это является наиболее общим случаем.

Для уравнения построено трехпараметрическое семейство решений. Доказана теорема, что что если выполняется условие, связывающее коэффициенты и сдвиги уравнения, то построенные решения являются гладкими. Приведены классы уравнений, для которых указанные условия выполнены. Получены соотношения на коэффициенты и сдвиги в уравнении, выполнение которых гарантирует требуемое теоремой условие.

§2.1. Уравнения с нелокальным потенциалом

2.1.1. Построение решений уравнения.

В данном параграфе в полуплоскости $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times (0,+\infty)$ рассмотрим гиперболическое дифференциально-разностное уравнение, содержащее сумму дифференциального оператора и оператора сдвига по пространственной переменной

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - b\, u(x-h,t), \tag{2.1}$$

где a, b, $h \neq 0$ — заданные вещественные числа.

Применив к равенству (2.1) преобразование Фурье F_x, перейдем к двойственной переменной ξ, и с учетом формул

$$F_x[\partial_x^\alpha \partial_t^\beta f] = (-i\xi)^\alpha \partial_t^\beta F_x[f], \quad F_x[f(x-h)] = e^{ih\xi} F_x[f],$$

получим для функции $\widehat{u}(\xi,t) := F_x[u](\xi,t)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \widehat{u}(\xi,t)}{dt^2} = -\left(a^2\xi^2 + b\, e^{ih\xi}\right) \widehat{u}(\xi,t), \quad \xi \in (-\infty,+\infty), \tag{2.2}$$

характеристическое уравнение которого имеет корни

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{-\left(a^2\xi^2 + b\, e^{ih\xi}\right)} = \pm\, i\sqrt{a^2\xi^2 + b\, e^{ih\xi}} = \pm\, i\rho(\xi) e^{i\,\varphi(\xi)},$$

где обозначены функции

$$\rho(\xi) := \left[\left(a^2\xi^2 + b\cos(h\xi)\right)^2 + b^2\sin^2(h\xi)\right]^{1/4}, \tag{2.3}$$

$$\varphi(\xi) := \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{b\sin(h\xi)}{a^2\xi^2 + b\cos(h\xi)}. \tag{2.4}$$

Таким образом, общее решение уравнения (2.2) определяется по формуле

$$\widehat{u}(\xi,t) = C_1(\xi) e^{it\rho(\xi)[\cos\varphi(\xi) + i\sin\varphi(\xi)]} + C_2(\xi) e^{-it\rho(\xi)[\cos\varphi(\xi)+i\sin\varphi(\xi)]} =$$
$$= C_1(\xi) e^{-t\rho(\xi)[\sin\varphi(\xi) - i\cos\varphi(\xi)]} + C_2(\xi) e^{t\rho(\xi)[\sin\varphi(\xi)-i\cos\varphi(\xi)]},$$

где $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ — произвольные постоянные, зависящие от параметра ξ. Положим $C_1(\xi) = 1$ и $C_2(\xi) = 0$, тогда из последнего равенства будем иметь

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{-tG_1(\xi)} e^{itG_2(\xi)}, \tag{2.5}$$

где

$$G_1(\xi) := \rho(\xi) \sin \varphi(\xi), \quad G_2(\xi) := \rho(\xi) \cos \varphi(\xi). \tag{2.6}$$

Применив к равенству (2.5) обратное преобразование Фурье F_ξ^{-1}, получим

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-tG_1(\xi)} e^{itG_2(\xi)} e^{-ix\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-tG_1(\xi)} e^{i(tG_2(\xi) - x\xi)} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-tG_1(\xi)} \cos\left(tG_2(\xi) - x\xi\right) d\xi + \frac{i}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-tG_1(\xi)} \sin\left(tG_2(\xi) - x\xi\right) d\xi. \tag{2.7}$$

Следует отметить, что, формально применив прямое F_x и обратное F_ξ^{-1} преобразования Фурье, мы при построении классических решений нашего уравнения не задаемся вопросом об обосновании сходимости интегралов в выражении (2.7).

2.1.2. Существование классических решений.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2.1.1. *При выполнении условия*

$$a^2\xi^2 + b\cos(h\xi) > 0 \tag{2.8}$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^1$ функции

$$F(x, t; \xi) := e^{-tG_1(\xi)} \cos\left(tG_2(\xi) - x\xi\right), \tag{2.9}$$

$$H(x, t; \xi) := e^{-tG_1(\xi)} \sin\left(tG_2(\xi) - x\xi\right), \tag{2.10}$$

где $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ определяются равенствами (2.6)*, удовлетворяют уравнению* (2.1) *в классическом смысле.*

Доказательство. Отметим сначала, что при выполнении условия (2.8) функции (2.9) и (2.10) являются гладкими, так как входящие в них $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ определены корректно.

Подставим сначала функцию (2.9) непосредственно в уравнение (2.1). Для этого найдем

$$F_x(x,t;\xi) = \xi e^{-tG_1(\xi)} \sin\left(tG_2(\xi) - x\xi\right),$$

$$F_{xx}(x,t;\xi) = -\xi^2 e^{-tG_1(\xi)} \cos\left(tG_2(\xi) - x\xi\right),$$

$$F_t(x,t;\xi) = -G_1(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \cos\left(tG_2(\xi) - x\xi\right) - G_2(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \sin\left(tG_2(\xi) - x\xi\right),$$

$$\begin{aligned} F_{tt}(x,t;\xi) = G_1^2(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \cos\left(tG_2(\xi) - x\xi\right) + \\ + G_1(\xi)G_2(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \sin\left(tG_2(\xi) - x\xi\right) + \\ + G_1(\xi)G_2(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \sin\left(tG_2(\xi) - x\xi\right) - \\ - G_2^2(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \cos\left(tG_2(\xi) - x\xi\right) = \\ = \left[G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)\right] e^{-tG_1(\xi)} \cos\left(tG_2(\xi) - x\xi\right) + \\ + 2G_1(\xi)G_2(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \sin\left(tG_2(\xi) - x\xi\right). \quad (2.11) \end{aligned}$$

С учетом (2.6) будем иметь

$$2G_1(\xi)G_2(\xi) = \rho^2(\xi) \sin 2\varphi(\xi).$$

Так как аргумент $\varphi(\xi)$ определяется выражением (2.4), то имеет место неравенство $|2\varphi(\xi)| < \pi/2$, и следовательно $\cos 2\varphi(\xi) > 0$. Тогда справедливо следующее соотношение

$$\begin{aligned} \sin 2\varphi(\xi) = \frac{\operatorname{tg} 2\varphi(\xi)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi(\xi)}} = \\ = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{b \sin(h\xi)}{a^2\xi^2 + b\cos(h\xi)}\right) \times \\ \times \left[1 + \operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{b \sin(h\xi)}{a^2\xi^2 + b\cos(h\xi)}\right)\right]^{-1/2} = \\ = \frac{b \sin(h\xi)}{a^2\xi^2 + b\cos(h\xi)} \left[1 + \frac{b^2 \sin^2(h\xi)}{\left(a^2\xi^2 + b\cos(h\xi)\right)^2}\right]^{-1/2} = \\ = \frac{b \sin(h\xi)}{a^2\xi^2 + b\cos(h\xi)} \left[\frac{\left(a^2\xi^2 + b\cos(h\xi)\right)^2}{\left(a^2\xi^2 + b\cos(h\xi)\right)^2 + b^2 \sin^2(h\xi)}\right]^{1/2}. \end{aligned}$$

В силу условия (2.8) и формулы (2.3) из последнего равенства получим

$$\sin 2\varphi(\xi) = \frac{b\sin(h\xi)}{\rho^2(\xi)},$$

откуда следует

$$2G_1(\xi)G_2(\xi) = b\sin(h\xi).$$

При установленном выполнении неравенства $\cos 2\varphi(\xi) > 0$ и условии (2.8) вычислим теперь

$$G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi) = \rho^2(\xi)\left[\sin^2\varphi(\xi) - \cos^2\varphi(\xi)\right] =$$
$$= -\rho^2(\xi)\cos 2\varphi(\xi) = -\frac{\rho^2(\xi)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\varphi(\xi)}} =$$
$$= -\rho^2(\xi)\left[\frac{\left(a^2\xi^2 + b\cos(h\xi)\right)^2}{\left(a^2\xi^2 + b\cos(h\xi)\right)^2 + b^2\sin^2(h\xi)}\right]^{1/2} = -a^2\xi^2 - b\cos(h\xi).$$

С учетом найденных выражений $G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)$ и $2G_1(\xi)G_2(\xi)$ из равенства (2.11) получим

$$F_{tt}(x,t;\xi) = -\left(a^2\xi^2 + b\cos(h\xi)\right)e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi) - x\xi) +$$
$$+ b\sin(h\xi)e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi) - x\xi).$$

Подставив найденные производные F_{tt} и F_{xx} в уравнение (2.1), будем иметь

$$F_{tt}(x,t;\xi) - a^2F_{xx}(x,t;\xi) =$$
$$= -be^{-tG_1(\xi)}\left[\cos(tG_2(\xi) - x\xi)\cos(h\xi) - \sin(tG_2(\xi) - x\xi)\sin(h\xi)\right] =$$
$$= -be^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi) - x\xi + h\xi) = -bF(x-h,t;\xi),$$

что доказывает утверждение теоремы для семейства функций $F(x,t;\xi)$ при любом вещественном значении параметра ξ.

Аналогично проверим, что и функция (2.10) удовлетворяет уравнению (2.1) в каждой точке полуплоскости $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times (0,+\infty)$.

Вычислим

$$H_x(x,t;\xi) = -\xi e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi) - x\xi),$$

$$H_{xx}(x,t;\xi) = -\xi^2 e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi) - x\xi),$$

$$H_t(x,t;\xi) = -G_1(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\sin\left(tG_2(\xi)-x\xi\right) + G_2(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\cos\left(tG_2(\xi)-x\xi\right),$$

$$\begin{aligned}
H_{tt}(x,t;\xi) = G_1^2(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\sin\left(tG_2(\xi)-x\xi\right)-&\\
- G_1(\xi)G_2(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\cos\left(tG_2(\xi)-x\xi\right)-&\\
- G_1(\xi)G_2(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\cos\left(tG_2(\xi)-x\xi\right)-&\\
- G_2^2(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\sin\left(tG_2(\xi)-x\xi\right) =&\\
\left[G_1^2(\xi)-G_2^2(\xi)\right]e^{-tG_1(\xi)}\sin\left(tG_2(\xi)-x\xi\right)-&\\
- 2G_1(\xi)G_2(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\cos\left(tG_2(\xi)-x\xi\right) =&\\
= -\left(a^2\xi^2 + b\cos(h\xi)\right)e^{-tG_1(\xi)}\sin\left(tG_2(\xi)-x\xi\right)-&\\
- b\sin(h\xi)e^{-tG_1(\xi)}\cos\left(tG_2(\xi)-x\xi\right).&
\end{aligned}$$

Подставив производные H_{tt} и H_{xx} в уравнение (2.1), получим

$$\begin{aligned}
H_{tt}(x,t;\xi) - a^2H_{xx}(x,t;\xi) =&\\
= -be^{-tG_1(\xi)}\left[\sin\left(tG_2(\xi)-x\xi\right)\cos(h\xi) + \cos\left(tG_2(\xi)-x\xi\right)\sin(h\xi)\right] =&\\
= -be^{-tG_1(\xi)}\sin\left(tG_2(\xi)-x\xi+h\xi\right) = -bH(x-h,t;\xi).&
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 2.1.1. *При выполнении условия* (2.8) *семейство функций*

$$G(x,t;\alpha,\beta,\xi) := \alpha\, e^{-tG_1(\xi)}\cos\left(tG_2(\xi)-x\xi\right) + \beta\, e^{-tG_1(\xi)}\sin\left(tG_2(\xi)-x\xi\right),$$

где $G_1(\xi)$ *и* $G_2(\xi)$ *определяются равенствами* (2.6), *удовлетворяет уравнению* (2.1) *в классическом смысле при любых вещественных значениях параметров* α, β *и* ξ.

2.1.3. Смысл условия на коэффициенты уравнения и классы уравнений, удовлетворяющих этому условию.

Выясним теперь, какому соотношению должны удовлетворять коэффициенты уравнения a, b и сдвиг h, чтобы выполнялось условие (2.8) для любого вещественного значения ξ.

Рассмотрим функцию $a^2\xi^2 + b\cos(h\xi)$ при $\xi \in [0, +\infty)$. Производная этой функции равна

$$2a^2\xi - bh\sin(h\xi) = 2a^2\xi\left(1 - \frac{bh^2}{2a^2}\frac{\sin(h\xi)}{h\xi}\right).$$

Так как $\sin(h\xi)/h\xi \to 1$ при $\xi \to 0$ и $\sin(h\xi)/h\xi \to 0$ при $\xi \to +\infty$, то производная неотрицательна на промежутке $\xi \in [0, +\infty)$ при выполнении условия

$$0 < b \leq \frac{2a^2}{h^2}, \tag{2.12}$$

тогда функция $a^2\xi^2 + b\cos(h\xi)$ при $\xi \in [0, +\infty)$ неубывает и принимает наименьшее значение, равное $b > 0$. В силу четности функции, это значение является наименьшим для всех вещественных $\xi \in (-\infty, +\infty)$. Тем самым мы показали, что условие (2.8), при котором справедлива теорема, выполняется, если коэффициенты уравнения a, b и сдвиг h удовлетворяют соотношению (2.12).

§2.2. Уравнения с нелокальными потенциалами общего вида

2.2.1. Построение решений уравнения.

Пусть a, b_k, h_k $(k = \overline{1,n})$ — заданные вещественные числа. В полуплоскости $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$ рассмотрим гиперболическое уравнение, содержащее сумму дифференциального оператора и операторов сдвига по пространственной переменной

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \sum_{k=1}^{n} b_k u(x - h_k, t), \tag{2.13}$$

Все сдвиги h_k $(k = \overline{1,n})$ в уравнении — произвольные величины.

В рассматриваемом уравнении (2.13) потенциалы являются нелокальными, так как все вещественные сдвиги h_k $(k = \overline{1,n})$ не являются бесконечно малыми величинами и могут принимать сколь угодно большие значения. Отметим также, что оператор сдвига не является подчиненным по отношению к дифференциальному оператору. Уравнение (2.13) связывает значения искомой функции

u в $(n+1)$-ой различной точке полуплоскости $(x,t)\in\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$, что принципиально отличает дифференциально-разностные уравнения от классических уравнений математической физики.

Для нахождения решений уравнения (2.13) применим к нему преобразование Фурье F_x и получим для функции

$$\widehat{u}(\xi,t):=F_x[u](\xi,t)$$

обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\widehat{u}(\xi,t)}{dt^2}=-\left(a^2\xi^2+\sum_{k=1}^{n}b_k e^{ih_k\xi}\right)\widehat{u}(\xi,t),\quad \xi\in\mathbb{R}^1, \tag{2.14}$$

характеристическое уравнение которого имеет корни

$$k_{1,2}=\pm\, i\sqrt{a^2\xi^2+\sum_{k=1}^{n}b_k e^{ih_k\xi}}=\pm\, i\rho(\xi)e^{i\,\varphi(\xi)},$$

где введены обозначения

$$\rho(\xi):=\left[\left(a^2\xi^2+\sum_{k=1}^{n}b_k\cos\left(h_k\xi\right)\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\sin\left(h_k\xi\right)\right)^2\right]^{1/4}, \tag{2.15}$$

$$\varphi(\xi):=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\sin\left(h_k\xi\right)}{a^2\xi^2+\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\cos\left(h_k\xi\right)}. \tag{2.16}$$

Таким образом, общее решение уравнения (2.14) определяется по формуле

$$\begin{aligned}\widehat{u}(\xi,t)&=C_1(\xi)e^{it\rho(\xi)[\cos\varphi(\xi)+i\sin\varphi(\xi)]}+C_2(\xi)e^{-it\rho(\xi)[\cos\varphi(\xi)+i\sin\varphi(\xi)]}\\&=C_1(\xi)e^{-t\rho(\xi)[\sin\varphi(\xi)-i\cos\varphi(\xi)]}+C_2(\xi)e^{t\rho(\xi)[\sin\varphi(\xi)-i\cos\varphi(\xi)]},\end{aligned}$$

где $C_1(\xi)$, $C_2(\xi)$ — произвольные постоянные, зависящие от параметра ξ. Положив значения констант $C_1(\xi)=1$, $C_2(\xi)=0$, из последнего равенства будем иметь

$$\widehat{u}(\xi,t)=e^{-tG_1(\xi)}e^{itG_2(\xi)}, \tag{2.17}$$

где введены обозначения

$$G_1(\xi):=\rho(\xi)\sin\varphi(\xi),\quad G_2(\xi):=\rho(\xi)\cos\varphi(\xi). \tag{2.18}$$

Применив к равенству (2.17) обратное преобразование Фурье F_ξ^{-1}, получим выражение

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-tG_1(\xi)}e^{itG_2(\xi)}e^{-ix\xi}d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-tG_1(\xi)}e^{i(tG_2(\xi)-x\xi)}d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-tG_1(\xi)}\cos\left(tG_2(\xi)-x\xi\right)d\xi + \frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-tG_1(\xi)}\sin\left(tG_2(\xi)-x\xi\right)d\xi. \quad (2.19)$$

2.2.2. Существование классических решений.

Теорема 2.2.1. *При выполнении условия*

$$a^2\xi^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k\cos\left(h_k\xi\right) > 0 \quad (2.20)$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^1$ *функции*

$$F(x,t;\xi) := e^{-tG_1(\xi)}\cos\left(tG_2(\xi)-x\xi\right), \quad (2.21)$$

$$H(x,t;\xi) := e^{-tG_1(\xi)}\sin\left(tG_2(\xi)-x\xi\right), \quad (2.22)$$

где $G_1(\xi)$ *и* $G_2(\xi)$ *определяются равенствами* (2.18)*, удовлетворяют уравнению* (2.13) *в классическом смысле.*

Доказательство. Отметим сначала, что при выполнении условия (2.20) функции (2.15) и (2.16), а значит, и функции (2.18) определены корректно для любых вещественных значений параметров a, b_k, h_k ($k=\overline{1,n}$) и ξ. Что обеспечивает гладкость рассматриваемых функций (2.21) и (2.22).

Подставим сначала функцию (2.21) в уравнение (2.13). Для этого найдем

$$F_x(x,t;\xi) = \xi e^{-tG_1(\xi)}\sin\left(tG_2(\xi)-x\xi\right),$$

$$F_{xx}(x,t;\xi) = -\xi^2 e^{-tG_1(\xi)}\cos\left(tG_2(\xi)-x\xi\right),$$

$$F_t(x,t;\xi) = -G_1(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\cos\left(tG_2(\xi)-x\xi\right) - G_2(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\sin\left(tG_2(\xi)-x\xi\right),$$

$$F_{tt}(x,t;\xi) = \left[G_1^2(\xi)-G_2^2(\xi)\right]e^{-tG_1(\xi)}\cos\left(tG_2(\xi)-x\xi\right)+$$
$$+ 2G_1(\xi)G_2(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\sin\left(tG_2(\xi)-x\xi\right). \quad (2.23)$$

С учетом (2.18) будем иметь $2G_1(\xi)G_2(\xi) = \rho^2(\xi)\sin 2\varphi(\xi)$. Так как аргумент $\varphi(\xi)$ определяется выражением (2.16), то имеет место неравенство $|2\varphi(\xi)| < \pi/2$, а, следовательно $\cos 2\varphi(\xi) > 0$.

Тогда выполняются равенства

$$\sqrt{\cos^2 2\varphi(\xi)} = |\cos 2\varphi(\xi)| = \cos 2\varphi(\xi)$$

и справедливо следующее соотношение

$$\sin 2\varphi(\xi) = \frac{\operatorname{tg} 2\varphi(\xi)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\varphi(\xi)}} =$$

$$= \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \sin(h_k\xi)}{a^2\xi^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k\cos(h_k\xi)}\right)\times$$

$$\times\left[1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \sin(h_k\xi)}{a^2\xi^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k\cos(h_k\xi)}\right)\right]^{-1/2} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \sin(h_k\xi)}{a^2\xi^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k\cos(h_k\xi)}\left[1+\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \sin(h_k\xi)\right)^2}{\left(a^2\xi^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k\cos(h_k\xi)\right)^2}\right]^{-1/2} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \sin(h_k\xi)}{a^2\xi^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k\cos(h_k\xi)}\times\left[\frac{\left(a^2\xi^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k\cos(h_k\xi)\right)^2}{\left(a^2\xi^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k\cos(h_k\xi)\right)^2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \sin(h_k\xi)\right)^2}\right]^{1/2}.$$

В силу условия (2.20) и формулы (2.15) из последнего равенства получим

$$\sin 2\varphi(\xi) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \sin(h_k\xi)}{\rho^2(\xi)},$$

откуда следует

$$2G_1(\xi)G_2(\xi) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(h_k\xi).$$

При установленном выполнении неравенства $\cos 2\varphi(\xi) > 0$ и условии (2.20) вычислим теперь

$$G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi) = \rho^2(\xi)\left[\sin^2\varphi(\xi) - \cos^2\varphi(\xi)\right] =$$

$$= -\rho^2(\xi)\cos 2\varphi(\xi) = -\frac{\rho^2(\xi)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\varphi(\xi)}} =$$

$$= -\rho^2(\xi)\left[\frac{\left(a^2\xi^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k\cos(h_k\xi)\right)^2}{\left(a^2\xi^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k\cos(h_k\xi)\right)^2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\sin(h_k\xi)\right)^2}\right]^{1/2} =$$

$$= -a^2\xi^2 - \sum_{k=1}^{n} b_k\cos(h_k\xi).$$

С учетом найденных выражений $G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)$ и $2G_1(\xi)G_2(\xi)$ из равенства (2.23) получим

$$F_{tt}(x,t;\xi) =$$

$$= -\left(a^2\xi^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k\cos(h_k\xi)\right)e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi) - x\xi) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} b_k\sin(h_k\xi)\cdot e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi) - x\xi).$$

Подставив найденные производные F_{tt} и F_{xx} в уравнение (2.13), будем иметь

$$F_{tt}(x,t;\xi) - a^2F_{xx}(x,t;\xi) =$$

$$= -e^{-tG_1(\xi)}\left[\cos(tG_2(\xi) - x\xi)\cdot\sum_{k=1}^{n} b_k\cos(h_k\xi) - \right.$$

$$\left. - \sin(tG_2(\xi) - x\xi)\cdot\sum_{k=1}^{n} b_k\sin(h_k\xi)\right] =$$

$$= -e^{-tG_1(\xi)}\sum_{k=1}^{n} b_k[\cos(tG_2(\xi) - x\xi)\cdot\cos(h_k\xi) - \sin(tG_2(\xi) - x\xi)\cdot\sin(h_k\xi)] =$$

$$= -e^{-tG_1(\xi)}\sum_{k=1}^{n} b_k\cos(tG_2(\xi) - x\xi + h_k\xi) = -\sum_{k=1}^{n} b_kF(x - h_k, t; \xi),$$

что доказывает утверждение теоремы для семейства функций $F(x,t;\xi)$ при любом вещественном значении параметра ξ.

Аналогично проверим, что и функция (2.22) удовлетворяет уравнению (2.13) в каждой точке полуплоскости $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times (0,+\infty)$. Вычислим

$$H_x(x,t;\xi) = -\xi e^{-tG_1(\xi)} \cos\left(tG_2(\xi) - x\xi\right),$$

$$H_{xx}(x,t;\xi) = -\xi^2 e^{-tG_1(\xi)} \sin\left(tG_2(\xi) - x\xi\right),$$

$$H_t(x,t;\xi) = -G_1(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \sin\left(tG_2(\xi) - x\xi\right) + G_2(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \cos\left(tG_2(\xi) - x\xi\right),$$

$$\begin{aligned} H_{tt}(x,t;\xi) = \left[G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)\right] e^{-tG_1(\xi)} \sin\left(tG_2(\xi) - x\xi\right) - \\ - 2G_1(\xi)G_2(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \cos\left(tG_2(\xi) - x\xi\right) = \\ = -\left(a^2\xi^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k \cos\left(h_k\xi\right)\right) e^{-tG_1(\xi)} \sin\left(tG_2(\xi) - x\xi\right) - \\ - \sum_{k=1}^{n} b_k \sin\left(h_k\xi\right) \cdot e^{-tG_1(\xi)} \cos\left(tG_2(\xi) - x\xi\right). \end{aligned}$$

Подставив производные H_{tt} и H_{xx} в уравнение (2.13), получим

$$\begin{aligned} H_{tt}(x,t;\xi) - a^2 H_{xx}(x,t;\xi) = \\ = -e^{-tG_1(\xi)} \left[\sin\left(tG_2(\xi) - x\xi\right) \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k \cos\left(h_k\xi\right) + \right. \\ \left. + \cos\left(tG_2(\xi) - x\xi\right) \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k \sin\left(h_k\xi\right)\right] = \\ = -e^{-tG_1(\xi)} \sum_{k=1}^{n} b_k [\sin\left(tG_2(\xi) - x\xi\right) \cdot \cos\left(h_k\xi\right) + \cos\left(tG_2(\xi) - x\xi\right) \cdot \sin\left(h_k\xi\right)] = \\ = -e^{-tG_1(\xi)} \sum_{k=1}^{n} b_k \sin\left(tG_2(\xi) - x\xi + h_k\xi\right) = -\sum_{k=1}^{n} b_k H(x - h_k, t; \xi). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 2.2.1. *При выполнении условия* (2.20) *семейство функций*

$$G(x,t;\alpha,\beta,\xi) := \alpha\, e^{-tG_1(\xi)} \cos\left(tG_2(\xi) - x\xi\right) + \beta\, e^{-tG_1(\xi)} \sin\left(tG_2(\xi) - x\xi\right),$$

где $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ определяются равенствами (2.18), удовлетворяет уравнению (2.13) в классическом смысле для любых вещественных значений параметров α, β и ξ.

2.2.3. Смысл условия на коэффициенты уравнения и классы уравнений, удовлетворяющих этому условию.

Выясним теперь, каким соотношениям должны удовлетворять коэффициенты уравнения a, b_k и сдвиги h_k $(k = \overline{1,n})$, чтобы выполнялось условие (2.20) для любого вещественного значения ξ.

Положив в (2.20) значение $\xi = 0$, очевидно, получим неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} b_k > 0. \tag{2.24}$$

Рассмотрим функцию $a^2\xi^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \cos(h_k\xi)$ при $\xi \in (0, +\infty)$. Производная этой функции равна

$$2a^2\xi - \sum_{k=1}^{n} b_k h_k \sin(h_k\xi) = 2a^2\xi \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k h_k^2}{2a^2} \frac{\sin(h_k\xi)}{h_k\xi}\right).$$

Так как $\sin(h\xi)/h\xi < 1$ при любом $\xi \in (0, +\infty)$, то справедливо неравенство

$$1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k h_k^2}{2a^2} \frac{\sin(h_k\xi)}{h_k\xi} > 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k h_k^2}{2a^2},$$

откуда делаем вывод, что производная положительна на промежутке $\xi \in (0, +\infty)$ при выполнении условия

$$2a^2 \geq \sum_{k=1}^{n} b_k h_k^2. \tag{2.25}$$

Тогда функция $a^2\xi^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \cos(h_k\xi)$ при $\xi \in (0, +\infty)$ возрастает, а при $\xi \in [0, +\infty)$ принимает наименьшее значение, равное $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k > 0$.

В силу четности функции, это значение является наименьшим для всех вещественных $\xi \in (-\infty, +\infty)$. Тем самым мы показали, что условие (2.20), при котором справедлива теорема, выполняется, если коэффициенты уравнения a, b_k и сдвиги h_k $(k = \overline{1,n})$ удовлетворяют соотношениям (2.24) и (2.25).

Глава 3. Многомерные гиперболические уравнения

В данной главе в полупространстве $\{(x,t)|\, x\in\mathbb{R}^n,\ t>0\}$ исследуется вопрос существования гладких решений двух гиперболических уравнений, содержащих суперпозиции дифференциальных операторов и операторов сдвига по любым (пространственным) координатным направлениям.

Для этих уравнений построены трехпараметрические семейства решений. Доказаны теоремы, что полученные решения являются классическими при выполнении определенных условий на коэффициенты и сдвиги уравнений.

Приведены классы уравнений, для которых эти условия выполнены.

Затем в полупространстве $\{(x,t)|\, x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ исследуется вопрос существования гладких решений двух гиперболических дифференциально-разностных уравнений, содержащих суммы дифференциальных операторов и операторов сдвига по каждой из пространственных переменных.

Для этих уравнений с помощью операционной схемы также построены трехпараметрические семейства решений. Доказаны теоремы, что полученные решения являются классическими при выполнении условий, в которые включены все коэффициенты и разнонаправленные сдвиги уравнений.

Также приведены классы уравнений, для которых условия теоремы выполнены.

§3.1. Уравнения с суперпозициями операторов

3.1.1. Построение решений уравнения.

Рассмотрим в полупространстве $\{(x,t)|\, x\in\mathbb{R}^n,\ t>0\}$ многомерное гиперболическое уравнение

$$u_{tt}(x,t) = a^2 \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j}(x,t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} b_j u_{x_j x_j}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j - h_j, x_{j+1}, \dots, x_n, t), \quad (3.1)$$

где $a \neq 0$, $b_1, \dots, b_n$ и $h_1, \dots, h_n$ — заданные вещественные числа.

Для нахождения решений уравнения используем классическую операционную схему [11, §10], согласно которой применим формально к уравнению (3.1) преобразование Фурье по n-мерной переменной x:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\xi\cdot x} dx$$

и перейдем к двойственной переменной ξ.

С учетом формул [5, §9]:

$$F_x[\partial_x^\alpha \partial_t^\beta f] = (-i\xi)^\alpha \partial_t^\beta F_x[f], \quad F_x[f(x - x_0)] = e^{ix_0\cdot\xi} F_x[f]$$

получим для отыскания функции $\widehat{u}(\xi,t) := F_x[u](\xi,t)$ начальную задачу

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2} = -\left(a^2|\xi|^2 + \sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j^2 \cos(h_j\xi_j) + i \sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j^2 \sin(h_j\xi_j)\right) \widehat{u}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (3.2)$$

$$\widehat{u}(0) = 0, \quad \widehat{u}_t(0) = 1. \quad (3.3)$$

Для удобства в дальнейших вычислениях введем следующие обозначения:

$$\alpha(\xi) := \sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j^2 \cos(h_j\xi_j),$$

$$\beta(\xi) := \sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j^2 \sin(h_j\xi_j).$$

Тогда уравнение (3.2) принимает вид

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2} = -\left(a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi) + i\,\beta(\xi)\right) \widehat{u}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

корни характеристического уравнения для которого, определяются по формуле

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{-\left(a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi) + i\,\beta(\xi)\right)} =$$

$$= \pm\, i\sqrt{a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi) + i\,\beta(\xi)} = \pm\, i\rho(\xi) e^{i\,\varphi(\xi)},$$

где введены обозначения

$$\rho(\xi) := \left[\left(a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi)\right)^2 + \beta^2(\xi)\right]^{1/4}, \tag{3.4}$$

$$\varphi(\xi) := \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\beta(\xi)}{a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi)}. \tag{3.5}$$

Таким образом, общее решение уравнения (3.2) имеет вид

$$\widehat{u}(\xi,t) = C_1(\xi)e^{i\,t\,\rho(\xi)[\cos\varphi(\xi)+i\sin\varphi(\xi)]} + C_2(\xi)e^{-i\,t\,\rho(\xi)[\cos\varphi(\xi)+i\sin\varphi(\xi)]},$$

где $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ — произвольные постоянные, зависящие от параметра ξ, для определения которых подставим функцию $\widehat{u}(\xi,t)$ в начальные условия (3.3). Из системы

$$\begin{cases} C_1(\xi) + C_2(\xi) = 0, \\ C_1(\xi) - C_2(\xi) = \frac{1}{i\,\rho(\xi)[\cos\varphi(\xi)+i\sin\varphi(\xi)]} \end{cases}$$

находим значения констант

$$C_1(\xi) = \frac{e^{-i\,\varphi(\xi)}}{2i\,\rho(\xi)}, \quad C_2(\xi) = -\frac{e^{-i\,\varphi(\xi)}}{2i\,\rho(\xi)}.$$

В результате решение задачи (3.2), (3.3) определяется по формуле

$$\begin{aligned}
\widehat{u}(\xi,t) &= \frac{e^{-i\,\varphi(\xi)}}{2i\,\rho(\xi)}\left[e^{i\,t\,\rho(\xi)[\cos\varphi(\xi)+i\sin\varphi(\xi)]} - e^{-i\,t\,\rho(\xi)[\cos\varphi(\xi)+i\sin\varphi(\xi)]}\right] = \\
&= \frac{e^{-i\,\varphi(\xi)}}{2i\,\rho(\xi)}\left[e^{-t\,\rho(\xi)\sin\varphi(\xi)}e^{i\,t\,\rho(\xi)\cos\varphi(\xi)} - e^{t\,\rho(\xi)\sin\varphi(\xi)}e^{-i\,t\,\rho(\xi)\cos\varphi(\xi)}\right] = \\
&= \frac{1}{2i\,\rho(\xi)}\Big[e^{-t\,\rho(\xi)\sin\varphi(\xi)}e^{i(t\,\rho(\xi)\cos\varphi(\xi)-\varphi(\xi))} - \\
&\quad - e^{t\,\rho(\xi)\sin\varphi(\xi)}e^{-i(t\,\rho(\xi)\cos\varphi(\xi)+\varphi(\xi))}\Big] = \\
&= \frac{1}{2i\,\rho(\xi)}\left[e^{-t\,G_1(\xi)}e^{i(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi))} - e^{t\,G_1(\xi)}e^{-i(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi))}\right],
\end{aligned} \tag{3.6}$$

где введены обозначения

$$G_1(\xi) := \rho(\xi)\sin\varphi(\xi), \quad G_2(\xi) := \rho(\xi)\cos\varphi(\xi). \tag{3.7}$$

Применим теперь к равенству (3.6) формально обратное преобразование Фурье F_ξ^{-1} и получим

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2i\,\rho(\xi)} \Big[e^{-t\,G_1(\xi)} e^{i(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi))} - $$

$$- e^{t\,G_1(\xi)} e^{-i(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi))} \Big] e^{-ix\cdot\xi} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2i(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\rho(\xi)} \Big[e^{-t\,G_1(\xi)} e^{i(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)} - $$

$$- e^{t\,G_1(\xi)} e^{-i(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)} \Big] d\xi.$$

С учетом четности функций $\alpha(\xi)$, $\rho(\xi)$, $G_2(\xi)$ и нечетности функций $\beta(\xi)$, $\varphi(\xi)$, $G_1(\xi)$ по каждой переменной ξ_j преобразуем последнее выражение следующим образом:

$$\frac{1}{2i(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\rho(\xi)} \Big[e^{-t\,G_1(\xi)} e^{i(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)} - $$

$$- e^{t\,G_1(\xi)} e^{-i(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)} \Big] d\xi =$$

$$= \frac{1}{2i(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_-} \frac{1}{\rho(\xi)} \Big[e^{-t\,G_1(\xi)} e^{i(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)} - $$

$$- e^{t\,G_1(\xi)} e^{-i(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)} \Big] d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2i(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{\rho(\xi)} \Big[e^{-t\,G_1(\xi)} e^{i(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)} - $$

$$- e^{t\,G_1(\xi)} e^{-i(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)} \Big] d\xi =$$

$$= \frac{1}{2i(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{\rho(\xi)} \Big[e^{t\,G_1(\xi)} e^{i(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)} - $$

$$- e^{-t\,G_1(\xi)} e^{-i(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)} \Big] d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2i(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{\rho(\xi)} \Big[e^{-t\,G_1(\xi)} e^{i(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)} - $$

$$- e^{t\,G_1(\xi)} e^{-i(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)} \Big] d\xi =$$

$$
= \frac{1}{2i(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{\rho(\xi)} \Big[e^{t\,G_1(\xi)} \cos\left(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right) +
$$

$$
+ i\, e^{t\,G_1(\xi)} \sin\left(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right) -
$$

$$
- e^{-t\,G_1(\xi)} \cos\left(t\,G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right) +
$$

$$
+ i\, e^{-t\,G_1(\xi)} \sin\left(t\,G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right) +
$$

$$
+ e^{-t\,G_1(\xi)} \cos\left(t\,G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right) +
$$

$$
+ i\, e^{-t\,G_1(\xi)} \sin\left(t\,G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right) -
$$

$$
- e^{t\,G_1(\xi)} \cos\left(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right) +
$$

$$
+ i\, e^{t\,G_1(\xi)} \sin\left(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right) \Big] d\xi =
$$

$$
= \frac{1}{2i(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{\rho(\xi)} \Big[2i\, e^{t\,G_1(\xi)} \sin\left(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right) +
$$

$$
+ 2i\, e^{-t\,G_1(\xi)} \sin\left(t\,G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right) \Big] d\xi =
$$

$$
= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{\rho(\xi)} \Big[e^{t\,G_1(\xi)} \sin\left(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right) +
$$

$$
+ e^{-t\,G_1(\xi)} \sin\left(t\,G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right) \Big] d\xi.
$$

Используем полученное представление далее.

3.1.2. Существование классических решений.

Теорема 3.1.1. *При выполнении условия*

$$
a^2|\xi|^2 + \sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j^2 \cos\left(h_j \xi_j\right) > 0 \tag{3.8}
$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \overrightarrow{0}$ *функции*

$$
F(x,t;\xi) := e^{t\,G_1(\xi)} \sin\left(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right), \tag{3.9}
$$

$$
H(x,t;\xi) := e^{-t\,G_1(\xi)} \sin\left(t\,G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right), \tag{3.10}
$$

где $\varphi(\xi)$ *определяется по формуле* (3.5), $G_1(\xi)$ *и* $G_2(\xi)$ *определяются равенствами* (3.7), *удовлетворяют уравнению* (3.1) *в классическом смысле.*

Доказательство. Отметим, что при выполнении условия (3.8) функции (3.4) и (3.5) определены корректно для любого значения $\xi \in \mathbb{R}^n$, т. к. подкоренное выражение в формуле (3.4) всегда положительно, а знаменатель аргумента арктангенса в (3.5) не обращается в ноль. Отсюда следует, что и функции (3.7) для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ определены корректно. А значит, функции (3.9) и (3.10) являются гладкими.

Подставим сначала функцию (3.9) непосредственно в уравнение (3.1). Для этого найдем производные

$$F_{x_j}(x,t;\xi) = \xi_j e^{tG_1(\xi)} \cos\left(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right),$$

$$F_{x_jx_j}(x,t;\xi) = -\xi_j^2 e^{tG_1(\xi)} \sin\left(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right),$$

$$F_t(x,t;\xi) = G_1(\xi)e^{tG_1(\xi)} \sin\left(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right) + \\ + G_2(\xi)e^{tG_1(\xi)} \cos\left(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right),$$

$$F_{tt}(x,t;\xi) = \left[G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)\right] e^{tG_1(\xi)} \sin\left(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right) + \\ + 2G_1(\xi)G_2(\xi)e^{tG_1(\xi)} \cos\left(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right). \quad (3.11)$$

Найдем теперь значения выражений $G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)$ и $2G_1(\xi)G_2(\xi)$.

Так как функции $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ определяются равенствами (3.7), то

$$2G_1(\xi)G_2(\xi) = \rho^2(\xi)\sin 2\varphi(\xi).$$

Из формулы (3.5) следует, что $|2\varphi(\xi)| < \pi/2$, а, следовательно $\cos 2\varphi(\xi) > 0$. Тогда справедливы следующие равенства

$$\sin 2\varphi(\xi) = \frac{\operatorname{tg} 2\varphi(\xi)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\varphi(\xi)}} = \\ = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{\beta(\xi)}{a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)}\right)\left[1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{\beta(\xi)}{a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)}\right)\right]^{-1/2} =$$

$$= \frac{\beta(\xi)}{a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)}\left[1+\frac{\beta^2(\xi)}{\left(a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)\right)^2}\right]^{-1/2} =$$

$$= \frac{\beta(\xi)}{a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)}\left[\frac{\left(a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)\right)^2}{\left(a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)\right)^2+\beta^2(\xi)}\right]^{1/2} =$$

$$= \frac{\beta(\xi)}{a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)}\frac{|a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)|}{\rho^2(\xi)}.$$

В силу выполнения условия (3.8) из последнего равенства получим

$$\sin 2\varphi(\xi) = \frac{\beta(\xi)}{a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)}\frac{a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)}{\rho^2(\xi)} = \frac{\beta(\xi)}{\rho^2(\xi)},$$

а значит,

$$2G_1(\xi)G_2(\xi) = \beta(\xi). \tag{3.12}$$

При установленном выше неравенстве $\cos 2\varphi(\xi) > 0$ и выполнении условия (3.8) найдем теперь

$$G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi) = \rho^2(\xi)\left[\sin^2\varphi(\xi) - \cos^2\varphi(\xi)\right] =$$

$$= -\rho^2(\xi)\cos 2\varphi(\xi) = -\frac{\rho^2(\xi)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\varphi(\xi)}} =$$

$$= -\rho^2(\xi)\left[\frac{\left(a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)\right)^2}{\left(a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)\right)^2+\beta^2(\xi)}\right]^{1/2} = -a^2|\xi|^2 - \alpha(\xi). \tag{3.13}$$

С учетом найденных выражений (3.12) и (3.13) функция (3.11) принимает вид

$$F_{tt}(x,t;\xi) = \left[-(a^2|\xi|^2+\alpha(\xi))\sin\left(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi\right)+\right.$$
$$\left.+\beta(\xi)\cos\left(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi\right)\right]e^{tG_1(\xi)}.$$

Подставим теперь производные F_{tt} и $F_{x_jx_j}$ в уравнение (3.1):

$$F_{tt}(x,t;\xi) - a^2\sum_{j=1}^{n} F_{x_jx_j}(x,t;\xi) =$$

$$= [-(a^2|\xi|^2+\alpha(\xi))\sin\left(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi\right)+$$

$$+\beta(\xi)\cos\left(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi\right)+$$

$$+ a^2 \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 \sin\left(t\, G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right)] e^{tG_1(\xi)} =$$

$$= [-\alpha(\xi) \sin\left(t\, G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right) +$$
$$+ \beta(\xi)\cos\left(t\, G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right)]\, e^{tG_1(\xi)} =$$
$$= \left[-\sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j^2 \cos(h_j\xi_j) \sin\left(t\, G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j^2 \sin(h_j\xi_j)\cos\left(t\, G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right) \right] e^{tG_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j^2 \sin\left(t\, G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi - h_j\xi_j\right) e^{tG_1(\xi)} =$$
$$= -\sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j^2 \sin\left(t\, G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n - h_j\xi_j\right) e^{tG_1(\xi)} =$$
$$= -\sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j^2 \sin\left(t\, G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x_1\xi_1 + \ldots + x_{j-1}\xi_{j-1} + \right.$$
$$\left. + (x_j - h_j)\xi_j + x_{j+1}\xi_{j+1} + \ldots + x_n\xi_n\right) e^{tG_1(\xi)} =$$
$$= -\sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j^2 \sin\left(t\, G_2(\xi) + \varphi(\xi) + \right.$$
$$\left. + (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j - h_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)\cdot\xi\right) e^{tG_1(\xi)} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} b_j F_{x_j x_j}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j - h_j, x_{j+1}, \ldots, x_n, t; \xi).$$

Непосредственной подстановкой в уравнение (3.1) проверим теперь, что и функция $H(x,t;\xi)$ удовлетворяет ему в классическом смысле. Для этого найдем производные.

$$H_{x_j}(x,t;\xi) = -\xi_j e^{-tG_1(\xi)} \cos\left(t\, G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right),$$

$$H_{x_j x_j}(x,t;\xi) = -\xi_j^2 e^{-tG_1(\xi)} \sin\left(t\, G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right),$$

$$H_t(x,t;\xi) = -G_1(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\sin\left(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi\right)+ \\ +G_2(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\cos\left(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi\right),$$

$$H_{tt}(x,t;\xi) = \left[G_1^2(\xi)-G_2^2(\xi)\right]e^{-tG_1(\xi)}\sin\left(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi\right)- \\ -2G_1(\xi)G_2(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\cos\left(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi\right). \quad (3.14)$$

С учетом найденных выражений (3.12) и (3.13) функция (3.14) принимает вид

$$H_{tt}(x,t;\xi) = \left[-(a^2|\xi|^2+\alpha(\xi))\sin\left(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi\right)- \\ -\beta(\xi)\cos\left(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi\right)\right]e^{-tG_1(\xi)}.$$

Осталось подставить найденные производные H_{tt} и $H_{x_jx_j}$ в уравнение (3.1):

$$H_{tt}(x,t;\xi) - a^2\sum_{j=1}^{n} H_{x_jx_j}(x,t;\xi) = \\ = [-(a^2|\xi|^2+\alpha(\xi))\sin\left(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi\right)- \\ -\beta(\xi)\cos\left(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi\right)+ \\ +a^2\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2\sin\left(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi\right)]e^{-tG_1(\xi)} = \\ = -\left[\alpha(\xi)\sin\left(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi\right)+ \right. \\ \left. +\beta(\xi)\cos\left(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi\right)\right]e^{-tG_1(\xi)} = \\ = -\left[\sum_{j=1}^{n} b_j\xi_j^2\cos\left(h_j\xi_j\right)\sin\left(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi\right)+ \right. \\ \left. +\sum_{j=1}^{n} b_j\xi_j^2\sin\left(h_j\xi_j\right)\cos\left(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi\right)\right]e^{-tG_1(\xi)} = \\ = -\sum_{j=1}^{n} b_j\xi_j^2\sin\left(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi+h_j\xi_j\right)e^{-tG_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j^2 \sin\left(t\, G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x_1\xi_1 - \ldots - x_n\xi_n + h_j\xi_j\right) e^{-tG_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j^2 \sin\left(t\, G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x_1\xi_1 - \ldots - x_{j-1}\xi_{j-1} - \right.$$

$$\left. - (x_j - h_j)\xi_j - x_{j+1}\xi_{j+1} - \ldots - x_n\xi_n\right) e^{-tG_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j^2 \sin\left(t\, G_2(\xi) - \varphi(\xi) - \right.$$

$$\left. - (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j - h_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) \cdot \xi\right) e^{-tG_1(\xi)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_j H_{x_j x_j}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j - h_j, x_{j+1}, \ldots, x_n, t; \xi).$$

Теорема доказана.

Следствие 3.1.1. *При выполнении условия* (3.8) *семейство функций*

$$G(x, t; A, B, \xi) := A\, e^{t\, G_1(\xi)} \sin\left(t\, G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi\right) +$$
$$+ B\, e^{-t\, G_1(\xi)} \sin\left(t\, G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi\right),$$

где $\varphi(\xi)$ *определяется по формуле* (3.5), $G_1(\xi)$ *и* $G_2(\xi)$ *определяются равенствами* (3.7), *удовлетворяет уравнению* (3.1) *в классическом смысле при любых вещественных значениях параметров* A, B *и* $\xi \neq \overrightarrow{0}$.

3.1.3. Смысл условия на коэффициенты уравнения и классы уравнений, удовлетворяющих этому условию.

Остается ответить на вопрос: каким именно условиям должны удовлетворять вещественные коэффициенты a, $b_1, \ldots, b_n$ и сдвиги $h_1, \ldots, h_n$ уравнения (3.1), чтобы условие (3.8) выполнялось для любого n-мерного параметра ξ?

Условие (3.8):

$$a^2(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2) +$$
$$+ b_1 \cos(h_1\xi_1)\xi_1^2 + b_2 \cos(h_2\xi_2)\xi_2^2 + \ldots + b_n \cos(h_n\xi_n)\xi_n^2 > 0$$

очевидно будет выполняться для любых сдвигов $h_1, \ldots, h_n$ и любых значений

$\xi_1, \ldots, \xi_n$, если коэффициенты уравнения удовлетворяют следующему условию:

$$\max_{j=\overline{1,n}} |b_j| < a^2.$$

§3.2. Уравнения с разнонаправленными сдвигами в старших производных

3.2.1. Построение решений уравнения.

Рассмотрим в полупространстве $\{(x,t) \,|\, x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0\}$ гиперболическое уравнение

$$u_{tt}(x,t) = a^2 \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j}(x,t) + \\ + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{kj} u_{x_j x_j}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k - h_k, x_{k+1}, \ldots, x_n, t), \quad (3.15)$$

где $a \neq 0$, b_{kj} ($k = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$) и $h_1, \ldots, h_n$ — заданные вещественные числа.

Сначала запишем уравнение (3.15) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) = a^2 \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j}(x,t) + \\ + b_{11} u_{x_1 x_1}(x_1 - h_1, x_2, \ldots, x_n, t) + b_{21} u_{x_1 x_1}(x_1, x_2 - h_2, x_3, \ldots, x_n, t) + \\ + \ldots + b_{n1} u_{x_1 x_1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n - h_n, t) + \\ + b_{12} u_{x_2 x_2}(x_1 - h_1, x_2, \ldots, x_n, t) + b_{22} u_{x_2 x_2}(x_1, x_2 - h_2, x_3, \ldots, x_n, t) + \\ + \ldots + b_{n2} u_{x_2 x_2}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n - h_n, t) + \\ + b_{1n} u_{x_n x_n}(x_1 - h_1, x_2, \ldots, x_n, t) + b_{2n} u_{x_n x_n}(x_1, x_2 - h_2, x_3, \ldots, x_n, t) + \\ + \ldots + b_{nn} u_{x_n x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n - h_n, t). \end{aligned}$$

Применим формально к последнему выражению преобразование Фурье по n-мерной переменной x:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\xi \cdot x} dx$$

и перейдем к двойственной переменной ξ. В результате получим для нахождения функции $\widehat{u}(\xi,t) := F_x[u](\xi,t)$ уравнение

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2} = -\big(a^2|\xi|^2 + b_{11}\xi_1^2 e^{i\,h_1\xi_1} + b_{21}\xi_1^2 e^{i\,h_2\xi_2} + \ldots + b_{n1}\xi_1^2 e^{i\,h_n\xi_n} +$$
$$+ b_{12}\xi_2^2 e^{i\,h_1\xi_1} + b_{22}\xi_2^2 e^{i\,h_2\xi_2} + \ldots + b_{n2}\xi_2^2 e^{i\,h_n\xi_n} +$$
$$b_{1n}\xi_n^2 e^{i\,h_1\xi_1} + b_{2n1}\xi_n^2 e^{i\,h_2\xi_2} + \ldots + b_{nn}\xi_n^2 e^{i\,h_n\xi_n} + \big)\,\widehat{u}.\ \ \xi\in\mathbb{R}^n,$$

Распишем все экспоненты по формуле Эйлера:

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2} = -\big(a^2|\xi|^2 + b_{11}\xi_1^2\cos(h_1\xi_1) + i\,b_{11}\xi_1^2\sin(h_1\xi_1) +$$
$$+ b_{21}\xi_1^2\cos(h_2\xi_2) + i\,b_{21}\xi_1^2\sin(h_2\xi_2) + \ldots +$$
$$+ b_{n1}\xi_1^2\cos(h_n\xi_n) + i\,b_{n1}\xi_1^2\sin(h_n\xi_n) +$$
$$+ b_{12}\xi_2^2\cos(h_1\xi_1) + i\,b_{12}\xi_2^2\sin(h_1\xi_1) +$$
$$+ b_{22}\xi_2^2\cos(h_2\xi_2) + i\,b_{22}\xi_2^2\sin(h_2\xi_2) + \ldots +$$
$$+ b_{n2}\xi_2^2\cos(h_n\xi_n) + i\,b_{n2}\xi_2^2\sin(h_n\xi_n) +$$
$$+\ldots+$$
$$+ b_{1n}\xi_n^2\cos(h_1\xi_1) + i\,b_{1n}\xi_n^2\sin(h_1\xi_1) +$$
$$+ b_{2n}\xi_n^2\cos(h_2\xi_2) + i\,b_{2n}\xi_n^2\sin(h_2\xi_2) + \ldots +$$
$$+ b_{nn}\xi_n^2\cos(h_n\xi_n) + i\,b_{nn}\xi_n^2\sin(h_n\xi_n)\big)\,\widehat{u}.$$

Преобразуем полученное выражение

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2} = -\big(a^2|\xi|^2 + (b_{11}\xi_1^2 + b_{12}\xi_2^2 + \ldots + b_{1n}\xi_n^2)\cos(h_1\xi_1) +$$
$$+ (b_{21}\xi_1^2 + b_{22}\xi_2^2 + \ldots + b_{2n}\xi_n^2)\cos(h_2\xi_2) +$$
$$+\ldots+$$
$$+ (b_{n1}\xi_1^2 + b_{n2}\xi_2^2 + \ldots + b_{nn}\xi_n^2)\cos(h_n\xi_n) +$$
$$+ i\,(b_{11}\xi_1^2 + b_{12}\xi_2^2 + \ldots + b_{1n}\xi_n^2)\sin(h_1\xi_1) +$$
$$+ i\,(b_{21}\xi_1^2 + b_{22}\xi_2^2 + \ldots + b_{2n}\xi_n^2)\sin(h_2\xi_2) +$$
$$+\ldots+$$
$$+ (b_{n1}\xi_1^2 + b_{n2}\xi_2^2 + \ldots + b_{nn}\xi_n^2)\sin(h_n\xi_n)\big)\,\widehat{u},$$

откуда запишем

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2} = -\left[a^2|\xi|^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\xi_j^2\right)\cos(h_k\xi_k) + \right.$$

$$\left. + i\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\xi_j^2\right)\sin(h_k\xi_k)\right]\widehat{u}.$$

Введем обозначения

$$\alpha(\xi) := \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\xi_j^2\right)\cos(h_k\xi_k), \tag{3.16}$$

$$\beta(\xi) := \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\xi_j^2\right)\sin(h_k\xi_k). \tag{3.17}$$

В результате после применения Фурье получим согласно операционной схеме [11, §10] начальную задачу

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2} = -\left(a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi) + i\,\beta(\xi)\right)\widehat{u}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{3.18}$$

$$\widehat{u}(0) = 0, \quad \widehat{u}_t(0) = 1. \tag{3.19}$$

Решение задачи (3.18), (3.19) найдено в п. 3.1.1 §3.1 и определяется по формуле

$$\widehat{u}(\xi,t) = \frac{e^{-i\,\varphi(\xi)}}{2i\,\rho(\xi)}\left[e^{i\,t\,\rho(\xi)[\cos\varphi(\xi)+i\sin\varphi(\xi)]} - e^{-i\,t\,\rho(\xi)[\cos\varphi(\xi)+i\sin\varphi(\xi)]}\right] =$$

$$= \frac{e^{-i\,\varphi(\xi)}}{2i\,\rho(\xi)}\left[e^{-t\,\rho(\xi)\sin\varphi(\xi)}e^{i\,t\,\rho(\xi)\cos\varphi(\xi)} - e^{t\,\rho(\xi)\sin\varphi(\xi)}e^{-i\,t\,\rho(\xi)\cos\varphi(\xi)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2i\,\rho(\xi)}\left[e^{-t\,\rho(\xi)\sin\varphi(\xi)}e^{i(t\,\rho(\xi)\cos\varphi(\xi)-\varphi(\xi))} - \right.$$

$$\left. - e^{t\,\rho(\xi)\sin\varphi(\xi)}e^{-i(t\,\rho(\xi)\cos\varphi(\xi)+\varphi(\xi))}\right] =$$

$$= \frac{1}{2i\,\rho(\xi)}\left[e^{-t\,G_1(\xi)}e^{i(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi))} - e^{t\,G_1(\xi)}e^{-i(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi))}\right], \tag{3.20}$$

где введены обозначения

$$G_1(\xi) := \rho(\xi)\sin\varphi(\xi), \quad G_2(\xi) := \rho(\xi)\cos\varphi(\xi), \tag{3.21}$$

$$\rho(\xi) := \left[\left(a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi)\right)^2 + \beta^2(\xi)\right]^{1/4}, \tag{3.22}$$

$$\varphi(\xi) := \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\beta(\xi)}{a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi)}. \tag{3.23}$$

Применим теперь к равенству (3.20) формально обратное преобразование Фурье F_ξ^{-1} и получим

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2i\,\rho(\xi)}\left[e^{-t\,G_1(\xi)}e^{i(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi))} - \right.$$
$$\left. - e^{t\,G_1(\xi)}e^{-i(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi))}\right]e^{-ix\cdot\xi}d\xi =$$
$$= \frac{1}{2i(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\rho(\xi)}\left[e^{-t\,G_1(\xi)}e^{i(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)} - \right.$$
$$\left. - e^{t\,G_1(\xi)}e^{-i(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)}\right]d\xi.$$

С учетом четности функций $\alpha(\xi)$, $\rho(\xi)$, $G_2(\xi)$ и нечетности функций $\beta(\xi)$, $\varphi(\xi)$, $G_1(\xi)$ по каждой переменной ξ_j преобразуем последнее выражение аналогично п. 3.1.1 §3.1. В результате получим

$$\frac{1}{2i(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\rho(\xi)}\left[e^{-t\,G_1(\xi)}e^{i(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)} - \right.$$
$$\left. - e^{t\,G_1(\xi)}e^{-i(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)}\right]d\xi =$$
$$= \frac{1}{2i(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n_-}\frac{1}{\rho(\xi)}\left[e^{-t\,G_1(\xi)}e^{i(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)} - \right.$$
$$\left. - e^{t\,G_1(\xi)}e^{-i(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)}\right]d\xi +$$
$$+ \frac{1}{2i(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{1}{\rho(\xi)}\left[e^{-t\,G_1(\xi)}e^{i(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)} - \right.$$
$$\left. - e^{t\,G_1(\xi)}e^{-i(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)}\right]d\xi =$$

$$
= \frac{1}{2i(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{\rho(\xi)} \Big[e^{t\,G_1(\xi)} e^{i(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)} -
$$

$$
- e^{-t\,G_1(\xi)} e^{-i(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)} \Big] \, d\xi +
$$

$$
+ \frac{1}{2i(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{\rho(\xi)} \Big[e^{-t\,G_1(\xi)} e^{i(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)} -
$$

$$
- e^{t\,G_1(\xi)} e^{-i(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)} \Big] \, d\xi =
$$

$$
= \frac{1}{2i(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{\rho(\xi)} \Big[2i\, e^{t\,G_1(\xi)} \sin\left(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right) +
$$

$$
+ 2i\, e^{-t\,G_1(\xi)} \sin\left(t\,G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right) \Big] \, d\xi =
$$

$$
= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{\rho(\xi)} \Big[e^{t\,G_1(\xi)} \sin\left(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right) +
$$

$$
+ e^{-t\,G_1(\xi)} \sin\left(t\,G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right) \Big] \, d\xi.
$$

На вопрос о существовании гладких решений уравнения (3.15) ответим в следующем пункте.

3.2.2. Существование классических решений.

Теорема 3.2.1. *При выполнении условия*

$$
a^2|\xi|^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\xi_j^2 \right) \cos\left(h_k\xi_k\right) > 0 \tag{3.24}
$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \overrightarrow{0}$ *функции*

$$
F(x,t;\xi) := e^{t\,G_1(\xi)} \sin\left(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right), \tag{3.25}
$$

$$
H(x,t;\xi) := e^{-t\,G_1(\xi)} \sin\left(t\,G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right), \tag{3.26}
$$

где $\varphi(\xi)$ *определяется по формуле* (3.23), $G_1(\xi)$ *и* $G_2(\xi)$ *определяются равенствами* (3.21), *удовлетворяют уравнению* (3.15) *в классическом смысле.*

Доказательство. При выполнении условия (3.24) функции (3.22) и (3.23) определены корректно для любого значения $\xi \in \mathbb{R}^n$, а значит, функции (3.25) и (3.26) являются гладкими.

Подставим сначала функцию (3.25) непосредственно в уравнение (3.15). Для этого вычислим

$$F_{x_j}(x,t;\xi) = \xi_j e^{tG_1(\xi)} \cos\left(t\, G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right),$$

$$F_{x_j x_j}(x,t;\xi) = -\xi_j^2 e^{tG_1(\xi)} \sin\left(t\, G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right),$$

$$F_t(x,t;\xi) = G_1(\xi) e^{tG_1(\xi)} \sin\left(t\, G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right) + \\ + G_2(\xi) e^{tG_1(\xi)} \cos\left(t\, G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right),$$

$$F_{tt}(x,t;\xi) = \left[G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)\right] e^{tG_1(\xi)} \sin\left(t\, G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right) + \\ + 2G_1(\xi)G_2(\xi) e^{tG_1(\xi)} \cos\left(t\, G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right). \quad (3.27)$$

Рассуждаем аналогично доказательству теоремы 3.1.1 §3.1 и с учетом равенств (3.21), выполнения из формулы (3.23) условия $|2\varphi(\xi)| < \pi/2$, а значит и неравенства $\cos 2\varphi(\xi) > 0$, находим значения выражений $G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)$ и $2G_1(\xi)G_2(\xi)$:

$$2G_1(\xi)G_2(\xi) = \beta(\xi). \quad (3.28)$$

При установленном выше неравенстве $\cos 2\varphi(\xi) > 0$ и выполнении условия (3.8) найдем теперь

$$G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi) = -a^2|\xi|^2 - \alpha(\xi). \quad (3.29)$$

С учетом найденных выражений (3.28) и (3.29) функция (3.27) принимает вид

$$F_{tt}(x,t;\xi) = \left[-(a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi)) \sin\left(t\, G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right) + \\ + \beta(\xi) \cos\left(t\, G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right)\right] e^{tG_1(\xi)}.$$

Подставим теперь найденные производные F_{tt} и $F_{x_j x_j}$ в уравнение (3.15):

$$F_{tt}(x,t;\xi) - a^2 \sum_{j=1}^{n} F_{x_j x_j}(x,t;\xi) =$$

$$= [-(a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi)) \sin(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi) +$$

$$+ \beta(\xi) \cos(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi) +$$

$$+ a^2 \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 \sin(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi)] e^{tG_1(\xi)} =$$

$$= -\left[\alpha(\xi) \sin(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi) -\right.$$

$$\left. -\beta(\xi)\cos(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi)\right] e^{tG_1(\xi)}.$$

Подставим в полученное выражение равенства (3.16) и (3.17):

$$-\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\xi_j^2\right)\cos(h_k\xi_k)\sin(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi) -\right.$$

$$\left. -\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\xi_j^2\right)\sin(h_k\xi_k)\cos(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi)\right] e^{tG_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\xi_j^2 \sin(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi - h_k\xi_k) e^{tG_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\xi_j^2 \sin(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) +$$

$$+ x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n - h_k\xi_k) e^{tG_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\xi_j^2 \sin(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) + x_1\xi_1 + \ldots + x_{k-1}\xi_{k-1} +$$

$$+ (x_k - h_k)\xi_k + x_{k+1}\xi_{k+1} + \ldots + x_n\xi_n) e^{tG_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\xi_j^2 \sin(t\,G_2(\xi) + \varphi(\xi) +$$

$$+ (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k - h_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)\cdot\xi) e^{tG_1(\xi)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{kj} F_{x_j x_j}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k - h_k, x_{k+1}, \ldots, x_n, t;\xi).$$

Непосредственной подстановкой в уравнение (3.15) проверим теперь, что и функция $H(x,t;\xi)$ удовлетворяет ему в классическом смысле. Для этого вычислим производные:

$$H_{x_j}(x,t;\xi) = -\xi_j e^{-tG_1(\xi)} \cos\left(t\, G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right),$$

$$H_{x_j x_j}(x,t;\xi) = -\xi_j^2 e^{-tG_1(\xi)} \sin\left(t\, G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right),$$

$$H_t(x,t;\xi) = -G_1(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \sin\left(t\, G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right) + \\ + G_2(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \cos\left(t\, G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right),$$

$$H_{tt}(x,t;\xi) = \left[G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)\right] e^{-tG_1(\xi)} \sin\left(t\, G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right) - \\ - 2G_1(\xi)G_2(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \cos\left(t\, G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right). \quad (3.30)$$

С учетом выражений (3.28) и (3.29) функция (3.30) принимает вид

$$H_{tt}(x,t;\xi) = \left[-(a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi)) \sin\left(t\, G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right) - \\ -\beta(\xi) \cos\left(t\, G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right)\right] e^{-tG_1(\xi)}.$$

Подставим найденные производные H_{tt} и $H_{x_j x_j}$ в уравнение (3.15):

$$H_{tt}(x,t;\xi) - a^2 \sum_{j=1}^{n} H_{x_j x_j}(x,t;\xi) = \\ = [-(a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi)) \sin\left(t\, G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right) - \\ - \beta(\xi) \cos\left(t\, G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right) + \\ + a^2 \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 \sin\left(t\, G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right)] e^{-tG_1(\xi)} = \\ = -\left[\alpha(\xi) \sin\left(t\, G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right) + \\ + \beta(\xi) \cos\left(t\, G_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi\right)\right] e^{-tG_1(\xi)} =$$

$$= -\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\xi_j^2\right)\cos(h_k\xi_k)\sin(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\xi_j^2\right)\sin(h_k\xi_k)\cos(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)\right]e^{-tG_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\xi_j^2\sin(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi+h_k\xi_k)e^{-tG_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\xi_j^2\sin(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi)-$$

$$-x_1\xi_1-\ldots-x_n\xi_n+h_k\xi_k)e^{-tG_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\xi_j^2\sin(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x_1\xi_1-\ldots-x_{k-1}\xi_{k-1}-$$

$$-(x_k-h_k)\xi_k-x_{k+1}\xi_{k+1}-\ldots-x_n\xi_n)e^{-tG_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\xi_j^2\sin(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)+$$

$$-(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k-h_k,x_{k+1},\ldots,x_n)\cdot\xi)e^{-tG_1(\xi)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}H_{x_jx_j}(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k-h_k,x_{k+1},\ldots,x_n,t;\xi).$$

Теорема доказана.

Следствие 3.2.1. *При выполнении условия* (3.24) *семейство функций*

$$G(x,t;A,B,\xi) := A\,e^{t\,G_1(\xi)}\sin(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)+$$
$$+B\,e^{-t\,G_1(\xi)}\sin(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi),$$

где $\varphi(\xi)$ *определяется по формуле* (3.23)*,* $G_1(\xi)$ *и* $G_2(\xi)$ *определяются равенствами* (3.21)*, удовлетворяет уравнению* (3.15) *в классическом смысле при любых вещественных значениях параметров* A*,* B *и* $\xi \neq \overrightarrow{0}$*.*

3.2.3. Смысл условия на коэффициенты уравнения и классы уравнений, удовлетворяющих этому условию.

Выясним теперь каким условиям должны удовлетворять вещественные коэффициенты a, b_{kj} ($k = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$) и сдвиги $h_1, \ldots, h_n$ уравнения (3.15), чтобы условие (3.24) выполнялось для любого n-мерного параметра ξ.

Условие (3.24) запишем в виде

$$\begin{aligned}
&a^2(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2) + \\
&\qquad + (b_{11}\xi_1^2 + b_{12}\xi_2^2 + \ldots + b_{1n}\xi_n^2)\cos(h_1\xi_1) + \\
&\qquad + (b_{21}\xi_1^2 + b_{22}\xi_2^2 + \ldots + b_{2n}\xi_n^2)\cos(h_2\xi_2) + \\
&\qquad\qquad + \ldots + \\
&\qquad\qquad + (b_{n1}\xi_1^2 + b_{n2}\xi_2^2 + \ldots + b_{nn}\xi_n^2)\cos(h_n\xi_n) > 0
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
&[a^2 + b_{11}\cos(h_1\xi_1) + b_{21}\cos(h_2\xi_2) + \ldots + b_{n1}\cos(h_n\xi_n)]\xi_1^2 + \\
&\qquad + [a^2 + b_{12}\cos(h_1\xi_1) + b_{22}\cos(h_2\xi_2) + \ldots + b_{n2}\cos(h_n\xi_n)]\xi_2^2 + \\
&\qquad\qquad + \ldots + \\
&\qquad + [a^2 + b_{1n}\cos(h_1\xi_1) + b_{2n}\cos(h_2\xi_2) + \ldots + b_{nn}\cos(h_n\xi_n)]\xi_n^2 > 0.
\end{aligned}$$

Очевидно, что последнее неравенство будет выполняться для любых сдвигов $h_1, \ldots, h_n$ и любых значений $\xi_1, \ldots, \xi_n$, если коэффициенты уравнения удовлетворяют следующим n условиям:

$$\max_{k=\overline{1,n}} |b_{kj}| < a^2, \quad j = \overline{1,n}.$$

§3.3. Уравнения с нелокальными потенциалами общего вида

3.3.1. Построение решений уравнения.

Пусть $c \neq 0$, $d_1, \ldots, d_n$ и $l_1, \ldots, l_n$ — заданные вещественные числа. В полупространстве $\{(x,t) |\, x \in \mathbb{R}^n,\, t > 0\}$ рассмотрим гиперболическое уравнение

$$u_{tt}(x,t) = c^2 \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j}(x,t) - \sum_{j=1}^{n} d_j u(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j - l_j, x_{j+1}, \ldots, x_n, t). \quad (3.31)$$

Никакие условия соизмеримости на сдвиги не накладываются.

Для нахождения решений уравнения (3.31) также применим формально к этому уравнению преобразование Фурье по n-мерной переменной x и получим для отыскания функции

$$\widehat{u}(\xi, t) := F_x[u](\xi, t)$$

обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \widehat{u}}{dt^2} = -\left(c^2 |\xi|^2 + \sum_{j=1}^{n} d_j \cos(l_j \xi_j) + i \sum_{j=1}^{n} d_j \sin(l_j \xi_j) \right) \widehat{u}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (3.32)$$

к которому, согласно [5, с. 198], добавим два начальных условия

$$\widehat{u}(0) = 0, \quad \widehat{u}_t(0) = 1. \quad (3.33)$$

Для удобства в дальнейших вычислениях введем следующие обозначения:

$$\lambda(\xi) := \sum_{j=1}^{n} d_j \cos(l_j \xi_j), \quad \mu(\xi) := \sum_{j=1}^{n} d_j \sin(l_j \xi_j).$$

Тогда уравнение (3.32) принимает вид

$$\frac{d^2 \widehat{u}}{dt^2} = -\left(c^2 |\xi|^2 + \lambda(\xi) + i\,\mu(\xi) \right) \widehat{u}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

корни характеристического уравнения для которого, определяются по формуле

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{-\left(c^2 |\xi|^2 + \lambda(\xi) + i\,\mu(\xi) \right)} =$$

$$= \pm\, i \sqrt{c^2 |\xi|^2 + \lambda(\xi) + i\,\mu(\xi)} = \pm\, i \delta(\xi) e^{i\,\psi(\xi)},$$

где

$$\delta(\xi) := \left[\left(c^2|\xi|^2 + \lambda(\xi)\right)^2 + \mu^2(\xi)\right]^{1/4}, \tag{3.34}$$

$$\psi(\xi) := \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\mu(\xi)}{c^2|\xi|^2 + \lambda(\xi)}. \tag{3.35}$$

Рассуждая аналогично п. 3.1.1 §3.1, получим решение задачи (3.32) и (3.33) в виде

$$\widehat{u}(\xi, t) = \frac{1}{2i\,\delta(\xi)}\left[e^{-t\,\widetilde{G}_1(\xi)}e^{i(t\,\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi))} - e^{t\,\widetilde{G}_1(\xi)}e^{-i(t\,\widetilde{G}_2(\xi)+\psi(\xi))}\right], \tag{3.36}$$

где введены обозначения

$$\widetilde{G}_1(\xi) := \delta(\xi)\sin\psi(\xi), \quad \widetilde{G}_2(\xi) := \delta(\xi)\cos\psi(\xi). \tag{3.37}$$

Применив к равенству (3.36) формально обратное преобразование Фурье F_ξ^{-1} и с учетом четности функций $\lambda(\xi)$, $\delta(\xi)$, $\widetilde{G}_2(\xi)$ и нечетности функций $\mu(\xi)$, $\psi(\xi)$, $\widetilde{G}_1(\xi)$ по каждой переменной ξ_j в дальнейших преобразованиях, окончательно получим

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{2i\,\delta(\xi)}\left[e^{-t\,\widetilde{G}_1(\xi)}e^{i(t\,\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi))} - \right.$$

$$\left. - e^{t\,\widetilde{G}_1(\xi)}e^{-i(t\,\widetilde{G}_2(\xi)+\psi(\xi))}\right]e^{-ix\cdot\xi}d\xi =$$

$$= \frac{1}{2i(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\delta(\xi)}\left[e^{-t\,\widetilde{G}_1(\xi)}e^{i(t\,\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi)} - \right.$$

$$\left. - e^{t\,\widetilde{G}_1(\xi)}e^{-i(t\,\widetilde{G}_2(\xi)+\psi(\xi)+x\cdot\xi)}\right]d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{1}{\delta(\xi)}\left[e^{t\,\widetilde{G}_1(\xi)}\sin\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi\right) + \right.$$

$$\left. + e^{-t\,\widetilde{G}_1(\xi)}\sin\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi\right)\right]d\xi.$$

На основании полученного интегрального представления докажем в следующем пункте теорему.

3.3.2. Существование классических решений.

Теорема 3.3.1. *При выполнении условия*

$$c^2|\xi|^2 + \sum_{j=1}^{n} d_j \cos(l_j\xi_j) > 0 \tag{3.38}$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ *функции*

$$\widetilde{F}(x,t;\xi) := e^{t\,\widetilde{G}_1(\xi)} \sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi), \tag{3.39}$$

$$\widetilde{H}(x,t;\xi) := e^{-t\,\widetilde{G}_1(\xi)} \sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi), \tag{3.40}$$

где $\psi(\xi)$ *определяется по формуле* (3.35), $\widetilde{G}_1(\xi)$ *и* $\widetilde{G}_2(\xi)$ *определяются равенствами* (3.37), *удовлетворяют уравнению* (3.31) *в классическом смысле.*

Доказательство. Проверим сначала, что функция (3.39) удовлетворяет уравнению (3.31). Для этого вычислим производные

$$\widetilde{F}_{x_j}(x,t;\xi) = \xi_j e^{t\widetilde{G}_1(\xi)} \cos(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi),$$

$$\widetilde{F}_{x_jx_j}(x,t;\xi) = -\xi_j^2 e^{t\widetilde{G}_1(\xi)} \sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi),$$

$$\widetilde{F}_t(x,t;\xi) = \widetilde{G}_1(\xi) e^{t\widetilde{G}_1(\xi)} \sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi) + \\ + \widetilde{G}_2(\xi) e^{t\widetilde{G}_1(\xi)} \cos(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi),$$

$$\widetilde{F}_{tt}(x,t;\xi) = \left[\widetilde{G}_1^2(\xi) - \widetilde{G}_2^2(\xi)\right] e^{t\widetilde{G}_1(\xi)} \sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi) + \\ + 2\widetilde{G}_1(\xi)\widetilde{G}_2(\xi) e^{t\widetilde{G}_1(\xi)} \cos(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi).$$

Найдем теперь для производной $\widetilde{F}_{tt}$ значения выражений $\widetilde{G}_1^2(\xi) - \widetilde{G}_2^2(\xi)$ и $2\widetilde{G}_1(\xi)\widetilde{G}_2(\xi)$. Из формул (3.37) следует $2\widetilde{G}_1(\xi)\widetilde{G}_2(\xi) = \delta^2(\xi)\sin 2\psi(\xi)$.

Так как функция ψ определяется равенством (3.35), то $|2\psi(\xi)| < \pi/2$, а, следовательно $\cos 2\psi(\xi) > 0$. На основании этого неравенства вычислим

$$\sin 2\psi(\xi) = \frac{\operatorname{tg} 2\psi(\xi)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\psi(\xi)}} =$$
$$= \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{\mu(\xi)}{c^2|\xi|^2+\lambda(\xi)}\right)\left[1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{\mu(\xi)}{c^2|\xi|^2+\lambda(\xi)}\right)\right]^{-1/2} =$$
$$= \frac{\mu(\xi)}{c^2|\xi|^2+\lambda(\xi)}\left[1+\frac{\mu^2(\xi)}{\left(c^2|\xi|^2+\lambda(\xi)\right)^2}\right]^{-1/2} =$$
$$= \frac{\mu(\xi)}{c^2|\xi|^2+\lambda(\xi)}\left[\frac{\left(c^2|\xi|^2+\lambda(\xi)\right)^2}{\left(c^2|\xi|^2+\lambda(\xi)\right)^2+\mu^2(\xi)}\right]^{1/2} =$$
$$= \frac{\mu(\xi)}{c^2|\xi|^2+\lambda(\xi)}\frac{|c^2|\xi|^2+\lambda(\xi)|}{\delta^2(\xi)}.$$

В силу условия (3.38) из последнего равенства получим

$$\sin 2\psi(\xi) = \frac{\mu(\xi)}{c^2|\xi|^2+\lambda(\xi)}\frac{c^2|\xi|^2+\lambda(\xi)}{\delta^2(\xi)} = \frac{\mu(\xi)}{\delta^2(\xi)},$$

а значит,

$$2\widetilde{G}_1(\xi)\widetilde{G}_2(\xi) = \mu(\xi). \tag{3.41}$$

С учетом неравенств $\cos 2\psi(\xi) > 0$ и (3.38) вычислим

$$\widetilde{G}_1^2(\xi) - \widetilde{G}_2^2(\xi) = \delta^2(\xi)\left[\sin^2\psi(\xi) - \cos^2\psi(\xi)\right] =$$
$$= -\delta^2(\xi)\cos 2\psi(\xi) = -\frac{\delta^2(\xi)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\psi(\xi)}} =$$
$$= -\delta^2(\xi)\left[\frac{\left(c^2|\xi|^2+\lambda(\xi)\right)^2}{\left(c^2|\xi|^2+\lambda(\xi)\right)^2+\mu^2(\xi)}\right]^{1/2} = -c^2|\xi|^2 - \lambda(\xi). \tag{3.42}$$

Подставим выражения (3.41) и (3.42) в производную $\widetilde{F}_{tt}$ и получим

$$\widetilde{F}_{tt}(x,t;\xi) = \Big[-(c^2|\xi|^2+\lambda(\xi))\sin\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi)+\psi(\xi)+x\cdot\xi\right)+$$
$$+\mu(\xi)\cos\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi)+\psi(\xi)+x\cdot\xi\right)\Big]\,e^{t\widetilde{G}_1(\xi)}.$$

Теперь подставим найденные производные $\widetilde{F}_{tt}$ и $\widetilde{F}_{x_jx_j}$ в уравнение (3.31):

$$
\begin{aligned}
\widetilde{F}_{tt}(x,t;\xi) - c^2 \sum_{j=1}^{n} \widetilde{F}_{x_j x_j}(x,t;\xi) =& \\
= [-(c^2|\xi|^2 + \lambda(\xi)) \sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi) +& \\
+ \mu(\xi)\cos(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi) +& \\
+ c^2 \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 \sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi)] e^{t\widetilde{G}_1(\xi)} =& \\
= -[\lambda(\xi)\sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi) -& \\
- \mu(\xi)\cos(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi)] e^{t\widetilde{G}_1(\xi)} =& \\
= - \left[\sum_{j=1}^{n} d_j \cos(l_j\xi_j) \sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi) - \right.& \\
\left. - \sum_{j=1}^{n} d_j \sin(l_j\xi_j)\cos(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi) \right] e^{t\widetilde{G}_1(\xi)} =& \\
= - \sum_{j=1}^{n} d_j \sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi - l_j\xi_j) e^{t\widetilde{G}_1(\xi)} =& \\
= - \sum_{j=1}^{n} d_j \sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n - l_j\xi_j) e^{t\widetilde{G}_1(\xi)} =& \\
= - \sum_{j=1}^{n} d_j \sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x_1\xi_1 + \ldots + x_{j-1}\xi_{j-1} +& \\
+ (x_j - l_j)\xi_j + x_{j+1}\xi_{j+1} + \ldots + x_n\xi_n) e^{t\widetilde{G}_1(\xi)} =& \\
= - \sum_{j=1}^{n} d_j \sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) +& \\
+ (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j - l_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)\cdot\xi) e^{t\widetilde{G}_1(\xi)} =& \\
= - \sum_{j=1}^{n} d_j \widetilde{F}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j - l_j, x_{j+1}, \ldots, x_n, t; \xi).&
\end{aligned}
$$

Тем самым мы показали, что функция (3.39) удовлетворяет уравнению (3.31) в классическом смысле.

Проверим теперь, что и функция (3.40) удовлетворяет уравнению (3.31). Вычислим производные:

$$\widetilde{H}_{x_j}(x,t;\xi) = -\xi_j e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} \cos\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi\right),$$
$$\widetilde{H}_{x_jx_j}(x,t;\xi) = -\xi_j^2 e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} \sin\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi\right),$$

$$\widetilde{H}_t(x,t;\xi) = -\widetilde{G}_1(\xi)e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} \sin\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi\right)+ \\ + \widetilde{G}_2(\xi)e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} \cos\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi\right),$$

$$\widetilde{H}_{tt}(x,t;\xi) = \left[\widetilde{G}_1^2(\xi) - \widetilde{G}_2^2(\xi)\right] e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} \sin\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi\right)- \\ - 2\widetilde{G}_1(\xi)\widetilde{G}_2(\xi)e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} \cos\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi\right).$$

С учетом формул (3.41) и (3.42) выражение для $\widetilde{H}_{tt}$ принимает вид

$$\widetilde{H}_{tt}(x,t;\xi) = \Big[-(c^2|\xi|^2 + \lambda(\xi)) \sin\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi\right)- \\ -\mu(\xi) \cos\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi\right)\Big] e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}.$$

Подставим теперь непосредственно производные $\widetilde{H}_{tt}$ и $\widetilde{H}_{x_jx_j}$ в уравнение (3.31):

$$\widetilde{H}_{tt}(x,t;\xi) - c^2\sum_{j=1}^{n}\widetilde{H}_{x_jx_j}(x,t;\xi) = \\ = [-(c^2|\xi|^2 + \lambda(\xi)) \sin\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi\right)- \\ - \mu(\xi) \cos\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi\right)+ \\ + c^2\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2 \sin\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi\right)]e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} = \\ = -[\lambda(\xi) \sin\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi\right)+ \\ + \mu(\xi) \cos\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi\right)]e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$

$$= -\left[\sum_{j=1}^{n} d_j \cos(l_j\xi_j) \sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} d_j \sin(l_j\xi_j) \cos(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi)\right] e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} d_j \sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi + l_j\xi_j) e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} d_j \sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x_1\xi_1 - \ldots - x_n\xi_n + l_j\xi_j) e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} d_j \sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x_1\xi_1 - \ldots - x_{j-1}\xi_{j-1} -$$

$$- (x_j - l_j)\xi_j - x_{j+1}\xi_{j+1} - \ldots - x_n\xi_n) e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} d_j \sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) -$$

$$+ (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j - l_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)\cdot\xi) e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} d_j \widetilde{H}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j - l_j, x_{j+1}, \ldots, x_n, t; \xi).$$

Непосредственной подстановкой в уравнение (3.31) мы убедились, что что обе функции $\widetilde{F}(x,t;\xi)$ и $\widetilde{H}(x,t;\xi)$ удовлетворяет уравнению (3.31) в классическом смысле.

Отметим также, что при выполнении условия (3.38) функции (3.34) и (3.35), а значит, и функции (3.37) определены корректно для любого значения $\xi \in \mathbb{R}^n$.

А значит, функции $\widetilde{F}(x,t;\xi)$ и $\widetilde{H}(x,t;\xi)$ являются гладкими решениями уравнения (3.31).

Теорема доказана.

Следствие 3.3.1. *При выполнении условия* (3.38) *трехпараметрическое семейство функций*

$$\widetilde{G}(x,t;\widetilde{A},\widetilde{B},\xi) := \widetilde{A}\,e^{t\,\widetilde{G}_1(\xi)}\sin\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi)+\psi(\xi)+x\cdot\xi\right)+ \\ +\widetilde{B}\,e^{-t\,\widetilde{G}_1(\xi)}\sin\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\right),$$

где $\psi(\xi)$ определяется по формуле (3.35)*, $\widetilde{G}_1(\xi)$ и $\widetilde{G}_2(\xi)$ определяются равенствами* (3.37)*, удовлетворяет уравнению* (3.31) *в классическом смысле при любых вещественных значениях параметров $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ и ξ.*

3.3.3. Смысл условия на коэффициенты уравнения и классы уравнений, удовлетворяющих этому условию.

Выясним теперь: существуют ли в действительности такие уравнения (3.31), классические решения которых нами были получены, чтобы условие (3.38) выполнялось при любом $\xi \in \mathbb{R}^n$? Ответ положительный. Приведем примеры таких уравнений.

Представим условие (3.38) в следующем виде:

$$\left(c^2\xi_1^2 + d_1\cos(l_1\xi_1)\right) + \ldots + \left(c^2\xi_n^2 + d_n\cos(l_n\xi_n)\right) > 0.$$

В п. 2.1.3 §2.1 показано, что каждое из n слагаемых в левой части неравенства, записанного выше, будет положительным, если выполняются условия

$$0 < d_j l_j^2 \le 2c^2, \quad j = \overline{1,n}. \tag{3.43}$$

При $\xi = \overrightarrow{0}$ условие (3.38) будет выполняться, если коэффициенты при нелокальных потенциалах будут удовлетворять неравенству

$$\sum_{j=1}^{n} d_j > 0. \tag{3.44}$$

Таким образом, условия условия (3.43) и (3.44) являются достаточными условиями существования гладких решений уравнения (3.31), определяемых трехпараметрическим семейством решений

$$\widetilde{G}(x,t;\widetilde{A},\widetilde{B},\xi) := \widetilde{A}\,e^{t\,\widetilde{G}_1(\xi)}\sin\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi)+\psi(\xi)+x\cdot\xi\right)+ \\ +\widetilde{B}\,e^{-t\,\widetilde{G}_1(\xi)}\sin\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\right),$$

где $\psi(\xi)$ определяется по формуле (3.35), $\widetilde{G}_1(\xi)$ и $\widetilde{G}_2(\xi)$ определяются равенствами (3.37), $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ — произвольные вещественные параметры.

§3.4. Уравнения с разнонаправленными сдвигами в потенциалах

3.4.1. Построение решений уравнения.

В полупространстве $\{(x,t)|\, x\in\mathbb{R}^n,\ t>0\}$ рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) = c^2\sum_{j=1}^{n} u_{x_jx_j}(x,t) - \\ - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} d_{jk}u(x_1,\dots,x_{j-1},x_j-l_{jk},x_{j+1},\dots,x_n,t), \end{aligned} \tag{3.45}$$

где $c\neq 0$, d_{jk} и l_{jk} ($j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,m_j}$) — заданные вещественные числа.

Никакие условия соизмеримости на сдвиги не накладываются.

Запишем уравнение (3.45) в виде

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) = c^2\sum_{j=1}^{n} u_{x_jx_j}(x,t) - d_{11}u(x_1-l_{11},x_2,\dots,x_n,t) - \\ - d_{12}u(x_1-l_{12},x_2,\dots,x_n,t) - \ldots - d_{1m_1}u(x_1-l_{1m_1},x_2,\dots,x_n,t) - \\ - d_{21}u(x_1,x_2-l_{21},x_3,\dots,x_n,t) - d_{22}u(x_1,x_2-l_{22},x_3,\dots,x_n,t) - \\ - \ldots - d_{2m_2}u(x_1,x_2-l_{2m_2},x_3,\dots,x_n,t) - \\ - \ldots - \\ - d_{n1}u(x_1,\dots,x_{n-1},\dots,x_n-l_{n1},t) - \\ - d_{n2}u(x_1,\dots,x_{n-1},\dots,x_n-l_{n2},t) - \\ - \ldots - d_{nm_n}u(x_1,\dots,x_{n-1},\dots,x_n-l_{nm_n},t). \end{aligned}$$

Для нахождения решений этого уравнения применим формально к обеим частям выражения преобразование Фурье по n-мерной переменной x и получим для отыскания функции

$$\widehat{u}(\xi,t) := F_x[u](\xi,t)$$

обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2} = -\big(c^2|\xi|^2 + d_{11}e^{i\,l_{11}\xi_1} + d_{12}e^{i\,l_{12}\xi_1} + \ldots + d_{1m_1}e^{i\,l_{1m_1}\xi_1} + \\ + d_{21}e^{i\,l_{21}\xi_2} + d_{22}e^{i\,l_{22}\xi_2} + \ldots + d_{2m_2}e^{i\,l_{2m_2}\xi_2} + \\ + \ldots + \\ + d_{n1}e^{i\,l_{n1}\xi_n} + d_{n2}e^{i\,l_{n2}\xi_n} + \ldots + d_{nm_n}e^{i\,l_{nm_n}\xi_n}\big)\,\widehat{u},$$

откуда получим

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2} = -\big(c^2|\xi|^2 + \\ + (d_{11}\cos(l_{11}\xi_1) + d_{12}\cos(l_{12}\xi_1) + \ldots + d_{1m_1}\cos(l_{1m_1}\xi_1)) + \\ + (d_{21}\cos(l_{21}\xi_2) + d_{22}\cos(l_{22}\xi_2) + \ldots + d_{2m_2}\cos(l_{2m_2}\xi_2)) + \\ + \ldots + \\ + (d_{n1}\cos(l_{n1}\xi_n) + d_{n2}\cos(l_{n2}\xi_n) + \ldots + d_{nm_n}\cos(l_{nm_n}\xi_n)) + \\ + (d_{11}\sin(l_{11}\xi_1) + d_{12}\sin(l_{12}\xi_1) + \ldots + d_{1m_1}\sin(l_{1m_1}\xi_1)) + \\ + (d_{21}\sin(l_{21}\xi_2) + d_{22}\sin(l_{22}\xi_2) + \ldots + d_{2m_2}\sin(l_{2m_2}\xi_2)) + \\ + \ldots + \\ + (d_{n1}\sin(l_{n1}\xi_n) + d_{n2}\sin(l_{n2}\xi_n) + \ldots + d_{nm_n}\sin(l_{nm_n}\xi_n)).$$

Запишем в окончательном виде полученное уравнение

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2} = -\left(c^2|\xi|^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} d_{jk}\cos(l_{jk}\xi_j) + \right. \\ \left. + i\,\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} d_{jk}\cos(l_{jk}\xi_j)\right)\widehat{u}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (3.46)$$

к которому, согласно [5, с. 198], добавим два начальных условия

$$\widehat{u}(0) = 0, \quad \widehat{u}_t(0) = 1. \quad (3.47)$$

Для удобства в дальнейших вычислениях введем следующие обозначения:

$$\lambda(\xi) := \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} d_{jk}\cos(l_{jk}\xi_j),$$

$$\mu(\xi) := \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} d_{jk} \sin(l_{jk}\xi_j).$$

Тогда уравнение (3.46) примет вид

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2} = -\left(c^2|\xi|^2 + \lambda(\xi) + i\,\mu(\xi)\right)\widehat{u}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

корни характеристического уравнения для которого, определяются по формуле

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{-\left(c^2|\xi|^2 + \lambda(\xi) + i\,\mu(\xi)\right)} =$$
$$= \pm\, i\sqrt{c^2|\xi|^2 + \lambda(\xi) + i\,\mu(\xi)} = \pm\, i\delta(\xi)e^{i\,\psi(\xi)},$$

где

$$\delta(\xi) := \left[\left(c^2|\xi|^2 + \lambda(\xi)\right)^2 + \mu^2(\xi)\right]^{1/4}, \tag{3.48}$$

$$\psi(\xi) := \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\mu(\xi)}{c^2|\xi|^2 + \lambda(\xi)}. \tag{3.49}$$

Решение задачи (3.46) и (3.47), как показано в п. 3.1.1 §3.1, определяется по формуле

$$\widehat{u}(\xi,t) = \frac{1}{2i\,\delta(\xi)}\left[e^{-t\,\widetilde{G}_1(\xi)}e^{i(t\,\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi))} - e^{t\,\widetilde{G}_1(\xi)}e^{-i(t\,\widetilde{G}_2(\xi)+\psi(\xi))}\right], \tag{3.50}$$

где введены обозначения

$$\widetilde{G}_1(\xi) := \delta(\xi)\sin\psi(\xi), \quad \widetilde{G}_2(\xi) := \delta(\xi)\cos\psi(\xi). \tag{3.51}$$

Применим к равенству (3.50) формально обратное преобразование Фурье F_ξ^{-1} и с учетом четности функций $\lambda(\xi)$, $\delta(\xi)$, $\widetilde{G}_2(\xi)$ и нечетности функций $\mu(\xi)$, $\psi(\xi)$, $\widetilde{G}_1(\xi)$ по каждой переменной ξ_j в дальнейших преобразованиях, получим

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2i\,\delta(\xi)}\left[e^{-t\,\widetilde{G}_1(\xi)}e^{i(t\,\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi))}-\right.$$
$$\left.-e^{t\,\widetilde{G}_1(\xi)}e^{-i(t\,\widetilde{G}_2(\xi)+\psi(\xi))}\right]e^{-ix\cdot\xi}d\xi =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{1}{\delta(\xi)}\left[e^{t\,\widetilde{G}_1(\xi)}\sin\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi\right)+\right.$$
$$\left.+\, e^{-t\,\widetilde{G}_1(\xi)}\sin\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi\right)\right]d\xi.$$

3.4.2. Существование классических решений.

Теорема 3.4.1. *При выполнении условия*

$$c^2|\xi|^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} d_{jk}\cos(l_{jk}\xi_j) > 0 \tag{3.52}$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ *функции*

$$\widetilde{F}(x,t;\xi) := e^{t\,\widetilde{G}_1(\xi)}\sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi), \tag{3.53}$$

$$\widetilde{H}(x,t;\xi) := e^{-t\,\widetilde{G}_1(\xi)}\sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi), \tag{3.54}$$

где $\psi(\xi)$ *определяется по формуле* (3.49), $\widetilde{G}_1(\xi)$ *и* $\widetilde{G}_2(\xi)$ *определяются равенствами* (3.51), *удовлетворяют уравнению* (3.45) *в классическом смысле.*

Доказательство. Проверим сначала, что функция (3.53) удовлетворяет уравнению (3.45). Для этого найдем производные

$$\widetilde{F}_{x_j}(x,t;\xi) = \xi_j e^{t\widetilde{G}_1(\xi)}\cos(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi),$$

$$\widetilde{F}_{x_jx_j}(x,t;\xi) = -\xi_j^2 e^{t\widetilde{G}_1(\xi)}\sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi),$$

$$\widetilde{F}_t(x,t;\xi) = \widetilde{G}_1(\xi)e^{t\widetilde{G}_1(\xi)}\sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi) + \\ + \widetilde{G}_2(\xi)e^{t\widetilde{G}_1(\xi)}\cos(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi),$$

$$\widetilde{F}_{tt}(x,t;\xi) = \left[\widetilde{G}_1^2(\xi) - \widetilde{G}_2^2(\xi)\right]e^{t\widetilde{G}_1(\xi)}\sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi) + \\ + 2\widetilde{G}_1(\xi)\widetilde{G}_2(\xi)e^{t\widetilde{G}_1(\xi)}\cos(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi).$$

Значения выражений $\widetilde{G}_1^2(\xi) - \widetilde{G}_2^2(\xi)$ и $2\widetilde{G}_1(\xi)\widetilde{G}_2(\xi)$ определяются, как показано в п. 3.3.2 §3.3, по формулам

$$2\widetilde{G}_1(\xi)\widetilde{G}_2(\xi) = \mu(\xi), \tag{3.55}$$

$$\widetilde{G}_1^2(\xi) - \widetilde{G}_2^2(\xi) = -c^2|\xi|^2 - \lambda(\xi). \tag{3.56}$$

Подставив выражения (3.55) и (3.56) в производную $\widetilde{F}_{tt}$, получим

$$\widetilde{F}_{tt}(x,t;\xi) = \Big[-(c^2|\xi|^2 + \lambda(\xi)) \sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi) + \\ + \mu(\xi)\cos(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi)\Big] e^{t\widetilde{G}_1(\xi)}.$$

Теперь подставим найденные производные $\widetilde{F}_{tt}$ и $\widetilde{F}_{x_jx_j}$ в уравнение (3.45):

$$\widetilde{F}_{tt}(x,t;\xi) - c^2\sum_{j=1}^{n}\widetilde{F}_{x_jx_j}(x,t;\xi) =$$

$$= [-(c^2|\xi|^2 + \lambda(\xi))\sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi) +$$

$$+ \mu(\xi)\cos(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi) +$$

$$+ c^2\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2\sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi)]e^{t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$

$$= -[\lambda(\xi)\sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi) -$$

$$- \mu(\xi)\cos(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi)]e^{t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$

$$= -\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} d_{jk}\cos(l_{jk}\xi_j)\sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi) -\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} d_{jk}\sin(l_{jk}\xi_j)\cos(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi)\right] e^{t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} d_{jk}\sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi - l_{jk}\xi_j)e^{t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} d_{jk}\sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) +$$

$$+ x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n - l_{jk}\xi_j)e^{t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} d_{jk}\sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x_1\xi_1 + \ldots +$$

$$+ x_{j-1}\xi_{j-1} + (x_j - l_{jk})\xi_j + x_{j+1}\xi_{j+1} + \ldots + x_n\xi_n)e^{t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} d_{jk}\sin\big(t\,\widetilde{G}_2(\xi)+\psi(\xi)+$$
$$+ (x_1,\ldots,x_{j-1},x_j-l_{jk},x_{j+1},\ldots,x_n)\cdot\xi\big)e^{t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$
$$= -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} d_{jk}\widetilde{F}(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j-l_{jk},x_{j+1},\ldots,x_n,t;\xi).$$

Тем самым мы показали, что функция (3.53) удовлетворяет уравнению (3.45) в классическом смысле.

Проверим теперь, что и функция (3.54) удовлетворяет уравнению (3.45). Найдем производные:

$$\widetilde{H}_{x_j}(x,t;\xi) = -\xi_j e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}\cos\big(t\,\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\big),$$
$$\widetilde{H}_{x_jx_j}(x,t;\xi) = -\xi_j^2 e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}\sin\big(t\,\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\big),$$

$$\widetilde{H}_t(x,t;\xi) = -\widetilde{G}_1(\xi)e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}\sin\big(t\,\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\big)+$$
$$+\widetilde{G}_2(\xi)e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}\cos\big(t\,\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\big),$$

$$\widetilde{H}_{tt}(x,t;\xi) =$$
$$= \left[\widetilde{G}_1^2(\xi)-\widetilde{G}_2^2(\xi)\right]e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}\sin\big(t\,\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\big)-$$
$$-2\widetilde{G}_1(\xi)\widetilde{G}_2(\xi)e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}\cos\big(t\,\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\big).$$

С учетом формул (3.55) и (3.56) выражение для $\widetilde{H}_{tt}$ принимает вид

$$\widetilde{H}_{tt}(x,t;\xi) = \Big[-(c^2|\xi|^2+\lambda(\xi))\sin\big(t\,\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\big)-$$
$$-\mu(\xi)\cos\big(t\,\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\big)\Big]e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}.$$

Подставим теперь непосредственно производные $\widetilde{H}_{tt}$ и $\widetilde{H}_{x_jx_j}$ в уравнение (3.45):

$$\widetilde{H}_{tt}(x,t;\xi) - c^2\sum_{j=1}^{n}\widetilde{H}_{x_jx_j}(x,t;\xi) =$$

$$= [-(c^2|\xi|^2 + \lambda(\xi)) \sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi) -$$

$$- \mu(\xi)\cos(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi) +$$

$$+ c^2 \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 \sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi)]e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$

$$= -[\lambda(\xi)\sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi) +$$

$$+ \mu(\xi)\cos(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi)]e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$

$$= -\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} d_{jk}\cos(l_{jk}\xi_j)\sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} d_{jk}\sin(l_{jk}\xi_j)\cos(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi)\right] e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} d_{jk}\sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi + l_{jk}\xi_j)e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} d_{jk}\sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) -$$

$$- x_1\xi_1 - \ldots - x_n\xi_n + l_{jk}\xi_j)e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} d_{jk}\sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x_1\xi_1 - \ldots -$$

$$- x_{j-1}\xi_{j-1} - (x_j - l_{jk})\xi_j - x_{j+1}\xi_{j+1} - \ldots - x_n\xi_n)e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} d_{jk}\sin(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) -$$

$$- (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j - l_{jk}, x_{j+1}, \ldots, x_n)\cdot\xi)e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} d_{jk}\widetilde{H}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j - l_{jk}, x_{j+1}, \ldots, x_n, t; \xi).$$

Непосредственной подстановкой в уравнение (3.45) мы убедились, что что обе функции $\widetilde{F}(x, t; \xi)$ и $\widetilde{H}(x, t; \xi)$ удовлетворяет уравнению (3.45) в классическом смысле.

При выполнении условия (3.52) функции (3.48) и (3.49), а значит, и функции (3.51) определены корректно для любого значения $\xi \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, функции $\widetilde{F}(x,t;\xi)$ и $\widetilde{H}(x,t;\xi)$ являются гладкими решениями уравнения (3.45).

Теорема доказана.

Следствие 3.4.1. *При выполнении условия* (3.52) *трехпараметрическое семейство функций*

$$\widetilde{G}(x,t;\widetilde{A},\widetilde{B},\xi) := \widetilde{A}\, e^{t\,\widetilde{G}_1(\xi)} \sin\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi\right) + \\ + \widetilde{B}\, e^{-t\,\widetilde{G}_1(\xi)} \sin\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi\right),$$

где $\psi(\xi)$ *определяется по формуле* (3.49), $\widetilde{G}_1(\xi)$ *и* $\widetilde{G}_2(\xi)$ *определяются равенствами* (3.51), *удовлетворяет уравнению* (3.45) *в классическом смысле при любых вещественных значениях параметров* $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ *и* ξ.

3.4.3. Смысл условия на коэффициенты уравнения и классы уравнений, удовлетворяющих этому условию.

Представим условие (3.52) в виде:

$$c^2(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2) + \\ + d_{11}\cos(l_{11}\xi_1) + d_{12}\cos(l_{12}\xi_1) + \ldots + d_{1m_1}\cos(l_{1m_1}\xi_1) + \\ + d_{21}\cos(l_{21}\xi_2) + d_{22}\cos(l_{22}\xi_2) + \ldots + d_{2m_2}\cos(l_{2m_2}\xi_2) + \\ + \ldots + \\ + d_{n1}\cos(l_{n1}\xi_n) + d_{n2}\cos(l_{n2}\xi_n) + \ldots + d_{nm_n}\cos(l_{nm_n}\xi_n) > 0.$$

Отсюда получим

$$c^2\xi_1^2 + \sum_{k=1}^{m_1} d_{1k}\cos(l_{1k}\xi_1) + c^2\xi_2^2 + \sum_{k=1}^{m_2} d_{2k}\cos(l_{2k}\xi_2) + \ldots + \\ + c^2\xi_n^2 + \sum_{k=1}^{m_n} d_{nk}\cos(l_{nk}\xi_n) > 0.$$

Рассмотрим функцию $c^2\xi_1^2 + \sum\limits_{k=1}^{m_1} d_{1k}\cos(l_{1k}\xi_1)$.

Для всех $\xi_1 \in \mathbb{R}^1$ эта функция является четной.

Исследуем поведение этой функции на промежутке $\xi \in [0, +\infty)$. Для этого найдем производную:

$$2\,c^2\xi_1 - \sum_{k=1}^{m_1} d_{1k} l_{1k} \sin\left(l_{1k}\xi_1\right) =$$

$$= 2\,c^2\xi_1 \left(1 - \frac{1}{2c^2} \sum_{k=1}^{m_1} d_{1k} l_{1k} \frac{\sin\left(l_{1k}\xi_1\right)}{\xi_1}\right) =$$

$$= 2\,c^2\xi_1 \left(1 - \frac{1}{2c^2} \sum_{k=1}^{m_1} d_{1k} l_{1k}^2 \frac{\sin\left(l_{1k}\xi_1\right)}{l_{1k}\xi_1}\right).$$

Так как $|\sin\alpha/\alpha| < 1$, то найденная производная будет положительна на промежутке $\xi_1 \in (0, +\infty)$ при выполнении условия

$$\sum_{k=1}^{m_1} d_{1k} l_{1k}^2 < 2\,c^2.$$

Таким образом, функция $c^2\xi_1^2 + \sum\limits_{k=1}^{m_1} d_{1k} \cos\left(l_{1k}\xi_1\right)$ возрастает на промежутке $\xi_1 \in (0, +\infty)$ и принимает наименьшее значение в точке $\xi_1 = 0$, равное $\sum\limits_{k=1}^{m_1} d_{1k}$.

Отсюда следует, что для выполнения условия

$$c^2\xi_1^2 + \sum_{k=1}^{m_1} d_{1k} \cos\left(l_{1k}\xi_1\right) > 0$$

необходимо выполнение условия

$$\sum_{k=1}^{m_1} d_{1k} > 0.$$

В силу четности функции значение $\sum\limits_{k=1}^{m_1} d_{1k} > 0$ будет наименьшим для любого $\xi_1 \in \mathbb{R}^1$.

Рассмотрим теперь функции

$$c^2\xi_j^2 + \sum_{k=1}^{m_1} d_{jk} \cos\left(l_{jk}\xi_j\right), \quad j = \overline{2, n}$$

и проведем аналогичные рассуждения. В результате получим, что для выполнения условий

$$c^2\xi_j^2 + \sum_{k=1}^{m_1} d_{jk} \cos\left(l_{jk}\xi_j\right) > 0, \quad j = \overline{2, n}$$

необходимо выполнение неравенств

$$\sum_{k=1}^{m_j} d_{jk} l_{jk}^2 < 2\,c^2, \quad \sum_{k=1}^{m_j} d_{jk} > 0, \quad j = \overline{2,n}.$$

При $\xi = \overrightarrow{0}$ условие (3.52) будет выполняться, если коэффициенты при нелокальных потенциалах будут удовлетворять неравенству

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} d_{jk} > 0.$$

Окончательный вывод: получены достаточные условия

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} d_{jk} > 0,$$

$$\sum_{k=1}^{m_j} d_{jk} l_{jk}^2 < 2\,c^2, \quad \sum_{k=1}^{m_j} d_{jk} > 0, \quad j = \overline{1,n}$$

для существования гладких решений уравнения (3.45), определяемых трехпараметрическим семейством решений

$$\begin{aligned}\widetilde{G}(x,t;\widetilde{A},\widetilde{B},\xi) := \widetilde{A}\,e^{t\,\widetilde{G}_1(\xi)} \sin\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi\right) + \\ + \widetilde{B}\,e^{-t\,\widetilde{G}_1(\xi)} \sin\left(t\,\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi\right),\end{aligned}$$

где $\psi(\xi)$ определяется по формуле (3.49), $\widetilde{G}_1(\xi)$ и $\widetilde{G}_2(\xi)$ определяются равенствами (3.51), $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ — произвольные вещественные параметры.

Литература

1. *Акбари Фаллахи А., Йаакбариех А., Сакбаев В. Ж.* Корректность задачи с начальными условиями для гиперболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами временного аргумента // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 352–365.

2. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

3. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады АН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.

4. *Варфоломеев Е. М.* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных операторов, возникающих в нелинейной оптике // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 21. С. 5–36.

5. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. 4-е изд. М.: Наука. Глав. ред. физико-математической литературы, 1981.

6. *Власов В. В.* О разрешимости и свойствах решений функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Математический сборник. 1995. Т. 186. № 8. С. 67–92.

7. *Власов В. В.* Корректная разрешимость одного класса дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Известия ВУЗов. Математика. 1996. № 1. С. 22–44.

8. *Власов В. В.* О разрешимости и оценках решений функционально-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева // Труды матем. ин-та имени В.А. Стеклова. 1999. Т. 227. С. 109–121.

9. *Власов В. В., Медведев Д. А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории // Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т. 30. С. 3–173.

10. *Ганцев Ш. Х., Бахтизин Р. Н., Франц М. В., Ганцев К. Ш.* Опухолевый рост и возможности математического моделирования системных процессов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия. Физико-математические науки. 2019. Т. 23. № 1. С. 131–151.

11. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши // Успехи математических наук. 1953. Т. 8. № 6. С. 3–54.

12. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Вып. 3: Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.

13. *Гноенский Л. С., Каменский Г. А., Эльсгольц Л. Э.* Математические основы теории управляемых систем. М.: Наука, 1969.

14. *Гурли С. А., Соу Дж. В.-Х., Ву Дж. Х.* О скорости стабилизации решения краевой задачи для параболического уравнения // Современная математика. Фундаментальные направления. 2003. Т. 1. С. 84–120.

15. *Зарубин А. Н.* О некоторых начально-краевых задачах для дифференциально-разностного уравнения смешанного типа // Доклады РАН. 1996. Т. 346. № 6. С. 735–737.

16. *Зарубин А. Н.* Аналитическое решение одной задачи нестационарного конвективного теплообмена с последействием // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33. № 1. С. 130–131.

17. *Зарубин А. Н.* Математические основы теории управляемых систем. Орел: ОГУ, 1997.

18. *Зарубин А. Н.* Задача Коши для дифференциально-разностного нелокального волнового уравнения // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 10. С. 1406–1409.

19. *Зарубин А. Н.* Нелокальная краевая задача Трикоми для дифференциально-разностного уравнения смешанного типа // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия. Физико-математические науки. 2021. Т. 25. № 1. С. 35–50.

20. *Зверкин А. М., Каменский Г. А., Норкин С. Б., Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом // Успехи математических наук. 1962. Т. 17. Вып. 2(104). С. 77–164.

21. *Иванова Е. П.* Непрерывная зависимость решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений от сдвигов аргумента // Современная математика. Фундаментальные направления. 2016. Т. 59. С. 74–96.

22. *Иванова Е. П.* О коэрцитивности дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов // Современная математика. Фундаментальные направления. 2016. Т. 62. С. 85–99.

23. *Иванова Е. П.* О гладких решениях дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов // Математические заметки. 2016. Т. 62. Вып. 1. С. 145–148.

24. *Иванова Е. П.* Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов, сводящиеся к нелокальным задачам // Современная математика. Фундаментальные направления. 2019. Т. 65. № 4. С. 613–622.

25. *Иванова Е. П.* Дифференциально-разностные уравнения с несоизмеримыми сдвигами аргументов // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз. 2021. Т. 191. С. 92–100.

26. *Йаакбариех А., Сакбаев В. Ж.* Корректность задачи для параболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами временного аргумента // Известия вузов. Математика. 2015. № 4. С. 17–25.

27. *Каменский Г. А.* Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом // Уч. записки Моск. гос. ун-та. 1954. Вып. 165. С. 195–204.

28. *Каменский Г. А.* Об уравнениях с отклоняющимся аргументом // Уч. записки Моск. гос. ун-та. 1959. Вып. 186. С. 205–209.

29. *Каменский Г. А., Мышкис А. Д., Скубачевский А. Л.* О минимуме квадратичного функционала и о линейных краевых задачах эллиптического типа с отклоняющимися аргументами // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16. № 8. С. 1469–1473.

30. *Каменский Г. А., Мышкис А. Д., Скубачевский А. Л.* О гладких решениях краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа // Украинский математический журнал. 1985. Т. 37. № 5. С. 581–590.

31. *Каменский Г. А., Скубачевский А. Л.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М: Изд-во МАИ, 1992.

32. *Кобелев В. Л., Романов Е. П., Кобелев Л. Я., Кобелев Я. Л.* Недебаевская релаксация и диффузия в фрактальном пространстве // Доклады Академии наук. 1998. Т. 361. № 6. С. 755–758.

33. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука. Глав. ред. физико-математической литературы, 1973.

34. *Лийко В. В., Скубачевский А. Л.* Сильно эллиптические дифференциально-разностные уравнения со смешанными краевыми условиями в цилиндрической области // Современная математика. Фундаментальные направления. 2019. Т. 65. № 4. С. 635–654.

35. *Лийко В. В., Скубачевский А. Л.* Смешанные задачи для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений в цилиндре // Математические заметки. 2020. Т. 107. Вып. 5. С. 693–716.

36. *Маслов В. П.* Операторные методы. М: Наука, 1973.

37. *Моисеев Е. И., Зарубин А. Н.* Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с запаздывающим аргументом // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 9. С. 1212–1215.

38. *Муравник А. Б.* Об однозначной разрешимости задачи Коши для некоторых дифференциальноразностных параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 5. С. 692–701.

39. *Муравник А. Б.* О задаче Коши для некоторых параболических уравнений с нелокальными старшими членами // Доклады РАН. 2005. Т. 402. № 3. С. 308–310.

40. *Муравник А. Б.* Об асимптотике решения задачи Коши для некоторых дифференциально-разностных параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 4. С. 538–548.

41. *Муравник А. Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // Современная математика. Фундаментальные направления. 2014. Т. 52. С. 3–143.

42. *Муравник А. Б.* О задаче Дирихле в полуплоскости для дифференциально-разностных эллиптических уравнений // Современная математика. Фундаментальные направления. 2016. Т. 60. С. 102–113.

43. *Муравник А. Б.* Асимптотические свойства решений задачи Дирихле в полуплоскости для некоторых дифференциально-разностных эллиптических уравнений // Математические заметки. 2016. Т. 100. Вып. 4. С. 566–576.

44. *Муравник А. Б.* Асимптотические свойства решений двумерных дифференциально-разностных эллиптических задач // Современная математика. Фундаментальные направления. 2017. Т. 100. № 4. С. 678–688.

45. *Муравник А. Б.* Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики // Математические заметки. 2019. Т. 105. Вып. 5. С. 747–762.

46. *Муравник А. Б.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения в полупространстве // Математические заметки. 2020. Т. 108. Вып. 5. С. 764–770.

47. *Муравник А. Б.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения с разнонаправленными сдвигами в полупространстве // Уфимский математический журнал. 2021. Т. 13. № 3. С. 107–115.

48. *Муравник А. Б.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения общего вида в полупространстве // Математические заметки. 2021. Т. 110. Вып. 1. С. 90–98.

49. *Мышкис А. Д.* Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Успехи математических наук. 1949. Т. 4. Вып. 5(33). С. 99–141.

50. *Мышкис А. Д., Эльсгольц Л. Э.* Состояние и проблемы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Успехи математических наук. 1967. Т. 22. Вып. 2(134). С. 21–57.

51. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М: Наука, 1972.

52. *Мышкис А. Д.* Смешанные функционально-дифференциальные уравнения // Современная математика. Фундаментальные направления. 2003. Т. 4. С. 5–120.

53. *Неверова Д. А., Скубачевский А. Л.* О классических и обобщенных решениях краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами // Математические заметки. 2013. Т. 94. Вып. 5. С. 702–719.

54. *Неверова Д. А.* Гладкость обобщенных решений второй и третьей краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений // Современная математика. Фундаментальные направления. 2019. Т. 65. № 4. С. 655–671.

55. *Неверова Д. А.* Гладкость обобщенных решений задачи Неймана для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения на границе соседних подобластей // Современная математика. Фундаментальные направления. 2020. Т. 66. № 2. С. 272–291.

56. *Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела // Прикладная механика. 1979. Т. 15. № 5. С. 39–47.

57. *Пинни Э.* Обыкновенные дмфференциально-разностные уравнения. Перевод с английского А. М. Зверкина и Г. А. Каменского. Под редакцией Л. Э. Эльсгольца. М: Изд-во ИЛ, 1961.

58. *Подъяпольский В. В., Скубачевский А. Л.* Спектральная асимптотика сильно эллиптических дифференциально-разностных операторов // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 6. С. 793–800.

59. *Рабинович В. С.* О разрешимости дифференциально-разностных уравнений в $\mathbb{R}^n$ и в полупространстве // Доклады АН СССР. 1978. Т. 243. № 5. С. 2030–2038.

60. *Рабинович В. С.* О дифференциально-разностных уравнениях в полупространстве // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 2030–2038.

61. *Рабинович В. С.* О задаче Коши для параболических дифференциально-разностных операторов с переменными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 6. С. 1032–1038.

62. *Разгулин А. В.* Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с проеобразованным аргументом // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1993. Т. 33. № 1. С. 69–80.

63. *Разгулин А. В.* Об одном классе функционально-дифференциальных параболических уравнений нелинейной оптики // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 3. С. 400–407.

64. *Разгулин А. В.* О параболических функционально-дифференциальных уравнениях с управляемым преобразованием пространственных аргументов // Доклады РАН. 2005. Т. 403. № 4. С. 448–451.

65. *Разгулин А. В.* Задача управления двумерным преобразованием пространственных аргументов в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 8. С. 078–1091.

66. *Россовский Л. Е., Скубачевский А. Л.* Разрешимость и регулярность решений некоторых классов эллиптических функционально-дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Серия. Совр. матем. и ее приложения. Темат. обз. 1999. Т. 66. С. 114–192.

67. *Россовский Л. Е.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с растяжением и сжатием аргументов // Труды Московского математического общества. 2001. Т. 62. С. 199–228.

68. *Россовский Л. Е.* Разрешимость эллиптических функционально-дифференциальных уравнений со сжатиями аргументов в весовых пространствах // Труды семинара имени И. Г. Петровского. 2007. Т. 26. С. 37–55.

69. *Россовский Л. Е., Варфоломеев Е. М.* Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения к исследованию нейронных сетей и передачи информации нелинейными лазерными системами с обратной связью: Учеб. пособие. М: РУДН, 2008.

70. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции // Современная математика. Фундаментальные направления. 2014. Т. 54. С. 3–138.

71. *Россовский Л. Е., Тасевич А. Л.* Первая краевая задача для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями // Математические заметки. 2015. Т. 97. Вып. 5. С. 733–748.

72. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935.

73. *Селицкий А. М., Скубачевский А. Л.* Вторая краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения // Труды семинара имени И. Г. Петровского. 2007. Т. 26. С. 324–347.

74. *Селицкий А. М.* Третья краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 21. С. 114–132.

75. *Скубачевский А. Л.* О колеблющихся решениях линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11. № 3. С. 462–469.

76. *Скубачевский А. Л.* Гладкость обобщенных решений первой краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения // Математические заметки. 1983. Т. 34. Вып. 1. С. 105–112.

77. *Скубачевский А. Л.* Нелокальные краевые задачи со сдвигом // Математические заметки. 1985. Т. 38. Вып. 4. С. 587–598.

78. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами // Доклады РАН. 1992. Т. 324. № 6. С. 1155–1158.

79. *Скубачевский А. Л.* Обобщенные и классические решения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений // Доклады РАН. 1994. Т. 334. № 4. С. 433–436.

80. *Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л.* Общие краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений // Труды Санкт-Петербургского математического общества. 1998. Т. 5. С. 223–288.

81. *Скубачевский А. Л.* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. 1996. Т. 51. Вып. 1. С. 169–170.

82. *Скубачевский А. Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1394–1401.

83. *Скубачевский А. Л., Шамин Р. В.* Первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения // Математические заметки. 1999. Т. 66. Вып. 1. С. 145–153.

84. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 26. С. 3–132.

85. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. II // Современная математика. Фундаментальные направления. 2009. Т. 33. С. 3–179.

86. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Успехи математических наук. 2016. Т. 71. Вып. 5(431). С. 3–112.

87. *Скубачевский А. Л.* Гипотеза Като для эллиптических дифференциально-разностных операторов с вырождением в цилиндре // Доклады РАН. 2018. Т. 478. № 2. С. 145–147.

88. *Солонуха О. В.* Об одном эллиптическом дифференциально-разностном уравнении с несимметричным оператором сдвигов // Математические заметки. 2018. Т. 104. Вып. 4. С. 604–620.

89. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

90. *Черепенников В. Б., Ермолаева П. Г.* Гладкие решения некоторых дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.– Новосибирск. 2010. Т. 13. № 2. С. 213–226.

91. *Эльсгольц Л. Э.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1964.

92. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

93. *Bernoulli J.* Meditationes. Dechordis vibrantibis // Commentarial Academia Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Collected Work. 1728. V. 5. P. 139–157.

94. *Burkhardt H.* Entwicklungen nach oscillirenden funktionen und integration der differentialgleichungen der mathematischen physik // Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 1908. V. 10. P. 1–1804.

95. *Euler L.* Investigatio curvarum quae evolutae sui similes producunt // Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. 1750. V. 12. P. 3–52.

96. *Gopalsamy K.* Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. Dordrecht: Kluwer, 1992.

97. *Kuang Y.* Delay differential equations with applications in population dinamics. Boston: Academic Press, 1993. 1992.

98. *Muravnik A. B.* On stabilization of solutions of elliptic equations containing Bessel operators // Integral methods in science and engineering. Analytic and numerical techniques. Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin. 2002. P. 157–162.

99. *Muravnik A.* On the half-plane Diriclet problem for differential-difference elliptic equations with several nonlocal terms // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. 2017. V. 12. № 6. P. 130–143.

100. *Muravnik A. B.* Half-plane differential-difference elliptic problems with general-kind nonlocal potentials // Complex Variables and Elliptic Equations. 2020. V. 67. P 1101–1120.

101. *Razgulin A. V.* Rotational multi-petal waves in optical system with 2-D feedback // Chaos in Optics. Proceedings SPIE. 1993. V. 2039. P. 342–352.

102. *Schulman L. S.* Some difference-differential equations containing both advance and retardiation // Journal of Mathematical Physics. 1974. V. 15. № 3. P. 295–298.

103. *Skubachevskii A. L.* The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations // J. Diff. Eq. 1986. V. 63. № 3. P. 332–361.

104. *Skubachevskii A. L.* Nonlocal elliptic problems and mulidimensional diffusion processes // Rus. J. Math. Phys. 1995. V. 3. № 3. P. 327–360.

105. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1997.

106. *Skubachevskii A. L.* Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics // Nonlinear Anal. 1998. V. 32. № 2. P. 261–278.

107. *Wheeler J. A., Feynman R. P.* Classical electrodynamics in terms of direct interparticle actions // Reviews of Modern Physics. 1949. V. 21. № 3. P. 425–433.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в рецензируемых изданиях

108. *Зайцева Н. В.* О глобальных классических решениях некоторых гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Доклады Академии наук. 2020. Т. 491. № 2. С. 44–46.

109. *Зайцева Н. В.* Глобальные классические решения некоторых двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 745–751.

110. *Zaitseva N. V.* Classical solutions of hyperbolic differential-difference equations with several nonlocal terms // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. № 1. P. 231–236.

111. *Зайцева Н. В.* Классические решения гиперболического уравнения с нелокальным потенциалом // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 498. № 3. С. 37–40.

112. *Zaitseva N. V.* Classical solutions of hyperbolic differential-difference equations in a half-space // Differential Equations. 2021. Vol. 57. № 12. P. 1629–1639.

113. *Зайцева Н. В.* Гиперболические дифференциально-разностные уравнения с нелокальными потенциалами общего вида // Уфимский математический журнал. 2021. Т. 13. № 3. С. 37–44.

Тезисы выступлений на международных конференциях

114. *Зайцева Н.В.* О гладких глобальных решениях некоторых двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Международная конференция "XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам" (КРОМШ – 2019): сборник материалов. – Симферополь: "Полипринт". 2019. С. 163–165.

115. *Зайцева Н.В.* О глобальных классических решениях двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 20-й международной Саратовской зимней школы / А.П. Хромов (гл. редактор), Б.С. Кашин (зам.

гл. редактора), Ю.С. Крусс (отв. секретарь) [и др.]. – Саратов: ООО Изд-во "Научная книга". 2020. С. 162–163.

116. *Зайцева Н.В.* Построение решений некоторых гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения – XXXI" (3–9 мая 2020 г.) / Воронежский государственный университет; МГУ имени М.В. Ломоносова; Математический институт имени В.А. Стеклова РАН. – Воронеж: Издательский дом ВГУ. 2020. С. 79–80.

117. *Зайцева Н.В.* Классические решения двумерных гиперболических уравнений с несоизмеримыми сдвигами // "Тихоновские чтения": научная конференция: тезисы докладов: посвящается памяти академика Андрея Николаевича Тихонова: 26–31 октября 2020 г. – Москва: МАКС Пресс. 2020. С. 26.

118. *Зайцева Н.В.* О гладких классических решениях гиперболических дифференциально-разностных уравнений с n сдвигами // Международная научная конференция "Уфимская осенняя математическая школа – 2020": сборник тезисов (г. Уфа, 11–14 нобря 2020 г.) / отв. ред. З.Ю. Фазуллин. – Уфа: Аэтерна. 2020. С. 29–31.

119. *Зайцева Н.В.* О классических решениях одного гиперболического дифференциально-разностного уравнения с нелокальными членами // Современные методы математической физики и их приложения: Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых (17–18 ноября 2020 г., Ташкент) / Главный редактор Р.Р. Ашуров. – Т. 1. – Ташкент: Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека. 2020. С. 203–205.

120. *Зайцева Н.В.* Однопараметрическое семейство гладких решений гиперболического дифференциально-разностного уравнения с несоизмеримыми сдвигами // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачекого. Т. 59 / Лобачевские чтения – 2020 // Материалы XIX Всероссийской молодежной научной школы-конференции (1–4 декабря 2020 г., г. Казань). – Т. 59. – Казань: Издательство Академии наук РТ. 2020. С. 58–60.

121. *Зайцева Н.В.* Классические решения гиперболических дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения – XXXII" (3–9 мая 2021 г.) / Воронежский государственный университет; МГУ имени М.В. Ломоносова; Математический институт имени В.А. Стеклова РАН. – Воронеж: Издательский дом ВГУ. 2021. С. 99–101.

122. *Зайцева Н.В.* Классические решения многомерных гиперболических уравнений с разнонаправленными сдвигами в потенциалах // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения – XXXIII" (3–9 мая 2022 г.) / МГУ имени М.В. Ломоносова; Воронежский государственный университет; Математический институт имени В.А. Стеклова РАН. – Воронеж: Издательский дом ВГУ. 2022. С. 94–95.