МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

на правах рукописи

Чечкин Алексей Григорьевич

УДК 517.956

ЯВНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

Москва 2017

Оглавление

Введение

1 Обзор литературы и описание проблемы.

Многие прикладные задачи, в частности, в теории диффузионных процессов, квантовой физики (см., например [28]), финансовой математики (см., например, [66]), описываются динамическими моделями, включающими в себя краевые задачи для параболических уравнений специального вида, связанных с полиномами 2-го проядка от операторов $\partial/\partial x_i$ и операторов умножения на независимые переменные x_i. Причиной явной разрешимости таких задач можно считать то, что данные операторы следует рассматривать, как результат квантования классической линейной гамильтоновой системы с квадратичным гамильтонианом. Такая классическая система может быть явно проинтегрирована, что дает основу для интегрирования соответствующей квантовой системы.

Моделирование обобщённых гармонических осцилляторов (см., например, [18], [31], [40], [58], [74], [76] и список литературы в них) приводит к исследованию задачи Коши. В работе [28] рассмотрена задача Коши специального вида и построено явное решение задачи для нестационарного одномерного уравнения Шрёдингера для заряженной частицы со спином, движущейся в однородном магнитном поле и электрическом поле меняющемся во времени. Соответствующая функция Грина (Feynman propagator, см. [35], [36], [37]) определяется в терминах элементарных функций и определенных интегралов от полей с характеристическими функциями, которые находятся аналитически или численно, как решения уравнения движения классического осциллятора с зависящей от времени частотой. При этом в отличие от работ [25], [38] автор строит эволюционный оператор явно для общего случая. Многомерный случай рассмотрен в [65]. Статья [71] посвящена исследованию линейных и квадратичных интегралов движения для квадратичных гамильтонианов с общей переменной. Были обнаружены фундаментальные связи между спектральной задачей для линейных динамических инвариантов и соответствующей задачей Коши для нестационарного уравнения Шрёдингера. При этом построено разложение решения задачи Коши по собственным функциям. Устанавливается нелинейный принцип суперпозиции для обобщенных систем Ермакова с помощью разложения общего квадратичного инварианта в терминах линейных инвариантов.

Гармонические осцилляторы играют важную роль во многих квантовых задачах, таких как исследование когерентных состояний и соотношений неопределенностей (см. [53], [61]), фаз Берри (см. [18], [19]), асимптотических и численных методов (см. [55], [63]), ловушек для заряженных частиц (см. [60]) и движения в однородных магнитных полях (см. [28], [57]), молекулярной спектроскопии (см. [32]) и многоатомных молекул в изменяющихся внешних полях, кристаллов, через которые проходит электрон и различных моделей осцилляторов, и других взаимодействий моделей с внешними полями (см. [37]). Квадратичные гамильтонианы играют особую роль в квантовой электродинамике, поскольку электромагнитное поле может быть представлено в виде набора гармонических осцилляторов (см. [25], [37]). Нелинейные осцилляторы играют центральную роль в новаторской теории конденсации Бозе–Эйнштейна (см. [30]). С общей точки зрения, динамика газов, состоящих из охлажденных атомов, в магнитной ловушке при очень низких температурах может быть описана с помощью эффективного уравнения Гросса–Питаевского (или нелинейного уравнения Шредингера) (см. [46], [52]).

В монографии [66] рассматриваются модели пострения финансового портфеля и управления им, которые позволяют хеджировать проданные опционы и прочие возможные иски (см. [66, §12.3]). Также рассматриваются задачи выбора оптимального времени для продажи актива (см. [66, Гл. 10]). Все эти финансовые ситуации моделируются задачами Коши для параболических уравнений со специфическими начальными данными.

В работе [75] исследуется задача Коши для уравнения Фоккера–Планка. Данное уравнение с добавленным квазилинейным членом используется в физике плазмы при взаимодействии радиочастотных волн с плазмой (см., например, [50]). В нелинейной фильтрации с плотностью вероятности состояния x_t при условии наблюдения $\{y(s) : 0 \leq s \leq t\}$ также описывается уравнением Фоккера–Планка с дополнительным членом первой степени. В статье описывается метод решения уравнения Фоккера–Планка с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. Стоит отметить, что в статье [51] Kerbel и McCoy описали численный метод решения уравнения Фоккера–Планка третьей степени.

Ещё есть близкая работа [6]. В ней дана интерпретация задачи фильтрации диффузионных процессов как задачи квантования. На этой основе показано, что классические уравнения линейного фильтра Калмана–Бьюси описывают поток автоморфизмов алгебры Гейзенберга. Получены явные формулы для ненормированной условной плотности в линейном случае, новая интерпретация формулы Мелера для фундаментального решения оператора Шрёдингера в случае гармонического осциллятора, формулы для регуляризованного определителя оператора Штурма-Лиувилля.

Отметим также ещё несколько областей, где возникают аналогичные проблемы, связанные с эволюционными уравнениями и их фундаментальными решениями. Задачи о *линейно–квадратичном регуляторе* являются базовыми во многих прикладных задачах физики, инженерном и военном деле. В классической задаче о линейно–квадратичном регуляторе (см., например, [11]) соответствующее уравнение Беллмана при определённой замене приобретает вид параболического уравнения, для которого в настоящей работе строится явная формула для фундаментального решения. Задачи о *фильтрации сигналов* также являются одними из основных во многих прикладных и инженерных областях науки. Выделение сигналов из шума — это и есть основная цель такой задачи. Оптимальное выделение сигнала можно проводить различными методами, в зависимости от того, какая ставится задача — обнаружение сигнала, сохранение формы сигнала и т.д. В классической задаче о фильтрации сигналов (см., например, [47]) необходимо найти "отфильтрованную кривую", которая строится по решению уравнения Закая. Уравнение Закая, в свою очередь, имеет в точности вид параболического уравнения, о котором мы упоминали выше. Стоит также кратко упомянуть, что аналогичные уравнения и проблемы возникают в задачах об *управлении инвестиционным портфелем* и *страховой цене иска* (см., например, [20], [21], [22]).

В настоящей работе исследуется система параболических уравнений со специальными начальными условиями, которые в предыдущих математических работах не исследовались. При этом предлагается новый метод построения явных формул. Выводится явная формула для решения, которая строго обосновывается. В процессе анализа мы используем метод исследования параболичнеских уравнений, предложенный в [75]. Результаты настоящей работы позволяют существенно упростить решения задач, о которых упоминалось выше.

2 Структура и объем работы.

Диссертация занимает 100 страниц текста и состоит из введения, трех глав, разбитых на 13 параграфов и списка литературы, включающего 77 наименований. Нумерация формул, теорем и лемм тройная — номер главы, номер параграфа и собственный номер, например, лемма 1.2.3 — лемма 3 второго параграфа первой главы.

Первая глава. В первой главе исследуется параболическое уравнение специального вида с действительными коэффициентами. При этом предлагается новый метод построения фундаментального решения для данного дифференциального оператора.

В **первом параграфе** формулируется основная теорема и вводятся ограничения на коэффициенты оператора.

Во **втором параграфе** приводятся вспомогательные утверждения и леммы.

В **третьем параграфе** приводится доказательство основной теоремы из параграфа 1.

Вторая глава. Во второй главе исследуется параболическое уравнение специального вида с комплексными коэффициентами. При этом предлагается метод построения фундаментального решения для данного дифференциального оператора, аналогичный действительному случаю в первой главе.

В **первом параграфе** формулируется основная теорема и вводятся ограничения на коэффициенты оператора.

Во **втором параграфе** приводятся вспомогательные утверждения и леммы.

Во **третьем параграфе** приводится доказательство основной теоремы из параграфа 1.

Третья глава. В третьей главе мы приводим известные результаты, касающиеся применения методов, изложенных в первой и второй главах, в прикладных задачах.

Глава 1

Действительный случай

§ 1.1. Постановка задачи и формулировка результата.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ — векторная переменная размерности n, $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ — выделенная одномерная переменная, играющая роль времени, $u(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — вещественнозначная функция, имеющая в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ непрерывные частные производные $\partial_t, \partial_{x_k}, \partial^2_{x_k x_l} (k, l = 1, \ldots, n)$. Класс таких функций обозначим через $C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$.

Оператор $\mathfrak{L}$ будем называть оператором “второго порядка” (см., например, [27], [12]), если он имеет следующий вид:

$$\mathfrak{L}[v] = \frac{1}{2} \sum_{ij} A_{ij}(t) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i \left(\sum_j B_{ij}(t) x_j + c_i(t) \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} + \\ + \left(\sum_{ij} F_{ij}(t) x_i x_j + \sum_i g_i(t) x_i + h(t) \right) v,$$

где $A_{ij}(t)$, $B_{ij}(t)$, $c_i(t)$, $F_{ij}(t)$, $g_i(t)$, $i, j = 1, \ldots, n$, и $h(t)$ — некоторые функции. Соответственно, уравнением “второго порядка” будем называть уравнение

$$\partial_t u = \mathfrak{L}[u] \tag{1.1.1}$$

Аналогичные операторы встречаются в уравнениях типа Колмогорова, Беллмана и других (см., например, [9] и подробную библиографию в этой монографии)

1.1.1 Предположения

Предполагается, что выполнены следующие гипотезы.

A. *Коэффициенты* $A(t)$, $B(t)$, $F(t)$: $\mathbb{R}_+ \to \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *оператора "второго порядка"* $\mathfrak{L}$ *суть функции, непрерывные на* $\mathbb{R}_+$ *и имеющие при* $t \to 0$ *конечные пределы* A_0, B_0, $F_0 \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *соответственно. При этом предполагается, что* $A(t)$ *— симметричная матрица, а матрица* A_0 *является положительно определенной.*

Пусть решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} P' = -P\left(2AS + B^T\right) - (2AS + B)\,P - 2A, \\ P|_{t=0} = \mathbf{0} \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{1.1.2}$$

где $S(t)$ является симметричным решением задачи

$$\begin{cases} S' = 2SAS + SB + B^T S + \frac{1}{2}(F + F^T), \\ S|_{t=0} = \mathbf{0} \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{1.1.3}$$

представимо в виде

$$P(t) = -2tA_0 + R(t) \tag{1.1.4}$$

в окрестности нуля, где $R(t)$ — некоторая матрица, заданная на отрезке $[0,\varepsilon]$. Здесь $0 < \varepsilon << 1$ — некоторая постоянная.

Замечание 1.1.1. *Вопросы существования решений* (1.1.2) *и* (1.1.3) *и их свойств, в частности, представимость в виде* (1.1.4), *обсуждаются в параграфе* § 1.2. *(утверждения* 1.2.2 *и* 1.2.4*).*

Введем следующие обозначения:

$$Q(t) = -\frac{1}{2t}R(t)A_0^{-1}, \tag{1.1.5}$$

$$\overline{Q}(t) = [E + Q(t)]^{-1} - E, \tag{1.1.6}$$

$$\widetilde{Q}(t) = \overline{Q}(t) + (A(t) - A_0)A_0^{-1}[E + \overline{Q}], \tag{1.1.7}$$

$$\widetilde{q}(t) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\widetilde{Q}. \tag{1.1.8}$$

Б. *Существует несобственный интеграл* $\int\limits_0^t \frac{\widetilde{q}(s)}{s} ds < +\infty$ *при* $0 \leq t < \varepsilon$.

Замечание 1.1.2. *Если функция* $\widetilde{q}(t)$ *имеет порядок* $O(t^\gamma)$ *при* $t \to 0$, *где* $\gamma > 0$, *то это гарантирует выполнение условия* **Б.** *При этом необходимым это условие, естественно, не является. Но, отметим, что такое условие легко конструктивно проверяется.*

Будем считать данные предположения выполненными во всех дальнейших рассуждениях.

1.1.2 Основная теорема

Пусть даны следующие две системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} S' = 2SAS + SB + B^T S + \frac{1}{2}(F + F^T), \\ q' = (2SA + B^T)q + 2Sc + g, \\ r' = \mathrm{tr}(AS) + \frac{1}{2}q^T Aq + q^T c + h \end{cases} \tag{1.1.9}$$

и

$$\begin{cases} P' = -P\left(2SA + B^T\right) - (2AS + B)\,P - 2A, \\ m' = -(2AS + B)m - Aq - c, \\ C' = C \cdot \left(\mathrm{tr}\left(AP^{-1}\right)\right). \end{cases} \tag{1.1.10}$$

А также рассмотрим задачу Коши для оператора $\mathfrak{L}$, введённого выше,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{L}[u], \\ u|_{t=0} = \delta_y(x), \end{cases} \tag{1.1.11}$$

где $\delta_y(x)$ есть дельта-функция с особенностью в точке $y \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* **А** *и* **Б**. *Тогда решением задачи Коши* (1.1.11) *будет функция* $u(t,x)$, *равная*

$$\begin{aligned}&\exp\left\{x^T S(t)x + q^T(t)x + r(t)\right\}\cdot\\ &\cdot C(t)\exp\left\{\left\langle P^{-1}(t)(x-m(t;y)),(x-m(t;y))\right\rangle\right\},\end{aligned}\tag{1.1.12}$$

где $S(t)$, $q(t)$ *и* $r(t)$ *суть решения системы уравнений* (1.1.9) *с начальными условиями* $S_{ij}(0) = q_k(0) = r(0) = 0$ *для* $\forall i,j,k \in \overline{1,n}$, $P(t)$, $m(t;y)$ *суть решения двух первых уравнений системы* (1.1.10) *с начальными условиями* $P_{ij}(0) = 0$ *для* $\forall i,j \in \overline{1,n}$, $m(0) = y$, *а* $C(t)$ *есть частное решение третьего уравнения системы* (1.1.10) *вида*

$$C(t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)^n \det A_0}}\ \exp\left\{-\frac{n}{2}\int\limits_0^t \frac{\widetilde{q}(s)}{s}ds\right\}.$$

§ 1.2. Вспомогательные утверждения и леммы

1.2.1 Интеграл от экспоненты квадратичной функции

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 1.2.1. *Пусть* $v(x) = \langle Sx,x\rangle + \langle q,x\rangle + r$ *— квадратичная форма, соответствующая симметричной матрице* $S \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, *вектору линейной части* $q \in \mathbb{R}^n$ *и свободному члену* $r \in \mathbb{R}$. *Интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp v(x)\ dx_1\dots dx_n \tag{1.2.1}$$

существует тогда и только тогда, когда матрица $S(t)$ *отрицательно определена, причем*

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\{\langle Sx,x\rangle + \langle q,x\rangle + r\}dx_1\dots dx_n =\\ &= \pi^{n/2}|\det S|^{-1/2}\exp\left\{r - \frac{1}{4}\langle S^{-1}q,q\rangle\right\}.\end{aligned}\tag{1.2.2}$$

Доказательство. Вычислим этот интеграл непосредственно.

Известно, что для квадратичной формы, соответствующей симметричной матрице с вещественными компонентами, существует ортогональное преобразование, приводящее ее к диагональному виду. Более точно, для симметричной матрицы $S = S^T$ существует такая ортогональная матрица $O : O^{-1} = O^T$, что

$$O^T S O = \Lambda, \quad \Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{\mathrm{n}}\},$$

так что замена переменных $x = Oy$ приводит квадратичную форму $\langle Sx, x\rangle$ к виду

$$\langle Sx, x\rangle = \langle SOy, Oy\rangle = \langle O^T SOy, y\rangle = \langle \Lambda y, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2.$$

Здесь λ_k, $k = 1, \ldots, n$ — собственные значения матрицы S, вещественные в силу ее симметричности. Очевидно, $\det S = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

В новых переменных $y = (y_1, \ldots, y_n)$ функция $v(x)$ примет следующий вид:

$$v(x) = \langle \Lambda y, y\rangle + \langle O^T q, y\rangle + r = \sum_{k=1}^{n} [\lambda_k y_k^2 + \widetilde{q}_k y_k] + r,$$

где $\widetilde{q}_k$ есть k-я компонента вектора $\widetilde{q} = O^T q = O^{-1} q$. Отсюда видно, что интеграл (1.2.1) (кратности n) существует тогда и только тогда, когда одновременно существуют n однократных интегралов

$$I_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{\lambda_k y_k^2 + \widetilde{q}_k y_k\}\ dy_k.$$

Последнее выполнено в том и только том случае, когда $\lambda_k < 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$. При этом

$$\lambda_k y_k^2 + \widetilde{q}_k y_k = -\left[(-\lambda_k) y_k^2 - \widetilde{q}_k y_k + \left(-\frac{1}{4\lambda_k}\right) \widetilde{q}_k^2\right] - \frac{1}{4\lambda_k} \widetilde{q}_k^2 =$$

$$= -\left[\sqrt{-\lambda_k}\, y_k - \frac{1}{2\sqrt{-\lambda_k}} \widetilde{q}_k\right]^2 - \frac{1}{4\lambda_k} \widetilde{q}_k^2.$$

Следовательно,

$$I_k = \exp\left\{-\frac{1}{4\lambda_k}\widetilde{q}_k^2\right\} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-\lambda_k}} \tag{1.2.3}$$

в силу того, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ay+b)^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$ (при $a > 0$ независимо от значения b).

Из равенства (1.2.3) и соотношения $dx_1 \ldots dx_n = dy_1 \ldots dy_n$, справедливого в силу ортогональности матрицы O, заключаем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp v(x) dx_1 \ldots dx_n = \exp\left\{r - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4\lambda_k}\widetilde{q}_k^2\right\} \prod_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-\lambda_k}}. \tag{1.2.4}$$

Заметим, что матрица $\mathrm{diag}\{\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\}$ есть обратная к матрице Λ, поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4\lambda_k}\widetilde{q}_k^2 = \frac{1}{4}\langle \Lambda^{-1}\widetilde{q}, \widetilde{q}\rangle = \frac{1}{4}\langle (O^T S O)^{-1}\widetilde{q}, \widetilde{q}\rangle =$$
$$= \frac{1}{4}\langle O^T S^{-1} O\widetilde{q}, \widetilde{q}\rangle = \frac{1}{4}\langle S^{-1} O\widetilde{q}, O\widetilde{q}\rangle = \frac{1}{4}\langle S^{-1} q, q\rangle,$$

кроме того,

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-\lambda_k}} = \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\sqrt{(-1)^n \det S}} = \pi^{n/2} |\det S|^{-1/2}.$$

Поэтому равенство (1.2.4) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{\langle Sx, x\rangle + \langle q, x\rangle + r\} dx_1 \ldots dx_n = \\ &= \pi^{n/2} |\det S|^{-1/2} \exp\left\{r - \frac{1}{4}\langle S^{-1} q, q\rangle\right\}. \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Равенство (1.2.5) есть формула для вычисления интеграла от экспоненты квадратичной функции, справедливая при условии, что все собственные значения матрицы квадратичной формы последней отрицательны. $\square$

1.2.2 Параболическое уравнение

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ — векторная переменная размерности n, $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ — выделенная одномерная переменная, играющая роль времени, $u(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — вещественнозначная функция, имеющая в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ непрерывные частные производные $\partial_t, \partial_{x_k}, \partial^2_{x_k x_l}(k, l = 1, \ldots, n)$.

Рассматривается уравнение в частных производных

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathfrak{J}[u(t,x)], \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \tag{1.2.6}$$

где $\mathfrak{J}$ — дифференциальный (по переменным x) оператор вида

$$\mathfrak{J}[u] = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{1}{2} a_{kl}(t,x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{n} b_k(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + C(t,x) \cdot u. \tag{1.2.7}$$

С помощью векторной записи уравнению (1.2.6) можно придать следующую форму:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left\langle \frac{1}{2} A, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\rangle + \left\langle b, \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle + Cu. \tag{1.2.8}$$

Имеет место утверждение.

Лемма 1.2.1. *Пусть функция* $\rho \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, $\rho(t,x) > 0$, *есть некоторое (известное) положительное решение уравнения* (1.2.6). *Тогда функция* $v \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, *равная*

$$v(t,x) = \frac{u(t,x)}{\rho(t,x)}, \; (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \tag{1.2.9}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left\langle \frac{1}{2} A, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\rangle + \left\langle A \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} + b, \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle. \tag{1.2.10}$$

Доказательство. Продифференцируем тождество (1.2.9). Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot v + \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \cdot v + \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_k \partial x_l} \cdot v + \frac{\partial \rho}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_l} + \frac{\partial \rho}{\partial x_l}\frac{\partial v}{\partial x_k} + \rho \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l}.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (1.2.8), получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot v + \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \left[\left\langle \frac{1}{2}A, \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right\rangle \cdot v + \left\langle A\frac{\partial \rho}{\partial} x, \frac{\partial v}{\partial x}\right\rangle + \rho \left\langle \frac{1}{2}A, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\rangle\right] + \\ + \left[\left\langle v, \frac{\partial \rho}{\partial x}\right\rangle \cdot v + \rho \cdot \left\langle b, \frac{\partial v}{\partial x}\right\rangle\right] + C \cdot [\rho \cdot v].$$

Перегруппировав члены этого равенства, мы видим, что

$$\rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \rho \cdot \left\langle \frac{1}{2}A, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\rangle + \left\langle A\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right\rangle + \\ + \rho \cdot \left\langle b, \frac{\partial v}{\partial x}\right\rangle + \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathfrak{L}[\rho]\right) \cdot v. \tag{1.2.11}$$

Последнее слагаемое в правой части (1.2.11) равно нулю в силу того, что функция ρ удовлетворяет уравнению (1.2.6). Поделив обе части (1.2.11) на $\rho > 0$, получим (1.2.10), что и требовалось. □

Замечание 2.1. В "новом" уравнении (1.2.10), полученном в результате замены (1.2.9), отсутствует член вида $C \cdot u$, поэтому оно является более простым, чем исходное уравнение (1.2.8). Впрочем, возможность подобного "упрощения" предполагает наличие по крайней мере одного заранее известного положительного решения самого уравнения.

1.2.3 Уравнение "второго порядка"

Положительные функции

$$\rho(t, x) = \exp\left\{x^T S(t) x + q^T(t) x + r(t)\right\}, \tag{1.2.12}$$

где $S \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, являются решениями уравнения “второго порядка” вида (1.1.1) (см. [75]) и имеет место утверждение (теорема 3.1 из [75]).

Лемма 1.2.2. *Функция $\rho \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ вида* (1.2.12) *является решением уравнения “второго порядка”* (1.1.1) *в том и только том случае, если ее коэффициенты $S(t)$, $q(t)$ и $r(t)$ удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{cases} S\,' = \dfrac{1}{2}S^TAS + \dfrac{1}{2}SAS^T + SAS + SB + B^TS^T + \dfrac{1}{2}(F + F^T), \\ q\,' = (SA + S^TA + B^T)q + Sc + S^Tc + g, \\ r\,' = tr(AS) + \dfrac{1}{2}q^TAq + q^Tc + h. \end{cases} \tag{1.2.13}$$

Доказательство. Продифференцируем (1.2.12) по t и по x_j.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(x^T\frac{dS}{dt}x + \frac{dq^T}{dt}x + \frac{dr}{dt}\right)\rho. \tag{1.2.14}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_j} = \left(\sum_{k=1}^{n} S_{jk}x_k + \sum_{i=1}^{n} S_{ij}x_i + q_j\right)\rho.$$

$$\nabla\rho^T = (x^TS^T + x^TS + q^T)\rho.$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} = \Bigg(S_{ji} + S_{ij} + \sum_{k,l=1}^{n} S_{jk}S_{il}x_kx_l + \sum_{k,l=1}^{n} S_{jk}S_{li}x_kx_l +$$

$$+ \sum_{k,l=1}^{n} S_{kj}S_{il}x_kx_l + \sum_{k,l=1}^{n} S_{kj}S_{li}x_kx_l + q_i\sum_{k=1}^{n} S_{jk}x_k +$$

$$+ q_i\sum_{k=1}^{n} S_{kj}x_k + q_j\sum_{k=1}^{n} S_{ik}x_k + q_j\sum_{k=1}^{n} S_{ki}x_k + q_jq_i\Bigg)\rho.$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i\partial x_j} = \Bigg(\mathrm{tr}(AS)+\frac{1}{2}(Sx)^T(ASx)+\frac{1}{2}(x^TS)(ASx)+\frac{1}{2}q^TASx+$$
$$+\frac{1}{2}x^TSASx+\frac{1}{2}x^TS(x^TSA)^T+\frac{1}{2}(x^TS)Aq+$$
$$+\frac{1}{2}(Aq)^TSx+\frac{1}{2}(x^TS)(Aq)+\frac{1}{2}q^TAq\Bigg)\rho =$$
$$=\Big(\frac{1}{2}x^T(S^TAS+2SAS+SA^TS^T)x+$$
$$+\frac{1}{2}(q^TAS+2q^TA^TS^T+q^TA^TS)x+\mathrm{tr}(AS)+\frac{1}{2}q^TAq\Big)\rho.$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} B_{ij}x_j + c_i\right)\frac{\partial\rho}{\partial x_i} =$$
$$=\Big(x^T(S^T+S)Bx+(q^TB+c^TS+c^TS^T)x+c^Tq\Big)\rho.$$

Тогда

$$\mathfrak{L}[\rho] = \Bigg(\frac{1}{2}x^T\Bigg(S^TAS+2SAS+SA^TS^T+(S^T+S)B+\frac{1}{2}(F+F^T)\Bigg)x+$$
$$+\frac{1}{2}\left(q^TAS+2q^TA^TS^T+q^TA^TS+q^TB+c^TS+c^TS^T+g^T\right)x+$$
$$+\mathrm{tr}(AS)+\frac{1}{2}q^TAq+c^Tq+h\Bigg)\rho. \tag{1.2.15}$$

Приравняв (1.2.14) и (1.2.15) и сравнив подобные члены, получим систему (1.2.13). □

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} S' = \frac{1}{2}S^TAS+\frac{1}{2}SAS^T+SAS+SB+B^TS^T+\frac{1}{2}(F+F^T), \\ S|_{t=0} = \mathbf{0}\in\mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \end{cases}$$

решение которой будем искать в пространстве симметричных матриц из $\mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. При этом, задача Коши переписывается в форме (1.1.3), а система (1.2.13) принимает вид (1.1.9).

Предложение 1.2.2. *Из предположения* **A** *вытекает, что для задачи Коши* (1.1.3) *решение* $S(t)$ *существует в* ϵ_1*-окрестности нуля.*

Доказательство. Действительно, из предположения **A** вытекает существование предела $\lim\limits_{t\to 0} S'(t) = \dfrac{1}{2}(F_0 + F_0^T)$, т.е.

$$S'(t) = \frac{1}{2}(F_0 + F_0^T) + o(1).$$

Это означает, что

$$S(t) = \frac{1}{2}t(F_0 + F_0^T) + K(t), \tag{1.2.16}$$

где $K(t) = (k_{ij}(t))$ — симметричная матрица, причем $k_{ij}(t) = o(t)$ при $t \to 0$, то есть существует $\epsilon_1 > 0$, такое что имеет место представление (1.2.16). □

Определение 1.2.1. *Система вида* (1.2.13) *называется* ***системой типа Риккати****.*

Подробнее о различных видах уравнений Риккати можно прочитать, например, в [59], [56] и [15].

Следствие 1. *Пусть тройка* $S(t)$, $q(t)$ *и* $r(t)$ *удовлетворяет системе* (1.1.9)*. Тогда замена неизвестной функции* (1.2.9) *из условия Леммы 1.2.1 с функцией* ρ *вида* (1.2.12) *в уравнении "второго порядка"* (1.1.1) *приводит к новому уравнению*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left\langle \frac{1}{2}A, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\rangle + \left\langle \widehat{B}x + \widehat{c}, \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle, \tag{1.2.17}$$

в котором $\widehat{B} = 2AS + B$ *и* $\widehat{c} = Aq + c$*.*

В качестве обоснования формул для $\widehat{B}$ и $\widehat{c}$ вспомним, что функция ρ вида (1.2.12) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} = 2Sx + q.$$

1.2.4 Система типа Риккати с особенностью

Пусть $u(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция класса $C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, удовлетворяющая уравнению "второго порядка" (1.1.1).

Целью этого параграфа является нахождение решения этого уравнения не в форме (1.2.12), а в следующем виде:

$$u(t,x) = \exp\left\{x^T P^{-1}(t)x + q^T(t)x + r(t)\right\}, \tag{1.2.18}$$

где P^{-1} — симметричная матрица. Отличие от "стандартной" формы (1.2.12) заключается в изменении симметричной матрицы $S(t)$ квадратичной формы на некоторую симметричную обратную матрицу $P^{-1}(t)$. Чтобы найти решение уравнения (1.1.1) в форме (1.2.18), воспользуемся Леммой 1.2.2. При этом мы получим систему

$$\begin{cases} (P^{-1})' = 2P^{-1}AP^{-1} + P^{-1}B + B^T P^{-1} + \frac{1}{2}(F + F^T), \\ q' = (2P^{-1}A + B^T)q + 2P^{-1}c + g, \\ r' = \mathrm{tr}(AP^{-1}) + \frac{1}{2}q^T Aq + q^T c + h. \end{cases} \tag{1.2.19}$$

Предложение 1.2.3. *Пусть элементы обратимой матрицы $P(t)$ дифференцируемы. Тогда элементы обратной матрицы $P^{-1}(t)$ также дифференцируемы, причем выполнено соотношение*

$$(P^{-1}(t))' = -P^{-1}(t)P'(t)P^{-1}(t). \tag{1.2.20}$$

Доказательство. В самом деле, каждый элемент матрицы $P^{-1}(t)$ может быть выражен как взятое с надлежащим знаком отношение двух многочленов от элементов матрицы $P(t)$: алгебраического дополнения, соответствующего выбранному элементу, и определителя матрицы $P(t)$, отличного от нуля в силу ее невырожденности. Поэтому элементы обратной матрицы $P^{-1}(t)$ дифференцируемы.

Рассмотрим тождество $P(t)P^{-1}(t) \equiv E$. Продифференцировав его по t, мы получим соотношение

$$P'(t)P^{-1}(t) + P(t)(P^{-1}(t))' = 0,$$

из которого немедленно следует (1.2.20). □

Нетрудно показать, что функция $u(t,x)$ вида (1.2.18) представима также в виде

$$u(t,x) = C(t)\cdot \exp\{\langle P^{-1}(t)(x-m(t)),(x-m(t))\rangle\}, \tag{1.2.21}$$

где коэффициенты $C(t)$ и $m(t)$ задаются следующим образом:

$$m = -\frac{1}{2}Pq, \tag{1.2.22}$$

$$C = \exp\left\{r - \frac{1}{4}\langle Pq, q\rangle\right\}. \tag{1.2.23}$$

Замечание 1.2.1. *Невырожденность матрицы P^{-1} в окрестности нуля следует из утверждения* 1.2.6.

Положим $\widetilde{B} = -B^T$.

Лемма 1.2.3. *Функция $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ вида* (1.2.21) *есть решение уравнения "второго порядка"* (1.1.1) *в том и только том случае, если ее коэффициенты $P(t)$, $m(t)$ и $C(t)$ удовлетворяют уравнениям*

$$\begin{cases} P' = -\frac{1}{2}P\left(F+F^T\right)P + P\widetilde{B} + \widetilde{B}^T P - 2A, \\ m' = -\frac{1}{2}P\left(F+F^T\right)m + \widetilde{B}^T m - c - \frac{1}{2}Pg, \\ C' = C\left[tr\left(AP^{-1}\right) + \frac{1}{2}\left\langle\left(F+F^T\right)m, m\right\rangle + \langle g, m\rangle + h\right]. \end{cases} \tag{1.2.24}$$

Доказательство. С помощью формулы для производной обратной матрицы (1.2.20) преобразуем первое уравнение системы (1.2.19). Имеем

$$-P^{-1}P'P^{-1} = 2P^{-1}AP^{-1} + P^{-1}B + B^T P^{-1} + \frac{1}{2}\left(F+F^T\right).$$

Умножив обе части этого равенства слева и справа на матрицу P, получим первое уравнение системы (1.2.24). Далее, продифференцировав тождество (1.2.22), получаем

$$m' = -\frac{1}{2}\left(P'q + Pq'\right).$$

Подставляя выражения для P' и q' из систем (1.2.24) и (1.2.19) соответственно, получаем

$$m' = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}P\left(F+F^T\right)Pq + \widetilde{B}^T Pq + 2c + Pg\right) = \\ = -\frac{1}{2}P\left(F+F^T\right)m + \widetilde{B}^T m - c - \frac{1}{2}Pg.$$

Тем самым получили второе уравнение системы (1.2.24). Наконец, дифференцируя тождество (1.2.23), выводим

$$C' = \exp\left\{r - \frac{1}{4}\langle Pq, q\rangle\right\} \cdot \left(r - \frac{1}{4}\langle Pq, q\rangle\right)' = C\left(r - \frac{1}{4}\langle Pq, q\rangle\right)'.$$

Но $(\langle Pq, q\rangle)' = \langle P'q, q\rangle + 2\langle Pq, q'\rangle$ в силу симметрии матрицы P, откуда

$$C' = C\left(r' - \frac{1}{4}\langle P'q, q\rangle - \frac{1}{2}\langle Pq, q'\rangle\right).$$

Подставляя в последнее равенство выражения для P', q' и r' из систем (1.2.24) и (1.2.19) соответственно, получаем

$$C' = C\left(\mathrm{tr}\left(AP^{-1}\right) + \frac{1}{8}\left\langle P\left(F+F^T\right)Pq, q\right\rangle - \frac{1}{2}\langle Pg, q\rangle + h\right) = \\ = C\left(\mathrm{tr}\left(AP^{-1}\right) + \frac{1}{2}\left\langle\left(F+F^T\right)m, m\right\rangle + \langle g, m\rangle + h\right),$$

что обосновывает третье уравнение системы (1.2.24). $\square$

Определение 1.2.2. *Система вида* (1.2.24) *называется* ***системой типа Риккати с особенностью****.*

Предложение 1.2.4. *Из предположения* **A** *вытекает, что решение* $P(t)$ *задачи Коши* (1.1.2) *существует в* ϵ_2*-окрестности нуля.*

Доказательство. Действительно, из предположения **A** вытекает существование предела $\lim\limits_{t\to 0} P'(t) = -2A_0$, т.е.

$$P'(t) = -2A_0 + o(1).$$

Это означает, что
$$P(t) = -2tA_0 + R(t), \tag{1.2.25}$$
где $R(t) = (r_{kl}(t))$ — симметричная матрица, причем $r_{kl}(t) = o(t)$ при $t \to 0$, то есть существует $\epsilon_2 > 0$ такое, что имеет место представление (1.2.25). □

Замечание 1.2.2. *Заметим, что $\epsilon_2 \leq \epsilon_1$ и постоянная ε из предположения* **A** *равна ϵ_2.*

1.2.5 Дополнительные рассуждения

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 1.2.5. *Функция $v \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ вида* (1.2.21) *является решением уравнения* (1.2.17) *тогда и только тогда, когда ее коэффициенты удовлетворяют системе* (1.1.10).

Доказательство очевидно в силу Леммы 1.2.3.

Предложение 1.2.6. *Матрица $P(t)$ является отрицательно определенной в некоторой окрестности нуля.*

Доказательство. Пусть $\lambda_0 > 0$ — наименьшее собственное значение матрицы A_0, тогда в силу предположения **A** выполняется неравенство
$$\langle A_0x, x\rangle \geq \lambda_0\langle x, x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$
Выберем $t_0 \in \mathbb{R}_+$ настолько малым, чтобы для всех $t \in (0, t_0)$ выполнялась оценка
$$|r_{kl}(t)| < \frac{1}{2}\lambda_0 t,$$
где $R(t) = (r_{kl}(t))$ определена в (1.2.25). Тогда, очевидно, при $t \in (0, t_0)$ имеет место неравенство
$$|\langle R(t)x, x\rangle| \leq \frac{1}{2}\lambda_0 t\langle x, x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Но в силу (1.2.25) имеем

$$\langle P(t)x, x\rangle = -2t\langle A_0 x, x\rangle + \langle R(t)x, x\rangle.$$

Отсюда, комбинируя два последних неравенства, заключаем, что при $t \in (0, t_0)$ верна оценка

$$\langle P(t)x, x\rangle \le -\frac{3}{2}\lambda_0 t\langle x, x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Следовательно, при $t \in (0, t_0)$ для всех $x \neq 0$ выполнено неравенство $\langle P(t)x, x\rangle < 0$, то есть матрица $P(t)$ отрицательно определена на интервале $(0, t_0)$, и все ее собственные значения на указанном интервале отрицательны. $\square$

Предложение 1.2.7. *Имеет место равенство* $\lim\limits_{t\to 0} I(t) = 1$, *где*

$$I(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} C(t)\cdot \exp\{\langle P^{-1}(t)(x - m(t;y)), (x - m(t;y))\rangle\} dx_1 \dots dx_n$$

и $P(t)$, $m(t;y)$ *суть решения двух первых уравнений системы* (1.1.10) *с начальными условиями* $P_{ij}(0) = 0$ *для* $\forall i, j \in \overline{1, n}$, $m(0) = y$, *а* $C(t)$ *есть частное решение третьего уравнения системы* (1.1.10) *вида*

$$C(t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)^n \det A_0}}\ \exp\left\{-\frac{n}{2}\int\limits_0^t \frac{\widetilde{q}(s)}{s} ds\right\}.$$

Доказательство. Положим $\nu(t) = \ln C(t)$. Эта замена приводит третье уравнение системы (1.1.10) к виду

$$\nu'(t) = \mathrm{tr}(AP^{-1}). \tag{1.2.26}$$

Для (1.1.5) имеем $Q(t) = (q_{kl}(t))$, причем $q_{kl}(t) = o(1)$ при $t \to 0$. Кроме того, из (1.2.25) следует, что

$$P(t) = -2t[E + Q(t)]A_0. \tag{1.2.27}$$

Следовательно,

$$P^{-1}(t) = -\frac{1}{2t}A_0^{-1}[E+Q(t)]^{-1} = -\frac{1}{2t}A_0^{-1}[E+\overline{Q}(t)],$$

где $\overline{Q}(t) = (\overline{q}_{kl}(t))$ задана в (1.1.6). Матрица $\overline{Q}(t)$ существует в силу предположения **A**.
При этом, $\overline{q}_{kl}(t) = o(1)$ при $t \to 0$ (см., например, [5]).

Положим теперь $W(t) = A(t)P^{-1}(t)$. Тогда имеем

$$-2tW(t) = A(t)A_0^{-1}[E+\overline{Q}(t)] = [A_0 + (A(t)-A_0)]A_0^{-1}[E+\overline{Q}(t)] =$$
$$= E + \overline{Q}(t) + (A(t)-A_0)A_0^{-1}[E+\overline{Q}(t)] = E + \widetilde{Q}(t),$$

где $\widetilde{Q}(t) = (\widetilde{q}_{kl}(t))$ задана в (1.1.7), причем $\widetilde{q}_{kl}(t) = o(1)$ при $t \to 0$ в силу предположения **A**.

С учетом данных обозначений преобразуем правую часть уравнения (1.2.26):

$$\operatorname{tr}\left(AP^{-1}\right) = \operatorname{tr}W(t) = -\frac{1}{2t}\operatorname{tr}\left(E+\widetilde{Q}(t)\right) = -\frac{n}{2t}\left(1+\widetilde{q}(t)\right),$$

где $\widetilde{q}(t)$ задан в (1.1.8), причем $\widetilde{q}(t) = o(1)$ при $t \to 0$ (в силу определения и свойств матрицы $\widetilde{Q}(t)$). Уравнение (1.2.26) примет вид

$$\nu'(t) = -\frac{n}{2t}(1+\widetilde{q}(t)). \tag{1.2.28}$$

Функция $\nu_0(t)$, заданная равенством

$$\nu_0(t) = -\frac{n}{2}\ln t - \frac{n}{2}\int\limits_0^t \frac{\widetilde{q}(s)}{s}ds,$$

очевидно, является его частным решением. Таким образом, общее решение уравнения (1.2.28) есть

$$\nu(t) = \nu_0(t) + N_0, \quad N_0 \in \mathbb{R}.$$

Как следствие получаем, что

$$\nu(t) = N_0 - \frac{n}{2}\ln t + o(1) \tag{1.2.29}$$

при $t \to 0$.

Следовательно, решения третьего уравнения системы (1.1.10) суть функции

$$C(t) = C_0 \exp \nu_0(t), \quad C_0 = \exp N_0 > 0.$$

Пусть интеграл $I(t)$ задан в условии утверждения, тогда из (1.2.5) и (1.2.23) очевидно вытекает, что

$$I(t) = C(t) \cdot \pi^{n/2} |\det P(t)|^{1/2}$$

(независимо от значения $y \in \mathbb{R}^n$). Имеем

$$\ln I(t) = \nu(t) + \frac{n}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} \ln |\det P(t)|. \tag{1.2.30}$$

Кроме того, из представления (1.2.27) легко видеть, что

$$|\det P(t)| = (2t)^n \det A_0 \cdot (1 + o(1)). \tag{1.2.31}$$

На основании (1.2.29) и (1.2.31) из (1.2.30) получаем

$$\begin{aligned} \ln I(t) = N_0 - \frac{n}{2} \ln t + \frac{n}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} \ln \left((2t)^n \det A_0 (1 + o(1)) \right) = \\ = N_0 + \ln \sqrt{(2\pi)^n \det A_0} + o(1). \end{aligned}$$

Если теперь выбрать значение константы N_0, положив

$$N_0 = -\ln \sqrt{(2\pi)^n \det A_0},$$

то мы получим, что

$$\lim_{t \to 0} I(t) = 1.$$

□

Составим функцию

$$G(t, x; y) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

$$G(t, x; y) = C(t) \cdot \exp\{\langle P^{-1}(t)(x - m(t; y)), (x - m(t; y))\rangle\}.$$

где $P(t)$, $m(t)$ и $C(t)$ удовлетворяют условию утверждения 1.2.7.

Лемма 1.2.4. *Пусть* $\phi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— функция класса* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Пусть также*

$$f(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(y) G(t,y;x) dy,$$

тогда $f(t,x) \to \phi(x)$ *при* $t \to 0$.

Доказательство. Для произвольным образом фиксированного момента времени $t > 0$ матрица $P = P(t)$ симметрична и отрицательно определена (по построению и в силу утверждения 1.2.6 и утверждения 1.2.4), поэтому существует такая ортогональная матрица $O : O^{-1} = O^T$, что

$$O^T P(t) O = \Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\},$$

причем все числа λ_k отрицательны.

Обозначим символом $\sqrt{-\Lambda}$ матрицу $\operatorname{diag}\{\sqrt{-\lambda_1}, \ldots, \sqrt{-\lambda_n}\}$, а символом $\sqrt{-P(t)}$ матрицу $O\sqrt{-\Lambda}O^T$ и сделаем замену переменных $y = \sqrt{-P(t)}z + m(t;x)$ в интеграле

$$f(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(y) C(t) \exp\{\langle P^{-1}(t)(y - m(t;x)), (y - m(t;x))\rangle\} dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(y) C(t) \exp\Big\{\Big\langle O\sqrt{-\Lambda}O^T O \Lambda^{-1} O^T O \sqrt{-\Lambda} O^T z, z\Big\rangle\Big\} d\Big(O\sqrt{-\Lambda}O^T z\Big) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} C(t) \phi\left(\sqrt{-P(t)}z + m(t;x)\right) \exp\{-\langle z, z\rangle\} \cdot |\det P(t)|^{1/2} dz =$$

$$= \pi^{-n/2} I(t) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\sqrt{-P(t)}z + m(t;x)\right) \exp\{-\langle z, z\rangle\} dz.$$

Последний интеграл стремится к $\pi^{n/2}\phi(x)$ в силу того, что $P(t) \to 0$ и $m(t;x) \to x$ при $t \to 0$, а значит $f(t,x) \to \phi(x)$ при $t \to 0$ в силу утверждения 1.2.7. $\square$

§ 1.3. Доказательство основной теоремы

Доказательство Теоремы 1. Представим решение задачи Коши (1.1.11) в виде произведения

$$u(t,x) = \rho(t,x)v(t,x).$$

Тогда в силу Следствия 1 задача распадается на две подзадачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = \mathfrak{L}[\rho], \\ \rho|_{t=0} = 1, \end{cases} \tag{1.3.1}$$

и

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \mathfrak{F}[v], \\ v|_{t=0} = \delta_y(x), \end{cases} \tag{1.3.2}$$

где оператор $\mathfrak{L}$ есть оператор “второго порядка”, а $\mathfrak{F}$ — оператор, соответствующей правой части уравнения (1.2.17).

В силу Леммы 1.2.2 существует решение $\rho(t,x)$ задачи (1.3.1) вида (1.2.12), где $S(t)$, $q(t)$ и $r(t)$ суть решения системы уравнений (1.1.9) с начальными условиями $S_{ij}(0) = q_k(0) = r(0) = 0$ для $\forall i,j,k \in \overline{1,n}$.

Далее, в силу утверждения 1.2.5, существует функция $v(t,x)$ вида (1.2.21), где $P(t)$, $m(t)$ и $C(t)$ суть решения системы уравнений (1.1.10). Из Леммы 1.2.4 следует, что при начальных условиях $P_{ij}(0) = 0$ для $\forall i,j \in \overline{1,n}$, $m(0) = y$ и

$$C(1) = \exp\left\{ -\frac{n}{2}\int\limits_0^1 \frac{\widetilde{q}(s)}{s} ds - \ln\sqrt{(2\pi)^n \det A_0} \right\}$$

функция $v(t,x) \to \delta_y(x)$ при $t \to 0$.

Очевидно, что при указанных начальных условиях на $S(t)$, $q(t)$, $r(t)$, $P(t)$, $m(t)$ и $C(t)$ произведение $\rho(t,x)v(t,x)$ также стремится к $\delta_y(x)$ при $t \to 0$.

Теорема доказана. □

Глава 2

Комплексный случай

§ 2.1. Постановка задачи и формулировка результата.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ — векторная переменная размерности n, $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ — выделенная одномерная переменная, играющая роль времени, $u(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ — комплекснозначная функция, имеющая в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ непрерывные частные производные $\partial_t, \partial_{x_k}, \partial^2_{x_k x_l}(k, l = 1, \ldots, n)$. Класс таких функций обозначим через $C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C})$.

Оператор $\widehat{\mathfrak{L}}$ будем называть "комплексным оператором второго порядка" (см., например, [13]), если он имеет следующий вид:

$$\widehat{\mathfrak{L}}[v] = \frac{(-i)^2}{2} \sum_{k,j=1}^{n} A_{kj}(t) \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_j} + (-i) \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(B_{kj}(t)\, x_j + c_k(t) \right) \right) \frac{\partial v}{\partial x_k} + \\ + \left(\sum_{k,j=1}^{n} F_{kj}(t)\, x_k x_j + \sum_{k=1}^{n} g_k(t)\, x_i + h(t) \right) v,$$

где $A_{kj}(t)$, $B_{kj}(t)$, $c_k(t)$, $F_{kj}(t)$, $g_k(t)$, $k, j = 1, \ldots, n$, и $h(t)$ — некоторые действительнозначные функции только от времени.

Соответственно, "комплексным уравнением второго порядка" будем называть уравнение вида

$$-i\,\hbar\,\partial_t u = \widehat{\mathfrak{L}}[u] \tag{2.1.1}$$

Замечание 2.1.1. *Отметим, что уравнение* (2.1.1) *является аналогом многомерного уравнения Шрёдингера с гамильтонианом в правой части вида*

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n} A_{kj}(t)p_k p_j + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(B_{kj}(t)\,x_j + c_k(t)\right)\right)p_k + \\ + \left(\sum_{k,j=1}^{n} F_{kj}(t)\,x_k x_j + \sum_{k=1}^{n} g_k(t)\,x_i + h(t)\right),$$

где $p_k = -i\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ *— координата импульса квантовой частицы.*

2.1.1 Предположения

Предполагается, что выполнены следующие гипотезы.

A. *Коэффициенты* $A(t)$, $B(t)$, $F(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *"комплексного оператора второго порядка"* $\widehat{\mathfrak{L}}$ *суть функции, непрерывные на* $\mathbb{R}_+$ *и имеющие при* $t \to 0$ *конечные пределы* A_0, B_0, $F_0 \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *соответственно. При этом предполагается, что* $A(t)$ *— симметричная матрица, а матрица* A_0 *является положительно определенной.*

Пусть решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} P' = -\dfrac{1}{\hbar}P\left(\dfrac{2}{\hbar}SA + B^T\right) - \dfrac{1}{\hbar}\left(\dfrac{2}{\hbar}AS + B\right)P - \dfrac{2}{\hbar^2}A, \\ P|_{t=0} = \mathbf{0} \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{2.1.2}$$

где $S(t)$ является симметричным решением задачи

$$\begin{cases} S' = \dfrac{2}{\hbar^2}SAS + \dfrac{1}{\hbar}\left(SB + B^T S\right) + \dfrac{1}{2}\left(F + F^T\right), \\ S|_{t=0} = \mathbf{0} \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{2.1.3}$$

представимо в виде

$$P(t) = -\frac{2t}{\hbar^2}A_0 + \frac{1}{\hbar^2}R(t) \tag{2.1.4}$$

в окрестности нуля, где $R(t)$ — некоторая матрица, заданная на отрезке $[0, \varepsilon]$. Здесь $0 < \varepsilon << 1$ — некоторая постоянная.

Замечание 2.1.2. *Вопросы существования решений* (2.1.2) *и* (2.1.3) *и их свойств, в частности, представимость в виде* (2.1.4), *обсуждаются в параграфе* § 2.2. *(утверждения* 2.2.3 *и* 2.2.5*).*

Введем следующие обозначения:

$$Q(t) = -\frac{1}{2t}R(t)A_0^{-1}, \tag{2.1.5}$$

$$\overline{Q}(t) = [E + Q(t)]^{-1} - E, \tag{2.1.6}$$

$$\widetilde{Q}(t) = \overline{Q}(t) + (A(t) - A_0)A_0^{-1}[E + \overline{Q}], \tag{2.1.7}$$

$$\widetilde{q}(t) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\widetilde{Q}. \tag{2.1.8}$$

Б. *Существует несобственный интеграл* $\int\limits_0^t \frac{\widetilde{q}(s)}{s}ds < +\infty$ *при* $0 \leq t < \varepsilon$.

Замечание 2.1.3. *Если функция* $\widetilde{q}(t)$ *имеет порядок* $O(t^\gamma)$ *при* $t \to 0$, *где* $\gamma > 0$, *то это гарантирует выполнение условия* **Б.** *При этом необходимым это условие, естественно, не является. Но, отметим, что такое условие легко конструктивно проверяется.*

Будем считать данные предположения выполненными во всех дальнейших рассуждениях.

2.1.2 Основная теорема

Пусть даны следующие две системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} S' = \dfrac{2}{\hbar^2} SAS + \dfrac{1}{\hbar}\left(SB + B^T S\right) + \dfrac{1}{2}\left(F + F^T\right), \\ q' = \dfrac{1}{\hbar^2}\left(2SA + \hbar B^T\right) q + \dfrac{2}{\hbar} Sc + g, \\ r' = \dfrac{1}{2\hbar^2} q^T A q + \dfrac{1}{\hbar} q^T c + h, \\ \psi' = -\dfrac{1}{\hbar}\mathrm{tr}(AS) \end{cases} \tag{2.1.9}$$

и

$$\begin{cases} P' = -\dfrac{1}{\hbar} P \left(\dfrac{2}{\hbar} SA + B^T\right) - \dfrac{1}{\hbar}\left(\dfrac{2}{\hbar} AS + B\right) P - \dfrac{2}{\hbar^2} A, \\ m' = -\dfrac{1}{\hbar}\left(\dfrac{2}{\hbar} AS + B\right) m - \dfrac{1}{\hbar^2} Aq - \dfrac{1}{\hbar} c, \\ C' = C \dfrac{1}{\hbar^2}\left(\mathrm{tr}\left(AP^{-1}\right)\right), \\ \zeta' = \zeta \dfrac{1}{\hbar^2}\left(\mathrm{tr}\left(AP^{-1}\right)\right). \end{cases} \tag{2.1.10}$$

А также рассмотрим задачу Коши для оператора $\widehat{\mathfrak{L}}$, введённого выше,

$$\begin{cases} -i\,\hbar \dfrac{\partial u}{\partial t} = \widehat{\mathfrak{L}}[u], \\ u|_{t=0} = \delta_y(x), \end{cases} \tag{2.1.11}$$

где $\delta_y(x)$ есть дельта-функция с особенностью в точке $y \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* **А** *и* **Б**. *Тогда решением задачи Коши* (2.1.11) *будет функция* $u(t,x)$, *равная*

$$\begin{aligned} &\exp\left\{-\frac{x^T S(t) x + q^T(t) x + r(t) + i\psi(t)}{i\hbar}\right\}\left(C(t) + i\zeta(t)\right)\cdot \\ &\cdot \exp\left\{-\frac{\left\langle P^{-1}(t)(x - m(t;y)), (x - m(t;y))\right\rangle}{i\hbar}\right\}, \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

где $S(t)$*,* $q(t)$*,* $r(t)$ *и* $\psi(t)$ *суть решения системы уравнений* (2.1.9) *с начальными условиями* $S_{kj}(0) = q_l(0) = r(0) = \psi(0) = 0$ *для* $\forall k, j, l \in \overline{1,n}$*,* $P(t)$*,* $m(t;y)$ *суть решения двух первых уравнений системы* (2.1.10) *с начальными условиями* $P_{kj}(0) = 0$ *для* $\forall k, j \in \overline{1,n}$*,* $m(0) = y$*, а* $C(t)$ *и* ζ *суть частные решения третьего и четвёртого, соответственно, уравнений системы* (2.1.10) *вида*

$$C(t) = \zeta(t) = \frac{\sqrt{\hbar^n}}{\sqrt{2i(-2i)^n(\pi t)^n \det A_0}}\ \exp\left\{-\frac{n}{2}\int\limits_0^t \frac{\widetilde{q}(s)}{s}ds\right\}.$$

§ 2.2. Вспомогательные утверждения и леммы

2.2.1 Интеграл от экспоненты квадратичной функции

Имеют место следующие утверждения.

Предложение 2.2.1. *Верна следующая формула:*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(ay+b)^2}dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{(1-i)}{a}$$

при $a > 0$ *независимо от значения* b*.*

Доказательство. Поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy^2}dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\cos y^2 - i\sin y^2\right)dy = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \left(\cos y^2 - i\sin y^2\right)dy,$$

а также в силу определения интегралов Френеля

$$\mathcal{C}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^x \cos y^2 dy,$$

$$\mathcal{S}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^x \sin y^2 dy,$$

и их свойств

$$\lim_{x\to+\infty} \mathcal{S}(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathcal{C}(x) = \frac{1}{2},$$

имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy^2} dy = 2\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathcal{C}(+\infty) - i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathcal{S}(+\infty)\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1-i).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(ay+b)^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{(1-i)}{a}.$$

□

Предложение 2.2.2. *Пусть* $v(x) = \langle Sx, x\rangle + \langle q, x\rangle + r + i\psi$ *— квадратичная форма, соответствующая симметричной матрице* $S \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, *вектору линейной части* $q \in \mathbb{R}^n$ *и свободному члену* $r + i\psi$, *где* $r, \psi \in \mathbb{R}$. *Интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\frac{i\,v(x)}{\hbar}\; dx_1 \ldots dx_n \tag{2.2.1}$$

существует тогда и только тогда, когда матрица $S(t)$ *отрицательно определена, причем*

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(\langle Sx, x\rangle + \langle q, x\rangle + r + i\psi)\right\} dx_1 \ldots dx_n = \\ &= (1-i)^n \left(\frac{\pi\hbar}{2}\right)^{n/2} |\det S|^{-1/2}\cdot \\ &\cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(r + i\psi) - \frac{i}{4\hbar}\langle S^{-1}q, q\rangle\right\}. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Доказательство. Вычислим этот интеграл непосредственно.

Известно, что для квадратичной формы, соответствующей симметричной матрице с вещественными компонентами, существует ортогональное преобразование, приводящее ее к диагональному виду. Более точно, для симметричной матрицы $S = S^T$ существует такая ортогональная матрица $O : O^{-1} = O^T$, что

$$O^T S O = \Lambda, \quad \Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{\mathrm{n}}\},$$

так что замена переменных $x = Oy$ приводит квадратичную форму $\langle Sx, x\rangle$ к виду

$$\langle Sx, x\rangle = \langle SOy, Oy\rangle = \langle O^T SOy, y\rangle = \langle \Lambda y, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2.$$

Здесь λ_k, $k = 1, \ldots, n$ — собственные значения матрицы S, вещественные в силу ее симметричности. Очевидно, $\det S = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

В новых переменных $y = (y_1, \ldots, y_n)$ функция $v(x)$ примет следующий вид:

$$v(x) = \langle \Lambda y, y\rangle + \langle O^T q, y\rangle + r + i\psi = \sum_{k=1}^{n} [\lambda_k y_k^2 + \widetilde{q}_k y_k] + r + i\psi,$$

где $\widetilde{q}_k$ есть k-я компонента вектора $\widetilde{q} = O^T q = O^{-1} q$. Отсюда видно, что интеграл (2.2.1) (кратности n) существует тогда и только тогда, когда одновременно существуют n однократных интегралов

$$I_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\lambda_k y_k^2 + \widetilde{q}_k y_k\right)\right\} \, dy_k.$$

Последнее выполнено в том и только том случае, когда $\lambda_k < 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$. При этом

$$\lambda_k y_k^2 + \widetilde{q}_k y_k = -\left[(-\lambda_k) y_k^2 - \widetilde{q}_k y_k + \left(-\frac{1}{4\lambda_k}\right)\widetilde{q}_k^2\right] - \frac{1}{4\lambda_k}\widetilde{q}_k^2 =$$
$$= -\left[\sqrt{-\lambda_k}\, y_k - \frac{1}{2\sqrt{-\lambda_k}}\widetilde{q}_k\right]^2 - \frac{1}{4\lambda_k}\widetilde{q}_k^2.$$

Следовательно,

$$I_k = \exp\left\{-\frac{i}{4\hbar\lambda_k}\widetilde{q}_k^2\right\} \cdot \sqrt{-\frac{\pi\hbar}{2\lambda_k}}\,(1 - i) \tag{2.2.3}$$

в силу утверждения 2.2.1.

Из равенства (2.2.3) и соотношения $dx_1 \dots dx_n = dy_1 \dots dy_n$, справедливого в силу ортогональности матрицы O, заключаем, что

$$\begin{gathered}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{\frac{iv(x)}{\hbar}\right\} dx_1 \dots dx_n = \\ = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(r + i\psi) - i\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4\hbar\lambda_k}\widetilde{q}_k^2\right\} \cdot (1-i)^n \prod_{k=1}^{n} \sqrt{-\frac{\pi\hbar}{2\lambda_k}}.\end{gathered} \tag{2.2.4}$$

Заметим, что матрица $\mathrm{diag}\{\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\}$ есть обратная к матрице Λ, поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4\hbar\lambda_k}\widetilde{q}_k^2 = \frac{1}{4\hbar}\langle \Lambda^{-1}\widetilde{q}, \widetilde{q}\rangle = \frac{1}{4\hbar}\langle (O^T S O)^{-1}\widetilde{q}, \widetilde{q}\rangle =$$
$$= \frac{1}{4\hbar}\langle O^T S^{-1} O\widetilde{q}, \widetilde{q}\rangle = \frac{1}{4\hbar}\langle S^{-1} O\widetilde{q}, O\widetilde{q}\rangle = \frac{1}{4\hbar}\langle S^{-1} q, q\rangle,$$

кроме того,

$$\prod_{k=1}^{n} \sqrt{-\frac{\pi\hbar}{2\lambda_k}} = \frac{(\sqrt{\pi\hbar})^n}{\sqrt{(-2)^n \det S}} = \left(\frac{\pi\hbar}{2}\right)^{n/2} |\det S|^{-1/2}.$$

Поэтому равенство (2.2.4) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(\langle Sx, x\rangle + \langle q, x\rangle + r + i\psi)\right\} dx_1 \dots dx_n = \\ = (1-i)^n \left(\frac{\pi\hbar}{2}\right)^{n/2} |\det S|^{-1/2} \cdot \\ \cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(r + i\psi) - \frac{i}{4\hbar}\langle S^{-1} q, q\rangle\right\}.\end{gathered} \tag{2.2.5}$$

Равенство (2.2.5) есть формула для вычисления интеграла от экспоненты квадратичной функции, справедливая при условии, что все собственные значения матрицы квадратичной формы последней отрицательны. □

2.2.2 Параболическое уравнение

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ — векторная переменная размерности n, $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ — выделенная одномерная переменная, играющая роль времени, $u(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ — комплекснозначная функция, имеющая в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ непрерывные частные производные $\partial_t, \partial_{x_k}, \partial^2_{x_k x_l} (k, l = 1, \ldots, n)$.

Рассматривается уравнение в частных производных

$$-i\hbar \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathfrak{J}[u(t,x)], \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \qquad (2.2.6)$$

где $\mathfrak{J}$ — дифференциальный (по переменным x) оператор вида

$$\mathfrak{J}[u] = -\sum_{k,l=1}^{n} \frac{1}{2} a_{kl}(t,x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} - i \sum_{k=1}^{n} b_k(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + C(t,x) \cdot u. \quad (2.2.7)$$

С помощью векторной записи уравнению (2.2.6) можно придать следующую форму:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \left\langle \frac{1}{2} A, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\rangle + \frac{1}{\hbar} \left\langle b, \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle + \frac{i}{\hbar} C u. \qquad (2.2.8)$$

Имеет место утверждение.

Лемма 2.2.1. *Пусть функция* $\rho \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C})$, $\rho(t,x) \neq 0$, *есть некоторое (известное) не обращающееся в ноль решение уравнения* (2.2.6). *Тогда функция* $v \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \beta)$, *равная*

$$v(t,x) = \frac{u(t,x)}{\rho(t,x)}, \; (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \qquad (2.2.9)$$

удовлетворяет уравнению

$$-i\hbar \frac{\partial v}{\partial t} = -\left\langle \frac{1}{2} A, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\rangle - \left\langle A \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} + ib, \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle. \qquad (2.2.10)$$

Доказательство. Продифференцируем тождество (2.2.9). Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot v + \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \cdot v + \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_k \partial x_l} \cdot v + \frac{\partial \rho}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_l} + \frac{\partial \rho}{\partial x_l}\frac{\partial v}{\partial x_k} + \rho \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l}.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (2.2.8), получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot v + \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\left[\left\langle \frac{1}{2}A, \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right\rangle \cdot v + \left\langle A\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right\rangle + \rho\left\langle \frac{1}{2}A, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\rangle\right] + \\ + \frac{1}{\hbar}\left[\left\langle b, \frac{\partial \rho}{\partial x}\right\rangle \cdot v + \rho \cdot \left\langle b, \frac{\partial v}{\partial x}\right\rangle\right] + \frac{i}{\hbar}C \cdot [\rho \cdot v].$$

Перегруппировав члены этого равенства, мы видим, что

$$\rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\left(\rho \cdot \left\langle \frac{1}{2}A, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\rangle + \left\langle A\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right\rangle\right) + \\ + \frac{1}{\hbar}\rho \cdot \left\langle b, \frac{\partial v}{\partial x}\right\rangle + \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}\mathfrak{L}[\rho]\right) \cdot v. \tag{2.2.11}$$

Последнее слагаемое в правой части (2.2.11) равно нулю в силу того, что функция ρ удовлетворяет уравнению (2.2.6). Поделив обе части (2.2.11) на $\rho > 0$, получим (2.2.10), что и требовалось. □

Замечание 2.1. В “новом” уравнении (2.2.10), полученном в результате замены (2.2.9), отсутствует член вида $C \cdot u$, поэтому оно является более простым, чем исходное уравнение (2.2.8). Впрочем, возможность подобного “упрощения” предполагает наличие по крайней мере одного заранее известного положительного решения самого уравнения.

2.2.3 Уравнение “второго порядка”

Не обращающиеся в ноль функции вида

$$\rho(t,x) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(x^T S(t)x + q^T(t)x + \widetilde{r}(t)\right)\right\}, \tag{2.2.12}$$

где $S \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, являются решениями “комплексного уравнения второго порядка” вида (2.1.1) и имеет место утверждение (аналог теоремы 3.1 из [75]).

Лемма 2.2.2. *Функция* $\rho \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ *вида* (2.2.12) *является решением “комплексного уравнения второго порядка”* (2.1.1) *в том и только том случае, если ее коэффициенты* $S(t)$, $q(t)$ *и* $\widetilde{r}(t)$ *удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{cases} S' = \dfrac{1}{2\hbar^2}\left(S^TAS + SAS^T + 2SAS\right) + \dfrac{1}{\hbar}\left(SB + B^TS^T\right) + \dfrac{1}{2}(F + F^T), \\ q' = \dfrac{1}{2\hbar^2}\left(2SA + 2S^TA + 2\hbar B^T\right)q + \dfrac{1}{\hbar}\left(Sc + S^Tc\right) + g, \\ \widetilde{r}' = \dfrac{1}{2\hbar^2}q^TAq + \dfrac{1}{\hbar}\left(q^Tc - itr(AS)\right) + h. \end{cases} \tag{2.2.13}$$

Доказательство. Продифференцируем (2.2.12) по t и по x_j.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\left(x^T\frac{dS}{dt}x + \frac{dq^T}{dt}x + \frac{dr}{dt}\right)\rho. \tag{2.2.14}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial x_j} = \frac{i}{\hbar}\left(\sum_{k=1}^{n} S_{jk}x_k + \sum_{i=1}^{n} S_{ij}x_i + q_j\right)\rho.$$

$$\nabla\rho^T = \frac{i}{\hbar}(x^TS^T + x^TS + q^T)\rho.$$

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i\partial x_j} = \Bigg(\frac{i}{\hbar}S_{ji} + \frac{i}{\hbar}S_{ij} - \frac{1}{\hbar^2}\Big(\sum_{k,l=1}^{n} S_{jk}S_{il}x_kx_l + \sum_{k,l=1}^{n} S_{jk}S_{li}x_kx_l +$$
$$+ \sum_{k,l=1}^{n} S_{kj}S_{il}x_kx_l + \sum_{k,l=1}^{n} S_{kj}S_{li}x_kx_l + q_i\sum_{k=1}^{n} S_{jk}x_k +$$
$$+ q_i\sum_{k=1}^{n} S_{kj}x_k + q_j\sum_{k=1}^{n} S_{ik}x_k + q_j\sum_{k=1}^{n} S_{ki}x_k + q_jq_i\Big)\Bigg)\rho.$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i\partial x_j} = \Bigg(\frac{i}{\hbar}\mathrm{tr}(AS) - \frac{1}{\hbar^2}\Big(\frac{1}{2}(Sx)^T(ASx) + \frac{1}{2}(x^TS)(ASx)$$
$$+\frac{1}{2}q^TASx+\frac{1}{2}x^TSASx+\frac{1}{2}x^TS(x^TSA)^T+\frac{1}{2}(x^TS)Aq+$$
$$+\frac{1}{2}(Aq)^TSx + \frac{1}{2}(x^TS)(Aq) + \frac{1}{2}q^TAq\Big)\Bigg)\rho =$$
$$= \Big(-\frac{1}{2\hbar^2}x^T(S^TAS + 2SAS + SA^TS^T)x-$$
$$-\frac{1}{2\hbar^2}(q^TAS + 2q^TA^TS^T + q^TA^TS)x + \frac{i}{\hbar}\mathrm{tr}(AS) - \frac{1}{2\hbar^2}q^TAq\Big)\rho.$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}B_{ij}x_j + c_i\right)\frac{\partial\rho}{\partial x_i} =$$
$$= \frac{i}{\hbar}\Big(x^T(S^T+S)Bx + (q^TB + c^TS + c^TS^T)x + c^Tq\Big)\rho.$$

Тогда

$$\mathfrak{L}[\rho] = \Bigg(\frac{1}{2\hbar^2}x^T\left(S^TAS + 2SAS + SA^TS^T\right)x + \frac{1}{\hbar}x^T(S^T+S)Bx+$$
$$+\frac{1}{2}x^T(F+F^T)x + \frac{1}{2\hbar^2}\left(q^TAS + 2q^TA^TS^T + q^TA^TS\right)x+$$
$$+\frac{1}{\hbar}\left(q^TB + c^TS + c^TS^T\right)x + g^Tx - \frac{i}{\hbar}\mathrm{tr}(AS)+$$
$$+\frac{1}{2\hbar^2}q^TAq + \frac{1}{\hbar}c^Tq + h\Bigg)\rho. \tag{2.2.15}$$

Приравняв (2.2.14) и (2.2.15) и сравнив подобные члены, получим систему (2.2.13). □

Представим $\widetilde{r}(t)$ в виде $r(t)+i\psi(t)$, а также рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} S' = \dfrac{1}{2\hbar^2}\left(S^T AS + SAS^T + 2SAS\right) + \dfrac{1}{\hbar}\left(SB + B^T S^T\right) + \dfrac{1}{2}(F + F^T), \\ S|_{t=0} = \mathbf{0} \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \end{cases}$$

решение которой будем искать в пространстве симметричных матриц из $\mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. При этом, задача Коши переписывается в форме (2.1.3), а система (2.2.13) принимает вид (2.1.9).

Предложение 2.2.3. *Из предположения* **A** *вытекает, что для задачи Коши* (2.1.3) *решение* $S(t)$ *существует в* ϵ_1*-окрестности нуля.*

Доказательство. Действительно, из предположения **A** вытекает существование предела $\lim\limits_{t\to 0} S'(t) = \dfrac{1}{2}(F_0 + F_0^T)$, т.е.

$$S'(t) = \frac{1}{2}(F_0 + F_0^T) + o(1)$$

. Это означает, что

$$S(t) = \frac{1}{2}t(F_0 + F_0^T) + K(t), \tag{2.2.16}$$

где $K(t) = (k_{ij}(t))$ — симметричная матрица, причем $k_{ij}(t) = o(t)$ при $t \to 0$, то есть существует $\epsilon_1 > 0$, такое что имеет место представление (2.2.16). □

Определение 2.2.1. *Система вида* (2.2.13) *называется* ***системой типа Риккати***.

Подробнее о различных видах уравнений Риккати можно прочитать, например, в [59], [56] и [15].

Следствие 2. *Пусть четверка* $S(t)$, $q(t)$, $r(t)$ *и* $\psi(t)$ *удовлетворяет системе* (2.1.9)*. Тогда замена неизвестной функции* (2.2.9) *из условия Леммы* 2.2.1 *с функцией* ρ *вида* (2.2.12) *(при условии* $\widetilde{r}(t) = r(t) +$

$i\psi(t)$) в "комплексном уравнении второго порядка" (2.1.1) *приводит к новому уравнению*

$$-i\hbar\frac{\partial v}{\partial t} = -\left\langle \frac{1}{2}A, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\rangle - \frac{i}{\hbar}\left\langle \widehat{B}x + \widehat{c}, \frac{\partial v}{\partial x}\right\rangle, \tag{2.2.17}$$

в котором $\widehat{B} = 2AS + \hbar B$ и $\widehat{c} = Aq + \hbar c$.

В качестве обоснования формул для $\widehat{B}$ и $\widehat{c}$ вспомним, что функция ρ вида (2.2.12) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} = \frac{i}{\hbar}(2Sx + q).$$

2.2.4 Система типа Риккати с особенностью

Пусть $u(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ — функция класса $C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C})$, удовлетворяющая "комплексному уравнению второго порядка" (2.1.1).

Целью этого параграфа является нахождение решения этого уравнения не в форме (2.2.12), а в следующем виде:

$$u(t,x) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(x^T P^{-1}(t)x + q^T(t)x + \widetilde{r}(t)\right)\right\}, \tag{2.2.18}$$

где P^{-1} — симметричная матрица. Отличие от "стандартной" формы (2.2.12) заключается в изменении симметричной матрицы $S(t)$ квадратичной формы на некоторую симметричную обратную матрицу $P^{-1}(t)$. Чтобы найти решение уравнения (2.1.1) в форме (2.2.18), воспользуемся Леммой 2.2.2. При этом мы получим систему

$$\begin{cases} (P^{-1})' = \dfrac{2}{\hbar^2}P^{-1}AP^{-1} + \dfrac{1}{\hbar}\left(P^{-1}B + B^TP^{-1}\right) + \dfrac{1}{2}(F + F^T), \\ q' = \dfrac{1}{\hbar^2}\left(2P^{-1}A + \hbar B^T\right)q + \dfrac{2}{\hbar}P^{-1}c + g, \\ \widetilde{r}' = \dfrac{1}{2\hbar^2}q^TAq + \dfrac{1}{\hbar}\left(q^Tc - i\operatorname{tr}\left(AP^{-1}\right)\right) + h. \end{cases} \tag{2.2.19}$$

Предложение 2.2.4. *Пусть элементы обратимой матрицы* $P(t)$ *дифференцируемы. Тогда элементы обратной матрицы* $P^{-1}(t)$ *также дифференцируемы, причем выполнено соотношение*

$$(P^{-1}(t))' = -P^{-1}(t)P'(t)P^{-1}(t). \tag{2.2.20}$$

Доказательство. В самом деле, каждый элемент матрицы $P^{-1}(t)$ может быть выражен как взятое с надлежащим знаком отношение двух многочленов от элементов матрицы $P(t)$: алгебраического дополнения, соответствующего выбранному элементу, и определителя матрицы $P(t)$, отличного от нуля в силу ее невырожденности. Поэтому элементы обратной матрицы $P^{-1}(t)$ дифференцируемы.

Рассмотрим тождество $P(t)P^{-1}(t) \equiv E$. Продифференцировав его по t, мы получим соотношение

$$P'(t)P^{-1}(t) + P(t)(P^{-1}(t))' = 0,$$

из которого немедленно следует (2.2.20). □

Нетрудно показать, что функция $u(t,x)$ вида (2.2.18) представима также в виде

$$u(t,x) = \widetilde{C}(t) \cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\langle P^{-1}(t)(x - m(t)), (x - m(t))\rangle\right\}, \tag{2.2.21}$$

где коэффициенты $\widetilde{C}(t)$ и $m(t)$ задаются следующим образом:

$$m = -\frac{1}{2}Pq, \tag{2.2.22}$$

$$\widetilde{C} = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\widetilde{r} - \frac{1}{4}\langle Pq, q\rangle\right)\right\}. \tag{2.2.23}$$

Замечание 2.2.1. *Невырожденность матрицы* P^{-1} *в окрестности нуля следует из утверждения* 1.2.6.

Положим $\widetilde{B} = -B^T$.

Лемма 2.2.3. *Функция* $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ *вида* (2.2.21) *есть решение уравнения "второго порядка"* (2.1.1) *в том и только том случае, если ее коэффициенты* $P(t)$, $m(t)$ *и* $\widetilde{C}(t)$ *удовлетворяют уравнениям*

$$\begin{cases} P' = -\frac{1}{2}P\left(F+F^T\right)P + \frac{1}{\hbar}\left(P\widetilde{B} + \widetilde{B}^T P\right) - \frac{2}{\hbar^2}A, \\ m' = -\frac{1}{2}P\left(F+F^T\right)m + \frac{1}{\hbar}\left(\widetilde{B}^T m - c\right) - \frac{1}{2}Pg, \\ \widetilde{C}' = \widetilde{C}\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{i}{\hbar}tr\left(AP^{-1}\right) + \frac{1}{2}\left\langle\left(F+F^T\right)m, m\right\rangle + \langle g, m\rangle + h\right). \end{cases} \tag{2.2.24}$$

Доказательство. С помощью формулы для производной обратной матрицы (2.2.20) преобразуем первое уравнение системы (2.2.19). Имеем

$$-P^{-1}P'P^{-1} = \frac{2}{\hbar^2}P^{-1}AP^{-1} + \frac{1}{\hbar}\left(P^{-1}B + B^T P^{-1}\right) + \frac{1}{2}(F+F^T).$$

Умножив обе части этого равенства слева и справа на матрицу P, получим первое уравнение системы (2.2.24). Далее, продифференцировав тождество (2.2.22), получаем

$$m' = -\frac{1}{2}\left(P'q + Pq'\right).$$

Подставляя выражения для P' и q' из систем (2.2.24) и (2.2.19) соответственно, получаем

$$\begin{aligned} m' &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}P\left(F+F^T\right)Pq + \frac{1}{\hbar}\widetilde{B}^T Pq + \frac{2}{\hbar}c + Pg\right) = \\ &= -\frac{1}{2}P\left(F+F^T\right)m + \frac{1}{\hbar}\left(\widetilde{B}^T m - c\right) - \frac{1}{2}Pg. \end{aligned}$$

Тем самым получили второе уравнение системы (2.2.24). Наконец, дифференцируя тождество (2.2.23), выводим

$$\widetilde{C}' = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\widetilde{r} - \frac{1}{4}\langle Pq, q\rangle\right)\right\}\cdot\frac{i}{\hbar}\left(\widetilde{r} - \frac{1}{4}\langle Pq, q\rangle\right)' = \widetilde{C}\frac{i}{\hbar}\left(\widetilde{r} - \frac{1}{4}\langle Pq, q\rangle\right)'.$$

Но $(\langle Pq,q\rangle)' = \langle P'q,q\rangle + 2\langle Pq,q'\rangle$ в силу симметрии матрицы P, откуда

$$\widetilde{C}\,' = \widetilde{C}\cdot\frac{i}{\hbar}\left(\widetilde{r}\,' - \frac{1}{4}\langle P'q,q\rangle - \frac{1}{2}\langle Pq,q'\rangle\right).$$

Подставляя в последнее равенство выражения для P', q' и $\widetilde{r}\,'$ из систем (2.2.24) и (2.2.19) соответственно, получаем

$$\begin{aligned}\widetilde{C}\,' &= \widetilde{C}\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{i}{\hbar}\mathrm{tr}\left(AP^{-1}\right) + \frac{1}{8}\left\langle P\left(F+F^T\right)Pq,q\right\rangle - \frac{1}{2}\langle Pg,q\rangle + h\right) = \\ &= \widetilde{C}\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{i}{\hbar}\mathrm{tr}\left(AP^{-1}\right) + \frac{1}{2}\left\langle\left(F+F^T\right)m,m\right\rangle + \langle g,m\rangle + h\right),\end{aligned}$$

что обосновывает третье уравнение системы (2.2.24). □

Определение 2.2.2. *Система вида* (2.2.24) *называется* ***системой типа Риккати с особенностью****.*

Предложение 2.2.5. *Из предположения* **A** *вытекает, что решение* $P(t)$ *задачи Коши* (2.1.2) *существует в* ϵ_2*-окрестности нуля.*

Доказательство. Действительно, из предположения **A** вытекает существование предела $\lim\limits_{t\to 0} P'(t) = -\dfrac{2}{\hbar^2}A_0$, т.е.

$$P'(t) = -\frac{2}{\hbar^2}A_0 + o(1)$$

. Это означает, что

$$P(t) = -\frac{2t}{\hbar^2}A_0 + \frac{1}{\hbar^2}R(t), \tag{2.2.25}$$

где $R(t) = (r_{kl}(t))$ — симметричная матрица, причем $r_{kl}(t) = o(t)$ при $t\to 0$, то есть существует $\epsilon_2 > 0$ такое, что имеет место представление (2.2.25). □

Замечание 2.2.2. *Заметим, что* $\epsilon_2 \le \epsilon_1$ *и постоянная* ε *из предположения* **A** *равна* ϵ_2*.*

2.2.5 Дополнительные рассуждения

Имеют место следующие утверждения.

Предложение 2.2.6. *Функция* $v \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ *вида* (2.2.21) *является решением уравнения* (2.2.17) *тогда и только тогда, когда при замене* $\widetilde{C}(t) = C(t) + i\zeta(t)$ *ее коэффициенты удовлетворяют системе* (2.1.10).

Доказательство очевидно в силу Леммы 2.2.3.

Предложение 2.2.7. *Матрица* $P(t)$ *является отрицательно определенной в некоторой окрестности нуля.*

Доказательство. Пусть $\lambda_0 > 0$ — наименьшее собственное значение матрицы A_0, тогда в силу предположения **A** выполняется неравенство

$$\langle A_0 x, x\rangle \geq \lambda_0 \langle x, x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Выберем $t_0 \in \mathbb{R}_+$ настолько малым, чтобы для всех $t \in (0, t_0)$ выполнялась оценка

$$|r_{kl}(t)| < \frac{1}{2}\lambda_0 t,$$

где $R(t) = (r_{kl}(t))$ определена в (2.2.25). Тогда, очевидно, при $t \in (0, t_0)$ имеет место неравенство

$$|\langle R(t)x, x\rangle| \leq \frac{1}{2}\lambda_0 t \langle x, x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Но в силу (2.2.25) имеем

$$\langle P(t)x, x\rangle = -\frac{2t}{\hbar^2}\langle A_0 x, x\rangle + \frac{1}{\hbar^2}\langle R(t)x, x\rangle.$$

Отсюда, комбинируя два последних неравенства, заключаем, что при $t \in (0, t_0)$ верна оценка

$$\langle P(t)x, x\rangle \leq -\frac{3}{2\hbar^2}\lambda_0 t \langle x, x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Следовательно, при $t \in (0, t_0)$ для всех $x \neq 0$ выполнено неравенство $\langle P(t)x, x\rangle < 0$, то есть матрица $P(t)$ отрицательно определена на интервале $(0, t_0)$, и все ее собственные значения на указанном интервале отрицательны. $\square$

Предложение 2.2.8. *Имеет место равенство* $\lim\limits_{t\to 0} I(t) = 1$, *где*

$$I(t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}(C(t)+i\zeta(t))\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left\langle P^{-1}(t)(x-m(t;y)),(x-m(t;y))\right\rangle\right\}dx_1\ldots dx_n$$

и $P(t)$, $m(t;y)$ *суть решения двух первых уравнений системы* (2.1.10) *с начальными условиями* $P_{ij}(0) = 0$ *для* $\forall i, j \in \overline{1, n}$, $m(0) = y$, *а* $C(t)$ *и* ζ *суть частные решения третьего и четвёртого, соответственно, уравнений системы* (2.1.10) *вида*

$$C(t) = \zeta(t) = \frac{\sqrt{\hbar^n}}{\sqrt{2i(-2i)^n(\pi t)^n \det A_0}}\ \exp\left\{-\frac{n}{2}\int\limits_0^t \frac{\widetilde{q}(s)}{s}ds\right\}.$$

Доказательство. Положим $\nu(t) = \ln C(t)$ и $\mu(t) = \ln \zeta(t)$. Эта замена приводит третье и четвертое уравнения системы (2.1.10) к виду

$$\nu'(t) = \frac{1}{\hbar^2}\mathrm{tr}(AP^{-1}), \qquad \mu'(t) = \frac{1}{\hbar^2}\mathrm{tr}(AP^{-1}). \tag{2.2.26}$$

Для (2.1.5) имеем $Q(t) = (q_{kl}(t))$, причем $q_{kl}(t) = o(1)$ при $t \to 0$. Кроме того, из (2.2.25) следует, что

$$P(t) = -\frac{2t}{\hbar^2}[E + Q(t)]A_0. \tag{2.2.27}$$

Следовательно,

$$P^{-1}(t) = -\frac{\hbar^2}{2t}A_0^{-1}[E + Q(t)]^{-1} = -\frac{\hbar^2}{2t}A_0^{-1}[E + \overline{Q}(t)],$$

где $\overline{Q}(t) = (\overline{q}_{kl}(t))$ задана в (2.1.6). Матрица $\overline{Q}(t)$ существует в силу предположения **A**.

При этом, $\overline{q}_{kl}(t) = o(1)$ при $t \to 0$ (см., например, [5]).

Положим теперь $W(t) = A(t)P^{-1}(t)$. Тогда имеем

$$-\frac{2t}{\hbar^2}W(t) = A(t)A_0^{-1}[E + \overline{Q}(t)] = [A_0 + (A(t) - A_0)]A_0^{-1}[E + \overline{Q}(t)] =$$
$$= E + \overline{Q}(t) + (A(t) - A_0)A_0^{-1}[E + \overline{Q}(t)] = E + \widetilde{Q}(t),$$

где $\widetilde{Q}(t) = (\widetilde{q}_{kl}(t))$ задана в (2.1.7), причем $\widetilde{q}_{kl}(t) = o(1)$ при $t \to 0$ в силу предположения **A**.

С учетом данных обозначений преобразуем правую часть уравнения (2.2.26):

$$\frac{1}{\hbar^2}\operatorname{tr}\left(AP^{-1}\right) = \frac{1}{\hbar^2}\operatorname{tr}W(t) = -\frac{\hbar^2}{2t\hbar^2}\operatorname{tr}\left(E + \widetilde{Q}(t)\right) = -\frac{n}{2t}\left(1 + \widetilde{q}(t)\right),$$

где $\widetilde{q}(t)$ задан в (2.1.8), причем $\widetilde{q}(t) = o(1)$ при $t \to 0$ (в силу определения и свойств матрицы $\widetilde{Q}(t)$). Уравнения (2.2.26) примут вид

$$\begin{aligned} \nu'(t) &= -\frac{n}{2t}(1 + \widetilde{q}(t)), \\ \mu'(t) &= -\frac{n}{2t}(1 + \widetilde{q}(t)). \end{aligned} \tag{2.2.28}$$

Функции $\nu_0(t)$, $\mu_0(t)$, заданные равенством

$$\nu_0(t) = \mu_0(t) = -\frac{n}{2}\ln t - \frac{n}{2}\int\limits_0^t \frac{\widetilde{q}(s)}{s}ds,$$

очевидно, являются их частными решениями. Таким образом, общие решения уравнений (2.2.28) суть

$$\begin{aligned} \nu(t) &= \nu_0(t) + N_0, \\ \mu(t) &= \nu_0(t) + M_0, \end{aligned}$$

где $N_0, M_0 \in \mathbb{R}$. Как следствие получаем, что

$$\begin{aligned} \nu(t) &= N_0 - \frac{n}{2}\ln t + o(1), \\ \mu(t) &= M_0 - \frac{n}{2}\ln t + o(1) \end{aligned} \tag{2.2.29}$$

при $t \to 0$.

Следовательно, решения третьего и четвертого уравнений системы (2.1.10) суть функции

$$C(t) = C_0 \exp \nu_0(t), \quad C_0 = \exp N_0 > 0,$$

$$\zeta(t) = \zeta_0 \exp \nu_0(t), \quad \zeta_0 = \exp M_0 > 0.$$

Пусть интеграл $I(t)$ задан в условии утверждения, тогда из (2.2.5) и (2.2.23) очевидно вытекает, что

$$I(t) = \big(C(t) + i\zeta(t)\big)\,(1-i)^n \left(\frac{\pi\hbar}{2}\right)^{n/2} |\det P(t)|^{1/2}$$

(независимо от значения $y \in \mathbb{R}^n$). Предполагая, что $M_0 = N_0$, получаем

$$\ln I(t) = \nu(t) + \ln\Big((1+i)(1-i)^n\Big) + \frac{n}{2}\ln\left(\frac{\pi\hbar}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln|\det P(t)|. \quad (2.2.30)$$

Кроме того, из представления (2.2.27) легко видеть, что

$$|\det P(t)| = \left(\frac{2t}{\hbar^2}\right)^n \det A_0 \cdot (1 + o(1)). \quad (2.2.31)$$

На основании (2.2.29) и (2.2.31) из (2.2.30) получаем

$$\begin{aligned} \ln I(t) = & N_0 - \frac{n}{2}\ln t + \ln\Big((1+i)(1-i)^n\Big) + \frac{n}{2}\ln\left(\frac{\pi\hbar}{2}\right) + \\ & + \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{2t}{\hbar^2}\right)^n \det A_0(1+o(1))\right) + o(1) = \\ & = N_0 + \ln\sqrt{2i(-2i)^n\left(\frac{\pi}{\hbar}\right)^n \det A_0} + o(1). \end{aligned}$$

Если теперь выбрать значение константы N_0, положив

$$N_0 = -\ln\sqrt{2i(-2i)^n\left(\frac{\pi}{\hbar}\right)^n \det A_0},$$

то мы получим, что

$$\lim_{t\to 0} I(t) = 1.$$

Подставляя полученные выражения в функции $C(t)$ и $\zeta(t)$, завершаем доказательство теоремы. $\square$

Составим функцию

$$G(t,x;y) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},$$

$$G(t,x;y) = (1+i)C(t) \cdot \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \langle P^{-1}(t)(x - m(t;y)), (x - m(t;y))\rangle \right\}.$$

где $P(t)$, $m(t)$ и $C(t)$ удовлетворяют условию утверждения 2.2.8.

Лемма 2.2.4. *Пусть $\phi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – функция класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Пусть также*

$$f(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(y) G(t,y;x) dy,$$

тогда $f(t,x) \to \phi(x)$ при $t \to 0$.

Доказательство. Для произвольным образом фиксированного момента времени $t > 0$ матрица $P = P(t)$ симметрична и отрицательно определена (по построению и в силу утверждения 2.2.7 и утверждения 2.2.5), поэтому существует такая ортогональная матрица $O : O^{-1} = O^T$, что

$$O^T P(t) O = \Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\},$$

причем все числа λ_k отрицательны.

Обозначим символом $\sqrt{-\Lambda}$ матрицу $\mathrm{diag}\{\sqrt{-\lambda_1}, \dots, \sqrt{-\lambda_n}\}$, а символом $\sqrt{-P(t)}$ матрицу $O\sqrt{-\Lambda}O^T$ и сделаем замену переменных $y =$

$\sqrt{-P(t)}z + m(t;x)$ в интеграле

$$f(t,x) = (1+i)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\phi(y)C(t)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\langle P^{-1}(t)(y-m(t;x)),(y-m(t;x))\rangle\right\}dy =$$

$$= (1+i)\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^n}\phi(y)C(t)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left\langle O\sqrt{-\Lambda}O^T O\Lambda^{-1}O^T O\sqrt{-\Lambda}O^T z, z\right\rangle\right\}d\left(O\sqrt{-\Lambda}O^T z\right) =$$

$$= (1+i)\int\limits_{\mathbb{R}^n}C(t)\phi\left(\sqrt{-P(t)}z + m(t;x)\right)\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\langle z,z\rangle\right\}\cdot|\det P(t)|^{1/2}dz =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi\hbar}\right)^{n/2}\frac{1}{(1-i)^n}\, I(t)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\phi\left(\sqrt{-P(t)}z + m(t;x)\right)\exp\{-\frac{i}{\hbar}\langle z,z\rangle\}dz.$$

Последний интеграл стремится к $\left(\dfrac{\pi\hbar}{2}\right)^{n/2}(1-i)^n\,\phi(x)$ в силу утверждения 2.2.1 и того, что $P(t)\to 0$ и $m(t;x)\to x$ при $t\to 0$. Таким образом, $f(t,x)\to\phi(x)$ при $t\to 0$ в силу утверждения 2.2.8. $\square$

§ 2.3. Доказательство основной теоремы

Доказательство Теоремы 2. Представим решение задачи Коши (2.1.11) в виде произведения

$$u(t,x) = \rho(t,x)v(t,x).$$

Тогда в силу Следствия 2 задача распадается на две подзадачи

$$\begin{cases} -i\hbar\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = \widehat{\mathfrak{L}}[\rho], \\ \rho|_{t=0} = 1, \end{cases} \tag{2.3.1}$$

и

$$\begin{cases} -i\hbar\dfrac{\partial v}{\partial t} = \mathfrak{F}[v], \\ v|_{t=0} = \delta_y(x), \end{cases} \tag{2.3.2}$$

где оператор $\widehat{\mathfrak{L}}$ есть оператор “второго порядка”, а $\mathfrak{F}$ — оператор, соответствующей правой части уравнения (2.2.17).

В силу Леммы 2.2.2 существует решение $\rho(t,x)$ задачи (2.3.1) вида (2.2.12), где $S(t)$, $q(t)$, $r(t)$ и $\psi(t)$ суть решения системы уравнений (2.1.9) с начальными условиями $S_{ij}(0) = q_k(0) = r(0) = \psi(0) = 0$ для $\forall i,j,k \in \overline{1,n}$.

Далее, в силу утверждения 2.2.6, существует функция $v(t,x)$ вида (2.2.21), где $P(t)$, $m(t)$, $C(t)$ и $\zeta(t) \equiv C(t)$ суть решения системы уравнений (2.1.10). Из Леммы 2.2.4 следует, что при начальных условиях $P_{ij}(0) = 0$ для $\forall i,j \in \overline{1,n}$, $m(0) = y$ и

$$C(1) = \frac{\sqrt{\hbar^n}}{\sqrt{2i(-2i)^n \pi^n \det A_0}} \ \exp\left\{ -\frac{n}{2} \int\limits_0^1 \frac{\widetilde{q}(s)}{s} ds \right\}$$

функция $v(t,x) \to \delta_y(x)$ при $t \to 0$.

Очевидно, что при указанных начальных условиях на $S(t)$, $q(t)$, $r(t)$, $\psi(t)$, $P(t)$, $m(t)$ и $C(t)$ произведение $\rho(t,x)v(t,x)$ также стремится к $\delta_y(x)$ при $t \to 0$.

Теорема доказана. $\square$

Глава 3

Фундаментальные решения уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова и Шрёдингера в прикладных задачах

В этой главе приводятся примеры применения полученных результатов. Рассматриваются задачи, в которых появляются уравнения, изученные в первых двух главах. Для этих задач строятся аналогичным образом фундаментальные решения, которые используются для построения решений. Все примеры взяты из существующей литературы и не принадлежат автору.

§ 3.1. Линейно–квадратичная задача оптимального регулирования с произвольным терминальным членом.

3.1.1 Введение

Рассмотрим задачу оптимального регулирования (см., например, [11]). Имеем

$$\begin{cases} \mathbf{M}\left(\int\limits_0^T (B(t)\xi,\xi)dt + \alpha\int\limits_0^T (\overline{u},\overline{u}dt)\right) + \mathbf{M}\Phi(\xi(T)) \longrightarrow \min, \\ d\xi = (a(t)\xi+\overline{u})dt + \sigma d\varpi,\ \xi(0)=0. \end{cases}$$

Уравнение Беллмана и терминальное условие для нее имеют вид

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial t} = \inf\limits_u \left\{ \left(\left(a(t)\overline{x}+\overline{u}\right), \nabla_x V \right) + \dfrac{1}{2}\sigma^2\Delta_x V + (B(t)\overline{x},\overline{x}) + \alpha(\overline{u},\overline{u}) \right\}, \\ V(T,x) = \Phi(x). \end{cases}$$

Если минимизировать $\left(u, \dfrac{\partial V}{\partial x}\right) + \alpha|u|^2 \to \min$, то $\overline{u}^* = -\dfrac{1}{2\alpha}\nabla_x V$ и, следовательно, уравнение Беллмана приобретает следующую форму:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial t} = \left(\left(a(t)\overline{x} - \dfrac{1}{2\alpha}\nabla_x V\right), \nabla_x V\right) + \dfrac{1}{2}\sigma^2\Delta_x V + \\ \qquad + (B(t)\overline{x},\overline{x}) + \alpha(\nabla_x V, \nabla_x V), \\ V(T,x) = \Phi(x). \end{cases}$$

Замена $v = \dfrac{1}{\theta}\ln W$, $\theta = -\dfrac{1}{2\alpha\sigma^2}$ “линеаризует” уравнение Беллмана. А именно,

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial W}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\sigma^2\Delta_x W + (a(t)x, \nabla_x W) + (\theta B(t)x, x)W, \\ W(T,x) = \exp(\theta\Phi(x)). \end{cases}$$

Для каждого уравнения можно построить решение в квадратурах с помощью нашего метода. Следовательно,

$$u^* = -\frac{1}{2\alpha}\nabla_x\left(\frac{1}{\theta}\ln W\right)$$

есть явное решение нашей задачи при произвольном (не обязательно линейно–квадратичном) терминальном члене.

3.1.2 Постановка задачи и результат

В этой части работы мы приводим результаты неопубликованной статьи А.Асекова "Явное решение линейно–квадратичной задачи оптимального регулирования с произвольным терминальным членом". Задача отпимального регулирования с линейно–квадратичным функционалом и линейно–квадратичным терминальным членом хорошо изучена (например, см. [11]), оптимальное управление построено в явном виде. В настоящей работе рассматривается линейно–квадратичная задача оптимального регулирования, с терминальным членом в функционале произвольного (не обязательно задаваемого линейно–квадратичной функцией) вида и доказывается, что в этом случае управление также можно построить в явной аналитической форме.

Рассмотрим задачу оптимального регулирования

$$\begin{aligned} J = \mathbf{M}\Big[\int_0^T \langle (N_1(t)\xi,\xi) + 2\xi N(t)u + (N_0(t)u,u)+ \\ +2h_1\xi + 2h_2 u\rangle dt + \Phi(\xi(T))\Big] \to \min, \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

где N_i — заданные неотрицательно определенные симметричные матрицы размера $n\times n$, h_i — некоторые заданные векторы, $u=(u_1,...,u_n)$ — искомое управление. Процесс $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению $d\xi=(a(t)\xi+u)dt+\sigma d\omega$ с начальным условием $\xi(0)=\xi_0=(\xi_1^0,\dots,\xi_n^0)$. $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n)$ — винеровский процесс с независимыми компонентами, $a(t)$ — вектор размерности n, $\sigma=(\sigma_{ij})$ — матрица размерности $n\times n$.

Уравнение Беллмана и терминальное условие для данной задачи имеют вид

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial t} = \inf\limits_{u\in\mathbb{R}^n}\{((a(t)x+u)\,,\nabla_x V) + 2xNu + 2h_1x+ \\ \quad + 2h_2u + \dfrac{1}{2}Tr(\sigma^T H_x(V)\sigma) + (N_1x,x) + (N_0u,u)\}, \\ V(T,x) = \Phi(x). \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Задача отыскания минимума в правой части уравнения сведется к конечномерной линейно–квадратичной задаче, а именно

$$\left(u, \frac{\partial V}{\partial x}\right) + 2xNu + (N_0u,u) + 2h_2u \to \min, \quad u\in\mathbb{R}^n,$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} n_{0_{ii}}u_i^2 + \sum_{i\neq j}^{n} n_{0_{ij}}u_iu_j + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial V}{\partial x} + 2Nx + 2h_2\right]_i u_i \to \min, \quad u\in\mathbb{R}^n. \tag{3.1.3}$$

Пусть u^* — решение экстремальной задачи (3.1.3). Положим $Y = \dfrac{\partial V}{\partial x} + 2Nx + 2h_2$. Для нахождения минимума необходимо решить систему линейных уравнений.

$$2N_0u^* = -Y,$$

следовательно $u^* = MY$ где $M = -(2N_0)^{-1}$, или

$$u^* = -(2N_0)^{-1}[\nabla_x V + 2Nx + 2h_2]. \tag{3.1.4}$$

Тогда уравнение Беллмана примет вид

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial t} = (a(t)x, \nabla_x V) + (MY, \nabla_x V) + 2xNMY + 2h_1x+ \\ +2h_2MY + (N_1x,x) + (N_0MY, MY) + \dfrac{1}{2}Tr(\sigma^T H_x(V)\sigma), \\ V(T,x) = \Phi(x). \end{cases} \tag{3.1.5}$$

или

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial t} = (a(t)x, \nabla_x V) + (M\nabla_x V + 2MNx + 2Mh_2, \nabla_x V) + \\ +2(MNx, \nabla_x V + 2Nx + 2h_2) + 2h_1 x + \\ +2(M\nabla_x V + 2MNx + 2Mh_2, h_2) + (N_1 x, x) + \\ +(MN_0 M\nabla_x V + 2MN_0 MNx + 2MN_0 Mh_2, \nabla_x V + 2Nx + 2h_2) + \\ +\dfrac{1}{2}Tr(\sigma^T H_x(V)\sigma), \\ V(T,x) = \Phi(x). \end{cases}$$

Обозначим $K = MN_0M$. Тогда

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial t} = {} & (M\nabla_x V, \nabla_x V) + (K\nabla_x V, \nabla_x V) + (a(t)x, \nabla_x V) + \\ & + 2(2MNx + Mh_2, \nabla_x V) + 2(M\nabla_x V, h_2) + 4(K\nabla_x V, h_2) + \\ & + 4(K\nabla_x V, Nx) + 2h_1 x + 4(2MNx + Mh_2, h_2) + \\ & + 4(MNx, Nx) + (N_1 x, x) + 4(KNx, Nx) + 4(Kh_2, h_2) + \\ & + 8(KNx, h_2) + \frac{1}{2}Tr(\sigma^T H_x(V)\sigma). \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Введем также обозначения $L = a(t)x + 4MNx + 4Mh_2 + 4Kh_2 + 4KNx$, $S = 2h_1x + 4(2MNx + Mh_2, h_2) + 4(MNx, Nx) + (N_1x, x) + 4(KNx, Nx) + 4(Kh_2, h_2) + 8(KNx, h_2)$. Полагая также $V = \dfrac{1}{\theta} lnW$ в уравнении (3.1.6), получим

$$-\frac{1}{\theta}\frac{1}{W}\frac{\partial W}{\partial t} = \sum_{i,j} m_{ij}\frac{1}{\theta^2}\frac{1}{W^2}\frac{\partial W}{\partial x_i}\frac{\partial W}{\partial x_j} - \sum_i \frac{1}{\theta}\frac{1}{W} L \frac{\partial W}{\partial x_i} +$$

$$+\frac{1}{\theta}\frac{1}{W}\frac{1}{2}Tr(\sigma^T H_x(V)\sigma) - \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \frac{1}{\theta}\frac{1}{W^2}\sigma_{ij}^2 \left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)^2 -$$

$$\sum_{i,j,i\neq j}\sum_k \frac{1}{\theta}\frac{1}{W^2}\sigma_{ik}\sigma_{kj}\frac{\partial W}{\partial x_i}\frac{\partial W}{\partial x_j} + S + \sum_{i,j} k_{ij}\frac{1}{\theta^2}\frac{1}{W^2}\frac{\partial W}{\partial x_i}\frac{\partial W}{\partial x_j}.$$

Здесь k_{ij}, m_{ij} — элементы матриц K и M соответственно. Поставим вопрос: при каком значении параметра θ полученное уравнение будет линейным?

Чтобы линеаризовать уравнение с помощью приведенной замены коэффициент при произведении $\dfrac{\partial W}{\partial x_i}\dfrac{\partial W}{\partial x_j}$ и коэффициент при слагаемом $\left(\dfrac{\partial W}{\partial x_i}\right)^2$ должны равняться нулю. Будем предполагать, что матрица σ — диагональная матрица, тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\theta}\dfrac{1}{W}(m_{ij}+k_{ij}) = 0, \text{ где } i,j = 1,\ldots,n, i \neq j, \\ \dfrac{1}{\theta}\dfrac{1}{W^2}\left(\dfrac{1}{\theta}m_{ii} + \dfrac{1}{2}\sigma_{ii}^2 + \dfrac{1}{\theta}k_{ii}\right) = 0, \text{ где } i = 1,\ldots,n. \end{cases} \tag{3.1.7}$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$2\theta\sigma^2 N_0 = E,$$

т.е. матрица $\sigma^2 N_0$ должна быть пропорциональна единичной матрице ($\sigma^2 N_0 = \alpha E$), тогда, очевидно, $\theta = \dfrac{1}{2\alpha}$. Мы получили следующее предложение.

Предложение: Пусть σ - диагональная матрица, и $\sigma^2 N_0 = \alpha E$ и $\theta = \dfrac{1}{2\alpha}$. Тогда, замена $V = \dfrac{1}{\theta}lnW$ в уравнении (3.1.5), приводит к задаче Коши (с терминальным условием) для линейного уравнения

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial W}{\partial t} = (L, \nabla_x W) + \dfrac{1}{2}\sum\limits_i \sigma_{ii}^2 \dfrac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} + \theta S W, \\ W(T) = e^{\theta\Phi(x)}. \end{cases} \tag{3.1.8}$$

Задача (3.1.8) — задача Коши для параболического дифференциального уравнения с полиномиальными коэффицентами. Коэффиценты при операторе второго порядка постоянны, при операторе первого порядка — линейны по пространственным переменным, а потенциал —

линейно–квадратичный по пространственным переменным. Известно (см., например, [72], [75]), что данная задача имеет решение в квадратурах, $W(x,t) = \mathcal{E}\left[e^{\theta\Phi(x)}\right](x,t)$, где $\mathcal{E}$ — оператор, ставящий в соответствие начальному условию решение задачи Коши в момент времени t, аналогичный свертке с ядром Пуассона в случае уравнения теплопроводности.

Для определения оператора $\mathcal{E}$ в явном виде рассмотрим задачу Коши.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = (L, \nabla_x u) + \dfrac{1}{2}\sum\limits_i \sigma_{ii}^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \theta S u, \\ u(0) = \delta_y(x), \end{cases} \tag{3.1.9}$$

где $\delta_y(x)$ — дельта функция с носителем в точке y.

Можно показать по аналогии с [72] и [75], что решение данной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} u(t,x,y) = \exp\left\{x^T S(t) x + q^T(t) x + r(t)\right\} \cdot \\ \cdot C(t) \exp\{\langle P^{-1}(t)(x - m(t,y)), (x - m(t,y))\rangle\}, \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

где $C(t)$, $S(t)$, $P(t)$, $m_y(t)$, $q(t)$, $r(t)$ — решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} S' = 2SAS + SB + B^T S + \frac{1}{2}(F + F^T), \\ q' = (2SA + B^T)q + 2Sc + g, \\ r' = tr(AS) + \frac{1}{2}q^T A q + q^T c + h, \end{cases} \tag{3.1.11}$$

$$\begin{cases} P' = -P(2AS + B^T) - (2AS + B)P - 2A, \\ m' = -(2AS + B)m - c - Aq, \\ C' = C(tr(AP^{-1})). \end{cases} \tag{3.1.12}$$

Здесь $A = (\sigma)_{ij}, B = a(t)x + 4MNx + 4KNx, c = 4Mh_2 + 4Kh_2, F = 4(MNx, Nx) + (N_1 x, x) + 4(KNx, Nx), g = 2h_1 x + 4(2MNx, h_2) + 8(KNx, h_2), h = 4(Mh_2, h_2) + 4(Kh_2, h_2)$.

Начальные значения для системы (3.1.11) есть $S(0) = 0$, $q(0) = 0$, $r(0) = 0$, для системы (3.1.12) $P(0) = 0$, $m(0) = y$, $C(t)$ есть частное решение уравнения вида

$$C(t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)^n det A(0)}} \exp\left\{ -\frac{n}{2} \int\limits_0^t \frac{\widetilde{q}(s)}{s} ds \right\},$$

где

$$\widetilde{q}(t) = \frac{1}{n} tr((E + Q(t))^{-1} - E + (A(t) - A(0))A(0)^{-1}(E + Q(t))^{-1}),$$

$$Q(t) = -\frac{1}{2t} R(t) A(0)^{-1},$$
$$R(t) = P(t) + 2tA(0),$$

при условии $\int\limits_0^\delta \frac{\widetilde{q}(s)}{s} ds < \infty$. $P(t)$ есть решение линейного матричного дифференциального уравнения $P' = -P(2AS+B^T)-(2AS+B)P-2A$ с начальным условием $P|_{t=0} = 0$.

Легко видеть, что в (3.1.12) решение уравнения для $m_y(t)$ зависит от начального условия y аффинно. Именно, если $m_1(t), \ldots, m_n(t)$ есть система решений для второго уравнения системы (3.1.11) без правой части с начальными условиями в виде единичных ортов $e_1, \ldots, e_n$, и $m_0(t)$ — решение неоднородного уравнения с нулевым начальным условием, то $m_y(t) = m_1(t)y_1 + \cdots + m_n(t)y_n + m_0(t)$.

Следовательно, искомое решение задачи (3.1.10) может быть представлено в виде

$$u(t, x, y) = \exp\left\{ x^T S(t) x + q^T(t) x + r(t) \right\} C(t) \cdot$$
$$\cdot \exp\left\{ \left\langle P^{-1}(t) \left(x - \sum_1^n m_i(t) y_i - m_0(t) \right), \left(x - \sum_1^n m_i(t) y_i - m_0(t) \right) \right\rangle \right\},$$

а значение оператора $\mathcal{E}[\omega](x,t)$ определяется по формуле:

$$\mathcal{E}[\omega](x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(t,x,y)\omega(y)dy \tag{3.1.13}$$

Основной результат настоящей работы можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема: Пусть σ — диагональная матрица, $\sigma^2 N_0 = \alpha E$, $\alpha > 0$ и функция $\Phi(y)$, определяющая "штрафное" терминальное слагаемое в функционале (3.1.1) принадлежит классу функций, для которых определен интеграл (3.1.13). Тогда оптимальное управление задачи (3.1.1) имеет вид

$$u^* = -(2N_0)^{-1}\left(\bigtriangledown_x\left(\frac{1}{\theta}\ln\mathcal{E}[e^{\theta\Phi(x)}]\right) + 2Nx + 2h_2\right).$$

С помощью приведенной теоремы можно свести задачу построения синтеза оптимального управления к интегрированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений и расчету интегралов.

§ 3.2. Задача о фильтрации сигналов

3.2.1 Введение

Рассмотрим задачу фильтрации (см., например, [6], [66], [8]), включающую систему стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} dx = f(x,t)dt + g(x,t)d\omega, \\ dy = h(x,t)dt + dW. \end{cases}$$

Предполагается, что $x(0)$ распределено с плотностью $p_0(x)$. Нужно оценить x по наблюдаемому изменению y.

Положим

$$\mathcal{L} = f_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}g_{ik}g_{jk}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Пусть $\rho(t,x)$ — решение уравнения Закая

$$\dot{\rho} = \left(\mathcal{L}^* - \frac{1}{2}|h(x)|^2\right)\rho + \left\langle h(x), \frac{dy}{dt}\right\rangle \rho(t,x)$$

с начальным условием $\rho(0,x) = p_0(x)$. Если исходные уравнения линейны, то данное уравнение это уравнение "второго порядка", приведённое в главе 1.

Положим

$$p(t,x) = \frac{\rho(t,x)}{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(t,x)dx}.$$

Тогда

$$\mathbf{M}(u(x)|y) = \int p(t,x)u(x)dx$$

есть оценка функции $u(x(t))$ по наблюдаемой траектории $y(t)$.

В частности, "отфильрованная" траектория $\widehat{x}(t)$ есть

$$\widehat{x}(t) = \int p(t,x)xdx.$$

3.2.2 Постановка задачи и основные утверждения

В этом параграфе показано (см. [6]), что фильтрация диффузионных процессов очень тесно связана с классической и квантовой механикой. Мы ассоциируем с задачей линейной или нелинейной фильтрации классическую гамильтонову систему и показываем, что исходная задача фильтрации абсолютно аналогична задаче квантования этой гамильтоновой системы. В частности, возникает следуюущий словарь с квантового на фильрационный язык:
Уравнение Шредингера — Уравнение Закая
Интегралы фейнмана — Формула Гирсанова
Уравнение Гейзенберга — Фильтр Калмана–Бьюси.

Излагаемый подход частично инспирирован работаи [26], [43], [73].

Задача фильтрации

Пусть частично наблюдаемый диффузионный процесс (x, y) описывается системой стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} dx = a(x,t)dt + b(x,t)dw, \quad x(S) = x_0, \\ dy = c(x,t)dt + dW, \quad y(s) = 0, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

$y \in Y = \mathbf{R}^m$, $x \in X = \mathbf{R}^n$ — наблюдаемая и ненаблюдаемая компоненты, w, W — независимые винеровские процессы, x_0 — независимый от w, W случайный вектор.

Задача состоит в том, чтобы вычислитьдля любой функции f условное математическое ожидание

$$E(f(x_t)|\mathfrak{F}_t) = E(f(x_t)|y^t),$$

где $y^t = y^t_s$ — наблюденнай траектория $\tau \mapsto y(\tau)$ при $\tau \in [s, t]$, а $\mathfrak{F}_t$ — σ–алгебра, порожденная случайными величинами $y(\tau)$. Иными словами, ищется измеримый функционал $\eta(y^t) = E(f(x_t)|y^t)$, который обеспечивает минимальное среднеквадратичное отклонение от истинного значения

$$E(f(x_t) - \eta(y^t))^2 \to \min .$$

Условное математическое ожидание — линейный и непрерывный (в метрике C) функционал от f со значениями в L_2. Поэтому можно корректно определить условную плотность $p(t, x)$ как обобщенную функцию уравнением

$$\int f(x)p(t,x)dx = E(f(x(t))|y^t). \tag{3.2.2}$$

Это некоторая вероятностная мера по x, измеримо зависящая от t и наблюденной траектории y^t. Таким образом, задача фильтрации состоит в вычислении условной плотности.

Классическая гамильтонова система

С задачей фильтрации (3.2.1) связана задача оптимального управления

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)udt, \quad x(s) = x_0,$$
$$I(u) = \int_s^t \left\{ \left(\frac{1}{2}|u|^2 + \frac{1}{2}|c(x)|^2 \right) dt - \langle c(x), dy \rangle \right\} \to \min, \tag{3.2.3}$$

dy — дифференциал наблюденной траектории, а на управление $u \in \mathbf{R}^l$ не наложено никаких ограничений, кроме сходимости интеграла $\int |u|^2 dt$. Эта задача детерминированная, хотя ее данные зависят от случайной наблюденной траектории.

Как будет видно из дальнейшего (см. (3.2.18)), смысл этой задачи состоит в том, чтобы найти наиболее вероятную траекторию, совместимую с наблюдением y.

Согласно принципу максимума, оптимальные траектории задачи (3.2.3) удовлетворяют гамильтоновой системе с гамильтонианом

$$H(x,p)dt = \max_u \left\{ \langle p, adt + budt \rangle - \frac{1}{2}|u|^2 dt - \frac{1}{2}|c|^2 dt + \langle c, dy \rangle \right\} =$$
$$= \frac{1}{2}|b^* p|^2 dt + \langle p, adt \rangle - \frac{1}{2}|c|^2 dt + \langle c, dy \rangle, \tag{3.2.4}$$

где b^* — транспонированная к b матрица.

Квантование: основные подходы

Процедура квантования классической системы — это эвристический принцип, который позволяет определить по Гамильтонову (как в (3.2.4)) или лагранжеву (как в (3.2.3)) описанию классической системы некоторую квантовой систему. Имеется несколько классических рецептов того, как это делать, которые мы вкратце обрисуем.

Модель Шрёдингера

Квантовый аналог классического вектора состояния — волновая функция $\psi \in \mathrm{L}_2(\mathbf{R}^n)$, эволюция которой описывается уравнением Шрёдингера

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathfrak{H}\psi, \tag{3.2.5}$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, а оператор Гамильтона $\mathfrak{H}$ формально получается из функции Гамильтона $H(x,p)$ подстановкой оператора умножения на x и дифференцирования $\dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$ вместо x и p:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{H} = \mathrm{Op}(H) = H(\mathrm{Op}(x), \mathrm{Op}(p)),\\ &(\mathrm{Op}(x)\psi)(x) = x\psi(x), \quad (\mathrm{Op}(p)\psi)(x) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial x}(x). \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Это описание процедуры квантования неоднозначное, поскольку операторы $\mathrm{Op}(x)$ и $\mathrm{Op}(p)$ не коммутируют. В задаче фильтрации эта неоднозначность соответствует неоднозначности выбора схемы стохастического интегрирования, например по Ито или Стратоновичу [45], [64].

Модель Фейнмана

Рассмотрим ядро $K(s,x;t,y)$ оператора эволюции

$$\int K(s,x;t,y)\psi(s,x)dx = \psi(t,y). \tag{3.2.7}$$

Для него выполнено прямое и обратное уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{i}\frac{\partial K}{\partial s} &= -H\left(x, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)K,\\ \frac{\hbar}{i}\frac{\partial K}{\partial t} &= H\left(y, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)K. \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Определим множество Ω управлений $u:\ [s,t] \to \mathbf{R}^n$ таких, что соответствующие траектории системы (3.2.3) соединяют точки x и y,

$$\Omega(s,x;t,y) = \{u : x(s) = x,\ x(t) = y\}. \tag{3.2.9}$$

“Явная” формула Фейнмана для ядра K имеет вид

$$K(s,x;t,y) = \int\limits_{\Omega(s,x;t,y)} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} I(u)\right\} d\lambda(u), \tag{3.2.10}$$

$I(u)$ — классическое действие для пути $x(t)$, а $d\lambda$ — «мера Лебега»,

$$d\lambda(u) = \prod_{\tau\in[s,t]} \frac{1}{(2\pi)^{l/2}} du(\tau). \tag{3.2.11}$$

Формула Фейнмана (3.2.10) не имеет строгого математического смысла. Фильтрационный аналог (3.2.10) строгий и получается из теоремы Гирсанова.

Модель Гейзенберга

Квантовый аналог классических наблюдаемых величин — линейные самосопряжённые операторы $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}(t)$. Их эволюция описывается уравнением Гейзенберга

$$\dot{\mathfrak{O}} = \frac{i}{\hbar}\left[\mathfrak{H}, \mathfrak{O}\right]. \tag{3.2.12}$$

Связь между картинами Шрёдингера и Гейзенберга состоит в том, что эволюция по Гейзенбергу (3.2.12) переводит аннулятор

$$\mathrm{Ann}\psi(s) = \{\mathfrak{O} : \mathfrak{O}\psi(s) = 0\}$$

волновой функции в момент s в аннулятор $\mathrm{Ann}\psi(t)$ волновой функции в момент t.

Фильтрация в сравнении с квантованием

Одно из основных достижений в теории фильтрации принадлежит М. Закаю [77], который обнаружил, что разумнее изучать ненормированный условную плотность $\rho(t,x)$, чем условную плотность $p(t,x)$. Плотность $\rho(t,x)$ определяется соотношением

$$\int f(x)\rho(t,x)dx = E_x\left(f(x(t))\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_s^t |c|^2 d\sigma + \int\limits_s^t \langle c, dy\rangle\right\}\right), \tag{3.2.13}$$

где $c = c(\sigma, x(\sigma))$. Математическое ожидание E_x в (3.2.13) берётся относительно ненаблюдаемой компоненты процесса (3.2.1), наблюденная траектория y^t считается параметром. Плотности p и ρ различаются только множителем, зависящим от времени:

$$p(t,x) = \rho(t,x)\left(\int\limits_{\mathbf{R}^n}\rho(t,y)dy\right)^{-1}. \tag{3.2.14}$$

Формулу (3.2.14) естественно называть формулой Гирсанова [45], поскольку она немедленно получается раз теоремы Гирсанова о связи между мерами, отвечающими процессам y и W. Важнейшая функция $\rho(s,x;t,y)$ соответствует ситуации, когда начальный вектор x_0 — детерминированный вектор x. Это вероятностный аналог ядра $K(s,x;t,y)$.

Модель Шрёдингера–Закая

Фильтрационным аналогом уравнения Шрёдингера служит уравнение Закая

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = H\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)^* \rho, \tag{3.2.15}$$

где $H(x,p)$ — гамильтониан (3.2.4). Это описание неоднозначно, как и в (3.2.5), однако после фиксации метода стохастического интегрирования в основном уравнении (3.2.1) возникает рецепт точной интерпретации $\mathrm{Op}(H)$. Именно, гамильтониан, подлежащий квантованию, имеет вид

$$H(x,p)dt = \left(\frac{1}{2}|b^*p|^2 + \langle a,p\rangle - \frac{1}{2}|c|^2(x)\right)dt + \langle c(x), dy\rangle.$$

Квантовый оператор Op$H dt$ определяется как сумма $\mathfrak{H}_0 dt + \mathrm{Op} H_1 dt$, где
$\mathfrak{H}_0 = \mathrm{Op}\left(\frac{1}{2}|b^* p|^2 + \langle a, p\rangle\right)$ — инфинитезимальный оператор процесса $x(t)$, $H_1 dt = -\frac{1}{2}|c|^2(x)dt + \langle c(x), dy\rangle$ и соответствующий оператор есть естественный оператор
умножения.

Хотя операторная дифференциальная форма $H\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)dt$ формально определена, ещё нужно выбрать интерпретацию уравнения (3.2.15) как стохастического дифференциального уравнения: присутствие члена $\langle c, dy\rangle\rho$ требует выбора правильной схемы стохастического интегрирования. Основной результат [77] состоит в том, что условное распределение ρ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению Стратоновича в частных производных

$$d\rho(t,x) = \left(\mathfrak{H}_0^* - \frac{1}{2}|c(x)|^2\right)\rho(t,x)dt + \rho(t,x)\langle c(x), dy\rangle. \qquad (3.2.16)$$

Формально (3.2.16) совпадает с (3.2.15).

Модель Фейнмана–Гирсанова

Аналог ядра в квантовый эволюции (3.2.7) — плотность $\rho(s, x; t, y)$, которая удовлетворяет формальным уравнениям Закая

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial s} &= -H\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\rho, \\ \frac{\partial\rho}{\partial t} &= H\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)^*\rho. \end{aligned} \qquad (3.2.17)$$

Эти уравнения понимаются в смысле Стратоновича. Если нет наблюдений, то уравнения Закая представляют собой прямое и обратное уравнения Колмогорова. Аналог интегральной формулы Фейнмана (3.2.10) имеет вид

$$\rho(s,x;t,y) = \int\limits_{\Omega(s,x;t,y)} \exp\{-I(u)\} d\lambda(u), \tag{3.2.18}$$

где интегрирование ведётся по всем управлениям $u = u(t)$ из (3.2.3), таким, что соответствующая траектория $\tau \mapsto x(\tau)$ соединяет x и y, функционал $I(u)$ определён в (3.2.3) и мера $d\lambda$ определена в (3.2.11). Математически строгая интерпретация (3.2.18) даётся уравнением (3.2.13).

Уравнения Гейзенберга–Калмана

Рассмотрим задачу линейной фильтрации

$$\begin{aligned} dx &= Axdt + Bdw, \quad x(s) = x_0 \\ dy &= Cxdt + dW, \quad y(s) = 0, \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

w, W — независимые винеровские процессы, начальный вектор $x(0)$ имеет гауссовское распределение

$$p(x) = (\det 2\pi R)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle R^{-1}(x-m), x-m\rangle\right\}. \tag{3.2.20}$$

Соответствующий гамильтониан

$$H(x,p)dt = \left(\frac{1}{2}|B^*p|^2 + \langle Ax, p\rangle - \frac{1}{2}|Cx|^2\right) dt + \langle Cx, dy\rangle$$

квадратично по x, p, оператор $\mathfrak{H} = \mathrm{Op}(H)$ определён однозначно, выбор схемы стохастического интегрирования в (3.2.19) не играет роли.

Для линейных функций $f(x,p) = \langle p, \xi\rangle + \langle x, \eta\rangle + \lambda$ операторы

$$\mathrm{Op} f = \mathfrak{O}(\xi,\eta,\lambda) = \left\langle \xi, \frac{\partial}{\partial x}\right\rangle + \langle \eta, x\rangle + \lambda \tag{3.2.21}$$

образуют алгебру Ли — алгебру Гейзенберга размерности $2n+1$

$$\mathfrak{h} = \{\mathfrak{O}(\xi,\eta,\lambda) : \xi, \eta \in \mathbf{R}^n, \lambda \in \mathbf{R}\}, \tag{3.2.22}$$

причём оператор Гамильтона $\mathfrak{H} = \mathrm{Op}(H)$ и сопряжённый $\mathfrak{H}^* = \mathrm{Op}(H)^*$ нормализуют эту алгебру в том смысле, что $[\mathfrak{H}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ и аналогично $[\mathfrak{H}^*, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.

Уравнение Гейзенберга—Закая $\dot{\mathfrak{O}} = [\mathfrak{H}^*, \mathfrak{O}]$ по-этому определяет поток автоморфизмов $\Phi_t : \mathfrak{O}(\xi, \eta, \lambda) \mapsto (\xi_t, \eta_t, \lambda_t)$ алгебры Ли $\mathfrak{h}$, который, как показывают прямолинейные вычисления, задается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_t}{dt} &= A\xi_t + BB^*\eta_t, \\ \frac{d\eta_t}{dt} &= C^*C\xi_t - A^*\eta_t, \\ d\lambda_t &= -\langle \xi, C^* dy \rangle. \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

Фильтр Калмана

Аннулятор $\Theta_0 = \mathrm{Ann}\, p(x)$ начального гауссовского распределения (3.2.20) с параметрами R, m имеет размерность n и задается уравнениями

$$\{\mathfrak{O}(\xi, \eta, \lambda) \in \Theta_0\} \Leftrightarrow \{\xi = R\eta,\ \lambda = -\langle m, \eta \rangle\}. \tag{3.2.24}$$

Аналогично $\Phi_t\Theta_0 = \mathrm{Ann}\rho(t, x)$ задается уравнениями того же типа

$$\{\mathfrak{O}(\xi, \eta, \lambda) \in \Phi_t\Theta_0\} \Leftrightarrow \{\xi = R_t\eta,\ \lambda = -\langle m_t, \eta \rangle\}, \tag{3.2.25}$$

где R_t, m_t — параметры гауссовского распределения $\rho(t, x)$.

Уравнения (3.2.23), (3.2.25), как показывают легкие вычисления, эквивалентны классическим уравнениям Калмана—Бьюси [49], [48]

$$\begin{aligned} \dot{R} &= AR + RA^* + BB^* - RC^*CR, \\ dm &= (A - RC^*C)mdt + RC^*dy. \end{aligned} \tag{3.2.26}$$

Фильтрация и классическая динамическая система

В линейном случае можно также явно описать ядро фильтрации (3.2.17) в терминах задачи оптимального управления, тесно связанной с классической динамической системой (3.2.3), (3.2.4):

$$\dot{X} = AX + Bu, \quad X(s) = x, \quad X(t) = y,$$
$$I(S) = \int_s^t \left(\frac{1}{2}|u|^2 + \frac{1}{2}|CX|^2\right) dt - \langle CX, dy\rangle \to \min . \tag{3.2.27}$$

Функция Беллмана (функционал действия) этой задачи определяется как

$$S(s, x; t, y) = \min_{u \in L_2([s,t])} I(u). \tag{3.2.28}$$

Если пара матриц (A, C) задаёт вполне наблюдаемую, а (A, B) — вполне управляемую систему, то ядро фильтрации (3.2.17) $\rho(s, x; t, y)$ — гладкая функция при $(s, x) \neq (t, y)$ вида

$$\rho(s, x; t, y) = \det\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}\right)^{-1/2} \exp\{-S(s, x; t, y)\}. \tag{3.2.29}$$

Формула Мелера

Из формулы (3.2.29) вытекает, например, формула Мелера для фундаментального решения $G(x, t)$ с полюсом в 0 оператора

$$-\frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{1}{2}|Cx|^2 + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Она имеет вид

$$\begin{aligned} G(x, t) &= \det\left(\frac{M}{2\pi \mathrm{sh}(Mt)}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left\langle \frac{M}{\mathrm{th}(Mt)}x, x\right\rangle\right\}, \\ M &= (C^*C)^{1/2}, \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

и соответствует уравнению Закая для процесса

$$\begin{aligned} dX &= dw, \\ dY &= CX + dW. \end{aligned} \tag{3.2.31}$$

где наблюденная траектория $Y^t \equiv 0$. Множитель

$$\det\left(\frac{M}{2\pi \mathrm{sh}(Mt)}\right)^{1/2}$$

играет общематематическую роль, поскольку отвечает за вид формулы Атьи-Зингера для индекса оператора Дирака [39].

§ 3.3. Задача об управлении инвестиционным портфелем на бесконечном интервале времени.

3.3.1 Введение

Рассмотрим модель рыночных активов вида

$$\begin{cases} \dfrac{dS_i}{S_i} = f_i(x,t)dt + \displaystyle\sum_{k=1}^{m+n} \sigma_{ik} dW_k, (i = \overline{1,m}), S_i(0) = S_i^0, \\ dx = b(x,t)dt + \Lambda dW, x(0) = x_0, x = (x_1, ..., x_n), \end{cases}$$

где $W = (W_1, ..., W_{m+n})$ — винеровский процесс, $h = (h_1, ..., h_m)$ — управление, S_i — цены на активы, x — вектор макроэкономических факторов (см., например, [20], [1]).

Уравнение капитала портфеля имеет следующий вид:

$$dV = \sum_{i=1}^{m} h_i(t) V \left[f_i dt + \sum_{k=1}^{m+n} \sigma_{ik} dW_k \right], \; h_1 + \ldots + h_m = 1.$$

Задача управления состоит в том, чтобы минимизировать функционал

$$\mathcal{J}_\theta = \varliminf_{t\to\infty} \left(-\frac{2}{\theta} t^{-1} \ln \mathbf{M} \exp\left\{ -\frac{2}{\theta} \ln V(t) \right\} \right) \to \min,$$

$$\mathcal{J}_\theta \sim \mathbf{M}\rho - \frac{\theta}{4} \mathbf{D}\rho(t,\omega) + \overline{o}(\theta),$$

где ρ — мгновенная процентная ставка $\rho = \dfrac{\ln V}{t}$, V — капитал портфеля. Управление $\overline{h}$ находится из условия минимума следующего вида:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2}+1\right)\left\langle h^T\Sigma, \Sigma^T h\right\rangle - \langle h, f(x)\rangle \to \min := K_\theta(x),$$

$$h_1 + ... + h_m = 1.$$

Здесь Σ — матрица из элементов σ_{ik}.

Пусть $\widehat{p_x}(t,\xi)$ — решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{\widehat{p}}_x = L\widehat{p}_x(t,\xi) + \imath\langle \Lambda H_\theta^T(x)\xi, \nabla_x\widehat{p}_x\rangle + \left[-\dfrac{1}{2}|H_\theta^T(\xi)\xi|^2 + \imath\langle L_\theta(x)\xi\rangle\right]\widehat{p}_x, \\ \widehat{p}_x(0,\xi) = 1. \end{cases}$$

Предполагается, что $H_\theta(x) = h_T(x)\Sigma$, $L_\theta(x) = \langle f, h_\theta\rangle - \dfrac{1}{2}|H_\theta|^2$, L — оператор Колмогорова для стохастического уравнения

$$dx = b(x,t)dt + \Lambda dW,$$

$\xi \in \mathbb{R}^n$ — параметр.

Тогда

$$p_x(t,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}_\xi} e^{-\imath\xi y}p_x(t,\xi)d\xi.$$

Предельное поведение плотности $p_x(t,y)$ при $t\to\infty$ интересно с точки зрения приложения в теории мартингалов (см., например, [4], [67], [68], [69]). Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{t}}p_x\left(t, \frac{y}{\sqrt{t}} - \lambda_0^\Theta\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\lambda}_0^\Theta}}\exp\left(-\frac{y^2}{\bar{\lambda}_0^\Theta}\right),$$

где $(\lambda_0^\Theta, \bar{\lambda}_0^\Theta)$ — пара чисел, определяемая из условия разрешимости задач

$$L^0 v_1^\Theta(x) = L_\Theta(x) + \lambda_0^\Theta,$$

$$L^0\bar{v}_1^\Theta(x) = -|\Lambda\nabla_x v_1^\Theta(x)|^2 + |H_\Theta|^2 + \bar{\lambda}_0^\Theta.$$

Для определения $(\lambda_0^\Theta, \bar{\lambda}_0^\Theta)$ можно использовать формулы

$$\lambda_0^\Theta = \int\limits_{\mathbb{R}^n} L_\Theta(x)p(x)dx,$$

$$\bar{\lambda}_0^\Theta = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (|\Lambda\nabla_x v_1^\Theta(x)|^2 + |H_\Theta|^2)p(x)dx.$$

Здесь $p(x)$ определяется как основное состояние сопряженного оператора

$$L_0^* p(x) = 0,\ p(x) > 0,\ |p(x)| \to 0,$$

при $|x| \to 0,\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} p(x)dx = 1.$

Плотность распределения падения капитала портфеля, когда управление по Белецкому–Плиске начинается в нулевой момент времени со значения вектора макропараметров x_0 и капитала портфеля V_0, продолжается до момента t_1 и далее на отрезке $[t_1,\ t_1+\triangle t]$ не изменяется, обозначим через $q(V_0, x_0; V, x, t_1 + \triangle t)$. Для нее имеет место формула

$$q = \int\int p^{h(t)}(V_0, x_0; \widetilde{V}, \widetilde{x}, t)p^{h(t_1)}(\widetilde{V}, \widetilde{x}; V, x, \triangle t)d\widetilde{V}d\widetilde{x}.$$

Здесь $p^{h(t)}$ и $p^{h(t_1)}$ — соответствующие плотности распределения величины (V, x) при управлении $h(t) = M\bar{x}+\bar{m}$ на отрезке $[0,\ t_1]$ и $[0,\ \triangle t]$ с постоянной $h(t_1)$. Начальные условия, соответствующие $p^{h(t)}$ и $p^{h(t_1)}$, будут $(V_0,\ x_0)$ и $(\widetilde{V},\ \widetilde{x})$.

Для $p^{h(t)}$ и $p^{h(t_1)}$ нашим методом можно построить выражение в квадратурах, значит и для q можно построить выражение в квадратурах.

3.3.2 Постановка задачи и основные утверждения

Во многих задачах физики и финансовой математики возникает задача нахождения среднего некоторой случайной величины F, являющейся функцией времени и некоторой другой случайной величины X

(фактора) при фиксированном значении последней. Эта задача сводится к нахождению совместной плотности распределения F и X. В этом параграфе получена общая формула (см. [1]), позволяющая вычислить эту величину в терминах интегралов от преобразования Фурье от совместной плотности распределения (что иногда значительно упрощает задачу) и применена эта формула для нахождения средней доходности и дисперсии актива, зависящего от процентной ставки. Процентная ставка при этом моделируется по закону Кокса–Ингерсолла–Росса (CIR) — волатильность ее пропорциональна квадратному корню от значения ставки.

Ранее в [2] в рамках модели Белецкого и Плиски авторами была найдена средняя доходность и дисперсия актива в случае, когда волатильность ставки постоянна. Далее, в работе [3] были использованы эти результаты для построения эффективного портфеля ценных бумаг на конечном отрезке времени в случае постоянной волатильности процентной ставки. В настоящей статье авторы строят эффективный портфель для двух активов в случае процентной ставки, изменяющейся по закону CIR, и сравнивают эти результаты с результатами статей [2] и [3].

Постановка задачи.

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений достаточно общего вида

$$\begin{gathered} dF = A(t,X,F)dt + \sigma(t,X,F)dW_1, \\ dX = B(t,X,F)dt + \lambda(t,X,F)dW_2, \\ F(0) = f,\ X(0) = x,\ t \geq 0,\ f \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{3.3.1}$$

где $W(t) = (W_1(t), W_2(t))$ — двумерное стандартное броуновское движение, A, B — заданные гладкие функции.

Совместная плотность распределения $P(t, f, x)$ случайных величин F и X описывается уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) (см., например, [70])

$$\frac{\partial P(t,f,x)}{\partial t} = -\frac{\partial A(t,x,f)P(t,f,x)}{\partial f} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma^2(t,x,f)P(t,f,x)}{\partial f^2} - \\ - \frac{\partial B(t,x,f)P(t,f,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda^2(t,x,f)P(t,f,x)}{\partial x^2} \tag{3.3.2}$$

с начальными данными

$$P(0,f,x) = P_0(f,x), \tag{3.3.3}$$

определенными начальным распределением F и X.

Если $P(t,f,x)$ известна, то можно найти $\bar{f}(t,x)$ — условное математическое ожидание величины F при фиксированном значении X в момент времени t (см. [14]), определенное формулой

$$\bar{f}(t,x) = \frac{\int\limits_{\mathbb{R}} fP(t,f,x)df}{\int\limits_{\mathbb{R}} P(t,f,x)df}. \tag{3.3.4}$$

Заметим, что если мы выберем $P_0(f,x) = \delta(f - f_0(x))g(x)$, где $f_0(x)$ и $g(x)$ — произвольные гладкие функции, то $\widehat{f}(0,x) = f_0(x)$. Мы в дальнейшем будем считать $g(x)$ константой, что соответствует равномерному распределению случайной величины X на ее области изменения. Величину $\bar{f}(t,x)$ будем понимать как

$$\bar{f}(t,x) = \lim_{L\to+\infty} \frac{\int\limits_{[-L,L]} fP(t,f,x)df}{\int\limits_{[-L,L]} P(t,f,x)df}.$$

Определим дисперсию F при фиксированном X как

$$\bar{D}(t,x) = \lim_{L\to+\infty} \frac{\int\limits_{[-L,L]} f^2 P(t,f,x)df}{\int\limits_{[-L,L]} P(t,f,x)df} - \bar{f}^2(t,x). \qquad (3.3.5)$$

Для некоторых случаев величины (3.3.4) и (3.3.5) найдены в [2], [16], [17], [54].

Иногда преобразование Фурье по переменным f, x функции $P(t,f,x)$ находится гораздо проще, чем сама эта функция. Мы получим формулу, позволяющую выразить $\bar{f}(t,x)$ в терминах преобразования Фурье от $P(t,f,x)$ и применим ее в интересном случае для нахождения средней доходности актива, зависящего от процентной ставки. Процентная ставка при этом моделируется по закону CIR [29].

Ниже мы для простоты ограничимся рассмотрением только скалярного уравнения для случайной величины $X(t)$, поскольку полученные формулы в данной работе нужны только для такого случая. Однако результаты практически без изменения переносятся на случай векторного уравнения с n компонентами — тогда математическое ожидание $\bar{f}(t,x)$ и дисперсия $\bar{D}(t,x)$ являются функциями времени и n пространственных переменных. При этом броуновский процесс может иметь и коррелированные компоненты. Вопрос сводится к нахождению решения параболического уравнения (3.3.2), что может стать трудной задачей. В частности, могут возникнуть проблемы с существованием и единственностью решения.

Представление для условного математического ожидания величины F при фиксированном значении X.

Утверждение 1. Предположим, что $\widehat{P}(t,\mu,\xi)$ — преобразование Фурье по переменным (f,x) функции $P(t,f,x)$, являющейся решением задачи (3.3.2), (3.3.3). Пусть $\widehat{P}(t,\mu,\xi)$ и $\partial_\mu \widehat{P}(t,0,\xi)$ являются по (μ,ξ)

убывающими на бесконечности быстрее всякой степени функциями. Тогда величина $\bar{f}(t,x)$, определяемая формулой (3.3.4), может быть найдена как

$$\bar{f}(t,x) = \frac{iF_\xi^{-1}\,[\partial_\mu \widehat{P}(t,0,\xi)](t,x)}{F_\xi^{-1}\,[\widehat{P}(t,0,\xi)](t,x)}, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.3.6}$$

Доказательство. Здесь и ниже под F_μ^{-1} и F_ξ^{-1} понимается обратное преобразование Фурье по переменным μ и ξ, соответственно, $(.,.)_\mu$ означает действие обобщенной функции на основную по переменной μ. Под $(e^{i\mu f},1)_f$ понимается $\lim_{L\to\infty}(e^{i\mu f},\omega_\varepsilon(f)\chi_{[-L,L]})_f$, где χ_Ω — характеристическая функция множества Ω, а $\omega_\varepsilon(f)$ — стандартная сглаживающая функция.

Вычислим знаменатель (3.3.4), формально выполнив выкладки (преобразование Фурье понимается в смысле обобщенных функций):

$$\int\limits_{\mathbb{R}} P(t,f,x)\,df = \int\limits_{\mathbb{R}} fF_\mu^{-1}[F_\xi^{-1}[\widehat{P}(t,\mu,\xi)]]\,df =$$

$$= F_\xi^{-1}\left[\Big(F_f^{-1}[1](\mu),\widehat{P}(t,\mu,\xi)\Big)_\mu\right] = \sqrt{2\pi}\,F_\xi^{-1}\left[\Big(\delta(\mu),\widehat{P}(t,\mu,\xi)\Big)_\mu\right] =$$

$$= \sqrt{2\pi}F_\xi^{-1}[\widehat{P}(t,0,\xi)].$$

Аналогично находится числитель:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} fP(t,f,x)\,df = \int\limits_{\mathbb{R}} F_\mu^{-1}[F_\xi^{-1}[\widehat{P}(t,\mu,\xi)]]\,df =$$

$$= F_\xi^{-1}\left[\Big(F_f^{-1}[f](\mu),\widehat{P}(t,\mu,\xi)\Big)_\mu\right] =$$

$$= -\sqrt{2\pi}i\,F_\xi^{-1}\left[\Big(\delta'(\mu),\widehat{P}(t,\mu,\xi)\Big)_\mu\right] = \sqrt{2\pi}i\,F_\xi^{-1}\left[\Big(\delta(\mu),\partial_\mu\widehat{P}(t,\mu,\xi)\Big)_\mu\right] =$$

$$= i\sqrt{2\pi}F_\xi^{-1}[\partial_\mu\widehat{P}(t,0,\xi)].$$

Таким образом, утверждение доказано. □

Нетрудно убедиться, что в терминах преобразования Фурье от совместной плотности распределения $\widehat{P}(t,f,x)$ в тех же предположениях, что и в Утверждении 1 величина дисперсии (3.3.5) выражается как

$$\bar{D}(t,x) = \frac{(F_\xi^{-1}[\partial_\mu \widehat{P}(t,0,\xi)])^2 - F_\xi^{-1}[\partial_\mu^2 \widehat{P}(t,0,\xi)]F_\xi^{-1}[\widehat{P}(t,0,\xi)]}{(F_\xi^{-1}[\widehat{P}(t,0,\xi)])^2}(t,x). \tag{3.3.7}$$

Доказательство формулы (3.3.7) совершенно аналогично доказательству утверждения 1.

Модель актива, зависящего от процентной ставки CIR.

Конечно, не существует явной формулы для нахождения совместной плотности распределения $P(t,f,x)$ в случае системы (3.3.1) общего вида. Мы ограничимся частным, но важным случаем, когда эта система такова:

$$dF = (A + \alpha r)dt + \sigma dW_1, \tag{3.3.8}$$

$$dr = (B + \beta r)dt + \lambda\sqrt{r}dW_2. \tag{3.3.9}$$

Здесь $B > 0, \beta < 0, \sigma > 0, \lambda > 0, A, \alpha$ — некоторые константы.

Первое уравнение описывает изменение доходности F актива, тренд которого линейным образом зависит от процентной ставки r, изменяющейся по закону CIR [29]. Чтобы обеспечить положительность случайного процесса, описывающего процентную ставку, достаточно потребовать, чтобы выполнялось неравенство $-2\beta B > \lambda^2$ [34]. Процентная ставка вида (3.3.9) в роли фактора рассматривалась, в частности, в [23].

Отметим, что в работах Белецкого и Плиски неоднократно исследовалась модель капитала портфеля, включающего активы, тренды которых линейным образом зависят от макроэкономических факторов. Решалась задача о максимизации темпа роста капитала на бесконечном горизонте времени при помощи некоторого рискочувствительного функционала (см., например, [20], [21]). Однако всюду (за исключением [23]), рассматривались факторы с постоянными волатильностями.

Строгая теория, построенная Белецким и Плиской, ограничивается только этим случаем. Причина в том, что уравнение Беллмана сводится здесь к так называемому "уравнению второго порядка" — уравнению параболического типа, у которого сумма степеней производных по пространственным переменным и степеней многочленов, стоящих в качестве коэффициентов при этих производных, равна двум. Такие уравнения возникают во многих областях математики и физики, и они явно интегрируются. В работе [2] найдена величина $\bar{f}(t,r)$ для случая, когда фактор (в частности, процентная ставка) описывается уравнением

$$dr = (B + \beta r)dt + \lambda dW_2. \tag{3.3.10}$$

А именно, здесь

$$\bar{f}(t,x) = \frac{\alpha(\beta r + B)(1 - e^{-\beta t})}{\beta^2} - \frac{(B\alpha - A\beta)t}{\beta} + f_0, \tag{3.3.11}$$

где f_0 – начальная величина актива, то есть

$$F(0) = f_0 \quad \text{при всех} \quad X(0). \tag{3.3.12}$$

Уравнение ФПК (3.3.2) для системы (3.3.8), (3.3.10) также относится к "уравнениям второго порядка", поэтому задачу удалось явно решить. В случае системы (3.3.8), (3.3.9) уравнение (3.3.2) не относится к указанному типу. Тем не менее, задачу нахождения $\bar{f}(t,x)$ также удалось решить.

Уравнение ФПК для совместной плотности распределения случайных величин F и r, подчиняющейся системе (3.3.8), (3.3.9), таково:

$$\begin{gathered}\frac{\partial P(t,f,r)}{\partial t} + (A + \alpha r)\frac{\partial P(t,f,r)}{\partial f} + \beta P(t,f,r) + \\ +(B + \beta r - \lambda^2)\frac{\partial P(t,f,r)}{\partial r} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P(t,f,r)}{\partial f^2} - \frac{1}{2}\lambda^2 r\frac{\partial^2 P(t,f,r)}{\partial r^2} = 0.\end{gathered} \tag{3.3.13}$$

Из (3.3.12) следуют начальные условия

$$P(0,f,r) = \delta(f - f_0). \tag{3.3.14}$$

Преобразование Фурье по (f,r), функция $\widehat{P}\,(t,\mu,\xi)$, подчиняется уравнению

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\widehat{P}\,(t,\mu,\xi) - \left(\alpha\,\mu + \beta\,\xi - i\frac{1}{2}\lambda^2\xi^2\right)\frac{\partial}{\partial\xi}\widehat{P}\,(t,\mu,\xi) \\ + \left(\frac{1}{2}\,\sigma^2\mu^2 + A\mu i + B\xi i\right)\widehat{P}\,(t,\mu,\xi) = 0,\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

с начальными условиями

$$\widehat{P}(0,\mu,\xi) = \frac{1}{2\pi}\,e^{-i\mu\, f_0}\,\delta(\xi). \tag{3.3.16}$$

Уравнение (3.3.15) имеет первый порядок и может быть проинтегрировано. Решение задачи (3.3.15), (3.3.16) находится стандартными методами и имеет вид

$$\widehat{P}(t,\mu,\xi) = e^{-\frac{2\,if_0\mu\,\lambda^2+2\,t\,A\mu\,\lambda^2\,i+2\,t\,B\,\beta+t\,\sigma^2\mu^2\lambda^2}{2\,\lambda^2}}\,\delta\left(s(t,\mu,\xi)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\lambda^2(2\,i\alpha\,\mu+2\,i\beta\,\xi+\lambda^2\xi^2)\,\mathrm{ch}\left(\frac{t\sqrt{2\,i\alpha\,\mu\,\lambda^2+\beta^2}}{2}+i\,\mathrm{arctg}(\frac{\lambda^2\xi+i\beta}{\sqrt{2\,i\alpha\,\mu\,\lambda^2+\beta^2}})\right)^2}{2\,i\alpha\,\mu\,\lambda^2+\beta^2}\right)^{-\frac{B}{\lambda^2}},$$

где

$$s(t,\mu,\xi) =$$
$$= -\frac{\left(\left(\beta-\sqrt{2\,i\alpha\,\mu\,\lambda^2+\beta^2}\right)\xi+2\,\alpha\,\mu\right)e^{-t\sqrt{2\,i\alpha\,\mu\,\lambda^2+\beta^2}}+\left(-\beta-\sqrt{2\,i\alpha\,\mu\,\lambda^2+\beta^2}\right)\xi-2\,\alpha\,\mu}{\sqrt{2\,i\alpha\,\mu\,\lambda^2+\beta^2}+i\lambda^2\xi-\beta+\left(\sqrt{2\,i\alpha\,\mu\,\lambda^2+\beta^2}-i\lambda^2\xi+\beta\right)e^{-t\sqrt{2\,i\alpha\,\mu\,\lambda^2+\beta^2}}}.$$

Применим формулы (3.3.6) и (3.3.7).

Вычисления показывают, что

$$\widehat{P}(t,0,\xi) = \theta(t,\xi)\delta\left(s(t,0,\xi)\right), \tag{3.3.17}$$

$$\partial_\mu\widehat{P}(t,0,\xi) = \phi(t,\xi)\,\delta(s(t,0,\xi)) + \psi(t,\xi)\,\delta'_\mu(s(t,0,\xi)),$$

$$\partial^2_\mu\widehat{P}(t,0,\xi) = q_1(t,\xi)\,\delta(s(t,0,\xi)) + q_2(t,\xi)\,\delta'_\mu(s(t,0,\xi)) + q_3(t,\xi)\delta''_\mu(s(t,0,\xi)). \tag{3.3.18}$$

где

$$s(t,0,\xi)=\frac{2\beta\xi}{i\xi\lambda^2+(2\beta-i\xi\lambda^2)e^{-\beta t}},$$

$$\theta(t,\xi)=\left(\frac{-i\lambda^2(i\xi^2\lambda^2-2\beta\xi)\operatorname{ch}\left(\frac{\beta t}{2}+i\operatorname{arctg}(\frac{\lambda^2\xi+i\beta}{\beta})\right)^2e^{\beta t}}{\beta^2}\right)^{\frac{-B}{\lambda^2}},$$

$$\phi(t,\xi)=\theta(t,\xi)\left(L_1-i(At+f_0)\right),\quad \psi(t,\xi)=\theta(t,\xi)L_2,$$

$$L_1=\frac{B\alpha\left((4\beta\lambda^4\xi^2-i\lambda^6\xi^3+4i\beta^2\lambda^2\xi)t+(4\beta^2-2\lambda^4\xi^2-6i\beta\lambda^2\xi)\right)}{\beta\lambda^2\xi(\lambda^2\xi+2i\beta)^2\operatorname{ch}\left(\dfrac{\beta t}{2}+i\operatorname{arctg}(\dfrac{\lambda^2\xi+i\beta}{\beta})\right)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\operatorname{sh}\left(\dfrac{\beta t}{2}+i\operatorname{arctg}(\dfrac{\lambda^2\xi+i\beta}{\beta})\right)}{\beta\lambda^2\xi(\lambda^2\xi+2i\beta)^2\operatorname{ch}\left(\dfrac{\beta t}{2}+i\operatorname{arctg}(\dfrac{\lambda^2\xi+i\beta}{\beta})\right)}+$$

$$+\frac{2\alpha B(i\lambda^2\xi(\lambda^4\xi^2-5\beta^2)-4\beta\lambda^4\xi^2)+2\beta^3}{\beta^2\lambda^2\xi(\lambda^2\xi+2i\beta)^2},$$

$$L_2=\frac{-\alpha\xi^2\lambda^4e^{2\beta t}+2((\lambda^2\xi+2i\beta)\lambda^2\xi t-2i\lambda^2\xi+2\beta)\alpha\beta e^{\beta t}}{i\beta\lambda^2\xi(e^{\beta t}-1)+2\beta^2}+$$

$$+\frac{4i\alpha\beta\lambda^2\xi+\alpha\lambda^2\xi-4\alpha\beta^2}{i\beta\lambda^2\xi(e^{\beta t}-1)+2\beta^2}.$$

Функции $q_i(t,\xi), i=1,2,3,$ мы не будем выписывать здесь, поскольку эти выражения слишком громоздки.

Подстановка выражений (3.3.17) и (3.3.18) в формулы (3.3.6) и (3.3.7) и последующие длинные, но стандартные вычисления и преобразования показывают, что

$$\bar{f}(t,r) = f_0 + \left(A - \frac{\alpha}{\beta}\right) t + \frac{(1-e^{\beta t})\alpha r}{\beta} - \frac{\left(2+\lambda^2\right)\alpha\, e^{2\beta\, t}}{\beta^2} + \\ + \left(\frac{\left(1+\lambda^2\right)\alpha\, t}{\beta} + \frac{\left(2+\lambda^2\right)\alpha}{\beta^2}\right) e^{\beta\, t} \tag{3.3.19}$$

$$\bar{D}(t,r) = t\sigma^2 + \left(-\frac{2e^{3\beta t}}{\beta^3} + \frac{(2\beta t+3)e^{2\beta t}}{\beta^3} - \frac{2e^{\beta t}}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^3}\right)\alpha^2\lambda^2 r + \\ + \left(4e^{4\beta t} - \frac{3(4\beta t+5)e^{3\beta t}}{2} + (\beta^2 t^2 + 4\beta t + 6)e^{2\beta t}\right)\frac{\alpha^2\lambda^4}{\beta^4} + \\ + \left(\frac{(2\beta^2 t^2 - 2\beta t - 5)e^{\beta t}}{2}\right)\frac{\alpha^2\lambda^4}{\beta^4} + \\ + \left(\frac{5Be^{4\beta t}}{2} - 2B(\beta t+3)e^{3\beta t} + \frac{15Be^{2\beta t}}{2} - 4Be^{\beta t} - B\beta t\right)\frac{\alpha^2\lambda^2}{\beta^4}. \tag{3.3.20}$$

Пример эффективного портфеля из двух активов, зависящих от процентной ставки CIR.

Рассмотрим портфель, состоящий из двух активов (один из которых — банковский счет), линейно зависящих от одного случайного фактора, процентной ставки. Такой портфель систематически рассматривается в качестве примера в работах Белецкого и Плиски (например, [23], [20],[21]). Предположим, что процесс стоимостей активов подчиняется уравнениям

$$\frac{dS_1(t)}{S_1(t)} = (A_1 + \alpha_1 r(t))dt + \sigma_1 dW_1,$$

$$\frac{dS_2(t)}{S_2(t)} = r(t)dt.$$

Тренды активов линейным образом зависят от процентной ставки $r(t)$, изменяющейся по закону CIR (3.3.9).

Капитал портфеля $V(t) = h(t)S_1(t) + (1 - h(t))S_2(t)$, где $h(t)$ — стратегия инвестирования, согласно которой в момент времени t инвестор вкладывает долю капитала $h(t)$ в первый актив и $(1 - h(t))$ — во второй. Процесс инвестирования $(h, 1-h)$ предполагается допустимым (строгое определение допустимости дано в оригинальной работе [21]).

Сразу же отметим, что мы могли бы рассмотреть портфель, состоящий из любого конечного числа активов (как это делалось в [3] для случая линейного фактора). Это усложнило бы задачу только технически.

Обозначим $\ln V = F$. Тогда

$$dF(t) = \left(A_1 h(t) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 h^2(t) + \Big(\left(h(t) - 1\right)\alpha_1 + 1\Big)\, r(t)\right) dt + \sigma_1 h(t) dW_1. \tag{3.3.21}$$

Для системы (3.3.21), (3.3.9) справедливы формулы условного математического ожидания и условной дисперсии (3.3.19) и (3.3.20) при подстановке в них

$$A = A_1 h - \frac{1}{2}\sigma_1^2 h^2, \quad \alpha = (\alpha_1 - 1)h + 1, \quad \sigma = \sigma_1 h. \tag{3.3.22}$$

Зададим функционал

$$\bar{Q}_\gamma(t) = \bar{f}(t, r) - \gamma \bar{D}(t, r),$$

где γ — коэффициент риска, меняя который, мы можем увеличивать или уменьшать роль случайности. Находя максимум этого выражения относительно класса допустимых стратегий инвестирования $(h, 1-h)$, мы находим стратегию, позволяющую получить максимальный средний доход портфеля с учетом потерь, возникающих из-за случайности, описываемой дисперсией.

Мы используем здесь обозначения работы [3], где было проведено сравнение функционала $\bar{Q}_\gamma(t)$, используемого для составления оптимального портфеля на конечном отрезке времени с рискочувствительным функционалом, используемым в работах Белецкого и Плиски для бесконечного горизонта инвестирования. В [3] аналогичная задача была решена для случая линейного фактора, подчиняющегося СДУ (3.3.10). В [3] были применены другие методы, что связано, как уже упоминалось ранее, с возможностью явного нахождения $P(t, f, x)$. Однако и в том случае можно было действовать так, как предлагается в данной статье, а именно, использовать для вычислений преобразование Фурье от $P(t, f, x)$.

Согласно (3.3.19), (3.3.20) и (3.3.22) получим, что

$$\bar{Q}_\gamma(t) = \bar{Q}_\gamma(t, h) = K_2 h^2 + K_1 h + K_0,$$

где K_i — гладкие функции от t, r и коэффициентов $A_1, \alpha_1, \sigma_1, B, \beta, \lambda, \gamma$. Эти функции выражаются через элементарные, однако выражения для них громоздкие, и мы не будем их явно выписывать. Поскольку функция $\bar{Q}_\gamma(t, h)$ квадратична по h, а ее старший коэффициент

$$K_2 = -\frac{t\sigma_1^2 h^2}{2} - \gamma \bar{D}(t, r)|_{(\alpha=\alpha_1-1,\, \sigma=\sigma_1)} < 0,$$

то $\bar{Q}_\gamma(t, h)$ достигает максимума в единственной точке экстремума (аналогично линейному случаю, описанному в [3]), и соответствующая оптимальная стратегия

$$\bar{H}_\gamma(t) = \frac{-K_1}{2K_2} =$$

$$= \frac{(1-\alpha_1)(M_4 e^{4\beta t} + M_3 e^{3\beta t} + M_2 e^{2\beta t} + M_1 e^{\beta t} + M_0) + A_1 \beta^4 t}{(1-\alpha_1)^2 (M_4 e^{4\beta t} + M_3 e^{3\beta t} + N_2 e^{2\beta t} + N_1 e^{\beta t} + N_0) + (2\gamma+1)\sigma_1^2 \beta^4 t},$$

где

$$M_4 = \gamma\lambda^2(8\lambda^2 + 5B), \quad M_3 = -\gamma\lambda^2\left((3\lambda^2 + B)4\beta t + 15\lambda^2 + 4r\beta + 12B\right),$$

$$M_2 = 2\gamma\lambda^4\beta^2 t^2 + (2\lambda^2 + \beta r)4\gamma\beta\lambda^2 t + 12\gamma\lambda^4 + (5B + 2\beta r)3\gamma\lambda^2 - (\lambda^2 + B)\beta^2,$$

$$M_1 = 2\gamma\lambda^4\beta^2 t^2 + (\beta^2 - 2\gamma\lambda^2)\beta\lambda^2 t - 5\gamma\lambda^4 + (\beta^2 - 4\gamma\beta r - 8\gamma B)\lambda^2 + \beta^3 r + \beta^2 B,$$

$$M_0 = (\beta^2 - 2\gamma\lambda^2)\beta B t + 2\gamma\lambda^2\beta r - \beta^3 r,$$
$$N_1 = \gamma\lambda^2(2\beta^2\lambda^2 t^2 - 2\beta\lambda^2 t - 5\lambda^2 - 4\beta r - 8B),$$
$$N_2 = \gamma\lambda^2(2\lambda^2\beta^2 t^2 + (2\lambda^2 + \beta r)4\beta t + 12\lambda^2 + 6\beta r + 15B),$$
$$N_0 = 2\gamma\beta\lambda^2(-Bt + r).$$

Мы видим, что

$$\lim_{t\to\infty} \bar{H}_\gamma(t) = \frac{(\alpha_1 - 1)(\beta^2 B - 2\gamma\lambda^2 B) - A_1\beta^3}{(\alpha_1 - 1)^2 2\gamma\lambda^2 B + (2\gamma + 1)\sigma_1^2\beta^3}. \tag{3.3.23}$$

Из результатов работы [3] следует, что в случае линейной процентной ставки $\lim_{t\to\infty} \bar{H}_\gamma(t) = \dfrac{-1}{\alpha_1 - 1}$. Это выражение получается при предельном переходе в (24) при $\gamma \to \infty$ и $\sigma_1 \to 0$.

Отметим, что в случае нелинейной процентной ставки предельное выражение более полно использует коэффициенты модели, чем в линейном случае.

§ 3.4. Хеджирование в рамках модели Белецкого–Плиски.

Рассмотрим аналог уравнения Блэка–Шоулса (см., например, [24]):

$$\begin{cases} \dot{u} + a_{ij}(t,S)S_iS_j\dfrac{\partial^2 u}{\partial S_i \partial S_j} + \rho(t)S_i\dfrac{\partial u}{\partial S_i} = 0, \\ u(T,S) = F(S),\ a_{ij} = (\Sigma\Sigma^T)_{ij}. \end{cases}$$

Если a_{ij} и ρ постоянны (ρ — безрисковая банковская ставка), то страховая цена для m активов находится по формуле

$$V_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} e^{-\frac{|\bar{y}|^2}{2T}} F\left(S_1(0)e^{(\rho - \frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n+m}\sigma_{1j}^2)T + \sum\limits_{j=1}^{n+m}\sigma_{1j}y_j}, \dots \right.$$
$$\left. \dots, S_m(0)e^{(\rho - \frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n+m}\sigma_{mj}^2)T + \sum\limits_{j=1}^{n+m}\sigma_{mj}y_j} \right) dy.$$

Количество активов в репликативном портфеле

$$\Theta_i = e^{\rho(t-T)} \frac{\partial u}{\partial S_i}(t, S),\ i = 1, \ldots, m.$$

Замена $y_i = \ln S_i$ переводит уравнение Блэка–Шоулса в систему уравнений “второго порядка”.

Достаточными условиями минимальности V_0 являются следуюущие условия (см., например, [66]):

А. Σ имеет полный ранг.

Б. Решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{\widehat{q}} = L_0^x \widehat{q} + i\xi |x|^2 \widehat{q}, \\ q(0, x, \xi) = 1, \end{cases}$$

удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2\pi} \int e^{-i\eta\xi} \widehat{q}(t, x, \xi) d\xi \right) e^{\eta} d\eta < \infty.$$

§ 3.5. Решение уравнения для цены опциона при коэффициентах, зависящих от t.

Пусть S_1, S_2 — цены активов на момент времени t. r — безрисковая ставка. Задача заключается в нахождении цены опциона $P(S_1, S_2, t)$. Введём новые переменные: $x = \ln S_1$, $y = \ln S_2$, $u(S_1, S_2, t) = e^{rt} P(S_1, S_2, t)$. Тогда уравнение для цены опциона записывается в виде:

$$u_t' - \frac{1}{2}(\sigma_1^2(u_{xx}'' - u_x') + \sigma_2^2(u_{yy}'' - u_y') + \frac{4\rho}{1+\rho^2} u_{xy}'') - r(u_x' + u_y') = 0$$

Теорема.Решение $v(t, x)$ задачи Коши $\dfrac{\partial v}{\partial t} = L(v)$, $v|_{t=0} = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывная ограниченная функция в $\mathbb{R}_x^n$, а

$$L(v) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} c_i(t) \frac{\partial v}{\partial x_i} + h(t) v,$$

имеет вид

$$v(t,X)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_y}\varphi(y)w(t,x,y)dy,$$

где

$$w(t,x,y)=\exp\left\{\int\limits_0^t h(\tau)d\tau\right\}C(t)\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{P^{-1}\left(x-y-\int\limits_0^t c(\tau)d\tau,x-y-\int\limits_0^t c(\tau)d\tau\right)\right\},$$

$$P(t)=-2\int\limits_0^t A(\tau)d\tau,$$

$$C(t)=\frac{\exp\left\{-\frac{n}{2}\int\limits_0^t\frac{q(s)}{s}ds\right\}}{\sqrt{(2\pi t)^n\det A(0)}},$$

$$q(t)=\frac{1}{n}\mathrm{tr}\bar{Q},$$

$$\bar{Q}=\left[E+\frac{1}{2t}\int\limits_0^t(A(\tau)-A(0))d\tau\times A^{-1}(0)-E\right]+$$

$$+(A(t)-A(0))A^{-1}(0)\left[E+\frac{1}{2t}\int\limits_0^t(A(\tau)-A(0))d\tau\times A^{-1}(0)\right]^{-1}.$$

Функции $A_{ij}(t)$, $c_i(t)$, $h(t)$ предполагаются непрерывными и такими, что $\int\limits_0^\delta\frac{q(s)}{s}ds<+\infty$.

Применяя теорему к уравнению на стоимость опциона, получаем

$$P(S_1,S_2,t)=\int P(e^{y_1},e^{y_2},0)u(\ln S_1,\ln S_2,T)dy,$$

где T — время погашения опциона.

§ 3.6. Фундаментальное решение одномерного уравнения Шрёдингера в работах С.К.Суслова.

Рассмотрим одномерное уравнение Шрёдингера с квадратичным Гамильтонианом

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -a(t)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + b(t)x^2\psi - i\left(c(t)x\frac{\partial\psi}{\partial x} + d(t)\psi\right),$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $d(t)$ — заданные действительнозначные функции, зависящие от времени t.

Соответствующая функция Грина для данного уравнения может быть найдена следующим образом

$$\psi = G(x, y, t) = A(t)e^{iS(x,y,t)},$$

где $A(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi i\mu(t)}}$, $S(x, y, t) = \alpha(t)x^2 + \beta(t)xy + \gamma(t)y^2$, а $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ — дифференцируемые действительнозначные функции, зависящие от времени t и удовлетворяющие следующим уравнениям

$$\begin{cases} \alpha(t) = \dfrac{1}{4a(t)}\dfrac{\mu'(t)}{\mu(t)} - \dfrac{c(t)}{2a(t)}, \\ \beta(t) = -\dfrac{\lambda(t)}{\mu(t)},\ \lambda(t) = \exp\left(\displaystyle\int_0^t (c(s) - d(s))ds\right), \\ \gamma(t) = \dfrac{a(t)\lambda^2(t)}{\mu(t)\mu'(t)} + \dfrac{c(0)}{2a(0)} - 4\displaystyle\int_0^t \dfrac{a(s)\sigma(s)\lambda^2(s)}{(\mu'(s))^2}ds. \end{cases}$$

Функция $\mu(t)$ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\mu'' - \tau(t)\mu' + 4\sigma(t)\mu = 0,$$

где $\tau(t) = \dfrac{a'}{a} + 2c - 2d$, а $\sigma(t) = ab - cd + \dfrac{c}{2}\left(\dfrac{a'}{a} - \dfrac{c'}{c}\right)$ с начальными условиями $\mu(0) = 0$ и $\mu'(0) = 2a(0) \neq 0$.

Решение задачи Коши представимо в интегральной форме

$$\psi(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x,y,t)\varphi(y)dy, \ \lim_{t\to 0^+} \psi(x,t) = \varphi(x).$$

Более подробно об уравнении Шрёдингера с квадратичным Гамильтонианом можно прочитать, например, в [71], [65], [28].

§ 3.7. Фейнмановские интегралы и основные состояния.

Рассмотрим матричный дифференциальный оператор второго порядка.

$$\mathcal{L} \equiv a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i} + C(x,t),$$

a_{ij} =const, b_i линейны по x, C линейно–квадратично по x.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} u'_t = \mathcal{L}u, \\ u|_{t=0} = \delta(x). \end{cases}$$

Пусть (см., например, [37]) интеграл

$$u(x,t) = \int\limits_{\substack{\text{все пути из} \\ \text{(0,0) в (x,t)}}} e^{-\int\limits_0^t L(x,\dot{x},\tau)d\tau}$$

равен

$$\left[\det\left(-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial y_j}\right)\right]^{1/2} e^{-S(0,0;x,t)},$$

где $L(x,\dot{x},t \equiv a^{ij}(\dot{x}_i - b_i(x))(\dot{x}_j - b_j(x)) - C(x)$, a^{ij} — коэффициент матрицы, обратной к матрице с коэффициентами a_{ij}.

Определим действие следующим равенством:

$$S(y,s;x,t) = \inf_{\substack{z(s)=y \\ z(t)=x}} \int_s^t L(z,\dot{z},\tau)d\tau.$$

Среднее действие: $\lambda = \lim\limits_{|s-t|\to\infty} \frac{1}{t-s} S(y,s;x,t)$ (не зависит от y, x).

Основное состояние $(\mu,\psi(x))$ (см. [6])

$$\mathcal{L}\psi(x) = \mu\psi(x),\ \psi(x) > 0,\ \psi(x) \to \infty,\ |x| \to \infty.$$

$\mu = \lambda + 2\langle A, W_0\rangle$ для линейно-квадртичного Лагранжиана. Здесь W_0 — матрица, решение алгебраического уравнения Риккати, определенного ниже. Для произвольного Лагранжиана $\lim\limits_{\varepsilon\to\infty} \mu_\varepsilon = \lambda$, где $(\mu_\varepsilon, \psi_\varepsilon(x))$ — основные состояния оператора

$$\mathcal{L}_\varepsilon \equiv \varepsilon^2 a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + C(x). \qquad (3.7.1)$$

Если $\bar{b} \equiv 0$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to\infty} \mu_\varepsilon = \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} C(x)$ (см., например, [7]).

При следующей замене:

$$\{a_{ij}\} \to A,\ \{b_i\} \to Bx + \bar{b},\ C \to (Cx,x) + (\bar{c},x) + c_0$$

уравнение (3.7.1) сводится к системе

$$\begin{cases} \dot{W} = 2WAW + [B^T W + WB] + C, \\ \dot{\bar{\omega}} = (2AW + B)\bar{\omega} + 2W\bar{b} + \bar{c}, \\ \dot{q} = -\frac{1}{2}\bar{\omega}^T A\omega + (\bar{b},\bar{\omega}) + c_0. \end{cases} \qquad (3.7.2)$$

Из системы (3.7.2) получаем

$$\begin{cases} 0 = 2W_0AW_0 + [B^T W_0 + W_0 B] + C, \\ 0 = (2AW_0 + B)\bar{\omega}_0 + 2W_0\bar{b} + \bar{c}, \\ \lambda = -\frac{1}{2}\bar{\omega}_0^T A\omega_0 + 2\langle A, W_0\rangle + (\bar{b},\bar{\omega}_0) + c_0. \end{cases}$$

3.7.1 Оператор Колмогорова.

Рассмотрим следующий дифференциальный оператор:

$$L[\cdot] = \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x_1^2} + x_1 \frac{\partial \cdot}{\partial x_2} - \frac{\partial \cdot}{\partial t}.$$

Уравнение $L[u] = f$ описывает броуновское движение в $\mathbb{R}$ и называется уравнением Колмогорова. Здесь x_1 — скорость частицы, а x_2 — ее положение.

Можно показать (см., например, [10, Т. 3, §22.2]), что фундаментальное решение соответствующего оператора Колмогорова имеет вид

$$u(t,x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi^2 t^2} \exp\left\{ \frac{(x_1-y_1)^2}{t} + 3\frac{(x_1-y_1)(x_2+tx_1-y_2)}{t^2} - \right.$$
$$\left. - 3\frac{(x_2+tx_1-y_2)^2}{t^3} \right\}.$$

Литература

[1] Камбарбаева Г.С., Розанова О.С. Об эффективном портфеле, зависящем от процентной ставки Кокса–Ингерсолла–Росса. Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Ном. 1. 2013. p. 3–10.

[2] Камбарбаева Г.С. О некоторых явных формулах для вычисления условных математических ожиданий случайных величин и их применениях. Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Ном. 5. 2010. p. 10–15.

[3] Камбарбаева Г.С. Задача составления эффективного портфеля в модели рынка согласно Белецкому и Плиске. Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Ном. 5. 2011. p. 14–20.

[4] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986.

[5] Никольский С.М. Курс Математического анализа. I. Изд. третье, переработанное и дополненное. М.: Наука, 1983.

[6] Овсеевич А.И. Фильтр Калмана и квантование. Пробл. передачи информ. Том 44. Ном. 1. 2008. p. 59–79.

[7] Пятницкий А.Л., Шамаев А.С. Ассимптотическое поведение собственных значений и собственных функций несамосопряженного оператора в $\mathbb{R}^n$. Труды семинара им. И.Г.Петровского. Том. 23. 2003. стр. 287–308.

[8] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. В четырех томах. М.: Мир, 1977.

[9] Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: изд. "Мир", 1978.

[10] Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. В четырех томах. М.: Мир, 1986–1988.

[11] Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978.

[12] Чечкин А.Г., Шамаев А.С. О фундаментальном решении уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. Доклады Академии Наук. Том 472. Ном. 4. 2017. стр. 383–387.

[13] Чечкин А.Г., Шамаев А.С. О комплексном фундаментальном решении уравнения Шрёдингера. Доклады Академии Наук. Том 473. Ном. 1. 2017. стр. 21–23.

[14] Ширяев А.Н. Вероятность-1, 3-е издание, переработанное и дополненное. М.: МЦНМО, 2004.

[15] Abou–Kandil H., Freiling G., Ionescu V., Jank G. Matrix Riccati Equations: in Control and Systems Theory. Basel: Birkhäuser, 2003.

[16] Albeverio S.,Rozanova O. The Non-viscous Burgers Equation Associated with Random Positions in Coordinate Space: a Threshold for Blow up Behavior // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2009. **19**, N 5, 1-19.

[17] Albeverio S.,Rozanova O. Suppression of Unbounded Gradients in a SDE associated with the Burgers equation // Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), no.1, 241-251.

[18] Berry M. V. Classical Adiabatic Angles and Quantum Adiabatic Phase. J. Phys. A: Math. Gen. Vol. 18. Num. 1. 1985. p. 15–27.

[19] Berry M. V., Hannay J. Classical non-Adiabatic Angles. J. Phys. A: Math. Gen. Vol. 21. Num. 6. 1988. p. L325–L331.

[20] Bielecki T., Pliska S. Risk Sensitive Dynamic Asset Management. J. Appl. Math. and Optimiz. Vol. 37. Num. 3. 1999. p. 337–360.

[21] Bielecki T., Pliska S., and Sherris M. Risk Sensitive Asset Allocation. J. Econ. Dynamics and Contr. Vol. 24. Num. 8. 2000. p. 1145–1177.

[22] Bielecki T., Pliska S. Risk Sensitive Intertemporal CAPM with Application to Fixed Income Management," Automat. Contr., IEEE Trans. Vol. 49, No 3. 2004. P. 420–432.

[23] Bielecki T., Pliska S., Sheu S-J. Risk Sensitive Portfolio Management With Cox-Ingersoll-Ross Interest Rates: the HJB Equation // SIAM J. Cont. Optim. 2005. **44**, 1811-1843

[24] Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. J. of Polit. Econ. Vol. 81. Num. 3. 1973. p. 637–654.

[25] Bogoliubov N. N., Shirkov D. V. Introduction to the Theory of Quantized Fields.Third edition. New York, Chichester, Brisbane, Toronto: John Wiley and Sons, 1980.

[26] Brockett R.W., Clark J.M.C. In: Analysis and Optimization of Stochastic Systems. N.Y.: Acad. Press, 1980. P.299–309.

[27] Chechkin A.G. Explicit Form of the Fundamental Solution to a Second Order Parabolic Operator. Journ. of MAth. Sc. Vol. 210. Num. 4. 2015. p. 545–555.

[28] Cordero-Soto R., Lopez R. M., Suazo E., Suslov S. K. Propagator of a Charged Particle with a Spin in Uniform Magnetic

and Perpendicular Electric Fields. Lett. Math. Phys. Vol. 84. Num. 2–3. 2008. p. 159–178.

[29] Cox, J.C., Ingersoll, J.E., Ross, S.A., A Theory of Term Structure of Interest Rates // Econometrica, vol. 53(1985), pp. 385-407.

[30] Dalfovo F., Giorgini S., Pitaevskii L. P., Stringari S. Theory of Bose-Einstein Condensation in Trapped Gases. Rev. Mod. Phys. Vol.71. 1999. p. 463–512.

[31] Dodonov V. V., Malkin I. A., Man'ko V. I. Integrals of Motion, Green Functions, and Coherent States of Dynamical Systems. Int. J. Theor. Phys. Vol. 14. Num. 1. 1975. p. 37–54.

[32] Doktorov E. V., Malkin I. A., Man'ko V. I. Dynamical Symmetry of Vibronic Transitions in Polyatomic Molecules and Frank-Condon Principle. J. Mol. Spectrosc. Vol.64. 1977. p. 302–326.

[33] Duffie,D., Filipović,D., Schachermayer,W. Affine processes and applications in finance // The Annals of Aplied Probability. 2003. **13**, 984–1053.

[34] Feller W. Two singular diffusion problems // Annals of Mathematics. 1951. **54**, 173-182.

[35] Feynman R. P. The Theory of Positrons. Phys. Rev. Vol. 76. Num. 6. 1949. p. 749–759.

[36] Feynman R. P. Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics. Phys. Rev. Vol. 76. Num. 6. 1949. p. 769–789.

[37] Feynman R. P., Hibbs A. R. Quantum Mechanics and Path Integrals. New York: McGraw–Hill, 1965.

[38] Flügge S. Practical Quantum Mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1999.

[39] Getzler E. A short proof of the local Atiyah–Singer index theorem. Topology. Vol. 25. Num. 1. 1986. p. 111–117.

[40] Hannay J. H. Angle Variable Holonomy in Adiabatic Excursion of an Integrable Hamiltonian. J. Phys. A: Math. Gen. Vol. 18. Num. 2. 1985. p. 221–230.

[41] Hata, H., Sekine, J. Solving long term optimal investment problems with Cox-Ingersoll-Ross interest rates // Advances in Mathematical Economics. 2006. **8**(1), 231–255.

[42] Hata, H. "Down–Side Risk"Probability Minimization Problem with Cox-Ingersoll-Ross's Interest Rates // Asia-Pacific Financial Markets, 2011. DOI: 10.1007/s10690-010-9121-5.

[43] Hazewinkel M., Marcus S.I. On Lie algebras and finit–dimentional filtering. Stochastics. Vol. 7. Num. 1–2. 1982. p. 29–62.

[44] Heston, S. L. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options // The Review of Financial Studies. 1993. **6**, 327–343.

[45] Ikeda N., Watanabe S Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. Amsterdam: North-Holland, 1981. xiv+464 p.

[46] Kagan Yu., Surkov E. L., Shlyapnikov G. V. Evolution of Bose Gas in Anisotropic Time-Dependent Traps. Phys. Rev. A . Vol.55. Num. 1. 1997. p. R18–R21.

[47] Kalman R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems. Journal of Basic Engineering. V. 82, No 1. 1960. p. 35–45.

[48] Kalman R.E. On the General Theory of Control Systems: Proc. I Intern. Conf. on Automatic Control. M., 1960.

[49] Kalman R.E., Bucy R.S. New results in linear filtering and prediction theory. Trans. ASME Ser. D. J. Basic Engrg. Vol. 83. 1961. p. 95–108.

[50] Karney C. F. F. Fokker–Planck and Quasilinear Codes. Computer Physics Report. Vol.4. Num. 3–4. 1986. p. 183–244.

[51] Kerbel G. D., McCoy M. G. Kinetic Theory and Simulation of Multispecies Plasmas in Tokamaks Excited with Electromagnetic Waves in the Ion-Cyclotron Range of Frequencies. Phys. Fluids. Vol.28. 1985. p. 3629–3649.

[52] Kivshar Yu. S., Alexander T. J., Turitsyn S. K. Nonlinear Modes of a Macroscopic Quantum Oscillator. Phys. Lett. A. Vol.278. Num. 1. 2001. p. 225–230.

[53] Klauder J. R., Sudarshan E. C. G. Fundamentals of Quantum Optics. New York: Benjamin, 1968.

[54] Korshunova A., Rozanova O. On effects of stochastic regularization for the pressureless gas dynamics // Proceedings of the International Conference on "Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications June 15-19, 2010, Beijing, China (в печати). (E-print: arXiv:0908.2084).

[55] Kruskal M. Asymptotic Theory of Hamiltonian and Other Systems with all Solutions Nearly Periodic. J. Math. Phys. Vol. 3. 1962. p. 806–828.

[56] Lancaster P., Rodman L. Algebraic Riccati Equations. Oxford: Clarendon Press, 1995.

[57] Landau L. D., Lifshitz E. M. Quantum Mechanics: Nonrelativistic Theory. Oxford: Pergamon Press, 1977.

[58] Leach P. G. L. Berry's Phase and Wave Functions for Time-Dependent Hamiltonian Systems. J. Phys. A: Math. Gen. Vol. 23. 1990. p. 2695–2699.

[59] Levin J.J. On the Matrix Riccati Equation. Proceedings of the American Mathematical Society. Vol. 10. Num. 4. 1959. p. 519–524.

[60] Major F. G., Gheorghe V. N., Werth G. Charged Particle Traps. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.

[61] Malkin I. A.,Man'ko V. I., Trifonov D. A. Invariants and the Evolution of Coherent States for a Charged Particle in a Time-Dependent Magnetic Field. Phys. Lett. A.. Vol. 30. Num. 7. 1969. p. 414.

[62] Martynov, M. A., Rozanova, O.S. A certain estimate of volatility through return for stochastic volatility models. https://arxiv.org/pdf/1009.5129.pdf.

[63] Maslov V. P., Fedoriuk M. V. Semiclassical Approximation in Quantum Mechanics. Dordrecht, Boston: Reidel, 1981.

[64] McKean H.P., jr. Stochastic Integrals. N.Y.: Acad. Press, 1969. xiii+140 p.

[65] Meiler M., Cordero-Soto R., Suslov S. K. Solution of the Cauchy Problem for a Time-Dependent Schrödinger Equation. J. Math. Phys. Vol. 49. Num. 7. 2008. 072102.

[66] Øksendal B. Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications. Fifth Edition, Corrected. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1998.

[67] Pardoux E., Veretennikov A. On the Poisson Equation and Diffusion Approximation 1. Ann. Probab. Vol. 29. Num. 3. 2001. p. 1061–1085.

[68] Pardoux E., Veretennikov A. On the Poisson Equation and Diffusion Approximation 2. Ann. Probab. Vol. 31. Num. 3. 2003. p. 1166–1192.

[69] Pardoux E., Veretennikov A. On the Poisson Equation and Diffusion Approximation 3. Ann. Probab. Vol. 33. Num. 3. 2005. p. 1111–1133.

[70] Risken H. The Fokker-Planck Equation. Methods of Solution and Applications. NY.: Springer, 1989, 2ed.

[71] Suslov S. K. Dynamical Invariants for Variable Quadratic Hamiltonians. Physica Scripta. Vol. 81. Num. 5. 2010. 55006 (11 pp).

[72] Suslov S. K. Quantum integrals of motion for variable quadratic Hamiltonians. Ann. Physics. Vol. 325. Num. 9. 2010. p. 1884–1912.

[73] Weil A. Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. Acta math. Vol. 111. 1964. p. 143–211.

[74] Wolf K. B. On Time-Dependent Quadratic Hamiltonians. SIAM J. Appl. Math. Vol. 40. Num. 3. 1981. p. 419–431.

[75] Yau S. S.-T. Computation of Fokker-Planck Equation. Quart. Appl. Math. Vol. 62. Num. 4. 2004. p. 643–650.

[76] Yeon K. -H., Lee K. -K., Um Ch. -I., George T. F., Pandey L. N. Exact Quantum Theory of a Time-Dependent Bound Hamiltonian Systems. Phys. Rev. A. Vol. 48. Num. 4. 1993. p. 2716–2720.

[77] Zakai M. On the Optimal Filtering Diffusion Process. Ztschr. Wahrseheinlichkeitstheor. und verw. Geb. 1969. Bd. 11. s. 230–249.