ТАМБОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Г.Р. ДЕРЖАВИНА

На правах рукописи

Бенараб Сарра

ТЕОРЕМЫ ОБ ОПЕРАТОРНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ В ИССЛЕДОВАНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление.

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель –
доктор физико-математических наук,
доцент Жуковский С.Е.

Тамбов 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$P(\mathbb{N})$ — множество возрастающих последовательностей натуральных чисел;

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$;

$X = (X, \succeq)$ — частично упорядоченное пространство;

$\mathcal{O}_X(u) := \{x \in X : x \preceq u\}$;

$[v, u] := \{x \in X : \ v \preceq x \preceq u\}$;

$Y = (Y, \vartheta)$ — непустое множество с определенным на нем рефлексивным бинарным отношением ϑ;

$\mathcal{O}_Y(w) := \{y \in X : \ y \,\vartheta\, w\}$;

$I : X \to X$ — тождественный оператор, т. е. $I(x) = x$ при любом $x \in x$;

$\mathrm{Coin}_U(\psi, \varphi) := \{x \in X : \ \psi(x) = \varphi(x), \ x \in U\}$ — множество точек совпадения отображений $\psi, \varphi : X \to Y$, принадлежащих $U \subset X$;

$\mathrm{Cov}[f] := \big\{(u, y) \in X \times Y : \ y \,\vartheta\, f(u) \ \Rightarrow \ \exists x \in X \ \ f(x) = y, \ x \preceq u\big\}$ — множество упорядоченного накрывания отображения $f : X \to Y$;

$\mathrm{Dcr}[f] := \big\{(u, y) \in X \times Y : \ \forall x \in X \ \ f(x) = y, \ \ u \preceq x \ \Rightarrow \ y \,\vartheta\, f(u)\big\}$ — множество антитонности отображения $f : X \to Y$;

M^n — пространство измеримых (по Лебегу) функций $[0, 1] \to \mathbb{R}^n$;

L^n — пространство суммируемых (по Лебегу) функций $[0, 1] \to \mathbb{R}^n$;

AC^n — пространство абсолютно непрерывных функций $[0, 1] \to \mathbb{R}^n$.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. В исследованиях различных вопросов теории дифференциальных и интегральных уравнений часто бывают необходимы оценки решений. Одним из основных источником таких оценок являются утверждения о неравенствах типа теоремы Чаплыгина. В 1919 г. С.А. Чаплыгиным для дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(t, x), \ t \geq 0, \tag{0.0.1}$$

было получено следующее утверждение.

Теорема Чаплыгина [115]. *Пусть функция* $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна,* $A \in \mathbb{R}$. *Если для некоторой дифференцируемой функции* ϑ *выполнено*

$$\dot{\vartheta}(t) > f(t, \vartheta(t)), \ t \geq 0, \tag{0.0.2}$$

и $\vartheta(0) \geq A$, *то любое решение уравнения* (0.0.1) *с условием* $x(0) = A$ *удовлетворяет неравенству* $x(t) < \vartheta(t), \ t > 0$.

В теореме Чаплыгина существенно, что уравнение скалярное, а функция f непрерывна. Уже в случае, когда f удовлетворяет условиям Каратеодори, такое утверждение оказывается неверным, и возникает вопрос об условиях, позволяющих получать из неравенства (0.0.2) оценку решения дифференциального уравнения. Кроме проблемы распространения теоремы Чаплыгина на системы уравнений, в которых левые части определяются разрывными функциями, актуальными являются задачи о получении аналогичных оценок для краевых задач, систем управления, интегральных, интегро-дифференциальных и других функциональных уравнений, а также уравнений неявного вида. Литература, посвященная распространению и обобщению теоремы Чаплыгина о дифференциальном неравенстве обширна, этим вопросам начиная с 50-х годов XX века посвящены многочисленные публикации (см., например, монографии [27, 30, 32, 36, 50, 104]). Привлечению авторов к этой тематике во многом способствовала статья Н.Н. Лузина [101] (написанная на основе его доклада в Институте автоматики и телемеханики АН СССР 12.12.1941 о «развитии идей С.А. Чаплыгина в области приближенного интегрирования»). Общие утверждения об интегральных и дифференциальных неравенствах, включая неравенства для краевых задач получены Н.В. Азбелевым (см. [88, раздел 1]). Неравенства типа Чаплыгина входят в базовые разделы современной теории дифференциальных и интегральных уравнений (см., например, [49, 93, 97, 114]), находят многочисленные приложения в теории устойчивости, теории управления, теории оптимального управления и теории игр, в приближенных методах и в математических моделях (см. [2, 14, 22, 24, 29, 43, 69, 99, 106]), остаются актуальным объектом изучения во многих современных работах (см. статьи [19, 33, 35, 71, 89, 95, 100, 105, 116] и имеющиеся в них библиографические списки).

Несмотря на обилие публикаций по неравенствам, утверждения типа теоремы Чаплыгина для неявных дифференциальных уравнений (т. е. не разрешенных относительно производной искомой функции), в литературе практически отсутствуют. Безусловно такие дифференциальные неравенства могли бы играть в теории неявных уравнений такую же важную роль, как и в теории уравнений, разрешенных относительно производной. Отметим, что изучение неявных дифференциальных уравнений актуально не только для теории дифференциальных уравнений, смежных разделов анализа, но и для приложений (см. [34, 44, 45, 65, 68, 70, 72–74, 108]).

Распространение утверждений о неравенствах типа теоремы Чаплыгина на неявные дифференциальные уравнения в диссертации основано на результатах об операторных неравенствах с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в произвольное множество. Эти результаты представляют интерес для анализа, могут использоваться также и для краевых задач, и для систем управления, и для других видов неявных уравнений. Некоторые из таких приложений демонстрируются в диссертации.

Степень разработанности темы исследования. Получению теорем типа Чаплыгина, нахождению оценок решений дифференциальных и интегральных уравнений посвящены многочисленные исследования (см., [27, 30, 32, 36, 50, 104] и представленную в этих монографиях библиографию). В частности, еще в 50–60-е годы прошлого века в работах Н.В Азбелева, З.Б. Цалюка [38, 41, 42] подробно рассмотрена проблема определения границ применимости теоремы С.А. Чаплыгина для систем дифференциальных уравнений, расширены области использования неравенств (устойчивость, приближенные методы, оценки решений). В дальнейшем методы, основанные на дифференциальных и интегральных неравенствах нашли новые приложения в исследовании свойств решений, различных вопросов управления и оптимизации, при построении алгоритмов численного решения (см. книги [31, 67, 96, 111, 107], содержащие достаточно полную библиографию, а также статьи [9, 23, 28, 102]). Исследование новых классов функциональных уравнений (функционально-дифференциальных, дифференциально-алгебраических, гибридных дифференциально-разностных и др.) потребовало изучения операторных неравенств в различных функциональных пространствах [39]. В [40, 80] получены подобные утверждения для пространства $L_p,\ 1 \leqslant p < \infty$, упорядоченного «естественным конусом» неотрицательных функций. На абстрактные «вольтеррово упорядоченные» пространства эти результаты распространены в [81]. В [80, 81] получены утверждения об интегральных, дифференциальных и функционально-дифференциальных неравенствах в случае, когда порождающие уравнения функции могут иметь разрывы по фазовой переменной (но должны быть возрастающими по фазовой переменной).

Большинство перечисленных результатов используют теоремы о неподвижных точках монотонных операторов частично упорядоченных пространств (приведенные, например, в [98, 111]). Развитию теории неподвижных точек монотонных операторов, другим вопросам анализа отображений частично упорядоченных пространств и его применениям в изучении уравнений различных классов посвящена многочисленная современная литература (см., например, [1, 3, 8, 12, 13, 15, 18, 20, 21, 25]). Однако, теоремы о неподвижных точках оказываются неэффективными при исследовании неявных уравнений. Новые возможности в получении теорем типа Чаплыгина для неявных дифференциальных, интегральных уравнений открыли исследования А.В. Арутюнова, Е.С. Жуковского, С.Е. Жуковского [5–7, 46–48] накрывающих отображений частично упорядоченных пространств. В перечисленных работах получены утверждения о точках совпадения упорядоченно накрывающего и монотонного отображений, действующих из частично упорядоченного пространства X в частично упорядоченное пространство Y. В частном случае, когда $X = Y$, а одно из отображений тождественное, из полученных утверждений следуют известные теоремы Тарского–Канторовича (см. [16, с. 27]), Биркгофа–Тарского (см. [103, с. 265], Кнастера–Тарского (см. [16, с. 26] или [64, с. 88]), Смитсона (см. [26]) о неподвижных точках монотонных отображений. Также в работах [5–7, 46–48] рассмотрен метод введения порядка в метрических пространствах, позволяющий применить утверждения об отображениях частично упорядоченных пространств к уравнениям в метрических пространствах и, в частности, получить классические теоремы существования неподвижных точек однозначных и многозначных отображений метрических пространств (теоремы Банаха [11], Надлера [66, § 2.1.1] и теоремы об обобщенном сжатии), а также их обобщения, в том числе, утверждения о точках совпадения накрывающих и липшицевых отображений.

Развитию этих результатов и их приложениям к интегральным, дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям посвящены исследования [17, 77–79, 82, 83, 86, 87, 109, 110, 113]. С использованием утверждений об упорядоченно накрывающих отображениях в [83] получены условия разрешимости и оценки решений задачи Коши для неявного дифференциального уравнения (в виде теорем типа Чаплыгина), в [82] аналогичными методами получены теоремы о неявных интегральных неравенствах в пространствах суммируемых функций, а в [79] — теоремы о неявных дифференциальных неравенствах с отклоняющимся аргументом.

Цели и задачи. Основной целью работы является распространение результатов о точках совпадения на отображения, действующие из частично упорядоченного пространства в неупорядоченные множество, и разработка на этой основе методов исследования задачи Коши, краевых задач и систем управления для неявных дифференциальных уравнений. Основными задачами работы являются:

– получение теорем о точках совпадения отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в неупорядоченные множество;

– исследование разрешимости и получение оценок решений функциональных уравнений в пространствах измеримых функций;

– исследование разрешимости и получение оценок решений задачи Коши для неявного дифференциального уравнения (в форме утверждений типа теоремы Чаплыгина);

– исследование разрешимости и получение оценок решений периодической краевой задачи для неявного дифференциального уравнения (в форме утверждений типа теоремы Чаплыгина);

– исследование разрешимости и получение оценок решений задачи управления для неявного дифференциального уравнения (в форме утверждений типа теоремы Чаплыгина).

Научная новизна. Выносимые на защиту положения являются новыми и получены автором самостоятельно.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты значимы для общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложений, теории интегральных уравнений, теории управления и для смежных разделов анализа.

Методология и методы исследования. При исследовании уравнений с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в неупорядоченное множество, вводятся специальные бинарные отношения на подмножествах рассматриваемых пространств и используются результаты теории частично упорядоченных пространств (в частности, теорема Хаусдорфа о максимальной цепи). В случае секвенциальной полноты соответствующих пространств используются итерационные методы доказательства существования решений уравнений. Для отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в произвольное множество водится и исследуется понятие устойчивости точек совпадения к изменениям отображений. В исследовании функциональных уравнений в пространствах измеримых функций используются методы теории функций, результаты многозначного анализа (в том числе, лемма Филиппова о неявной функции) и полученные в диссертации утверждения о точках совпадения отображений. В исследовании задачи Коши для неявного дифференциального уравнения определяется эквивалентное интегральное уравнение в пространстве суммируемых функций (производных решения исходного дифференциального уравнения), и к этому уравнению применяются полученные в диссертации результаты об уравнениях с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в произвольное множество. В исследовании периодической краевой задачи для неявного дифференциального уравнения используется редукция с помощью функции Грина вспомогательной задачи к интегральному уравнению в пространстве суммируемых функций, затем также применяются полученные в диссертации результаты об операторных уравнениях. При исследовании управляемых систем применяются полученные в диссертации утверждения о задаче Коши и периодической краевой задаче.

Положения, выносимые на защиту.

1. Утверждения о существовании и оценках точек совпадения двух отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в множество с бинарным отношением; утверждения о существовании и оценках точек совпадения двух отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в множество, на котором не задано бинарное отношение; условия устойчивости точек совпадения

двух отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в множество, на котором не задано бинарное отношение.

2. Утверждения о существовании и оценках решений операторных уравнений с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в множество с бинарным отношением; утверждения о существовании и оценках решений операторных уравнений с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в множество, на котором не задано бинарное отношение.

3. Утверждения (типа теоремы Чаплыгина) о существовании и оценках решений системы функциональных уравнений в пространстве измеримых функций.

4. Утверждения (типа теоремы Чаплыгина) о существовании и оценках решений задачи Коши для системы неявных дифференциальных уравнений.

5. Утверждения (типа теоремы Чаплыгина) о существовании и оценках решений периодической краевой задачи для системы неявных дифференциальных уравнений.

6. Утверждения (типа теоремы Чаплыгина) о существовании и оценках решений системы управления для неявных дифференциальных уравнений.

Степень достоверности и апробация. Все результаты диссертации снабжены подробными доказательствами и опубликованы в рецензируемых научных изданиях. Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

– Тамбовский городской семинар по теории функционально-дифференциальных уравнений и включений, Тамбов, Россия (2019, 2020, 2021).

– Международная научная конференция «Колмогоровские чтения – VIII. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ-2018)», посвященная 115-летию со дня рождения А.Н. Колмогорова и 100-летию Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина, Тамбов, Россия (2018).

– Summer school «Identification and Control: some challenges», Monastir, Tunisia (2019).

– Международная Воронежская весенняя математическая школа «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXX», Воронеж, Россия (2019).

– Международная конференция «Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019), посвященная 95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского, Екатеринбург, Россия (2019).

– International scientific OTHA online workshop on operator theory and harmonic analysis and their applications, Online, Russia (2020).

– Всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование (CTMM 2020)», посвященная памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова, Ижевск, Россия (2020).

– International e-Conference on Nonlinear Analysis and its Application (ICNAA 2020), Online, India.

– Международная научная конференция «Колмогоровские чтения – IX.

Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ-2020)», посвященная 70-летию профессора А.И. Булгакова, Тамбов, Россия (2020).

– III Международный семинар «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби (CGS'2020)», Екатеринбург, Россия (2020).

– Научный семинар «Нелинейный анализ и его приложения» кафедры «Функциональный анализ и его приложения» ВлГУ, Владимир, Россия (2021).

Публикации. Результаты данной диссертации опубликованы в 12 работах [51–62]. Работы [54, 55, 57–61] опубликованы в журналах из перечня ВАК, из них три работы [57, 60, 61] — в изданиях, входящих в системы цитирования Web of Science Core Collection и Scopus, и две работы [54, 55] в издании, индексирующемся в Web of Science Russian Science Citation Index.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, каждая из которых содержит 2 параграфа, разбитых на пункты, заключения, списка обозначений и списка литературы. Общий объем работы составляет 119 страниц. Список литературы содержит 117 наименований.

Приведем основные положения и результаты диссертации (сохраняя нумерацию утверждений и формул из основного текста).

Во введении описаны актуальность темы исследования и степень ее разработанности, поставлены цели и задачи, аргументирована научная новизна, достоверность, теоретическая и практическая значимость результатов, перечислены использованные методы, выносимые на защиту положения, публикации и доклады по теме диссертации, кратко изложена структура работы.

В главе 1 получены условия существование и оценки решений абстрактных уравнений с отображениями, определенными на частично упорядоченных пространствах. При этом область значений рассматриваемых отображений может быть либо алгебраической системой с рефлексивным бинарным отношением, либо произвольным множеством. В первом случае на рассматриваемые отображения удается перенести определения упорядоченного накрывания [5, 6, 46, 47] и монотонности. Во втором случае используется другой подход, позволяющий определить цепь последовательных приближений к искомому решению.

В параграфе 1.1 предлагается распространение теорем о точках совпадения на отображения, действующие из частично упорядоченного пространства X в множество Y, не являющееся упорядоченным. Параграф содержит три пункта. В пункте 1.1.1 понятия упорядоченного накрывания и монотонности распространены на отображения, действующие из частично упорядоченного пространства в множество с рефлексивным отношением, получены условия существования точек совпадения таких отображений (см. теорему 1.1.1). В пункте 1.1.2 получены теоремы 1.1.2 и 1.1.3 о точках совпадения отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в множество, на котором не задано бинарное отношение. Учитывая, что в этой ситуации отображения не могут обладать ни свойством монотонности, ни свойством накрывания, здесь используется иная идея, основанная на предположении, что для любой пары $(x', x) \in X \times X$ такой, что $x' \preceq x$, $\psi(x') = \varphi(x)$, существует «меньшая пара» $(u, u') \in X \times X$ для которой также справедливы соотношения $u' \preceq u$ и $\psi(u') = \varphi(u)$. Также в этом пункте демонстрируется как из доказанных здесь теорем выводится теорема 1.1.1 (а следовательно, и теоремы о точках совпадения накрывающего и монотонного отображений, полученные в работах [5], [46]). В заключительном пункте 1.1.3 определяется и исследуется понятие устойчивости точек совпадения отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в множество, на котором не задано бинарное отношение.

Приведем основные утверждения, представленные в параграфе 1.1.

Пусть $X = (X, \preceq)$ — частично упорядоченное пространство, $Y \neq \emptyset$. Для произвольного $u \in X$ обозначим $\mathcal{O}_X(u) := \big\{x \in X : x \preceq u\big\}$. Пусть заданы отображения $\psi, \varphi : X \to Y$. *Точкой совпадения* этих отображений называют элемент $\xi \in X$ такой, что

$$\psi(\xi) = \varphi(\xi).$$

Пусть задано непустое множество $\mathcal{X} \subset X$. Определим множество $\Sigma(\mathcal{X}, \psi, \varphi)$ цепей S в пространстве X, $S \subset \mathcal{X}$, для которых выполнены соотношения

$$\forall x \in S \ \exists x' \in \mathcal{O}_X(x) : \begin{cases} \psi(x') = \varphi(x), \\ \forall u \in S \ \ u \prec x \ \Rightarrow \ u \preceq x'. \end{cases}$$

Теорема 1.1.2. *Пусть выполнены следующие условия:*

(a) *существуют $x_0, x_0' \in X$ такие, что $x_0' \preceq x_0$ и $\psi(x_0') = \varphi(x_0)$;*

(b) *для любых $x, x' \in \mathcal{O}_X(x_0)$ таких, что $x' \prec x$, $\psi(x') = \varphi(x)$, существуют элементы $u, u' \in X$, для которых справедливы соотношения $u' \preceq u \preceq x'$ и $\psi(u') = \varphi(u)$;*

(c) *для любой бесконечной цепи $S \in \Sigma(\mathcal{O}_X(x_0), \psi, \varphi)$ существуют элементы $w, w' \in X$ такие, что*

$$\forall x \in S \ \ w' \preceq w \preceq x, \quad \psi(w') = \varphi(w).$$

Тогда во множестве $\mathcal{O}_X(x_0')$ существует точка совпадения отображений ψ, φ.

В пункте 1.1.2 также демонстрируется, как из теоремы 1.1.2 выводятся утверждения о точках совпадения накрывающего и монотонного отображений, действующих из частично упорядоченного пространства X в пространство Y с рефлексивным бинарным отношением ϑ (в частности, если ϑ — отношение порядка), в том числе соответствующие теоремы, полученные в работах [5, 6, 46, 47].

В пункте 1.1.3 определяется понятие устойчивости точек совпадения к изменениям отображений. Пусть $P(\mathbb{N})$ — совокупность всех возрастающих последовательностей натуральных чисел. Полагаем, что задана точка совпадения $\xi \in X$ отображений $\psi, \varphi : X \to Y$. Пусть также заданы отображения $\psi_i, \varphi_i : X \to Y,\ i \in \mathbb{N}$. Рассмотрим последовательность уравнений

$$\psi_i(x) = \varphi_i(x), \quad i \in \mathbb{N}. \tag{1.1.15}$$

Сформулируем условия, обеспечивающие существование при каждом i решения $\xi_i \in X$ уравнения (1.1.15) — точки совпадения отображений ψ_i, φ_i и «сходимость» последовательности $\{\xi_i\}$ к точке ξ, которая понимается следующим образом:

$$\forall \{i_n\} \in P(\mathbb{N}) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\xi_{i_n}\} = \xi. \tag{1.1.16}$$

Теорема 1.1.4. *Пусть в пространстве $(X, \preceq)$ множество из любых двух элементов имеет точную нижнюю границу*[1]*, при каждом $i \in \mathbb{N}$ выполнены следующие условия:*

(a$_\mathrm{i}$) *существует $\xi'_i \in \mathcal{O}_X(\xi)$ такой, что $\psi_i(\xi'_i) = \varphi_i(\xi)$;*

(b$_\mathrm{i}$) *для любых $x, x' \in \mathcal{O}_X(\xi)$ таких, что $x' \prec x$ и $\psi_i(x') = \varphi_i(x)$, существуют $u, u' \in X$, для которых справедливы соотношения $u' \preceq u \preceq x'$ и $\psi_i(u') = \varphi_i(u)$;*

[1]Такое частично упорядоченное пространство называют полурешеткой (см., например, [63, с.38, 39])

($\mathrm{c_i}$) *для любой бесконечной цепи* $S \in \Sigma(\mathcal{O}_X(\xi), \psi_i, \varphi_i)$ *существуют такие* $w_i, w_i' \in X$, *что*

$$\forall x \in S \;\; w_i' \preceq w_i \preceq x, \quad \psi_i(w_i') = \varphi_i(w_i).$$

Пусть, кроме того, для любого $x \prec \xi$ *существует такое* N, *что при всех* $i > N$ *во множестве* $\mathcal{O}_X(x)$ *нет точек совпадения отображений* ψ_i, φ_i. *Тогда при любом* i *существует точка совпадения* ξ_i *отображений* ψ_i, φ_i *такая, что для последовательности* $\{\xi_i\}$ *имеет место соотношение* (1.1.16).

В параграфе 1.2 рассматриваются различные операторные уравнения с отображениями, определенными на частично упорядоченных пространствах. В первых двух пунктах для заданных отображений $\Phi : X \times X \to Y$ и элемента $\tilde{y} \in Y$ рассматривается уравнение вида

$$\Phi(x, x) = \tilde{y} \tag{1.2.1}$$

с неизвестным $x \in X$. Как и выше, пространство X предполагается упорядоченным. В пункте 1.2.1 рассматривается ситуация, когда на Y определено рефлексивное бинарное отношение, отображение Φ по первому аргументу является упорядоченно накрывающим, а по второму — антитонным. Полученная в этом пункте теорема 1.2.1 о существовании решения рассматриваемого уравнения означает, что свойство накрывания устойчиво к антитонным возмущениям. В этом смысле теорема 1.2.1 восходит к известной теореме Милютина (см. [76]) о липшицевых возмущениях накрывающих отображений, действующих из метрического в нормированное пространство. Устойчивость свойства накрывания в случае, когда оба пространства X, Y частично упорядоченные исследовалась в [77, 82, 83, 87].

В цитируемых работах также показано, что утверждения об устойчивости «метрического накрывания» (в том числе, теорема Милютина) выводятся из утверждений об устойчивости «упорядоченного накрывания», для этого в метрическом пространстве следует определить порядок Бишопа-Фелпса (определение такого порядка см. [92, теорема 7.5.1]), или аналогичный порядок Брондстеда (см. [10]).

В пункте 1.2.2 определяются множества накрывания и антитонности отображений, действующих из частично упорядоченного пространства $(X, \preceq)$ в пространство Y с рефлексивным бинарным отношением $\vartheta \subset Y \times Y$. Эти определения распространяют аналогичные определения, данные в [82] для отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в частично упорядоченное пространство. На основании введенных понятий в этом пункте доказываются теорема 1.2.2 о разрешимости уравнения (1.2.1), позволяющая несколько ослабить предположения теоремы 1.2.1. Сформулируем это утверждение.

Для произвольного отображения $f : X \to Y$ определим множества:

$$\mathrm{Cov}[f] := \big\{(u, y) \in X \times Y : \ y\,\vartheta\, f(u) \ \Rightarrow \ \exists x \in X \ \ f(x) = y, \ \ x \preceq u\big\},$$
$$\mathrm{Dcr}[f] := \big\{(u, y) \in X \times Y : \ \forall x \in X \ \ f(x) = y, \ \ u \preceq x \ \Rightarrow \ y\,\vartheta\, f(u)\big\},$$

первое из которых названо *множеством (упорядоченного) накрывания отображения* f, а второе — *множеством антитонности* f.

Отметим, что соотношение $\mathrm{Cov}[f] = X \times Y$ равносильно упорядоченному накрыванию отображения f, а соотношение $\mathrm{Dcr}[f] = X \times Y$ — антитонности отображения f. Приведенное определение множества $\mathrm{Cov}[f]$ аналогично данному в [82] определению множества упорядоченного накрывания отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в частично упорядоченное пространство.

Пусть $\mathcal{X} \subset X$. Определим совокупность $\widetilde{\Xi}(\mathcal{X}, \Phi, \tilde{y})$ всех цепей $S \subset X$, удовлетворяющих условию

$$\begin{cases} \forall x \in S \;\; \tilde{y}\,\vartheta\,\Phi(x,x), \\ \forall x, u \in S \;\; x \prec u \;\Rightarrow\; \exists \zeta \in [x,u] \;\; \tilde{y}\,\vartheta\,\Phi(\zeta,\zeta), \;\; \Phi(x,\zeta) = \tilde{y}. \end{cases}$$

Теорема 1.2.2. *Пусть существует элемент* $x_0 \in X$ *такой, что* $\tilde{y}\,\vartheta\,\Phi(x_0,x_0)$, *и пусть любая цепь* $S \subset \widetilde{\Xi}(\mathcal{O}_X(x_0), \Phi, \tilde{y})$ *имеет нижнюю границу* $v \in X$, *для которой* $\tilde{y}\,\vartheta\,\Phi(v,v)$. *Предположим также, что для любого* $x \in \mathcal{O}_X(x_0)$ *справедливы включения*

$$(x, \tilde{y}) \in \mathrm{Cov}[\Phi(\cdot, x)], \quad (x, \tilde{y}) \in \mathrm{Dcr}[\Phi(x, \cdot)].$$

Тогда существует решение $x = \xi \in \mathcal{O}_X(x_0)$ *уравнения* (1.2.1).

Далее в пункте 1.2.2 показано, что из доказанной здесь теоремы 1.2.2 выводятся утверждения о точках совпадения отображений $\psi, \varphi : X \to Y$, полученные в параграфе 1.1 (а следовательно, и утверждения о точках совпадения, полученные в работах [77, 82, 83, 87]).

В пункте 1.2.3 исследуются уравнения более общего вида чем (1.2.1) с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства $(X, \preceq)$ в множество $Y \neq \emptyset$, на котором не задано никакое бинарное отношение. Получены условия существования решений, установлена связь доказанного утверждения с теоремами 1.2.1 и 1.2.2 об уравнении (1.2.1), теоремами 1.1.2 и 1.1.3 о точках совпадения, а также с известными результатами о неподвижных точках. Сформулируем основные результаты этого пункта.

Пусть определены отображения $F, G : X \times X \to Y$. Рассмотрим урав-

нение
$$F(x,x)=G(x,x). \tag{1.2.8}$$
Частными случаями уравнения (1.2.8) являются уравнение, определяющее точку совпадения отображений $\psi,\varphi : X\to Y$ (в случае, когда отображения $F(x,\cdot)$ и $G(\cdot,x)$ постоянны при любом x, т.е. $F(x,\cdot)=\mathrm{const}=\psi(x)$ и $G(\cdot,x)=\mathrm{const}=\varphi(x)$) и уравнение 1.2.1 (которое соответствует ситуации $G(\cdot,\cdot)=\mathrm{const}=\tilde{y}$).

Пусть задано непустое множество $\mathcal{X}\subset X$. Определим совокупность $\Xi(\mathcal{X},F,G)$ цепей S в пространстве X таких, что $S\subset\mathcal{X}$ и выполнено соотношение:
$$\forall u\in S\ \ \exists x\in X\ \ x\preceq u,\quad F(x,u)=G(x,u).$$

Теорема 1.2.3. *Пусть выполнены следующие условия:*

(a) *существуют* $u_0\in\mathcal{X}$, $x_0\in X$ *такие, что* $x_0\preceq u_0$ *и* $F(x_0,u_0)=G(x_0,u_0)$;

(b) *для любых* $u\in\mathcal{X}$, $x\in X$ *таких, что* $x\prec u$, $F(x,u)=G(x,u)$, *найдутся элементы* $v\in\mathcal{X}$, $w\in X$, *для которых* $w\preceq v\prec u$ *и* $F(w,v)=G(w,v)$;

(c) *для произвольной бесконечной цепи* $S\in\Xi(\mathcal{X},F,G)$ *существуют элементы* $\widetilde{v}\in\mathcal{X}$, $\widetilde{w}\in X$, *удовлетворяющие соотношениям*
$$\forall u\in S\ \ \widetilde{w}\preceq\widetilde{v}\preceq u,\quad F(\widetilde{w},\widetilde{v})=G(\widetilde{w},\widetilde{v}).$$

Тогда существует решение $x=\xi\in\mathcal{X}$ *уравнения* (1.2.8) *такое, что* $\xi\preceq u_0$.

Представленные в параграфе 1.2 утверждения иллюстрируются примерами. В частности, приведен пример 1.2.2 действительной функции, к которой не применимы известные теоремы о неподвижной точке, и тем не менее существование неподвижной точки устанавливается с помощью полученных здесь утверждений.

Глава 2 посвящена исследованию разрешимости и свойств решений функциональных и дифференциальных уравнений. Глава содержит два параграфа.

В параграфе 2.1 рассматривается система функциональных уравнений относительно неизвестной измеримой (по Лебегу) функции $x : [0,1] \to \mathbb{R}^n$. Предлагаются условия разрешимости и оценки решений в виде утверждений типа теоремы Чаплыгина о неравенстве. Отметим, что в случае, если порождающая систему функция удовлетворяет условиям Каратеодори, существование решения можно исследовать с помощью леммы Филиппова [112] (см. также [66, теорема 1.5.15]). Если эта функция не является непрерывной, к исследованию системы функциональных уравнений можно применить утверждения о накрывающих отображениях. Исследование функциональных уравнений и включений с использованием теорем об антитонных возмущениях накрывающих отображений, действующих в частично упорядоченных пространствах, начато в работах [78, 85, 86]. В диссертации применяется теорема 1.2.3, что позволяет ослабить предположения цитируемых работ на функцию, порождающую систему.

Параграф содержит два пункта. В пункте 2.1.1 доказана теорема о разрешимости и оценках решений системы неявных функциональных уравнений (2.1.1). Сформулируем это утверждение.

Обозначим через M^n пространство измеримых (по Лебегу) функций

$x : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ с «обычным» порядком. Пусть задана функция

$$h : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad h(t,u,x) := \big(h_i(t,u_1,\ldots,u_n,x_i)\big)_{i=\overline{1,n}}$$

(здесь $u = (u_1,\ldots,u_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$). Будем предполагать, что для её компонент — функций $h_i : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, при п.в. $t \in [0,1]$, любых $u \in \mathbb{R}^n$ и $x_i \in \mathbb{R}$ выполнено условие

(H↓) *функция* $h_i(\cdot,u,x_i) : [0,1] \to \mathbb{R}$ *является измеримой, функция* $h_i(t,\cdot,x_i) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *убывает и непрерывна справа по каждому аргументу* $u_1,\ldots,u_n$, *функция* $h_i(t,u,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна.*

Рассмотрим систему уравнений

$$h_i\big(t, x_1(t),\ldots,x_n(t), x_i(t)\big) = 0, \quad t \in [0,1], \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.1.2}$$

Решением этой системы будем называть измеримую функцию, удовлетворяющую всем её уравнениям п.в. на $[0,1]$.

Теорема 2.1.1. *Пусть для некоторых функций* $\vartheta, \varsigma \in M^n$, $\vartheta \geq \varsigma$, *при п.в.* $t \in [0,1]$ *выполнены неравенства*

$$h_i(t,\vartheta(t),\vartheta_i(t)) \geq 0, \quad h_i\big(t,\varsigma(t),\varsigma_i(t)\big) \leq 0.$$

Тогда уравнение (2.1.2) *имеет решение* $x \in M^n$ *такое, что* $\varsigma \leq x \leq \vartheta$; *и среди решений уравнения* (2.1.2), *принадлежащих множеству*

$$X = \{x \in M^n : \varsigma \leq x \leq \vartheta\},$$

существует наименьшее.

В пункте 2.1.2 аналогичный результат получен для системы функциональных уравнений, разрешенных относительно неизвестной функции вида

$$x_i(t) = \widetilde{h}_i\big(t, x_1(t),\ldots,x_n(t), x_i(t)\big), \quad t \in [0,1], \quad i = \overline{1,n}.$$

Демонстрируется, что доказанное утверждение не выводится из известных теорем о неподвижных точках Банаха [11], Шаудера (см. [91, с. 627]), Кнастера-Тарского (см. [16, с. 26] или [64, с. 88]).

Параграф 2.2 посвящен изучению неявных дифференциальных уравнений (т. е. не разрешенных относительно производной искомой функции) методами, основанными на полученных в первой главе результатах об уравнениях с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в произвольное множество. Использование этих утверждений позволило получить теоремы типа Чаплыгина для систем неявных дифференциальных уравнений. Более того, удалось ещё и ослабить «традиционные» предположения непрерывности или монотонности по фазовым переменным на функции, порождающие уравнения. Параграф разбит на три пункта. В пункте 2.2.1 доказана теорема типа Чаплыгина о дифференциальном неравенстве для задачи Коши, в пункте 2.2.2 — для периодической краевой задачи, и в пункте 2.2.3 — для задач управления. Сформулируем основные из представленных в параграфе 2.2 результатов.

Обозначим через L^n пространство суммируемых (по Лебегу) на $[0,1]$ n-мерных функций, являющееся подпространством частично упорядоченного пространства M^n, а через AC^n пространство абсолютно непрерывных n-мерных функций.

Пусть заданы функции $f_i : [0,1]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$f_i(t,x,\dot{x},\dot{x}_i)=0, \quad t\in[0,1], \quad i=\overline{1,n}. \tag{2.2.2}$$

Решением системы (2.2.2) будем называть функцию $x\in AC^n$, удовлетворяющую всем уравнениям этой системы при п.в. $t\in[0,1]$.

Пусть при всех $i=\overline{1,n}$ выполнено условие

(F↓) *При п.в. $t\in[0,1]$, любых $x,v\in\mathbb{R}^n$ и $y_i\in\mathbb{R}$ функция $f_i(\cdot,x,v,y_i):[0,1]\to\mathbb{R}$ измерима, функция $f_i(t,\cdot,\cdot,y_i):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ убывает и непрерывна справа по каждому аргументу $x_1,\ldots,x_n$ и $v_1,\ldots,v_n$, функция $f_i(t,x,v,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывна.*

Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.2.1. *Пусть для некоторых функций $\nu,\eta\in AC^n$ таких, что $\nu(0)\geq\eta(0)$ и $\dot\nu\geq\dot\eta$, при п.в. $t\in[0,1]$ выполнены неравенства*

$$f_i(t,\nu(t),\dot\nu(t),\dot\nu_i(t))\geq 0,\quad f_i(t,\eta(t),\dot\eta(t),\dot\eta_i(t))\leq 0,\quad i=\overline{1,n}. \tag{2.2.3}$$

Тогда для любого $A\in\mathbb{R}^n$, для которого $\eta(0)\leq A\leq\nu(0)$, существует решение $x\in AC^n$ задачи Коши для уравнения (2.2.2) с начальным условием

$$x(0)=A, \tag{2.2.4}$$

удовлетворяющее неравенствам

$$\dot\eta\leq\dot x\leq\dot\nu; \tag{2.2.5}$$

кроме того, во множестве решений задачи (2.2.2), (2.2.4), удовлетворяющих неравенствам (2.2.5), существует решение с наименьшей производной.

Теперь приведем условия разрешимости периодической краевой задачи для дифференциального уравнения (2.2.2).

Пусть задана диагональная $n\times n$ - матрица $\lambda:=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$, где $\lambda_i>0$, $i=\overline{1,n}$. По функциям f_i определим функции $g_i^\lambda:[0,1]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, формулой $g_i^\lambda(t,x,v,y_i):=f_i(t,x,v+\lambda x,y_i+\lambda_i x_i)$, $i=\overline{1,n}$. Будем предполагать, что для функций g_i^λ, $i=\overline{1,n}$, выполнено условие

(G$\downarrow$) *При п.в.* $t \in [0,1]$, *любых* $x, v \in \mathbb{R}^n$ *и* $y_i \in \mathbb{R}$ *функция* $g_i^\lambda(\cdot, x, v, y_i) : [0,1] \to \mathbb{R}$ *измерима, функция* $g_i^\lambda(t, \cdot, v, y_i) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *возрастает и непрерывна справа по каждому аргументу* $x_1, \ldots, x_n$, *функция* $g_i^\lambda(t, x, \cdot, y_i) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *убывает и непрерывна справа по каждому аргументу* $v_1, \ldots, v_n$, *функция* $g_i^\lambda(t, x, v, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна.*

При таком предположении имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.2.2. *Пусть для некоторых функций* $\nu, \eta \in AC^n$ *таких, что* $\nu(0) - \nu(1) \geq \eta(0) - \eta(1)$, $\dot{\nu} - \lambda\nu \geq \dot{\eta} - \lambda\eta$, *выполнены неравенства* (2.2.3) *Тогда для любого* $A \in \mathbb{R}^n$ *если* $\eta(0) - \eta(1) \leq A \leq \nu(0) - \nu(1)$, *то существует решение* $x \in AC^n$ *краевой задачи для системы* (2.2.2) *с условием*

$$x(0) - x(1) = A, \tag{2.2.23}$$

удовлетворяющее неравенствам

$$\dot{\eta} - \lambda\eta \leq \dot{x} - \lambda x \leq \dot{\nu} - \lambda\nu; \tag{2.2.24}$$

кроме того, существует наименьшая функция во множестве функций $z := \dot{x} - \lambda x$, *где* x *— решение задачи* (2.2.2), (2.2.23), *удовлетворяющее неравенствам* (2.2.24).

В заключительном пункте 2.2.3 рассматривается задача управления для системы дифференциальных уравнений вида

$$f_i(t, x, \dot{x}, \dot{x}_i, u) = 0, \quad t \in [0,1], \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.2.29}$$

где $f_i : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$. Управление u предполагается измеримой функцией. Теоремы 2.2.1 и 2.2.2 позволяют показать, что при соответствующих предположениях для каждого u из некоторого заданного множества управлений существует решение $x = x_u \in AC^n$ этой системы с начальным условием (2.2.4) или с краевым условием (2.2.23).

Итак, пусть для двух заданных управлений $\underline{u}, \overline{u} \in M^m$ система (2.2.29) разрешима, ее решениями являются некоторые абсолютно непрерывные функции $x_{\underline{u}} = \eta$, $x_{\overline{u}} = \nu$.

Теорема 2.2.4. *Пусть при* $i = \overline{1,n}$ *функция* $f_i(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,u) : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *для любого* $u \in \mathbb{R}^m$ *удовлетворяет условию* $(\mathbf{F}\!\downarrow)$, *а функция* $f_i(t,x,v,y_i,\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *при п.в.* $t \in [0,1]$, *любых* $x, v \in \mathbb{R}^n$ *и* $y_i \in \mathbb{R}$ *возрастает и непрерывна справа по каждому аргументу* $u_1, \ldots, u_n$. *Тогда, если имеют место неравенства* $\underline{u} \le \overline{u}$, $\eta(0) \le \nu(0)$, $\dot{\eta} \le \dot{\nu}$, *то для любого* $A \in \mathbb{R}^n$ *такого, что* $\eta(0) \le A \le \nu(0)$, *и любого управления* $u \in M^m$, *для которого* $\underline{u} \le u \le \overline{u}$, *существует решение* $x \in AC^n$ *системы* (2.2.29) *с начальным условием* (2.2.4), *удовлетворяющее неравенствам* (2.2.5)*; кроме того, во множестве решений задачи* (2.2.29), (2.2.4), *удовлетворяющих неравенствам* (2.2.5), *существует решение с наименьшей производной.*

Теперь сформулируем условия существования решения управляемой системы (2.2.29) с периодическим краевым условием (2.2.23). Пусть задана диагональная $n \times n$ -матрица $\lambda := \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, где $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. По функциям f_i определим функции $g_i^\lambda : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, формулой $g_i^\lambda(t,x,v,y_i,u) := f_i(t,x,v+\lambda x, y_i + \lambda_i x_i, u)$, $i = \overline{1,n}$.

Теорема 2.2.5. *Пусть при* $i = \overline{1,n}$ *функция* $g_i^\lambda(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,u) : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *для любого* $u \in \mathbb{R}^m$ *удовлетворяет условию* $(\mathbf{G}\!\downarrow)$, *а функция* $g_i^\lambda(t,x,v,y_i,\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *при п.в.* $t \in [0,1]$, *любых* $x, v \in \mathbb{R}^n$ *и* $y_i \in \mathbb{R}$ *возрастает и непрерывна справа по каждому аргументу* $u_1, \ldots, u_n$. *Тогда, если* $\underline{u} \le \overline{u}$, $\nu(0) - \nu(1) \ge \eta(0) - \eta(1)$, $\dot{\nu} - \lambda\nu \ge \dot{\eta} - \lambda\eta$, *то* *для любого* $A \in \mathbb{R}^n$ *такого, что* $\eta(0) - \eta(1) \le A \le \nu(0) - \nu(1)$, *и любого управления* $u \in M^m$, *для которого* $\underline{u} \le u \le \overline{u}$, *существует решение* $x \in AC^n$ *системы* (2.2.29) *с краевым условием* (2.2.23), *удовлетворяющее неравенствам* (2.2.24)*; кроме того, существует наименьшая функция во множестве функций* $z := \dot{x} - \lambda x$, *где* x *— решение задачи* (2.2.29), (2.2.23), *удовлетворяющее неравенствам* (2.2.24).

Глава 1. ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ, НА КОТОРЫХ ЗАДАНЫ БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

§ 1.1. Точки совпадения отображений

Свойство накрывания (регулярности) широко используется в решении различных задач анализа отображений метрических и, в частности, нормированных пространств. Аналогичное понятие для отображений частично упорядоченных пространств предложено в работах А.В. Арутюнова, Е.С. Жуковского, С.Е. Жуковского [5, 6, 46, 47]. В этих работах получены утверждения о точках совпадения упорядоченно накрывающего и монотонного отображений, действующих из частично упорядоченного пространства X в частично упорядоченное пространство Y. В частном случае, когда $X = Y$, а одно из отображений тождественное, из полученных утверждений следуют известные теоремы Тарского–Канторовича (см. [16, с. 27]), Биркгофа–Тарского (см. [103, с. 265], Кнастера–Тарского (см. [16, с. 26] или [64, с. 88]), Смитсона (см. [26]) о неподвижных точках монотонных отображений. Также в [5, 6, 46, 47] рассмотрен метод введения порядка в метрических пространствах, позволяющий применить утверждения об отображениях частично упорядоченных пространств к уравнениям в метрических пространствах и, в частности, получить классические теоремы существования неподвижных точек однозначных и многозначных отображений метрических пространств (теоремы Банаха [11], Надлера [66, § 2.1.1] и теоремы об обобщенном сжатии), а также их обобщения, в том числе, утверждения о точках совпадения накрывающих и липшицевых отображений.

В этом параграфе предлагается распространение теорем о точках совпадения на отображения, действующие из частично упорядоченного пространства X в множество Y, не являющееся упорядоченным. Параграф содержит три пункта. В пункте 1.1.1 понятия упорядоченного накрывания и монотонности распространены на отображения, действующие из частично упорядоченного пространства в множество с рефлексивным отношением, получены условия существования точек совпадения таких отображений (см. теорему 1.1.1). В пункте 1.1.2 получены теоремы 1.1.2 и 1.1.3 о точках совпадения отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в множество, на котором не задано бинарное отношение. Учитывая, что в этой ситуации отображения не могут обладать ни свойством монотонности, ни свойством накрывания, здесь используется иная идея, основанная на предположении, что для любой пары $(x', x) \in X \times X$ такой, что $x' \preceq x$, $\psi(x') = \varphi(x)$, существует «меньшая пара» $(u, u') \in X \times X$ для которой также справедливы соотношения $u' \preceq u$ и $\psi(u') = \varphi(u)$. Также в этом пункте демонстрируется как из доказанных здесь теорем выводится теорема 1.1.1 (а следовательно, и теоремы о точках совпадения накрывающего и монотонного отображений, полученные в работах [5], [46]). В заключительном пункте 1.1.3 определяется и исследуется понятие устойчивости точек совпадения отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в множество, на котором не задано бинарное отношение.

1.1.1 Точки совпадения отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в множество с рефлексивным отношением

Здесь рассматриваются отображения, действующие из частично упорядоченного пространство в множество с рефлексивным бинарным отношением. На такие отображения распространяются понятия упорядоченного накрывания [5] и монотонности, предлагаются утверждения о существовании точки совпадения «обобщенно накрывающего» и «обобщенно монотонного» отображений. Полученные утверждения распространяют на рассматриваемые пространства результаты [5, 46] о точках совпадения отображении частично упорядоченных пространств.

Пусть задано частично упорядоченное пространство $X = (X, \preceq)$. Для элементов $x, u \in X$ в случае $x \preceq u$ и $x \neq u$ будем писать $x \prec u$. Для элементов $u, v \in X$, $v \preceq u$, определим множества

$$\mathcal{O}_X(u) := \{x \in X : \, x \preceq u\}, \ \ [v, u] := \{x \in X : \ v \preceq x \preceq u\}.$$

Заметим, что

$$\forall x \in \mathcal{O}_X(u) \ \ \mathcal{O}_X(x) \subset \mathcal{O}_X(u). \tag{1.1.1}$$

Напомним определения некоторых понятий теории упорядоченных пространств, используемых в работе. Множество $S \subset X$ называется цепью, если для любых его двух элементов $x, u \in S$ выполнено $x \preceq u$ или $u \preceq x$. Последовательность $\{x_i\} \subset X$ называется убывающей, если $x_{i+1} \preceq x_i$ при любом i, и строго убывающей, если $x_{i+1} \prec x_i$ при любом i. Пространство X называется полным, если для любой цепи $S \subset X$ существует точная нижняя граница $\inf S \in X$. Пространство X называется секвенциально полным, если любая убывающая последовательность $\{x_i\} \subset X$ имеет точную нижнюю границу $\inf\{x_i\} \in X$.

Кроме частично упорядоченного пространства $X = (X, \preceq)$ будем полагать заданным еще множество $Y \neq \emptyset$, на котором определено рефлексивное бинарное отношение ϑ (т.е. для любого $y \in Y$ выполнено $y \, \vartheta \, y$). Эту алгебраическую систему обозначаем (Y, ϑ). Не предполагается ни антисимметричность, ни транзитивность отношения ϑ, таким образом отношение ϑ не обязано быть порядком в Y. Для элемента $w \in Y$ обозначим $\mathcal{O}_Y(w) := \{y \in X : y\,\vartheta\, w\}$. Очевидно, $w \in \mathcal{O}_Y(w)$, но соотношение, аналогичное (1.1.1), в Y может не выполняться в силу отсутствия транзитивности бинарного отношения ϑ.

На отображения, действующие из $(X, \preceq)$ в (Y, ϑ) можно распространить определения, используемые для отображений частично упорядоченных пространств, в том числе определение свойства упорядоченного накрывания [5] и монотонности.

Определение 1.1.1. Отображение $f : X \to Y$ называем *изотонным*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 \preceq x_2$, выполнено $f(x_1)\,\vartheta\, f(x_2)$. Если же из $x_1 \preceq x_2$ следует $f(x_2)\,\vartheta\, f(x_1)$, то отображение f называем *антитонным.* Изотонное или антитонное отображение называем *монотонным.*

Определение 1.1.2. Отображение $f : X \to Y$ называем (*упорядоченно*) *накрывающим множество* $W \subset Y$, если

$$\forall x_0 \in X \;\; \forall y \in W \;\; y\,\vartheta\, f(x_0) \;\Rightarrow\; \exists x \in X \;\; f(x) = y \text{ и } x \preceq x_0. \qquad (1.1.2)$$

Получим утверждение о точках совпадения отображений, аналогичное [5, теорема 1], но в котором не потребуется, чтобы Y было частично упорядоченным пространством.

Пусть заданы отображения $\psi, \varphi : X \to Y$.

Определение 1.1.3. *Точкой совпадения отображений* ψ, φ называют элемент $x \in X$ такой, что

$$\psi(x) = \varphi(x). \qquad (1.1.3)$$

Множество точек совпадения отображений $\psi, \varphi,$ принадлежащих заданному множеству $V \subset X$ будем обозначать через $\operatorname{Coin}_V(\psi, \varphi),$ т. е.

$$\operatorname{Coin}_V(\psi, \varphi) := \{x \in X : \ \psi(x) = \varphi(x), \ x \in V\}.$$

Пусть задано множество $\mathcal{X} \subset X$. Обозначим через $\Pi(\mathcal{X}, \psi, \varphi)$ совокупность цепей S в пространстве $X,$ $S \subset \mathcal{X},$ удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} \forall x \in S \ \ \varphi(x) \,\vartheta\, \psi(x), \\ \forall x, x' \in S \ \ x' \prec x \ \Rightarrow \ \psi(x') \,\vartheta\, \varphi(x). \end{cases} \tag{1.1.4}$$

Теорема 1.1.1. *Пусть для некоторого элемента* $x_0 \in X$ *имеет место соотношение* $\varphi(x_0) \,\vartheta\, \psi(x_0)$ *и выполнены следующие условия:*

(i) *отображение* $\psi : X \to Y$ *является накрывающим множество*

$$W := \varphi\big(\mathcal{O}_X(x_0)\big);$$

(ii) *отображение* $\varphi : X \to Y$ *является изотонным;*

(iii) *для любой бесконечной цепи* $S \in \Pi(\mathcal{X}_0, \psi, \varphi),$ *где*

$$\mathcal{X}_0 = \big\{x \in X : \ x \preceq x_0 \ \ \textit{и} \ \ \psi(x) \in \varphi([x, x_0])\big\},$$

существует элемент $w \in X$ *такой, что*

$$\forall x \in S \ \ w \preceq x, \ \ \ \varphi(w) \,\vartheta\, \psi(w).$$

Тогда существует точка совпадения отображений $\psi, \varphi,$ *принадлежащая* $\mathcal{O}_X(x_0),$ *т.е. справедливо соотношение*

$$\exists \xi \in X \ : \ \psi(\xi) = \varphi(\xi) \ \ \ \textit{и} \ \ \xi \preceq x_0.$$

Доказательство. Положим

$$U = \big\{x \in \mathcal{X}_0 : \ \varphi(x) \,\vartheta\, \psi(x)\big\}.$$

Покажем, что множество U не пусто. В силу предположения (i) существует элемент $x_1 \in X,\ x_1 \preceq x_0,$ для которого справедливо $\psi(x_1) = \varphi(x_0)$. Вследствие предположения (ii) имеем $\varphi(x_1)\,\vartheta\,\varphi(x_0)$, и следовательно, $\varphi(x_1)\,\vartheta\,\psi(x_1)$. Таким образом, $x_1 \in U$.

На непустом множестве U определим еще одно отношение порядка $\trianglelefteq$ следующим образом: для элементов $u', u \in U$ полагаем выполненным неравенство $u' \trianglelefteq u$ если $u' = u$ или если

$$u' \lhd u \quad \Leftrightarrow \begin{cases} u' \prec u, \\ \exists \overline{x} \in \mathcal{O}_X(u) \quad \psi(u') = \varphi(\overline{x}). \end{cases} \tag{1.1.5}$$

Рефлексивность и антисимметричность этого бинарного отношения очевидна. Проверим транзитивность. Пусть $u'' \lhd u',\ u' \lhd u$. Тогда имеем $u'' \prec u'$ и $u' \prec u$, поэтому $u'' \prec u$. Кроме того, из соотношения

$$\exists \overline{x} \in \mathcal{O}_X(u') \subset \mathcal{O}_X(u) \quad \psi(u'') = \varphi(\overline{x})$$

окончательно получаем $u'' \lhd u$.

Согласно теореме Хаусдорфа о максимальной цепи (см., например, [94, гл. 1, § 4.7]), существует максимальная (относительно порядка $\trianglelefteq$) цепь $S \subset U$, которая содержит точку x_1. Из определения порядка $\trianglelefteq$ формулой (1.1.5) вытекает, что цепь S удовлетворяет условию (1.1.4). Действительно, для любых $u', u \in U$ из неравенства $u' \trianglelefteq u$ в силу изотонности φ следует, что $\psi(u') = \varphi(\overline{x})\,\vartheta\,\varphi(u)$.

Пусть цепь S конечна, обозначим ее элементы $x_1 \succ \ldots \succ x_m$. Покажем, что $\psi(x_m) = \varphi(x_m)$. Если это равенство не выполнено, то поскольку $\varphi(x_m)\,\vartheta\,\psi(x_m)$, согласно условию (i), существует элемент $\xi \in X$ такой, что $\xi \prec x_m$ и $\psi(\xi) = \varphi(x_m)$. Следовательно $\xi \lhd x_m$, а это неравенство противоречит максимальности цепи S. Итак, $\psi(x_m) = \varphi(x_m)$.

Пусть теперь цепь S бесконечна. В силу предположения (iii) существует элемент $\xi \in X$ — нижняя граница цепи S относительно исходного порядка $\preceq$, для которого $\varphi(\xi)\,\vartheta\,\psi(\xi)$. Очевидно, $\xi \in \mathcal{O}_X(x_0)$, поскольку $\xi \preceq x_1 \preceq x_0$.

Покажем, что $\psi(\xi) = \varphi(\xi)$. Поскольку $\varphi(\xi)\,\vartheta\,\psi(\xi)$, в силу предположения (i) существует элемент $\bar{\xi} \in X$ такой, что $\psi(\bar{\xi}) = \varphi(\xi)$ и $\bar{\xi} \preceq \xi$. Из предположения (ii) следует, что $\varphi(\bar{\xi})\,\vartheta\,\varphi(\xi)$. Поэтому $\varphi(\bar{\xi})\,\vartheta\,\psi(\bar{\xi})$ и, значит, $\bar{\xi} \in U$.

Если $\xi \neq \bar{\xi}$, то $\bar{\xi} \prec \xi$, а кроме того, $\psi(\bar{\xi}) = \varphi(\xi)$. Поэтому $\bar{\xi} \lhd \xi$. Из максимальности цепи S относительно порядка $\unlhd$ вытекает, что $\bar{\xi} \in S$, что противоречит неравенству $\bar{\xi} \prec \xi$. Окончательно получаем $\xi = \bar{\xi}$, значит, $\psi(\xi) = \psi(\bar{\xi}) = \varphi(\xi)$. $\square$

Теорема 1.1.1 в случае, когда ϑ является отношением порядка в Y, совпадает с [5, теорема 1], а в случае, когда $Y = X$ и отображение ψ является тождественным, из теоремы выводится теорема Кнастера–Тарского (см. [16, с. 26] или [64, с. 88]).

Замечание 1.1.1. *При выполнении условий теоремы 1.1.1 в множестве* $\operatorname{Coin}_X(\psi, \varphi)$ *точек совпадения отображений* $\psi, \varphi : X \to Y$ *существует минимальный элемент* ξ, *удовлетворяющий неравенству* $\xi \preceq x_0$.

Для доказательства этого утверждения покажем, что построенная при доказательстве теоремы 1.1.1 точка ξ совпадения отображений ψ, φ является минимальной в множестве $\operatorname{Coin}_X(\psi, \varphi)$. Предположим противное: существует точка $\hat{\xi} \in X$ такая, что $\psi(\hat{\xi}) = \varphi(\hat{\xi})$ и $\hat{\xi} \prec \xi$. Тогда в силу изотонности отображения φ имеем $\varphi(\hat{\xi})\,\vartheta\,\varphi(\xi)$, и поэтому $\psi(\hat{\xi})\,\vartheta\,\varphi(\xi)$.

Следовательно, $\hat{\xi} \in U$, $\hat{\xi} \trianglelefteq \xi$. Поскольку цепь S максимальна, то $\hat{\xi} \in S$. Но тогда $\xi \trianglelefteq \hat{\xi}$, $\xi \preceq \hat{\xi}$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Замечание 1.1.2. Приведенное доказательство теоремы 1.1.1 аналогично доказательству [5, теорема 1]. Основное отличие заключается в том, что в работе [5] на Y задано отношение порядка $\preceq_{Y}$, а здесь — бинарное отношение ϑ, не являющееся порядком. Транзитивность отношения $\preceq_{Y}$ позволила определить в работе [5] упорядоченность $\trianglelefteq$ на множестве U следующим образом:

$$\forall u, v \in U \quad u \trianglelefteq v \quad \Leftrightarrow \quad u \preceq v, \;\; \psi(u) \preceq_{Y} \varphi(v).$$

Однако такое отношение перестает быть порядком, когда бинарное отношение на множестве Y не является транзитивным. Поэтому при доказательстве теоремы 1.1.1 мы определяем иное бинарное отношение соотношением (1.1.5) (которое является порядком несмотря на то, что отношение ϑ не транзитивно).

Приведем примеры отображений ψ, φ, действующих из частично упорядоченного пространства в множество, не являющееся частично упорядоченным. К таким отображениям нельзя применить результаты [5, 46], тем не менее, теорема 1.1.1 гарантирует существование точки совпадения.

В следующем примере бинарное отношение на множестве Y не является транзитивным.

Пример 1.1.1. Определим множество $X = \{w, x_1, u_1, x_2, u_2, \ldots\}$, на котором зададим частичный порядок, полагая для натуральных $i \leq j$ выполненными неравенства $w \prec x_j \prec x_i$, $w \prec u_j \prec u_i$, а элементы

x_i, u_j при любых i, j полагаем несравнимыми. Далее, определим множество $Y = \{z, y_1, y_2, y_3\}$ и на нем зададим бинарное отношение

$$\vartheta = \big\{(y_2, y_1),\ (y_3, y_2),\ (y_1, y_3),\ (z, z),\ (y_i, y_i),\ (z, y_i),\ i = 1, 2, 3\big\}.$$

Это отношение не обладает свойством транзитивности (так как $y_3 \,\vartheta\, y_2$, $y_2 \,\vartheta\, y_1$, но $y_3 \not\vartheta\, y_1$), таким образом, множество Y не является упорядоченным.

Определим отображение $\varphi : X \to Y$ соотношениями:

$$\varphi(x_1) = y_2, \quad \varphi(x_2) = y_3, \quad \varphi(x_3) = \varphi(x_4) = \ldots = z,$$
$$\varphi(u_1) = y_3, \quad \varphi(u_2) = y_1, \quad \varphi(u_3) = \varphi(u_4) = \ldots = z, \quad \varphi(w) = z.$$

Это отображение изотонное, т.е. выполнено условие (ii) теоремы 1.1.1.

Теперь определим отображение $\psi : X \to Y$ следующим образом. Каждому натуральному i поставим в соответствие $r(i) \in \{1, 2, 3\}$ так, что $i \equiv r(i) (\mathrm{mod}\, 3)$. Полагаем

$$\forall i = 1, 2, \ldots \quad \psi(x_i) = \psi(u_i) = y_{r(i)}, \quad \psi(w) = z.$$

Это отображение является накрывающим. Действительно, если для произвольных $x_i \in X$, $y \in Y$ выполнено соотношение $y \,\vartheta\, \psi(x_i) \;\Leftrightarrow\; y \,\vartheta\, y_{r(i)}$, то $y = y_{r(i+1)}$ или $y = z$. В первом случае для $x = x_{i+1}$ выполнено (1.1.2), так как $x_{i+1} \prec x_i$ и $\psi(x_{i+1}) = y$; во втором случае для $x = w$ также очевидно выполнение соотношения (1.1.2). Аналогично проверяется соотношение (1.1.2) для произвольных $u_i \in X$, $y \in Y$ (в этом случае имеет место $y \,\vartheta\, \psi(u_i) \;\Leftrightarrow\; y \,\vartheta\, y_{r(i)}$). Итак, выполнено условие (i) теоремы 1.1.1.

Справедливость условия (iii) теоремы 1.1.1 следует из того, что любая цепь $S \subset X$ имеет нижнюю границу — элемент $w \in X$, для которого справедливо $\psi(w) = \varphi(w)$.

Наконец, для элемента $x_1 \in X$ выполнено $\psi(x_1) = y_1 \vartheta \, y_2 = \varphi(x_1)$. Это соотношение завершает проверку условий теоремы 1.1.1.

В следующем примере бинарное отношение на Y не является антисимметричным.

Пример 1.1.2. Пусть $X = \{w, x_1, , x_2, \ldots\}$, $Y = \{z, y_1, y_2\}$. Определим на множестве X упорядоченность: $w \prec x_j \prec x_i$ при любых натуральных $i \leq j$. Заметим, что пространство $(X, \preceq)$ линейно упорядочено. На Y определим бинарное отношение

$$\vartheta = \big\{(y_1, y_2),\, (y_2, y_1),\, (z, z),\, (y_i, y_i),\, (z, y_i),\ i = 1, 2\big\}.$$

Это отношение не обладает свойством антисимметричности (так как имеем $y_1 \vartheta \, y_2$ и $y_2 \vartheta \, y_1$), поэтому множество Y не является упорядоченным.

Каждому натуральному i поставим в соответствие число $r(i) \in \{1, 2\}$ так, что $i \equiv r(i) (\bmod 2)$. Определим отображения $\psi, \varphi : X \to Y$ соотношениями:

$$\forall i = 1, 2, \ldots \quad \psi(x_i) = y_{r(i)}, \quad \psi(w) = z; \quad \varphi(x_i) = y_{r(i+1)}, \quad \varphi(w) = z.$$

При таком определении отображение ψ является накрывающим (проверка не отличается от проверки накрывания отображения ψ в примере 1.1.1), а отображение φ — изотонным. Таким образом, выполнены условия (i), (ii) теоремы 1.1.1.

Как и в примере 1.1.1, справедливость условия (iii) теоремы 1.1.1 следует из того, что любая цепь $S \subset X$ имеет нижнюю границу w, для которой справедливо $\psi(w) = \varphi(w)$. И наконец, для элемента $x_1 \in X$ выполнено $\varphi(x_1) = y_2 \vartheta \ y_1 = \psi(x_1)$. Итак, все условия теоремы 1.1.1 выполнены.

В примерах 1.1.1, 1.1.2 отображения $\psi, \varphi,$ конечно, имеют точки совпадения, и это гарантируется выполнением условий теоремы 1.1.1. Однако, множество Y не является частично упорядоченным, что не позволяет воспользоваться результатами [5, 46].

1.1.2 Точки совпадения отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в множество, не обладающее отношениями между элементами

Получим еще одно утверждение о точках совпадения отображений $\psi, \varphi : X \to Y.$ Как и выше, полагаем что X — частично упорядоченное пространство, но теперь в множестве Y не будет задано никакое бинарное отношение. В такой ситуации невозможно определить аналоги понятий накрывания и монотонности отображений. Предлагаемое исследование основано на другой идее: выделении пар $(x', x) \in X \times X$ элементов, удовлетворяющих соотношениям $x' \preceq x,$ $\psi(x') = \varphi(x)$ и определении на произведении $X \times X$ специального порядка. Тогда при условии полноты полученного частично упорядоченного пространства нижней границей максимальной цепи таких пар будет пара $(\tilde{x}', \tilde{x}) \in X \times X$ с одинаковыми компонентами $\tilde{x}' = \tilde{x}.$ А значит $\psi(\tilde{x}) = \varphi(\tilde{x}).$

Реализуем эту идею.

Пусть задано непустое множество $\mathcal{X} \subset X.$ Определим множество $\Sigma(\mathcal{X}, \psi, \varphi)$ цепей S в пространстве $X,$ $S \subset \mathcal{X},$ для которых выполнены соотношения

$$\forall x \in S \ \exists x' \in \mathcal{O}_X(x) : \begin{cases} \psi(x') = \varphi(x), \\ \forall u \in S \ \ u \prec x \ \Rightarrow \ u \preceq x'. \end{cases} \tag{1.1.6}$$

Отметим, что в соотношении (1.1.6) не требуется, чтобы элемент $x' \in X$ принадлежал множеству $\mathcal{X}$ и, тем более цепи S.

Теорема 1.1.2. *Пусть выполнены следующие условия:*

(a) *существуют* $x_0, x'_0 \in X$ *такие, что* $x'_0 \preceq x_0$ *и* $\psi(x'_0) = \varphi(x_0)$;

(b) *для любых* $x, x' \in \mathcal{O}_X(x_0)$ *таких, что* $x' \prec x$, $\psi(x') = \varphi(x)$, *существуют элементы* $u, u' \in X$, *для которых справедливы соотношения* $u' \preceq u \preceq x'$ *и* $\psi(u') = \varphi(u)$;

(c) *для любой бесконечной цепи* $S \in \Sigma(\mathcal{O}_X(x_0), \psi, \varphi)$ *существуют элементы* $w, w' \in X$ *такие, что*

$$\forall x \in S \quad w' \preceq w \preceq x, \quad \psi(w') = \varphi(w). \tag{1.1.7}$$

Тогда во множестве $\mathcal{O}_X(x'_0)$ *существует точка совпадения отображений* ψ, φ.

Доказательство. Если $x'_0 = x_0$, то утверждение теоремы очевидно. Поэтому предполагаем, что $x'_0 \prec x_0$.

В произведении $X \times X$ определим подмножество

$$U = \big\{(x', x) \in X \times X :\, x' \preceq x \text{ и } \psi(x') = \varphi(x)\big\}.$$

Это множество не пусто, так как согласно предположению (a) имеем $(x'_0, x_0) \in U$. Определим бинарное отношение $\trianglelefteq$ в U соотношениями:

$$(u', u) \trianglelefteq (x', x) \;\Leftrightarrow\; \big((u', u) \vartriangleleft (x', x) \text{ или } (u', u) = (x', x)\big);$$
$$(u', u) \vartriangleleft (x', x) \;\Leftrightarrow\; \big(u \preceq x' \text{ и } u' \prec x\big).$$

Отношение $\trianglelefteq$, очевидно, является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным, то есть является порядком.

Согласно теореме Хаусдорфа о максимальной цепи (см., например, [94, гл. 1, § 4.7]) существует максимальная цепь $\mathcal{C} \subset U$, содержащая элемент (x_0', x_0). Определим проекцию цепи $\mathcal{C}$ на X — множество

$$S \subset X, \quad S = \{x : (x', x) \in \mathcal{C}\}.$$

Множество S, очевидно, является цепью в $(X, \preceq)$, и для S выполнены соотношения (1.1.6), то есть $S \in \Sigma(x_0, \psi, \varphi)$.

Для каждого $x \in S$ существует не более двух различных пар — элементов из $\mathcal{C}$, имеющих вторую компоненту x. Таким образом, цепь S конечна тогда и только тогда, когда конечна цепь $\mathcal{C}$. Рассмотрим ситуацию, когда цепи $\mathcal{C}, S$ конечны и поэтому содержат наименьшие элементы. Пусть наименьшим элементом цепи S является $\tilde{x}$ и, соответственно, пара $(\tilde{x}', \tilde{x})$, где $\psi(\tilde{x}') = \varphi(\tilde{x})$, является наименьшим элементом цепи $\mathcal{C}$. Если $\tilde{x}' \prec \tilde{x}$, то согласно условию (b) существуют u, u', для которых справедливы соотношения $u' \preceq u \preceq \tilde{x}'$ и $\psi(u') = \varphi(u)$. Следовательно, $(u', u) \lhd (\tilde{x}', \tilde{x})$, но это неравенство противоречит максимальности цепи $\mathcal{C} \subset U$. Итак, доказано, что $\tilde{x}' = \tilde{x}$, и таким образом установлено существование точки совпадения отображений ψ, φ.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда цепи $\mathcal{C}, S$ бесконечны. Согласно предположению (c) у цепи S существуют нижние границы $w, w' \in X$ такие, что $w' \preceq w$, $\psi(w') = \varphi(w)$. Следовательно, $(w', w) \in U$. Для любого элемента $(x', x) \in \mathcal{C}$ выполнено $w' \preceq w \preceq x' \preceq x$. Поэтому $(w', w) \unlhd (x', x)$. Таким образом, (w', w) является нижней границей цепи $\mathcal{C}$. В то же время, вследствие максимальности этой цепи, выполнено $(w', w) \in \mathcal{C}$. Докажем, что $w' = w$, и тем самым установим существование точки совпадения отображений ψ, φ. Если это не так, то есть $w' \prec w$, то в силу предположения

(b) существуют элементы u, u', для которых справедливы соотношения

$$u' \preceq u \preceq w' \prec w \text{ и } \psi(u') = \varphi(u). \tag{1.1.8}$$

Значит (u', u), как и (w', w), является нижней границей цепи $\mathcal{C}$, а вследствие максимальности этой цепи — ее элементом. Поэтому справедливы неравенства $(w', w) \trianglelefteq (u', u)$ и $(u', u) \trianglelefteq (w', w)$. Отсюда $u = w$, а это противоречит неравенству в (1.1.8). Итак получаем $w' = w$, $\psi(w) = \varphi(w)$.

Так как $x_0' \prec x_0$, то нижняя граница цепи $\mathcal{C}$ — пара (w, w) не может быть равна паре (x_0', x_0). Поэтому $(w, w) \triangleleft (x_0', x_0)$, и следовательно, выполнено неравенство $w \preceq x_0'$. □

Замечание 1.1.3. Для полученной в приведенном доказательстве точки совпадения w отображений ψ, φ пара (w, w) являлась нижней границей и одновременно элементом максимальной относительно порядка $\trianglelefteq$ цепи $\mathcal{C} \subset U$. Если бы существовала еще одна точка совпадения z, удовлетворяющая неравенству $z \prec w$, то цепь $\mathcal{C}$ не была бы максимальной (ее можно было бы дополнить парой (z, z)). Таким образом, установлено, что *в условиях теоремы 1.1.2 во множестве точек совпадения отображений ψ, φ существует минимальный элемент $w \in \mathcal{O}_X(x_0')$.*

Покажем, что из теоремы 1.1.2 выводится теорема 1.1.1, а следовательно, и теоремы о точках совпадения накрывающего и монотонного отображений, полученные в работах [5], [46]. А именно, докажем, что из предположений теоремы 1.1.1 следуют предположения теоремы 1.1.2.

Итак, пусть выполнены предположения теоремы 1.1.1. Тогда, во-первых, из соотношения $\varphi(x_0) \,\vartheta\, \psi(x_0)$ и условия (i) следует существование элемента $x_0' \in X$, $x_0' \preceq x_0$, для которого справедливо $\psi(x_0') = \varphi(x_0)$. Таким образом, условие (a) выполнено.

Далее, пусть заданы элементы $x, x' \in \mathcal{O}_X(x_0)$ такие, что $x' \preceq x$ и $\psi(x') = \varphi(x)$. Отсюда вследствие предположения (ii) получаем соотношения $\varphi(x')\,\vartheta\,\varphi(x)$, $\varphi(x')\,\vartheta\,\psi(x')$. В силу условия (i) существует $x'' \in X$, $x'' \preceq x'$, для которого справедливо $\psi(x'') = \varphi(x')$. Таким образом, условие (b) выполнено.

Остается доказать, что из (iii) следует (c). Пусть в пространстве X задана бесконечная цепь $S \in \Sigma(\mathcal{O}_X(x_0), \psi, \varphi)$. Если у этой цепи есть наименьший элемент $w \in S$, то согласно (1.1.6) существует $w' \in \mathcal{O}_X(w)$, для которого $\psi(w') = \varphi(w)$. Тогда для любого $x \in S$ имеем $w' \preceq w \preceq x$, то есть соотношение (c) выполнено.

Пусть теперь цепь $S \in \Sigma(\mathcal{O}_X(x_0), \psi, \varphi)$ не имеет наименьшего элемента. Тогда для каждого $x \in S$ существует $u \in S$, $u \prec x$. Таким образом, при любом $x \in S$ множество $\mathcal{U}_S(x) = \{u \in S : u \prec x\}$ не пусто. Определим отображение $\mathcal{G} : S \to X$, которое каждому $x \in S$ сопоставляет элемент $x' = \mathcal{G}(x) \in X$, такой что

$$\psi(x') = \varphi(x) \;\text{ и }\; \forall u \in \mathcal{U}_S(x) \;\; u \preceq x'.$$

Покажем, что множество $S' = \mathcal{G}(S)$ является цепью. Для произвольных $x', u' \in S'$, $x' \neq u'$ существуют $x, u \in S$ такие, что

$$x' = \mathcal{G}(x) \in X, \quad u' = \mathcal{G}(u) \in X.$$

Любые два элемента цепи S вступают в отношение порядка, поэтому можем считать, что $u \prec x$. Но тогда в силу определения цепи S получаем неравенства

$$u' \preceq u \preceq x' \preceq x, \tag{1.1.9}$$

то есть S', действительно, является цепью.

Докажем, что $S' \in \Pi(\mathcal{X}_0, \psi, \varphi)$. Вложение $S' \subset \mathcal{X}_0$ прямо следует из соотношений

$$\forall x' \in S' \ \exists x \in S \ \ x' \preceq x \preceq x_0, \ \ \psi(x') = \varphi(x) \in \varphi\big([x', x_0]\big).$$

Для любого $x' \in S'$ определим $x \in S$ такой, что $x' \preceq x$, $x' = \mathcal{G}(x)$. Вследствие (ii) выполнено $\varphi(x')\,\vartheta\,\varphi(x)$. Отсюда, так как $\varphi(x) = \psi(x')$, получаем $\varphi(x')\,\vartheta\,\psi(x')$. Таким образом, первое соотношение в (1.1.4) для цепи S' доказано. Далее, для произвольных $x', u' \in S'$, $u' \prec x'$, определим $x, u \in S$ такие, что

$$x' = \mathcal{G}(x), \quad u' = \mathcal{G}(u).$$

Очевидно, справедливо $u \prec x$. Из соотношения (1.1.9) в силу монотонности отображения φ получаем $\varphi(u)\,\vartheta\,\varphi(x')$, а так как $\psi(u') = \varphi(u)$, получаем $\psi(u')\,\vartheta\,\varphi(x')$. Итак, выполнены соотношения (1.1.4), то есть $S' \in \Pi(\mathcal{X}, \psi, \varphi)$.

В силу предположения (iii) существует элемент $w \in X$ такой, что $\varphi(w)\,\vartheta\,\psi(w)$ и для любого $x' \in S'$ выполнено неравенство $w \preceq x'$. Следовательно, аналогичное неравенство $w \preceq x$ выполнено и при любом $x \in S$. Из предположения (i) заключаем, что существует $w' \in X$, $w' \preceq w$, для которого $\psi(w') = \varphi(w)$. Итак, условие (c) выполнено.

Таким образом, доказано, что из предположений теоремы 1.1.1 следуют условия теоремы 1.1.2, и таким образом, теорема 1.1.1 является следствием теоремы 1.1.2.

С помощью теоремы 1.1.2 можно получить условия существования неподвижной точки отображения ϕ, действующего в частично упорядоченном пространстве X: достаточно переформулировать эту теорему для случая, когда $Y = X$, а ψ — тождественное отображение $I : X \to X$. В этом случае $\Sigma(\mathcal{X}, I, \phi)$ — это совокупность цепей S в пространстве X, $S \subset \mathcal{X}$, удовлетворяющих условию

$$\forall x \in S \;\; \phi(x) \preceq x,$$
$$\forall u, x \in S \;\; u \prec x \;\Rightarrow\; u \preceq \phi(x).$$

Следствие 1.1.1. *Пусть для элемента $x_0 \in X$ справедливо неравенство $\phi(x_0) \preceq x_0$ и пусть для любого $x \in \mathcal{O}_X(x_0)$ такого, что $\phi(x) \preceq x$, существует $u \in X$, для которого выполнены неравенства $u \preceq \phi(x)$, $\phi(u) \preceq u$. Тогда, если любая бесконечная цепь $S \in \Sigma(\mathcal{O}_X(x_0), I, \phi)$ имеет нижнюю границу $w \in X$, удовлетворяющую неравенству $\phi(w) \preceq w$, то во множестве $\mathcal{O}_X\big(\phi(x_0)\big)$ существует неподвижная точка отображения ϕ.*

Замечание 1.1.4. Рассмотрим следующий частный случай условия (b) — условие

(b$''$) для любых $x, x' \in \mathcal{O}_X(x_0)$ таких, что $x' \prec x$, $\psi(x') = \varphi(x)$, существует элемент $x'' \in X$, для которого выполнено $x'' \prec x'$ и $\psi(x'') = \varphi(x')$.

При выполнении условий (a) и (b$''$) можно определить итерации x_i с начальным элементом x_0, удовлетворяющие рекуррентному соотношению

$$\psi(x_{i+1}) = \varphi(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots . \tag{1.1.10}$$

Если последовательность $\{x_i\}$ имеет точную нижнюю границу $w = \inf\{x_i\}$ (например, для секвенциально полного пространства $(X, \preceq)$ это предположение, очевидно, выполнено), и если равенство (1.1.10) сохраняется при переходе к этой границе, то получаем $\psi(w) = \varphi(w)$. Итак, итерационный метод может использоваться для нахождения точки совпадения отображений ψ, φ.

В частном случае, если $Y = X$ а отображение ψ является тождественным, приведенные рассуждения доказывают, что при перечисленных выше условиях точной нижней границей итерационной последовательности $x_i = \phi(x_{i-1})$ является неподвижная точка отображения $\phi : X \to X$. Получаемое таким образом утверждение есть теорема Тарского–Канторовича (см. [16, с. 27]).

Сформулируем еще одно утверждение о существовании точки совпадения отображений $\psi, \varphi : X \to Y$.

Пусть задано непустое множество $\mathcal{X} \subset X$. Определим множество $\Xi(\mathcal{X}, \psi, \varphi)$ всех таких цепей S в пространстве X, $S \subset \mathcal{X}$, что

$$\forall x \in S \ \exists x' \in X \ \ x' \preceq x, \ \ \psi(x') = \varphi(x). \tag{1.1.11}$$

Очевидно, выполнено $\Sigma(\mathcal{X}, \psi, \varphi) \subset \Xi(\mathcal{X}, \psi, \varphi)$.

Теорема 1.1.3. *Пусть выполнены следующие условия:*

(a$'$) *существуют* $x_0 \in \mathcal{X}$, $x_0' \in X$ *такие, что* $x_0' \preceq x_0$ *и* $\psi(x_0') = \varphi(x_0)$;

(b$'$) *для любых* $x \in \mathcal{X}$, $x' \in X$ *таких, что* $x' \prec x$, $\psi(x') = \varphi(x)$, *существуют* $u \in \mathcal{X}$, $u' \in X$, *для которых справедливы соотношения* $u' \preceq u \prec x$ *и* $\psi(u') = \varphi(u)$;

(c$'$) *для любой бесконечной цепи* $S \in \Xi(\mathcal{X}, \psi, \varphi)$ *существуют элементы* $w \in \mathcal{X}$, $w' \in X$, *удовлетворяющие соотношениям* (1.1.7).

Тогда существует точка совпадения $\xi \in \mathcal{X}$ *отображений* ψ, φ *такая, что* $\xi \preceq x_0$.

Доказательство. Определим подпространство

$$X_0 = \big\{x \in \mathcal{X} : \exists x' \in \mathcal{O}_X(x) \ \ \psi(x') = \varphi(x)\big\}$$

упорядоченного пространства $(X, \preceq)$. В подпространстве $(X_0, \preceq)$ согласно теореме Хаусдорфа о максимальной цепи (см., например, [94, гл. 1, § 4.7]) существует максимальная цепь $S \subset X_0$, содержащая элемент x_0. Очевидно, $S \in \Xi(\mathcal{X}, \psi, \varphi)$.

Пусть, вначале, цепь S конечна и состоит из элементов $x_m \prec \ldots \prec x_0$. По определению пространства X_0 для наименьшего элемента x_m этой цепи существует $x'_m \in X$ такой, что $x'_m \preceq x_m$ и $\psi(x'_m) = \varphi(x_m)$. Если $x'_m \prec x_m$, то в силу условия (b$'$) существуют элементы $u \in \mathcal{X}$, $u' \in X$, такие, что $u' \preceq u \prec x_m$ и $\psi(u') = \varphi(u)$. Таким образом, $u \in X_0$ и $u \prec x_m$, а это неравенство противоречит максимальности цепи $S \subset X_0$. Итак, $u = x_m$, $\psi(u) = \varphi(u)$.

Пусть теперь цепь S бесконечна. Согласно предположению (c$'$) у этой цепи в X существуют нижние границы $w \in \mathcal{X}$ $w' \in X$ такие, что $w' \preceq w$, $\psi(w') = \varphi(w)$. Следовательно, $w \in X_0$. Если $w' \prec w$, то в силу условия (b$'$) существуют элементы $u \in \mathcal{X}$, $u' \in X$ такие, что выполнены соотношения $u' \preceq u \prec w$ и $\psi(u') = \varphi(u)$. Таким образом, $u \in X_0$ и $u \prec x$ для любого $x \in S$. Полученное неравенство противоречит максимальности цепи $S \subset X_0$. Итак, $w' = w$, $\psi(w) = \varphi(w)$. □

Замечание 1.1.5. Полученная в доказательстве теоремы 1.1.3 точка совпадения отображений ψ, φ являлась нижней границей максимальной цепи $S \subset X_0 \subset \mathcal{X}$, содержащей точку x_0. Поэтому *в условиях теоремы 1.1.3 во множестве* $\operatorname{Coin}_{\mathcal{X}}(\psi, \varphi)$ *точек совпадения отображений* ψ, φ, *принадлежащих* $\mathcal{X}$, *существует минимальный элемент.*

Замечание 1.1.6. В полученных здесь теоремах 1.1.2, 1.1.3 рассматриваются цепи $S \subset X$, элементы которых удовлетворяют соотношению

(1.1.11). Если в этом соотношении $x' = x$, то x является точкой совпадения отображений ψ, φ. В общем случае точку x, для которой выполнено (1.1.11) при $x' \preceq x$, можно назвать точкой «квазисовпадения». Основными предположениями теорем 1.1.2, 1.1.3 являются существование точек «квазисовпадения» и существование у любой цепи точек «квазисовпадения» нижней границы, которая также является точкой «квазисовпадения». При выполнении этих условий оказывается, что искомая точка совпадения отображений ψ, φ существует.

В теореме 1.1.2 накладываются ограничения на значения отображений ψ, φ в точках множества $\mathcal{O}_X(x_0)$, а предположения теоремы 1.1.3 касаются значений этих отображений в точках произвольного множества $\mathcal{X}$. Удачный выбор этого множества открывает возможность исследовать точки совпадения отображений в случае невыполнения условий теоремы 1.1.2 (и ниже мы приведем пример, подтверждающий эффективность теоремы 1.1.3). Отметим также, что в случае $\mathcal{X} = \mathcal{O}_X(x_0)$ утверждения теорем 1.1.2, 1.1.3 независимы, ни одно из них не является следствием другого. Действительно, условие (b$'$) является менее обременительным, чем условие (b) (поскольку из (b) следует (b$'$), где $u = x'$), а предположение (c$'$) — более жестким, чем предположение (c). Можно сказать, что сравнительно с теоремой 1.1.2 теорема 1.1.3 менее требовательна к отображениям ψ, φ, но в ней предъявляются более жесткие условия на пространство X.

Выведем из теоремы 1.1.3 условия существования неподвижной точки отображения $\phi : X \to X$. Полагая $Y = X$, $\psi = I$, определим множество $\Xi(\mathcal{X}, I, \phi)$ цепей S в пространстве X, $S \subset \mathcal{X}$, таких, что $\phi(x) \preceq x$ при всех $x \in S$.

Следствие 1.1.2. *Пусть для элемента* $x_0 \in \mathcal{X}$ *справедливо неравенство* $\phi(x_0) \preceq x_0$ *и пусть для любого* $x \in \mathcal{X}$ *такого, что* $\phi(x) \prec x$, *существует* $u \in \mathcal{X}$, *для которого выполнены неравенства* $\phi(u) \preceq u \prec x$. *Тогда, если любая бесконечная цепь* $S \in \Xi(\mathcal{X}, I, \phi)$ *имеет нижнюю границу* $w \in X$, *удовлетворяющую неравенству* $\phi(w) \preceq w$, *то существует неподвижная точка* $\xi \in \mathcal{X}$ *отображения* ϕ *такая, что* $\xi \preceq x_0$.

Приведем следующий простой пример, иллюстрирующий применение теоремы 1.1.3.

Пример 1.1.3. Пусть заданы функции $\psi, \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, функция ψ непрерывна, и выполнены условия:

$$\varphi(b) \le \psi(b) \ \text{ и } \ \forall x \in [a, b] \ \ \varphi(x) \ge \psi(a); \tag{1.1.12}$$

$$\begin{aligned} &\forall x \in (a, b] \ \ \forall y \in \mathbb{R} \ \ \varphi(x) < \psi(x) \\ &\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \ \exists x' \in [a, x) \ \ \varphi(x') \le \psi(x'); \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

$$\begin{aligned} &\big(\forall x \in [a, b] \ \ \forall \{x_i\} \subset \mathbb{R} \ \ x_i \to x + 0 \ \text{ и } \ \forall y \in \mathbb{R} \ \forall i \ \ \varphi(x_i) < y\big) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \ \varphi(x) \le y. \end{aligned} \tag{1.1.14}$$

Рассмотрим уравнение (1.1.3), определяющее точки совпадения функций ψ, φ, удовлетворяющих перечисленным условиям.

Вначале без использования результатов о точках совпадения покажем, что при выполнении перечисленных условий решением уравнения (1.1.3) является точная нижняя граница ξ множества

$$\mathcal{X} = \{x \in [a, b] : \ \varphi(x) \le \psi(x)\}.$$

В силу (1.1.12) это множество не пусто, $b \in \mathcal{X}$. Если множество $\mathcal{X}$ конечно, то его наименьший элемент ξ удовлетворяет уравнению (1.1.3), иначе согласно (1.1.13) в множестве $\mathcal{X}$ существовал бы еще один элемент, меньший чем ξ. Если множество $\mathcal{X}$ бесконечно, то существует убывающая последовательность $\{x_i\} \subset \mathcal{X}$ такая, что $x_i \to \xi + 0$. В силу непрерывности функции ψ для любого $\varepsilon > 0$ существует число I такое, что $\psi(x_i) < \psi(\xi) + \varepsilon$ при всех натуральных $i > I$. Тогда $\varphi(x_i) \leq \psi(x_i) < \psi(\xi) + \varepsilon, \ i > I$. Отсюда, в силу предположения (1.1.14), имеем $\varphi(\xi) \leq \psi(\xi) + \varepsilon$, следовательно, $\varphi(\xi) \leq \psi(\xi)$. Элемент ξ обязан удовлетворять уравнению (1.1.3), иначе согласно (1.1.13) в множестве $\mathcal{X}$ существовал бы еще один элемент, меньший чем ξ.

Итак, уравнение (1.1.3) имеет решение $\xi \in [a, b]$. Однако, результаты [5, 46] о точке совпадения к этому уравнению не применимы. Действительно, в соответствующих теоремах одно из отображений должно быть изотонным, но здесь обе функции не предполагаются монотонными. В то же время рассматриваемые в данном примере функции удовлетворяют всем предположениям теоремы 1.1.3. Покажем это.

Во-первых, покажем, что пространство $(\mathcal{X}, \leq)$ полное и поэтому справедливо соотношение (c′). Для любой цепи $S \subset \mathcal{X}$, определим $\widetilde{x} \in X$, $\widetilde{x} = \inf S$. Пусть $\widetilde{x} \notin S$. Тогда существует убывающая последовательность $\{x_i\} \subset S$ такая, что $x_i \to \widetilde{x} + 0$. В силу непрерывности функции ψ для любого $\varepsilon > 0$ существует число I такое, что $\psi(x_i) < \psi(\widetilde{x}) + \varepsilon$ при всех натуральных $i > I$. Следовательно, $\varphi(x_i) < \psi(\widetilde{x}) + \varepsilon, \ i > I$, поэтому в силу предположения (1.1.14) имеем $\varphi(\widetilde{x}) \leq \psi(\widetilde{x}) + \varepsilon$. Таким образом, $\varphi(\widetilde{x}) \leq \psi(\widetilde{x})$. Полнота пространства $(\mathcal{X}, \leq)$ доказана. Из неравенства $\psi(a) \leq \varphi(\widetilde{x}) \leq \psi(\widetilde{x})$, в силу непрерывности функции ψ, следует существование $\widetilde{x}' \in [a, b]$ такого, что $\psi(\widetilde{x}') = \varphi(\widetilde{x})$. Итак, соотношение (c′) справедливо (причем, не только для $S \in \Xi(\mathcal{X}, \psi, \varphi)$, но и для всех $S \in \mathcal{X}$).

Из (1.1.12) следует $\psi(a) \leq \varphi(b) \leq \psi(b)$, поэтому в силу непрерывности функции ψ существует такое $b' \in [a,b]$, что $\psi(b') = \varphi(b)$. Таким образом, условие (a′) выполнено, $x_0 = b$.

Условие (b′) также выполнено. Действительно, если $\psi(x') = \varphi(x)$ для некоторых $x \in \mathcal{X}$, $x' \in [a,x)$, то в силу (1.1.13) существует $u \in \mathcal{X}$, удовлетворяющий неравенствам $\psi(a) \le \varphi(u) \le \psi(u)$. А так как функция ψ непрерывна, существует $u' \in [a,u]$, удовлетворяющий соотношению $\psi(u') = \varphi(u)$.

Итак, теорема 1.1.3 в отличие от результатов [5, 46] позволяет установить существование точки совпадения функций, рассматриваемых в этом примере.

Завершая обсуждение данного примера отметим, что соотношения (1.1.13), (1.1.14) справедливы, если выполнено следующее условие «неубывания φ в точках разрыва»:

при любом $x \in [a,b)$ *существует* $\varphi(x+0) := \lim\limits_{u \to x+0} \varphi(u)$ *и выполнено* $\varphi(x) \le \varphi(x+0)$, *а при любом* $x \in (a,b]$ *существует* $\varphi(x-0) := \lim\limits_{u \to x-0} \varphi(u)$ *и выполнено* $\varphi(x) \ge \varphi(x-0)$.

1.1.3 Устойчивость точек совпадения отображений

Вначале сформулируем, как в частично упорядоченном пространстве будет пониматься устойчивость точек совпадения к изменениям отображений.

Обозначим $P(\mathbb{N})$ — совокупность всех возрастающих последовательностей натуральных чисел. Пусть, как и выше, заданы пространство $(X, \preceq)$ и множество $Y \ne \emptyset$. Пусть $\xi \in X$ является точкой совпадения отображений $\psi, \varphi : X \to Y$, то есть решением уравнения (1.1.3). Пусть также заданы отображения $\psi_i, \varphi_i : X \to Y$, $i \in \mathbb{N}$. Наряду с уравнением (1.1.3) рассмотрим последовательность уравнений

$$\psi_i(x) = \varphi_i(x), \quad i \in \mathbb{N}. \tag{1.1.15}$$

Получим условия, обеспечивающие существование при каждом i решения $\xi_i \in X$ уравнения (1.1.15) — точки совпадения отображений ψ_i, φ_i и «сходимость» последовательности $\{\xi_i\}$ к точке ξ, которую будем понимать следующим образом:

$$\forall \{i_n\} \in P(\mathbb{N}) \quad \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\xi_{i_n}\} = \xi. \tag{1.1.16}$$

Теорема 1.1.4. *Пусть в пространстве* $(X, \preceq)$ *множество из любых двух элементов имеет точную нижнюю границу*[2]*, при каждом* $i \in \mathbb{N}$ *выполнены следующие условия:*

($\mathrm{a_i}$) *существует* ${\xi'}_i \in \mathcal{O}_X(\xi)$ *такой, что* $\psi_i({\xi'}_i) = \varphi_i(\xi)$;

($\mathrm{b_i}$) *для любых* $x, x' \in \mathcal{O}_X(\xi)$ *таких, что* $x' \prec x$ *и* $\psi_i(x') = \varphi_i(x)$, *существуют* $u, u' \in X$, *для которых справедливы соотношения* $u' \preceq u \preceq x'$ *и* $\psi_i(u') = \varphi_i(u)$;

($\mathrm{c_i}$) *для любой бесконечной цепи* $S \in \Sigma(\mathcal{O}_X(\xi), \psi_i, \varphi_i)$ *существуют такие* $w_i, w_i' \in X$, *что*

$$\forall x \in S \quad w_i' \preceq w_i \preceq x, \quad \psi_i(w_i') = \varphi_i(w_i). \tag{1.1.17}$$

Пусть, кроме того, для любого $x \prec \xi$ *существует такое* N, *что при всех* $i > N$ *во множестве* $\mathcal{O}_X(x)$ *нет точек совпадения отображений* ψ_i, φ_i. *Тогда при любом* i *существует точка совпадения* ξ_i *отображений* ψ_i, φ_i *такая, что для последовательности* $\{\xi_i\}$ *имеет место соотношение* (1.1.16).

[2]Такое частично упорядоченное пространство называют полурешеткой (см., например, [63, с.38, 39])

Доказательство. При каждом $i \in \mathbb{N}$ для отображений ψ_i, φ_i справедливы предположения теоремы 1.1.2 (в которых $x_0 = \xi$). Следовательно, существует точка совпадения $\xi_i \in \mathcal{O}_X(\xi)$ этих отображений. Пусть $\{i_n\} \in P(\mathbb{N})$. Очевидно ξ является верхней границей множества $\{\xi_{i_n}\}$. Пусть некоторый элемент v такой, что $v \not\succeq \xi$, тоже является верхней границей множества $\{\xi_{i_n}\}$. Тогда верхней границей этого множества будет еще и элемент $x = \inf\{\xi, v\}$, и для этого элемента выполнено $x \prec \xi$. Получено противоречие с тем, что при достаточно больших номерах i должно быть выполнено соотношение $\xi_i \notin \mathcal{O}_X(x)$. $\square$

В доказанном утверждении отображения ψ_i, φ_i при каждом $i \in \mathbb{N}$ удовлетворяют предположениям теоремы 1.1.2. Близкие условия «сходимости» последовательности $\{\xi_i\}$ точек совпадения отображений ψ_i, φ_i к точке ξ могут быть получены, если воспользоваться теоремой 1.1.3.

Теорема 1.1.5. *Пусть в* $(X, \preceq)$ *множество из любых двух элементов имеет точную нижнюю границу, при каждом* $i \in \mathbb{N}$ *задано множество* $\mathcal{X}_i \subset X$ *такое, что* $\xi \in \mathcal{X}_i$, *выполнены условие* $(\mathrm{a_i})$ *и условия:*

$(\mathrm{b'_i})$ *для любых* $x \in \mathcal{X}_i$, $x' \in X$ *таких, что* $x' \prec x$, $\psi_i(x') = \varphi_i(x)$, *существуют элементы* $u \in \mathcal{X}_i$, $u' \in X$, *для которых справедливы соотношения* $u' \preceq u \prec x$ *и* $\psi_i(u') = \varphi_i(u)$;

$(\mathrm{c'_i})$ *для любой бесконечной цепи* $S \in \Xi(\mathcal{X}_i, \psi_i, \varphi_i)$ *существуют* $w_i \in \mathcal{X}_i$, $w'_i \in X$ *такие, что выполнено* (1.1.17).

Далее, пусть для любого $x \prec \xi$ *существует такое* N, *что при всех* $i > N$ *во множестве* $\mathcal{O}_X(x)$ *нет точек совпадения отображений* ψ_i, φ_i. *Тогда при любом* i *существует точка совпадения* ξ_i *отображений* ψ_i, φ_i *и для последовательности* $\{\xi_i\}$ *имеет место соотношение* (1.1.16).

Доказательство. Рассуждения, доказывающие это утверждение, аналогичны приведенным в доказательстве теоремы 1.1.4. Приведем эти рассуждения.

При каждом $i \in \mathbb{N}$ для отображений ψ_i, φ_i справедливы предположения теоремы 1.1.3 (в которых $x_0 = \xi$). Следовательно, существует точка совпадения $\xi_i \in \mathcal{O}_X(\xi)$ этих отображений. Пусть $\{i_n\} \in P(\mathbb{N})$. Очевидно ξ является верхней границей множества $\{\xi_{i_n}\}$. Пусть некоторый элемент v такой, что $v \not\succeq \xi$, тоже является верхней границей множества $\{\xi_{i_n}\}$. Тогда верхней границей этого множества будет еще и элемент $x = \inf\{\xi, v\}$, и для этого элемента выполнено $x \prec \xi$. Получено противоречие с тем, что при достаточно больших номерах i должно быть выполнено соотношение $\xi_i \notin \mathcal{O}_X(x)$. $\square$

§ 1.2. Операторные уравнения

В этом параграфе для заданных отображения $\Phi : X \times X \to Y$ и элемента $\tilde{y} \in Y$ рассматривается уравнение вида

$$\Phi(x, x) = \tilde{y} \tag{1.2.1}$$

с неизвестным $x \in X$. Как и выше, пространство X предполагается упорядоченным. В пункте 1.2.1 рассматривается ситуация, когда на Y определено рефлексивное бинарное отношение, отображение Φ по первому аргументу является упорядоченно накрывающим, а по второму — антитонным. Полученная в этом пункте теорема 1.2.1 о существовании решения рассматриваемого уравнения означает, что свойство накрывания устойчиво к антитонным возмущениям. В этом смысле теорема 1.2.1 восходит к известной теореме Милютина (см. [76]) о липшицевых возмущениях накрывающих отображений, действующих из метрического в нормированное пространство. Устойчивость свойства накрывания в случае, когда оба пространства X, Y частично упорядоченные исследовалась в [77, 82, 83, 87]. В цитируемых работах также показано, что утверждения об устойчивости «метрического накрывания» (в том числе, теорема Милютина) выводятся из утверждений об устойчивости «упорядоченного накрывания», для этого в метрическом пространстве следует определить порядок Бишопа-Фелпса (определение такого порядка см. [92, теорема 7.5.1]), или аналогичный порядок Брондстеда (см. [10]).

В пункте 1.2.2 определяются множества накрывания и антитонности отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в пространство с рефлексивным бинарным отношением. Эти определения распространяют аналогичные определения, данные в [82] для отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в частично упорядоченное пространство. На основании введенных понятий в этом пункте доказываются теорема 1.2.2 о разрешимости уравнения (1.2.1), позволяющая несколько ослабить предположения теоремы 1.2.1. Далее в пункте 1.2.2 показано, что из доказанной здесь теоремы 1.2.2 выводится теорема 1.1.1 о точках совпадения отображений $\psi, \varphi : X \to Y$ (а следовательно, и утверждения о точках совпадения, полученные в [77, 82, 83, 87]).

В пункте 1.2.3 исследуются уравнения более общего вида чем (1.2.1) с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в множество, на котором не задано никакое бинарное отношение. Получены условия существования решений, установлена связь доказанного утверждения с теоремами 1.2.1 и 1.2.2 об уравнении (1.2.1), теоремами 1.1.2 и 1.1.3 о точках совпадения, а также с известными результатами о неподвижных точках.

Представленные в параграфе 1.2 утверждения иллюстрируются примерами. В частности, приведен пример 1.2.2 действительной функции, к которой не применимы известные теоремы о неподвижной точке, и тем не менее существование неподвижной точки устанавливается с помощью полученных здесь утверждений.

1.2.1 Антитонные возмущения упорядоченно накрывающего отображения

Пусть X — пространство с частичным порядком $\preceq$, Y — непустое множество, на котором определено рефлексивное бинарное отношение ϑ. Пусть заданы отображение $\Phi : X \times X \to Y$ и элемент $\tilde{y} \in Y$. Здесь рассматривается уравнение (1.2.1) в предположении, что отображение Φ

является по одному аргументу накрывающим множество $\{\tilde{y}\}$, а по другому — антитонным.

Пусть $\mathcal{X} \subset X$. Определим совокупность $\widetilde{\Pi}(\mathcal{X}, \Phi, \tilde{y})$ всех таких цепей $S \subset X$, что $S \subset \mathcal{X}$ и выполнены соотношения

$$\begin{cases} \forall x \in S \quad \tilde{y} \,\vartheta\, \Phi(x, x), \\ \forall x, x' \in S \quad x' \prec x \;\Rightarrow\; \Phi(x', x) \,\vartheta\, \tilde{y}. \end{cases} \tag{1.2.2}$$

Теорема 1.2.1. *Пусть для некоторого элемента $x_0 \in X$ имеет место соотношение $\tilde{y} \,\vartheta\, \Phi(x_0, x_0)$ и выполнены следующие условия:*

(i) для любого $x \in \mathcal{O}_X(x_0)$ отображение $\Phi(\cdot, x) : X \to Y$ является накрывающим множество $W := \{\tilde{y}\}$.

(ii) для любого $x \in \mathcal{O}_X(x_0)$ отображение $\Phi(x, \cdot) : X \to Y$ является антитонным на множестве $[x, x_0]$.

(iii) для любой цепи $S \subset \widetilde{\Pi}(\mathcal{O}_X(x_0), \Phi, \tilde{y})$ существует элемент $u \in X$ такой, что

$$\forall x \in S \quad u \preceq x, \quad \tilde{y} \,\vartheta\, \Phi(u, u).$$

Тогда существует решение $\xi \in \mathcal{O}_X(x_0)$ уравнения (1.2.1).

Доказательство. Определим множество

$$U = \big\{ x \in O_X(x_0) : \, \tilde{y} \,\vartheta\, \Phi(x, x) \big\}.$$

Это множество не пусто, так как $x_0 \in U$.

На непустом множестве U определим еще одно отношение порядка $\trianglelefteq$ следующим образом: для элементов $u', u \in U$ полагаем выполненным неравенство $u' \trianglelefteq u$ если $u' = u$ или если

$$u' \vartriangleleft u \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u' \prec u, \\ \exists \overline{x} \in \mathcal{O}_X(u) \quad \Phi(u', \overline{x}) = \tilde{y}. \end{cases} \tag{1.2.3}$$

Покажем что отношение $\trianglelefteq$ является порядком. Свойства антисимметричности и рефлексивности очевидны. Проверим свойство транзитивности. Пусть $u'' \triangleleft u'$, $u' \triangleleft u$. Тогда имеем $u'' \prec u'$ и $u' \prec u$, поэтому $u'' \prec u$. Кроме того, из соотношения

$$\exists \overline{x} \in \mathcal{O}_X(u') \subset \mathcal{O}_X(u) \quad \Phi(u'', \overline{x}) = \tilde{y}$$

окончательно получаем $u'' \triangleleft u$.

Согласно теореме Хаусдорфа о максимальной цепи (см., например, [94, гл. 1, § 4.7]) существует максимальная цепь (относительно порядка $\trianglelefteq$) $S \subset U$. Из определения порядка $\trianglelefteq$ формулой (1.2.3) вытекает, что цепь S удовлетворяет условию (1.2.2). Действительно, для любых $u', u \in U$ из неравенства $u' \trianglelefteq u$ в силу антитонности отображения $\Phi(u', \cdot)$ следует, что

$$\big(\Phi(u', \overline{x}) = \tilde{y}, \quad x \preceq u\big) \;\Rightarrow\; \Phi(u', \overline{x})\,\vartheta\,\tilde{y}.$$

В силу предположения (iii) у этой цепи (уже относительно порядка $\preceq$) существует точная нижняя граница ξ. Покажем, что ξ является решением уравнения (1.2.1). Для этого элемента выполнено

$$\tilde{y}\,\vartheta\,\Phi(\xi, \xi) \;\text{ и }\; \forall x \in S \;\; \xi \preceq x.$$

В силу предположения (i) существует $\sigma \preceq \xi$ такой, что $\Phi(\sigma, \xi) = \tilde{y}$. Из этого равенства, в силу предположения (ii) получаем

$$\tilde{y}\,\vartheta\,\Phi(\sigma, \sigma) \;\text{ и }\; \forall x \in S \;\; \Phi(\sigma, x)\,\vartheta\,\Phi(\sigma, \xi) = \tilde{y}.$$

Полученные неравенства означают, что $\sigma \in U$ и $\sigma \trianglelefteq x$ при любом $x \in S$. Так как цепь S максимальная, должно выполняться включение $\sigma \in S$. Элемент ξ является нижней границей этой цепи, поэтому $\xi \succeq \sigma$. В то же время, по построению, $\xi \preceq \sigma$. Итак $\xi = \sigma$, и поэтому $\Phi(\xi, \xi) = \tilde{y}$. $\square$

Приведем пример отображения, удовлетворяющего условиям теоремы 1.2.1, со значениями во множестве, на котором определено бинарное отношение, не являющееся порядком. В этой ситуации результаты работ [82, 83] применять нельзя.

Пример 1.2.1. Определим множество $X = \{w, x_1, u_1, x_2, u_2, \ldots\}$, на котором зададим частичный порядок, полагая для натуральных $i \leq j$ выполненными неравенства $x_i \succ x_j \succ w$, $u_i \succ u_j \succ w$, а элементы x_i, u_j при любых i, j полагаем несравнимыми. Далее, определим множество $Y = \{z, y_1, y_2, y_3\}$ и на нем зададим бинарное отношение

$$y_2 \,\vartheta\, y_1, \quad y_3 \,\vartheta\, y_2, \quad y_1 \,\vartheta\, y_3, \quad z \,\vartheta\, z, \quad y_i \,\vartheta\, y_i, \quad z \,\vartheta\, y_i, \ i = 1, 2, 3.$$

Это отношение не обладает свойством транзитивности (так как $y_3 \,\vartheta\, y_2$, $y_2 \,\vartheta\, y_1$, но $y_3 \not\vartheta\, y_1$), таким образом, множество Y не является упорядоченным.

Определим отображение $\Phi : X \times X \to Y$ следующим образом. Каждому натуральному i поставим в соответствие $r(i) \in \{1, 2, 3\}$ так, что $i \equiv r(i) \pmod 3$. При всех натуральных i и произвольном элементе $x \in X$ полагаем

$$\Phi(x_i, x) = y_{r(i)}, \quad \Phi(u_i, x) = y_{r(i)}, \quad \Phi(w, x) = z.$$

Для определенного такими соотношениями отображения рассмотрим уравнение (1.2.1) с любой правой частью $\tilde{y} \in Y$. Для проверки условий теоремы 1.1.1 необходимо по элементу $\tilde{y} \in Y$ определить $x_0 \in X$ так, чтобы $\tilde{y} \,\vartheta\, \Phi(x_0, x_0)$. Если $\tilde{y} := y_1$, то в качестве x_0 можно выбрать x_3, так как $y_1 \,\vartheta\, y_3 = \Phi(x_3, x_3)$. Аналогично, для $\tilde{y} := y_2$, можно в качестве x_0 выбрать x_1; для $\tilde{y} \doteq y_3$, следует принять x_2; а для $\tilde{y} := z$ — любое x_i.

Далее, для уравнения (1.2.1) с определенным здесь отображением Φ легко проверяются условия теоремы 1.2.1, уравнение, очевидно, имеет решение во множестве $\mathcal{O}_X(x_0)$.

1.2.2 Условия разрешимости уравнений, использующие множество упорядоченного накрывания

Продолжим исследование уравнения (1.2.1) в случае, когда X — пространство с частичным порядком $\preceq$, Y — непустое множество, на котором определено рефлексивное бинарное отношение ϑ.

Предположения накрывания отображения Φ по первому аргументу и антитонности по второму аргументу в теореме 1.2.1 о разрешимости уравнения (1.2.1) можно ослабить, используя следующие понятия. Для произвольного отображения $f : X \to Y$ определим множества:

$$\mathrm{Cov}[f] := \big\{(u, y) \in X \times Y : \ y \,\vartheta\, f(u) \ \Rightarrow \ \exists x \in X \ \ f(x) = y, \ \ x \preceq u\big\},$$
$$\mathrm{Dcr}[f] := \big\{(u, y) \in X \times Y : \ \forall x \in X \ \ f(x) = y, \ \ u \preceq x \ \Rightarrow \ y \,\vartheta\, f(u)\big\},$$

первое из которых будем называть *множеством* (*упорядоченного*) *накрывания отображения* f, а второе — *множеством антитонности отображения* f. Множеству $\mathrm{Cov}[f]$ принадлежат, например, все пары (u, y) такие, что $y \not\vartheta f(u)$. Отметим, что соотношение $\mathrm{Cov}[f] = X \times Y$ равносильно упорядоченному накрыванию отображения f, а соотношение $\mathrm{Dcr}[f] = X \times Y$ — антитонности отображения f.

Приведенное определение множества $\mathrm{Cov}[f]$ аналогично данному в [82] определению множества упорядоченного накрывания отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в частично упорядоченное пространство.

Вернемся к рассмотрению уравнения (1.2.1), в котором полагаем заданными правую часть $\tilde{y} \in Y$ и отображение $\Phi : X \times X \to Y$.

Пусть $\mathcal{X} \subset X$. Определим совокупность $\widetilde{\Xi}(\mathcal{X}, \Phi, \tilde{y})$ всех цепей $S \subset X$, удовлетворяющих условию

$$\begin{cases} \forall x \in S \;\; \tilde{y}\,\vartheta\,\Phi(x,x), \\ \forall x, u \in S \;\; x \prec u \;\Rightarrow\; \exists \zeta \in [x,u] \;\; \tilde{y}\,\vartheta\,\Phi(\zeta,\zeta), \;\; \Phi(x,\zeta) = \tilde{y}. \end{cases} \tag{1.2.4}$$

Теорема 1.2.2. *Пусть существует элемент $x_0 \in X$ такой, что $\tilde{y}\,\vartheta\,\Phi(x_0,x_0)$, и пусть любая цепь $S \subset \widetilde{\Xi}(\mathcal{O}_X(x_0), \Phi, \tilde{y})$ имеет нижнюю границу $v \in X$, для которой $\tilde{y}\,\vartheta\,\Phi(v,v)$. Предположим также, что для любого $x \in \mathcal{O}_X(x_0)$ справедливы включения*

$$(x, \tilde{y}) \in \mathrm{Cov}[\Phi(\cdot, x)], \quad (x, \tilde{y}) \in \mathrm{Dcr}[\Phi(x, \cdot)].$$

Тогда существует решение $\xi \in \mathcal{O}_X(x_0)$ уравнения (1.2.1).

Доказательство. Определим множество

$$U = \big\{ x \in \mathcal{O}_X(x_0) : \; \tilde{y}\,\vartheta\,\Phi(x,x) \big\}.$$

Это множество не пусто, поскольку $x_0 \in U$. На множестве U определим бинарное отношение $\trianglelefteq$ следующим соотношением

$$\forall x, u \in U \;\; x \trianglelefteq u \;\Leftrightarrow\; x \preceq u \;\text{ и }\; \big(x \prec u \;\Rightarrow\; \exists \zeta \in [x,u] \cap U \;\; \Phi(x,\zeta) = \tilde{y} \big)$$

(естественно, в случае $x \trianglelefteq u$, $x \neq u$ будем писать $x \lhd u$). Очевидно, что отношение $\trianglelefteq$ является порядком и обладает следующим свойством, более «сильным», чем транзитивность:

$$z \lhd x, \;\; x \preceq u \;\Rightarrow\; z \lhd u. \tag{1.2.5}$$

Из определения пространства $(U, \trianglelefteq)$ следует, что цепь относительно порядка $\trianglelefteq$ является также цепью относительно порядка $\preceq$, более того, удовлетворяет соотношениям (1.2.4). В пространстве $(U, \trianglelefteq)$ согласно теореме Хаусдорфа о максимальной цепи (см., например, [94, гл. 1, § 4.7]) существует максимальная цепь S, содержащая точку x_0. Поскольку $S \in \widetilde{\Xi}(\mathcal{O}_X(x_0), \Phi, \tilde{y})$, в силу предположений теоремы, эта цепь относительно первоначального порядка $\preceq$ имеет нижнюю границу $v \in \mathcal{O}_X(x_0)$, для которой выполнено соотношение $\tilde{y}\,\vartheta\,\Phi(v, v)$, то есть $v \in U$. Покажем, что эта нижняя граница v является решением уравнения (1.2.1). Предположим противное: $\Phi(v, v) \neq \tilde{y}$.

В силу соотношения $(v, \tilde{y}) \in \mathrm{Cov}[\Phi(\cdot, v)]$ существует $\xi \in \mathcal{O}_X(v)$ такой, что выполнено равенство

$$\Phi(\xi, v) = \tilde{y}. \tag{1.2.6}$$

В этом равенстве $\xi \neq v$ (так как $\Phi(v, v) \neq \tilde{y}$), поэтому $\xi \prec v$. Из (1.2.6) в силу соотношения $(\xi, \tilde{y}) \in \mathrm{Dcr}[\Phi(\xi, \cdot)]$ получаем $\tilde{y}\,\vartheta\,\Phi(\xi, \xi)$. Таким образом, доказано, что $\xi \in U$ и $\xi \lhd v$. Поэтому, согласно свойству (1.2.5) для любого $x \in S$ имеет место неравенство $\xi \lhd x$. Так как цепь S является максимальной в U относительно порядка $\trianglelefteq$, элемент ξ должен принадлежать этой цепи. Но тогда неравенство $\xi \lhd v$ противоречит тому, что v — нижняя граница этой цепи.

Итак, предположение $\Phi(v, v) \neq \tilde{y}$ не верно, то есть элемент $\xi = v$ является решением уравнения (1.2.1). $\square$

Продемонстрируем, каким образом *из теоремы 1.2.2 выводится теорема 1.1.1 о точках совпадения отображений* $\psi, \varphi : X \to Y$. С этой целью зададим на трехэлементном множестве $Z = \{0, -1, 1\}$ бинарное отношение

$$\varpi := \big\{(0,0), (-1,-1), (1,1), (0,1)\big\}$$

(то есть выполнено $0 \varpi 1$, а любая другая пара различных элементов в отношение ϖ не вступает) и определим отображение $\eta : Y \times Y \to Z$ формулой

$$Y \times Y \ni (y, v) \;\mapsto\; \eta(y, v) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = v, \\ 1, & \text{если } v \,\vartheta\, y,\ v \neq y, \\ -1, & \text{если } v \not\vartheta\, y. \end{cases}$$

Теперь определим отображение $\Phi : X \times X \to Z$, $\Phi(x, u) := \eta\big(\psi(x), \varphi(u)\big)$, $x, u \in X$, и рассмотрим следующее уравнение

$$\Phi(x, x) := \eta\big(\psi(x), \varphi(x)\big) = 0. \tag{1.2.7}$$

Очевидно, что решение уравнения (1.2.7) является точкой совпадения отображений ψ, φ. Покажем, что если для отображений ψ, φ выполнены условия теоремы 1.1.1, то существование решения уравнения (1.2.7) следует из теоремы 1.2.2.

Итак, предположения теоремы 1.1.1 считаем выполненными. Проверяем справедливость условий теоремы 1.2.2.

Во-первых, пусть $\varphi(x_0) \,\vartheta\, \psi(x_0)$, тогда выполнено $\eta\big(\psi(x_0), \varphi(x_0)\big) = 1$ (если $\psi(x_0) \neq \varphi(x_0)$) или $\eta\big(\psi(x_0), \varphi(x_0)\big) = 0$ (если $\psi(x_0) = \varphi(x_0)$), следовательно, $0 \varpi \eta\big(\psi(x_0), \varphi(x_0)\big)$.

Во-вторых, пусть любая цепь $S \in \Pi(\mathcal{X}_0, \psi, \varphi)$, где

$$\mathcal{X}_0 = \big\{x \in X : \, x \preceq x_0 \ \text{и} \ \psi(x) \in \varphi([x, x_0])\big\},$$

имеет нижнюю границу $v \in X$ такую, что $\varphi(v)\,\vartheta\,\psi(v)$. Выберем произвольную цепь $\mathcal{C} \in \widetilde{\widetilde{\Xi}}(\mathcal{O}_X(x_0), \Phi, 0)$, ее любой элемент $x \in \mathcal{C}$ удовлетворяет условию $0\,\varpi\,\eta\big(\psi(x), \varphi(x)\big)$. Это условие означает, что выполнено $\eta\big(\psi(x), \varphi(x)\big) = 0$ или $\eta\big(\psi(x), \varphi(x)\big) = 1$, то есть это условие равносильно соотношению $\varphi(x)\,\vartheta\,\psi(x)$. Далее, для любых двух элементов $x, u \in \mathcal{C}$ таких, что $x \prec u$, существует элемент $\zeta \in [x, u]$, удовлетворяющий условиям

$$0\,\varpi\,\eta\big(\psi(\zeta), \varphi(\zeta)\big), \quad \eta\big(\psi(x), \varphi(\zeta)\big) = 0.$$

Отсюда $\psi(x) = \varphi(\zeta)$, и вследствие изотонности отображения φ получаем $\psi(x)\,\vartheta\,\varphi(u)$. Таким образом цепь $\mathcal{C}$ удовлетворяет условиям (1.2.4), поэтому выполнено включение $\mathcal{C} \in \Pi(\mathcal{X}_0, \psi, \varphi)$ и цепь $\mathcal{C}$ имеет нижнюю границу $v \in X$, для которой $\varphi(v)\,\vartheta\,\psi(v)$. Следовательно, $0\,\varpi\,\eta\big(\varphi(v), \psi(v)\big)$.

Заключая проверку условий теоремы 1.2.2, замечаем, что если отображение ψ накрывающее, то при любом $x \in \mathcal{O}_X(x_0)$ для отображения $\eta\big(\psi(\cdot), \varphi(x)\big) : X \to Z$ выполнено включение $(0, x) \in \mathrm{Cov}\big[\eta\big(\psi(\cdot), \varphi(x)\big)\big]$, а если отображение φ изотонное, то при любом $x \in \mathcal{O}_X(x_0)$ для отображения $\eta\big(\psi(x), \varphi(\cdot)\big) : X \to Z$ справедливо $(0, x) \in \mathrm{Dcr}\big[\eta\big((\psi\cdot), \varphi(x)\big)\big]$.

Итак, теорема 1.2.2 позволяет исследовать задачу о точках совпадения отображений, действующих из $(X, \preceq)$ в (Y, ϑ), где ϑ — произвольное рефлексивное бинарное отношение, а в частном случае, отношение порядка. Поэтому из теоремы 1.2.2 может быть получена не только теорема 1.1.1, но и [5, Theorem 1].

1.2.3 Уравнения с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в множество, не обладающее отношениями между элементами

Пусть, как и выше, заданы $(X, \preceq)$ и множество $Y \neq \emptyset$. Пусть определены отображения $F, G : X \times X \to Y$. Рассмотрим задачу о существовании элемента $x \in X$, удовлетворяющего уравнению

$$F(x, x) = G(x, x). \qquad (1.2.8)$$

Отметим, что частными случаями уравнения (1.2.8) являются уравнение (1.1.3), (определяющее точку совпадения отображений F, G таких, что $F(x, \cdot)$ и $G(\cdot, x)$ постоянны при любом x, т.е. $F(x, \cdot) = \mathrm{const} = \psi(x)$ и $G(\cdot, x) = \mathrm{const} = \varphi(x)$) и уравнение 1.2.1 (которое соответствует ситуации $G(\cdot, \cdot) = \mathrm{const} = \tilde{y}$).

Пусть задано непустое множество $\mathcal{X} \subset X$. Определим совокупность $\Xi(\mathcal{X}, F, G)$ цепей S в пространстве X таких, что $S \subset \mathcal{X}$ и выполнено соотношение:

$$\forall u \in S \ \exists x \in X \ \ x \preceq u, \ \ F(x, u) = G(x, u).$$

Теорема 1.2.3. *Пусть выполнены следующие условия:*

(a) *существуют* $u_0 \in \mathcal{X}$, $x_0 \in X$ *такие, что* $x_0 \preceq u_0$ *и* $F(x_0, u_0) = G(x_0, u_0)$;

(b) *для любых* $u \in \mathcal{X}$, $x \in X$ *таких, что* $x \prec u$, $F(x, u) = G(x, u)$, *найдутся элементы* $v \in \mathcal{X}$, $w \in X$, *для которых* $w \preceq v \prec u$ *и* $F(w, v) = G(w, v)$;

(c) *для произвольной бесконечной цепи* $S \in \Xi(\mathcal{X}, F, G)$ *существуют элементы* $\widetilde{v} \in \mathcal{X}$, $\widetilde{w} \in X$, *удовлетворяющие соотношениям*

$$\forall u \in S \quad \widetilde{w} \preceq \widetilde{v} \preceq u, \quad F(\widetilde{w}, \widetilde{v}) = G(\widetilde{w}, \widetilde{v}). \tag{1.2.9}$$

Тогда существует решение $x = \xi \in \mathcal{X}$ *уравнения* (1.2.8) *такое, что* $\xi \preceq u_0$.

Доказательство. Определим подпространство

$$X_0 = \{u \in \mathcal{X} : \exists x \in \mathcal{O}_X(u), \ F(x, u) = G(x, u)\}$$

упорядоченного пространства $(X, \preceq)$. Согласно теореме Хаусдорфа о максимальной цепи в пространстве $(X_0, \preceq)$ существует максимальная цепь S, содержащая элемент x_0. В силу определения множества X_0 для этой цепи выполнено $S \in \Xi(\mathcal{X}, F, G)$.

Докажем утверждение теоремы сначала в случае, когда цепь S конечна. Итак, пусть $S := \{u_i, \ i = \overline{0, m}\}$, $u_m \prec \ldots \prec u_0$. По определению пространства X_0 для наименьшего элемента u_m этой цепи найдутся элемент $x_m \in X$, $x_m \preceq u_m$, удовлетворяющий соотношению $F(x_m, u_m) = G(x_m, u_m)$. Если $x_m \prec u_m$, то в силу условия (b) существуют элементы $v \in \mathcal{X}$, $w \in X$, такие, что $w \preceq v \prec u_m$ и $F(w, v) = G(w, v)$. Таким образом, $v \in X_0$ и $v \prec u_m$, что противоречит максимальности цепи $S \subset X_0$. Итак, выполнено равенство $x_m = u_m$. Следовательно $F(u_m, u_m) = G(u_m, u_m)$.

Теперь докажем утверждение теоремы в случае, когда цепь S бесконечна. Согласно предположению (c) эта цепь имеет нижние границы $\widetilde{v} \in \mathcal{X}$ $\widetilde{w} \in X$ такие, что имеют место соотношения (1.2.9). Следовательно, $\widetilde{v} \in X_0$. Если $\widetilde{w} \prec \widetilde{v}$, то согласно предположению (b) существуют элементы $\mathrm{v} \in \mathcal{X}$, $\mathrm{w} \in X$ такие, что $\mathrm{w} \preceq \mathrm{v} \prec \widetilde{v}$ и $F(\mathrm{w},\mathrm{v}) = G(\mathrm{w},\mathrm{v})$. Таким образом, $\mathrm{v} \in X_0$ и $\mathrm{v} \prec u$ для любого элемента u цепи S. Но это неравенство противоречит максимальности цепи $S \subset X_0$. Итак, $\widetilde{w} = \widetilde{v}$, $F(\widetilde{v},\widetilde{v}) = G(\widetilde{v},\widetilde{v})$. □

Замечание 1.2.1. В доказательстве теоремы 1.2.3 установлено, что решением уравнения (1.2.8) является нижняя граница максимальной цепи $S \subset X_0$, содержащей заданную точку u_0. Поэтому в условиях теоремы 1.2.3 во множестве решений уравнения (1.2.8), принадлежащих множеству $\mathcal{X}$, существует минимальный элемент, и этот элемент удовлетворяет неравенству $\xi \preceq x_0$.

Выведем из теоремы 1.2.3 соответствующие утверждения о решениях частных случаев уравнения (1.2.8): уравнения (1.1.3) и уравнения (1.2.1).

Рассмотрим вначале уравнение (1.1.3). Пусть $\mathcal{X} \subset X$, $\mathcal{X} \neq \emptyset$. Определим совокупность $\Pi(\mathcal{X},\psi,\varphi)$ цепей S в пространстве X таких, что $S \subset \mathcal{X}$ и выполнено соотношение:

$$\forall u \in S \ \exists x \in X \ \ x \preceq u, \ \ \psi(x) = \varphi(u).$$

Следствие 1.2.1. *Пусть существуют элементы $u_0 \in \mathcal{X}$, $x_0 \in X$, для которых $x_0 \preceq u_0$ и $\psi(x_0) = \varphi(u_0)$; для любых $u \in \mathcal{X}$, $x \in X$ таких, что $x \prec u$, $\psi(x) = \varphi(u)$, найдутся элементы $v \in \mathcal{X}$, $w \in X$, для которых $w \preceq v \prec u$ и $\psi(w) = \varphi(v)$; для произвольной бесконечной цепи $S \in \Pi(\mathcal{X},\psi,\varphi)$ существуют элементы $\widetilde{v} \in \mathcal{X}$, $\widetilde{w} \in X$, удовлетворяющие соотношениям:*

$$\forall u \in S \ \ \widetilde{w} \preceq \widetilde{v} \preceq u, \quad \psi(\widetilde{w}) = \varphi(\widetilde{v}).$$

Тогда существует решение $x = \xi \in \mathcal{X}$ *уравнения* (1.1.3) *такое, что* $\xi \preceq u_0$; *кроме того, во множестве решений уравнения* (1.1.3), *принадлежащих множеству* $\mathcal{X}$, *существует минимальный элемент, и этот элемент удовлетворяет неравенству* $\xi \preceq x_0$.

Теперь сформулируем условия разрешимости уравнения (1.2.1). Пусть $\mathcal{X} \subset X$, $\mathcal{X} \neq \emptyset$, $\widetilde{y} \in Y$. Определим множество $\Xi_0(\mathcal{X}, \Phi, \widetilde{y})$ цепей S в пространстве X таких, что $S \subset \mathcal{X}$ и выполнено соотношение:

$$\forall u \in S \ \exists x \in X \ \ x \preceq u, \quad \Phi(x, u) = \widetilde{y}.$$

Следствие 1.2.2. *Пусть существуют элементы* $u_0 \in \mathcal{X}$, $x_0 \in X$, *для которых* $x_0 \preceq u_0$ *и* $\Phi(x_0, u_0) = \widetilde{y}$; *для любых* $u \in \mathcal{X}$, $x \in X$ *таких, что* $x \prec u$, $\Phi(x, u) = \widetilde{y}$, *найдутся элементы* $v \in \mathcal{X}$, $w \in X$, *для которых* $w \preceq v \prec u$ *и* $\Phi(w, v) = \widetilde{y}$; *для произвольной бесконечной цепи* $S \in \Xi_0(\mathcal{X}, \Phi, \widetilde{y})$ *существуют элементы* $\widetilde{v} \in \mathcal{X}$, $\widetilde{w} \in X$, *удовлетворяющие соотношениям*

$$\forall u \in S \ \ \widetilde{w} \preceq \widetilde{v} \preceq u, \quad \Phi(\widetilde{w}, \widetilde{v}) = \widetilde{y}.$$

Тогда существует решение $x = \xi \in \mathcal{X}$ *уравнения* (1.2.1) *такое, что* $\xi \preceq u_0$; *кроме того, во множестве решений уравнения* (1.2.1), *принадлежащих множеству* $\mathcal{X}$, *существует минимальный элемент, и этот элемент удовлетворяет неравенству* $\xi \preceq x_0$.

Из теоремы 1.2.3 выведем также условия существования неподвижной точки отображения $\Psi : X \to X$. Положим $Y := X$, обозначим тождественное отображение в X через $I : X \to X$. Пусть для некоторого отображения $G : X \times X \to X$ при любом $x \in X$ выполнено $\Psi(x) = G(x, x)$.

Определим множество $\Xi(\mathcal{X}, I, G)$ цепей S в пространстве X таких, что $S \subset \mathcal{X}$ и выполнено соотношение

$$\forall u \in S \ \exists x \in X \quad x \preceq u, \quad x = G(x, u).$$

Следствие 1.2.3. *Пусть существуют элементы $u_0 \in \mathcal{X}$, $x_0 \in X$ для которых $x_0 \preceq u_0$ и $x_0 = G(x_0, u_0)$; для любых $u \in \mathcal{X}$, $x \in X$ таких, что $x \prec u$, $x = G(x, u)$, найдутся элементы $v \in \mathcal{X}$, $w \in X$, для которых $w \preceq v \prec u$ и $w = G(w, v)$; для произвольной бесконечной цепи $S \in \Xi(\mathcal{X}, I, G)$ существуют элементы $\widetilde{v} \in \mathcal{X}$, $\widetilde{w} \in X$, удовлетворяющие соотношениям*

$$\forall u \in S \quad \widetilde{w} \preceq \widetilde{v} \preceq u, \quad \widetilde{w} = G(\widetilde{w}, \widetilde{v}).$$

Тогда существует неподвижная точка $\xi \in \mathcal{X}$ отображения Ψ такая, что $\xi \preceq x_0$; кроме того, во множестве неподвижных точек отображения Ψ, принадлежащих множеству $\mathcal{X}$, существует минимальный элемент, и этот элемент удовлетворяет неравенству $\xi \preceq x_0$.

Приведём пример действительной функции, к которой не применимы известные теоремы о неподвижной точке, и тем не менее существование неподвижной точки устанавливается с помощью следствия 1.2.3.

Пример 1.2.2. Пусть задана функция $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что при любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ функция $G(\cdot, x_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна, а функция $G(x_1, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ возрастает (здесь и ниже подразумевается нестрогое возрастает, т.е. с увеличение аргумента значение функции не уменьшается; аналогично убывающей считается функция, значения которой не увеличиваются при увеличения аргумента). Исследуем уравнение

$$x = \Psi(x) := G(x, x), \tag{1.2.10}$$

т.е. рассмотрим вопрос о существовании неподвижной точки функции $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Функция Ψ в общем случае не является ни непрерывной, ни монотонной, поэтому к ней не применимы известные теоремы о неподвижной точке. Более того, даже в случае обратимости функций $G(\cdot, x_2)$ или $G(x_1, \cdot)$ уравнение (1.2.10) можно записать в виде уравнения для неподвижной точки некоторой другой функции, но снова не являющейся ни монотонной, ни непрерывной. Действительно, пусть при любом $x_2 \in \mathbb{R}$ непрерывная функция $G(\cdot, x_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обратима и её обратная равна $\theta(\cdot, x_2)$. Тогда уравнение (1.2.10) эквивалентно уравнению $x = q(x) := \theta(x, x)$. Но в общем случае, функция $\theta(\cdot, \cdot)$ не является по второму аргументу непрерывной, а по первому аргументу монотонной, следовательно, и функция q не обладает соответствующими свойствами.

Покажем, что в отличие от известных теорем о неподвижных точках следствие 1.2.3 позволяет установить существование решения уравнения (1.2.10). Предположим, что для некоторых $u_0, \nu_0 \in \mathbb{R}$ выполнены неравенства $u_0 \geq \nu_0$, $u_0 \geq G(u_0, u_0)$, $\nu_0 \leq G(\nu_0, \nu_0)$. Так как функция $G(\nu_0, \cdot)$ возрастает, получаем $\nu_0 \leq G(\nu_0, u_0)$. Из данных неравенств в силу непрерывности по первому аргументу функции G следует существование $x_0 \in [\nu_0, u_0]$ такого, что $x_0 = G(x_0, u_0)$. Определим множество $\mathcal{X} := \{x \in [\nu_0, u_0] : x \geq G(x, x)\}$. Очевидно, $u_0 \in \mathcal{X}$ и для чисел u_0, x_0 справедливо первое предположение следствия 1.2.3.

Пусть теперь для некоторых $u \in \mathcal{X}$, $x \in \mathbb{R}$ выполнено соотношения

$x < u$ и $x = G(x, u)$. Тогда $x \geq G(x, x) \geq 0$. Положим $v = x$ и заметим, что $v \in \mathcal{X}$. Из неравенств

$$v \geq \nu_0, \quad v \geq G(v, v) \geq 0, \quad \nu_0 \leq G(\nu_0, \nu_0) \leq G(\nu_0, v)$$

в силу непрерывности по первому аргументу функции G вытекает, что существует $w \in [\nu_0, v]$ такой, что $w = G(w, v)$. Итак, справедливо второе предположение следствия 1.2.3.

Завершая проверку условий следствия 1.2.3, выберем любую цепь $S \subset \mathcal{X} \subset [\nu_0, u_0]$. Пусть $\widetilde{v} := \inf S$. Имеем $\widetilde{v} \in [\nu_0, u_0]$. Далее, так как для любого $x \in S$ выполнено неравенство $x \geq G(x, x)$, то вследствие возрастания по второму аргументу функции G получаем, что $x \geq G(x, \widetilde{v})$, а в силу непрерывности по первому этой функции — что $\widetilde{v} \geq G(\widetilde{v}, \widetilde{v})$. Поскольку также выполнено неравенство $\nu_0 \leq G(\nu_0, \nu_0) \leq G(\nu_0, \widetilde{v})$, то для непрерывной функции $G(\cdot, \widetilde{v})$ существует $\widetilde{w} \in [0, \widetilde{v}]$ такой, что $\widetilde{w} = G(\widetilde{w}, \widetilde{v})$. Таким образом, справедливо третье предположение следствия 1.2.3.

Приведём ещё один пример применения полученных результатов к простейшим числовым уравнениям.

Пример 1.2.3. Пусть задана функция $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что при любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ функция $F(\cdot, x_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна, а функция $F(x_1, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ убывает, и пусть для некоторых $u_0, \nu_0 \in \mathbb{R}$ выполнены неравенства $u_0 \geq \nu_0$, $F(u_0, u_0) \geq 0$, $F(\nu_0, \nu_0) \leq 0$. Покажем, что существует решение $x \in [\nu_0, u_0]$ уравнения

$$F(x, x) = 0. \tag{1.2.11}$$

Это утверждение может быть выведено из следствия 1.2.2, однако мы воспользуемся условиями разрешимости уравнения (1.2.10), полученными в примере 1.2.2. Для этого запишем уравнение (1.2.11) в виде

$$x = x - F(x, x).$$

Остаётся заметить, что для функции $G(x_1, x_2) := x_1 - F(x_1, x_2)$ выполнены все предположения из примера 1.2.2.

Несложно также видеть, что из приведённых в этом примере условий разрешимости уравнения (1.2.11) выводятся условия разрешимости уравнения (1.2.10), т.е. утверждения в примерах 1.2.2 и 1.2.3 равносильны.

Глава 2. РАЗРЕШИМОСТЬ И СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 2.1. Существование и оценки решений функциональных уравнений

В этом параграфе рассматривается система функциональных уравнений вида

$$h(t, x(t)) = 0, \quad t \in [0, 1], \tag{2.1.1}$$

относительно измеримой (по Лебегу) функции $x : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$. Предлагаются условия разрешимости и оценки решений в виде утверждений типа теоремы Чаплыгина о неравенстве. Отметим, что в случае, если функция $h : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условиям Каратеодори (т. е. измерима по первому аргументу и непрерывна по второму аргументу) к уравнению (2.1.1) применим следующий известный результат, полученный А.Ф. Филипповым в [112] (называемый в современной литературе «леммой Филиппова о неявной функции»; о распространениях и обобщениях этого утверждения см., например, [66, теорема 1.5.15 и библиография]). *Пусть* $U : [0, 1] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *— измеримое многозначное отображение с компактными значениями* $U(t) \subset \mathbb{R}^n$, $t \in [0, 1]$, *удовлетворяющее соотношению*

$$0 \in h(t, U(t)), \quad t \in [0, 1].$$

Тогда существует решение уравнения (2.1.1), *являющееся измеримым сечением отображения* U. Это утверждение находит многочисленные приложения в теории управления.

В случае, если функция h не является непрерывной, к исследованию уравнения (2.1.1) можно применить утверждения о накрывающих отображениях. Исследование функциональных уравнений и включений с использованием теорем об антитонных возмущениях накрывающих отображений, действующих в частично упорядоченных пространствах, начато в работах [78, 85, 86]. Здесь к исследованию системы (2.1.1) применяется теорема 1.2.3 и ее следствия. Это позволяет ослабить предположения цитируемых работ на функцию h.

Параграф содержит два пункта. В пункте 2.1.1 доказана теорема о разрешимости и оценках решений системы неявных функциональных уравнений (2.1.1). В пункте 2.1.2 аналогичный результат получен для системы функциональных уравнений, разрешенных относительно неизвестной функции вида

$$x(t) = \widetilde{h}(t, x(t)), \quad t \in [0, 1].$$

В доказательстве используется, что эта система сводится к виду (2.1.1) с функцией $h(t, x) = x - \widetilde{h}(t, x)$. Демонстрируется, что доказанное утверждение не выводится из известных теорем о неподвижных точках Банаха [11], Шаудера (см. [91, с. 627]), Кнастера-Тарского (см. [16, с. 26] или [64, с. 88]).

2.1.1 Неявные функциональные уравнения

Обозначим через M^n пространство измеримых (по Лебегу) функций $x : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ с «обычным» порядком: для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in M^n$, $u = (u_1, \ldots, u_n) \in M^n$, полагаем $x \le u$, если $x_i(t) \le u_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, при п.в. $t \in [0, 1]$. Будем писать $x < u$, если $x \le u$ и существует j такое, что неравенство $x_j(t) < u_j(t)$ выполнено на некотором множестве положительной меры.

Пусть задана функция

$$h : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad h(t,u,x) := \big(h_i(t,u_1,\ldots,u_n,x_i)\big)_{i=\overline{1,n}}$$

(здесь $u = (u_1,\ldots,u_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$). Будем предполагать, что для её компонент — функций $h_i : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, при п.в. $t \in [0,1]$, любых $u \in \mathbb{R}^n$ и $x_i \in \mathbb{R}$ выполнено условие

(H↓) *функция* $h_i(\cdot,u,x_i) : [0,1] \to \mathbb{R}$ *является измеримой, функция* $h_i(t,\cdot,x_i) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *убывает и непрерывна справа по каждому аргументу* $u_1,\ldots,u_n$, *функция* $h_i(t,u,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна.*

Рассмотрим систему уравнений

$$h_i\big(t,x_1(t),\ldots,x_n(t),x_i(t)\big) = 0, \quad t \in [0,1], \quad i = \overline{1,n}.$$

Решением этой системы будем называть измеримую функцию, удовлетворяющую всем её уравнениям п.в. на $[0,1]$.

Зададим оператор суперпозиции (оператор Немыцкого) N_h, ставящий в соответствие произвольным измеримым функциям $u, x : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ функцию

$$\big(N_h(x,u)\big)(t) := h\big(t,u(t),x(t)\big) = \big(h_i(t,u(t),x_i(t))\big)_{i=\overline{1,n}}, \quad t \in [0,1].$$

В силу условия (H↓) функция $N_h(x,u)$ измерима (это следует из результатов [117], см. также [83, с. 110]), таким образом, $N_h : M^n \times M^n \to M^n$. Рассматриваемая система функциональных уравнений теперь может быть записана в виде

$$N_h(x,x) = 0. \tag{2.1.2}$$

Теорема 2.1.1. *Пусть для некоторых функций* $\vartheta, \varsigma \in M^n$ *выполнены неравенства*

$$\vartheta \geq \varsigma, \quad N_h(\vartheta, \vartheta) \geq 0, \quad N_h(\varsigma, \varsigma) \leq 0.$$

Тогда уравнение (2.1.2) *имеет решение* $x \in M^n$ *такое, что* $\varsigma \leq x \leq \vartheta$; *и среди решений уравнения* (2.1.2), *принадлежащих множеству*

$$X = \{x \in M^n : \varsigma \leq x \leq \vartheta\},$$

существует наименьшее.

Доказательство. Множество X рассмотрим как упорядоченное подпространство пространства M^n. За сужением оператора N_h на $X \times X$ сохраним обозначение N_h. Покажем, что для оператора $N_h : X \times X \to M^n$ и, соответственно, для уравнения (2.1.2) выполнены предположения следствия 1.2.2. Определим множество

$$\mathcal{X} := \{x \in X : N_h(x, x) \geq 0\}.$$

Для непрерывной функции $h_i\big(t, \vartheta(t), \cdot\big) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выполнены неравенства

$$h_i\big(t, \vartheta(t), \vartheta_i(t)\big) \geq 0, \quad h_i\big(t, \vartheta(t), \varsigma_i(t)\big) \leq h_i\big(t, \varsigma(t), \varsigma_i(t)\big) \leq 0.$$

Поэтому при п.в. $t \in [0, 1]$ существует $x_i \in [\varsigma_i(t), \vartheta_i(t)]$, для которого $h_i\big(t, \vartheta(t), x_i\big) = 0$. Таким образом, почти всюду на $[0, 1]$ имеет место включение $0 \in h_i\big(t, \vartheta(t), U_i(t)\big)$, где $U_i(t) := [\varsigma_i(t), \vartheta_i(t)]$. Согласно лемме Филиппова (см., например, [66, п. 1.5.2]) существует измеримая функция ζ_i, $\varsigma_i \leq \zeta_i \leq \vartheta_i$, удовлетворяющая на $[0, 1]$ равенству $h_i(t, \vartheta(t), \zeta_i(t)) = 0$. Следовательно, для $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in X$ имеем $N_h(\zeta, \vartheta) = 0$, т. е. выполнено первое условие следствия 1.2.2.

Пусть u — произвольный элемент множества $\mathcal{X}$, для которого существует $x \in X$ такой, что $x < u$ и $N_h(x, u) = 0$. Положим $v := x$. Вследствие антитонности отображения $N_h(v, \cdot) : X \to M^n$ получаем неравенство $N_h(v, v) \geq 0$. Повторяя проведённые выше рассуждения, использующие лемму Филиппова, устанавливаем существование измеримой функции $w \in X$ такой, что $\varsigma \leq w \leq v$ и $w = N_h(w, v)$. Таким образом, выполнено второе условие следствия 1.2.2.

Выберем произвольную цепь $S \subset \mathcal{X}$ (предположение $S \in \Xi_0(\mathcal{X}, N_h, 0)$ здесь не потребуется, так как в ограниченном снизу функцией ς множестве X любая цепь имеет точную нижнюю границу). Пусть $\widetilde{v} := \inf S$. Поскольку для любого $u \in S$ выполнены неравенства $\varsigma \leq u \leq \vartheta$, $N_h(u, u) \geq 0$, получаем $\varsigma \leq \widetilde{v} \leq \vartheta$, $N_h(u, \widetilde{v}) \geq 0$. Существует невозрастающая последовательность $\{u^k\}_{k=1}^{\infty} \subset S$ такая, что $\widetilde{v} = \inf\{u^k\} : k \in \mathbb{N}$ и при п.в. $t \in [0, 1]$ имеет место сходимость $u^k(t) \to \widetilde{v}(t)$ (см. [75, гл. IV, §12, следствие 7, с. 365] или более общее утверждение [5, lemma 1]). Так как $h\big(t, \widetilde{v}(t), u^k(t)\big) \geq 0$, $t \in [0, 1]$, в силу непрерывности функции h по третьему аргументу заключаем, что почти всюду на $[0, 1]$ справедливо неравенство $h\big(t, \widetilde{v}(t), \widetilde{v}(t)\big) \geq 0$. Далее, снова повторяя проведённые выше рассуждения, использующие лемму Филиппова, докажем существование измеримой функции $\widetilde{w} \in X$ такой, что $\varsigma \leq \widetilde{w} \leq \widetilde{v}$ и $N_h(\widetilde{w}, \widetilde{v}) = 0$. Итак, выполнено третье заключительное условие следствия 1.2.2. Согласно этому следствию уравнение (2.1.2) имеет решение $x \in M^n$ такое, что $\varsigma \leq x \leq \vartheta$. а во множестве решений уравнения (2.1.2), принадлежащих множеству $\mathcal{X}$ существует минимальный элемент. Обозначим его $x^{\min}$ и покажем, что этот минимальный элемент является наименьшим решением, принадлежащим множеству X.

Прежде всего заметим, что решение уравнения (2.1.2) принадлежит X тогда и только тогда оно принадлежит $\mathcal{X}$, это прямо следует из определения множеств X и $\mathcal{X}$.

Пусть существует решение $\overline{x} \in X$ такое, что $x^{\min} \not\leq \overline{x}$. Определим измеримую функцию $\overline{\vartheta}$ с компонентами равными $\overline{\vartheta}_j(t) = \min\{x_j^{\min}(t), \overline{x}_j(t)\}$, $j = \overline{1,n}$. Имеем $\overline{\vartheta} < x^{\min}$. Для каждого $j = \overline{1,n}$ определим множества

$$E_{j1} = \big\{t \in [0,1] : \, x_j^{\min}(t) \leq \overline{x}_j(t)\big\}, \quad E_{j2} = \big\{t \in [0,1] : \, x_j^{\min}(t) > \overline{x}_j(t)\big\}.$$

Для п.в. $t \in E_{j1}$ вследствие условия $(\mathbf{H}{\downarrow})$ при любом $j = \overline{1,n}$ имеем

$$h_j\big(t, \overline{\vartheta}_1(t), \ldots, \overline{\vartheta}_n(t), \overline{\vartheta}_j\big)(t) = h_j\big(t, \overline{\vartheta}_1(t), \ldots, \overline{\vartheta}_n(t), x_j^{\min}\big) \geq h_j\big(t, x_1^{\min}(t), \ldots, x_n^{\min}(t), x_j^{\min}\big) = 0.$$

Аналогично показывается, что и для п.в. $t \in E_{j2}$ выполнено неравенство

$$h_j\big(t, \overline{\vartheta}_1(t), \ldots, \overline{\vartheta}_n(t), \overline{\vartheta}_j\big)(t) \geq 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Итак, справедливо $N_h(\overline{\vartheta}, \overline{\vartheta}) \geq 0$. Согласно доказанному выше существует решение $x \in M^n$ такое, что $\varsigma \leq x \leq \overline{\vartheta} < x^{\min}$, но это противоречит тому, что $x^{\min}$ есть минимальный элемент множества решений. □

2.1.2 Функциональные уравнения, разрешенные относительно неизвестной функции

Рассмотрим теперь систему функциональных уравнений

$$x_i(t) = \widetilde{h}_i\big(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), x_i(t)\big), \quad t \in [0,1], \quad i = \overline{1,n}.$$

Будем предполагать, что для функций $\widetilde{h}_i : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, при п.в. $t \in [0,1]$, любых $u \in \mathbb{R}^n$ и $x_i \in \mathbb{R}$ выполнено условие

(H↑) *функция* $h_i(\cdot, u, x_i) : [0,1] \to \mathbb{R}$ *является измеримой, функция* $h_i(t, \cdot, x_i) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *возрастает и непрерывна справа по каждому аргументу* $u_1, \ldots, u_n$, *функция* $h_i(t, u, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна.*

Зададим оператор Немыцкого

$$N_{\widetilde{h}} : M^n \times M^n \to M^n, \quad \big(N_{\widetilde{h}}(x, u)\big)(t) := \big(\widetilde{h}_i(t, u(t), x_i(t))\big)_{i=\overline{1,n}}, \quad t \in [0,1],$$

и запишем рассматриваемую систему как операторное уравнение

$$x = N_{\widetilde{h}}(x, x). \tag{2.1.3}$$

Это уравнение можно представить в виде (2.1.2), где компоненты функции h следующие:

$$h_i(t, u_1, \ldots, u_n, x_i) = x_i - \widetilde{h}_i(t, u_1, \ldots, u_n, x_i).$$

Поскольку для функций $\widetilde{h}_i$, $i = \overline{1,n}$, выполнено условие (H↑), функции h_i, $i = \overline{1,n}$, удовлетворяют условию (H↓). Таким образом из теоремы 2.1.1 вытекает.

Теорема 2.1.2. *Пусть для некоторых функций* $\vartheta, \varsigma \in M^n$ *выполнены неравенства*

$$\vartheta \geq \varsigma, \quad \vartheta \geq N_{\widetilde{h}}(\vartheta, \vartheta), \quad \varsigma \leq N_{\widetilde{h}}(\varsigma, \varsigma).$$

Тогда уравнение (2.1.3) *имеет решение* $x \in M^n$ *такое, что* $\varsigma \leq x \leq \vartheta$; *и среди решений уравнения* (2.1.3), *принадлежащих множеству*

$$X = \{x \in M^n : \varsigma \leq x \leq \vartheta\}$$

существует наименьшее.

Теорему 2.1.2 можно трактовать как условия существования неподвижной точки отображения $\phi : M^n \to M^n,\ \phi(x) := N_{\widetilde{h}}(x, x).$ Заметим, что к исследованию неподвижной точки данного отображения не применимы классические теоремы Банаха [11], Шаудера (см. [91, с. 627]), Кнастера-Тарского (см. [16, с. 26] или [64, с. 88]), так как отображение ϕ, очевидно, не является в общем случае ни непрерывным (если в M определить метрику согласно [91, гл. I, §6.10]), ни монотонным.

§ 2.2. Существование и оценки решений дифференциальных уравнений

Этот параграф посвящен изучению неявных дифференциальных уравнений (т. е. не разрешенных относительно производной искомой функции) методами, основанными на полученных в первой главе результатах об операторных уравнениях в частично упорядоченных пространствах. Исследование мотивировано проблемой распространения на неявные дифференциальные уравнения теорем о дифференциальном неравенстве. В теореме Чаплыгина (см. [115]), положившей начало многочисленным работам по дифференциальным, интегральным, функционально-дифференциальным неравенствам, рассматривается дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(t, x),\ t \geq 0, \tag{2.2.1}$$

при заданном начальном значении решения $x(0) = A \in \mathbb{R}$ в предположении непрерывности функции $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$ Утверждается, что если для некоторой дифференцируемой функции ϑ при всех $t \geq 0$ выполнено $\dot{\vartheta}(t) > f(t, \vartheta(t))$ и $\vartheta(0) \geq A,$ то любое решение уравнения (2.2.1) удовлетворяет неравенству $x(t) < \vartheta(t),\ t > 0.$ Здесь существенно, что уравнение скалярное, а функция f непрерывна. Уже в случае, когда f удовлетворяет условиям Каратеодори, такое утверждение оказывается неверным. Например, при

$$f(t,x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in (-\infty, 0) \cup [t, +\infty), \\ 1 - 2x/t, & \text{если } x \in [0, t/2), \quad t \neq 0, \\ -1 + 2x/t, & \text{если } x \in [t/2, t), \quad t \neq 0, \end{cases}$$

решением уравнения (2.2.1) с начальным условием $x(0) = 0$ является $x(t) = t$, для функции $\vartheta = t/2$ выполнено условие $\vartheta(0) = 0$ и при всех $t \geq 0$ неравенство

$$\dot{\vartheta}(t) = 1/2 > f(t, \vartheta(t)) = 0,$$

но решение $x(\cdot)$ удовлетворяет неравенству $x(t) > \vartheta(t)$ при всех $t > 0$.

Для обыкновенного дифференциального уравнения с функцией f, не являющейся непрерывной, утверждение о дифференциальном неравенстве справедливо при дополнительном предположении ее возрастания по x (см. [84]). Многочисленные распространения теоремы Чаплыгина на системы уравнений, на различные функционально-дифференциальные уравнения также используют дополнительное предположение монотонности порождающих уравнения функций и отображений по соответствующему аргументу (см. [88, раздел 1]). Доказательства таких утверждений, как правило, основаны на результатах о неподвижных точках монотонных отображений в частично упорядоченных пространствах.

Использование утверждений об уравнениях с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в произвольное множество, позволило здесь получить теоремы типа Чаплыгина для систем неявных дифференциальных уравнений. Более того, удалось ещё и ослабить предположения на функции, порождающие уравнения (по переменной t предполагается измеримость, по диагональной фазовой переменной предполагается непрерывность, а по остальным фазовым переменным — монотонность).

Параграф разбит на три пункта. В пункте 2.2.1 доказана теорема типа Чаплыгина о дифференциальном неравенстве для задачи Коши, в пункте 2.2.2 — для периодической краевой задачи, и в пункте 2.2.3 — для задач управления.

Вначале определим систему неявных дифференциальных уравнений, которая будет исследоваться.

Обозначим через L^n пространство суммируемых (по Лебегу) на $[0,1]$ n-мерных функций, являющееся подпространством частично упорядоченного пространства M^n, а через AC^n пространство абсолютно непрерывных n-мерных функций.

Пусть заданы функции $f_i : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$f_i(t, x, \dot{x}, \dot{x}_i) = 0, \quad t \in [0,1], \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.2.2}$$

Решением системы (2.2.2) будем называть функцию $x \in AC^n$, удовлетворяющую всем уравнениям этой системы при п.в. $t \in [0,1]$.

2.2.1 Дифференциальное неравенство для задачи Коши

Пусть при всех $i = \overline{1,n}$ выполнено условие

(F$\downarrow$) *При п.в.* $t \in [0,1]$, *любых* $x, v \in \mathbb{R}^n$ *и* $y_i \in \mathbb{R}$ *функция* $f_i(\cdot, x, v, y_i) : [0,1] \to \mathbb{R}$ *измерима, функция* $f_i(t, \cdot, \cdot, y_i) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *убывает* *и непрерывна справа по каждому аргументу* $x_1, \ldots, x_n$ *и* $v_1, \ldots, v_n$, *функция* $f_i(t, x, v, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна.*

При таком предположении имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.2.1. *Пусть для некоторых функций* $\nu, \eta \in AC^n$ *таких, что* $\nu(0) \geq \eta(0)$ *и* $\dot{\nu} \geq \dot{\eta}$, *при п.в.* $t \in [0,1]$ *выполнены неравенства*

$$f_i(t, \nu(t), \dot{\nu}(t), \dot{\nu}_i(t)) \geq 0, \quad f_i(t, \eta(t), \dot{\eta}(t), \dot{\eta}_i(t)) \leq 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.2.3}$$

Тогда для любого $A \in \mathbb{R}^n$, *для которого* $\eta(0) \leq A \leq \nu(0)$, *существует решение* $x \in AC^n$ *задачи Коши для уравнения* (2.2.2) *с начальным условием*

$$x(0) = A, \tag{2.2.4}$$

удовлетворяющее неравенствам

$$\dot{\eta} \leq \dot{x} \leq \dot{\nu}; \tag{2.2.5}$$

кроме того, во множестве решений задачи (2.2.2), (2.2.4), *удовлетворяющих неравенствам* (2.2.5), *существуют решения с наименьшей и наибольшей производными (и поэтому сами такие решения являются наименьшим и наибольшим в этом множестве).*

Доказательство. Определим отображение $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) : L^n \times L^n \to M^n$ соотношением

$$\big(\psi_i(y, v)\big)(t) := f_i\Big(t, A + \int_0^t v(s)ds, v(t), y_i(t)\Big), \quad t \in [0,1], \quad i = \overline{1, n}$$

(условие (F↓), согласно [117] и [82, с. 110], обеспечивает измеримость функции $\psi_i(y, v)$ для любых $y, v \in L^n$). Задачу (2.2.2), (2.2.4) запишем в виде системы уравнений

$$\big(\psi_i(v,v)\big)(t) := f_i\Big(t, A + \int_0^t v(s)ds, v(t), v_i(t)\Big) = 0, \quad t \in [0,1], \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.2.6}$$

относительно неизвестной функции $v = (v_1, \dots, v_n) \in L^n$. Заметим, что функция $x \in AC^n$ является решением задачи (2.2.2), (2.2.4) тогда и только тогда, когда $v = \dot{x} \in L^n$ — решение уравнения (2.2.6).

В силу убывания функций $f_i(t, \cdot, v, y_i) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по каждому аргументу $x_1, \dots, x_n$ справедливы неравенства $\psi(\dot{\nu}, \dot{\nu}) \geq 0, \quad \psi(\dot{\eta}, \dot{\eta}) \leq 0$.

В частично упорядоченном пространстве L^n определим подпространство

$$X = \{v \in L^n : \, \dot{\eta} \leq v \leq \dot{\nu}\}.$$

Отметим, что любая измеримая функция $v \in M^n$, удовлетворяющая неравенствам $\dot{\eta} \leq v \leq \dot{\nu}$, будет суммируемой, т.е. $v \in L^n$. Сужение оператора ψ на $X \times X$ будем обозначать тем же символом ψ. Покажем, что для оператора $\psi : X \times X \to M^n$ и, соответственно, для системы (2.2.6) выполнены условия следствия 1.2.2 где $\mathcal{X} := X$.

В силу неравенств

$$\begin{aligned}
&f_i\Big(t, A + \int_0^t \dot{\nu}(s)ds, \dot{\nu}(t), \dot{\nu}_i(t)\Big) \geq 0,\\
&f_i\Big(t, A + \int_0^t \dot{\nu}(s)ds, \dot{\nu}(t), \dot{\eta}_i(t)\Big) \leq f_i\Big(t, A + \int_0^t \dot{\eta}(s)ds, \dot{\eta}(t), \dot{\eta}_i(t)\Big) \leq 0
\end{aligned}$$

из непрерывности функции $f_i(t, A + \int_0^t \dot{\nu}(s)ds, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ следует, что при п.в. $t \in [0,1]$ существует $y_i \in V_i(t) := [\dot{\eta}_i(t), \dot{\nu}_i(t)]$ такой, что

$$f_i\Big(t, A + \int_0^t \dot{\nu}(s)ds, \dot{\nu}(t), y_i\Big) = 0.$$

Таким образом, п.в. на $[0,1]$ выполнено

$$0 \in f_i\Big(t, A + \int_0^t \dot{\nu}(s)ds, \dot{\nu}(t), V_i(t)\Big).$$

Согласно лемме Филиппова [66, п. 1.5.2] существует измеримая функция ζ_i, $\dot{\eta}_i \le \zeta_i \le \dot{\nu}_i$, удовлетворяющая на $[0,1]$ равенству

$$f_i\Big(t, A + \int_0^t \dot{\nu}(s)ds, \dot{\nu}(t), \zeta_i(t)\Big) = 0.$$

Следовательно для $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in X$ имеем $\psi(\zeta, \dot{\nu}) = 0$, т.е. выполнено первое условие следствия 1.2.2.

Пусть u — произвольный элемент множества $\mathcal{X}$, для которого существует $v \in X$ такой, что $v < u$ и $\psi(v,u) = 0$. Вследствие антитонности отображения $\psi(v,\cdot) : X \to M^n$ получаем неравенства $\psi(v,v) \ge 0$, $\psi(\dot{\eta}, v) \le \psi(\dot{\eta}, \dot{\eta}) \le 0$. Из этих неравенств на основании леммы Филиппова, как показано выше, следует, что существует функция $w \in X$, $\dot{\eta} \le w \le v$, для которой $\psi(w,v) = 0$. Итак выполнено второе условие следствия 1.2.2.

Для произвольной цепи $S \subset \mathcal{X}$, в силу ее ограниченности снизу суммируемой функцией $\dot{\eta}$, существует точная нижняя граница. Обозначим $\widetilde{v} := \inf S$, имеем $\widetilde{v} \in X$. Так как для любого $v \in S$ выполнены неравенства $\dot{\eta} \le v \le \dot{\nu}$, $\psi(v,v) \ge 0$, получаем $\dot{\eta} \le \widetilde{v} \le \dot{\nu}$, $\psi(v, \widetilde{v}) \ge 0$. Существует невозрастающая последовательность $\{v^k\}_{k=1}^{\infty} \subset S$ такая, что $\widetilde{v} = \inf\{v^k : k \in \mathbb{N}\}$ и при п.в. $t \in [0,1]$ имеет место сходимость $v^k(t) \to \widetilde{v}(t)$ (см. [75, гл. IV, §12, следствие 7, с. 365] и [5, lemma 1]). Так как

$$f_i\big(t, A + \int_0^t \widetilde{v}(s)ds, \widetilde{v}(t), v_i^k(t)\big) \ge 0, \quad t \in [0,1], \quad i = \overline{1,n},$$

то в силу непрерывности функции f_i по последнему аргументу заключаем, что почти всюду на отрезке $[0,1]$ выполняется неравенство

$$\big(\psi_i(\widetilde{v},\widetilde{v})\big)(t) := f_i\big(t, A + \int_0^t \widetilde{v}(s)ds, \widetilde{v}(t), \widetilde{v}_i(t)\big) \geq 0, \quad t \in [0,1].$$

Далее, снова повторяя проведённые выше рассуждения, использующие лемму Филиппова, докажем существование измеримой функции $\widetilde{w} \in X$ такой, что $\dot{\eta} \leq \widetilde{w} \leq \widetilde{v}$ и $\psi(\widetilde{w},\widetilde{v}) = 0$. Итак выполнено третье заключительное условие следствия 1.2.2. Итак, установлено существование решения $v \in X$ уравнения (2.2.6), а следовательно, и решения x (такого, что $\dot{x} = v$) задачи (2.2.2), (2.2.4).

Согласно следствию 1.2.2 во множестве решений уравнения (2.2.6), принадлежащих множеству X существует минимальный элемент. Обозначим его $v^{\min}$ и покажем, что этот минимальный элемент является наименьшим решением, принадлежащим множеству X.

Пусть существует решение $\overline{v} \in X$ такое, что $v^{\min} \not\leq \overline{v}$. Определим суммируемую функцию $\overline{\vartheta}$ с компонентами

$$\overline{\vartheta}_i(t) = \min\{v_i^{\min}(t), \overline{v}_i(t)\}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Имеем $\overline{\vartheta} < v^{\min}$. Для каждого $i = \overline{1,n}$ определим множества

$$E_{i1} = \big\{t \in [0,1] : \, v_j^{\min}(t) \leq \overline{v}_i(t)\big\}, \quad E_{i2} = \big\{t \in [0,1] : \, v_j^{\min}(t) > \overline{v}_i(t)\big\}.$$

Для п.в. $t \in E_{i1}$ вследствие условия $(\mathbf{F}\!\downarrow)$ при любом $i = \overline{1,n}$ имеем

$$f_i\Big(t, A + \int_0^t \overline{\vartheta}_1(s)ds, \ldots, A + \int_0^t \overline{\vartheta}_n(s)ds, \overline{\vartheta}_1(t), \ldots, \overline{\vartheta}_n(t), \overline{\vartheta}_i(t)\Big) =$$
$$f_i\Big(t, A + \int_0^t \overline{\vartheta}_1(s)ds, \ldots, A + \int_0^t \overline{\vartheta}_n(s)ds, \overline{\vartheta}_1(t), \ldots, \overline{\vartheta}_n(t), v_i^{\min}(t)\Big) \geq$$
$$f_i\Big(t, A + \int_0^t v_1^{\min}(s)ds, \ldots, A + \int_0^t v_n^{\min}(s)ds, v_1^{\min}(t), \ldots, v_n^{\min}(t), v_i^{\min}(t)\Big) = 0.$$

Аналогично показывается, что и для п.в. $t \in E_{i2}$ выполнено неравенство

$$f_i\Big(t, A + \int_0^t \overline{\vartheta}_1(s)ds, \ldots, A + \int_0^t \overline{\vartheta}_n(s)ds, \overline{\vartheta}_1(t), \ldots, \overline{\vartheta}_n(t), \overline{\vartheta}_i(t)\Big) \geq 0.$$

Итак, справедливо $\psi(\overline{\vartheta}, \overline{\vartheta}) \geq 0$. Согласно доказанному выше существует решение $v \in L^n$ такое, что $\dot{\eta} \leq v \leq \overline{\vartheta} < v^{\min}$, но это противоречит тому, что $v^{\min}$ есть минимальный элемент множества решений уравнения (2.2.6), принадлежащих X.

Аналогично доказывается, что во множестве решений задачи (2.2.2), (2.2.4), удовлетворяющих неравенствам (2.2.5), существует решение с наибольшей производной (надо определить во множестве X отношение порядка $\geq$ и повторить приведенные выше рассуждения). $\square$

Из доказанного утверждения очевидно вытекают условия, при выполнении которых можно дать оценки решения задачи Коши для системы

$$\dot{x}_i = \widetilde{f}_i(t, x, \dot{x}, \dot{x}_i), \quad t \in [0,1], \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.2.7}$$

Пусть для каждого $i = \overline{1,n}$ функция $\widetilde{f}_i : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию

(F$\uparrow$) *При п.в.* $t \in [0,1]$, *любых* $x, u \in \mathbb{R}^n$ *и* $y_i \in \mathbb{R}$ *функция* $\widetilde{f}_i(\cdot, x, u, y_i) : [0,1] \to \mathbb{R}$ *измерима, функция* $\widetilde{f}_i(t, \cdot, \cdot, y_i) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *возрастает и непрерывна справа по каждому аргументу* $x_1, \ldots, x_n$ *и* $u_1, \ldots, u_n$, *функция* $\widetilde{f}_i(t, x, u, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна.*

Следствие 2.2.1. *Пусть для некоторых функций* $\nu, \eta \in AC^n$ *таких, что* $\nu(0) \geq \eta(0)$ *и* $\dot{\nu} \geq \dot{\eta}$, *при п.в.* $t \in [0,1]$ *выполнены неравенства*

$$\dot{\nu}_i(t) \geq \widetilde{f}_i(t, \nu(t), \dot{\nu}(t), \dot{\nu}_i(t)), \quad \dot{\eta}_i(t) \leq \widetilde{f}_i(t, \eta(t), \dot{\eta}(t), \dot{\eta}_i(t)), \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.2.8}$$

Тогда для любого вектора $A \in \mathbb{R}^n$, *для которого* $\eta(0) \le A \le \nu(0)$, *существует решение* $x \in AC^n$ *задачи Коши* $(2.2.7), (2.2.4)$, *удовлетворяющее неравенствам* $(2.2.5)$*; кроме того, во множестве решений задачи* $(2.2.7), (2.2.4)$, *удовлетворяющих неравенствам* $(2.2.5)$, *существуют решения с наименьшей и наибольшей производной.*

Доказательство. Для функции

$$f_i(t, x, v, y_i) = y_i - \widetilde{f}_i(t, x, v, y_i), \quad i = \overline{1, n},$$

очевидно выполнены условия теоремы 2.2.1 □

Используя теорему 2.2.1, получим также аналог теоремы Чаплыгина для дифференциального уравнения n-го порядка ($n \ge 2$), не разрешенного относительно старшей производной.

Обозначим через AC_m — пространство $m-1$ раз дифференцируемых на $[0, T]$ функций, имеющих абсолютно непрерывную $m-1$-ую производную, таким образом, для $x \in AC_m$ выполнено $x^{(m)} \in L$ и

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \ldots + \frac{1}{(m-1)!}x^{(m-1)}(0) + \frac{1}{(m-1)!}\int_0^t (t-s)x^{(m)}(s)ds.$$

Пусть задана функция $g : [0, T] \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка

$$g(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{2.2.9}$$

«Стандартной подстановкой» $x_1 = x$, $x_{i+1} = \dot{x}_i$, $i = \overline{1, n-1}$, уравнение (2.2.9) записывается в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 - x_2 = 0, \\
\dots\dots\dots \\
\dot{x}_{n-1} - x_n = 0, \\
g(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_n) = 0,
\end{cases} \tag{2.2.10}
$$

к которой можно применить полученные выше в этом параграфе результаты. Таким образом, из теоремы 2.2.1 получаем следующее утверждение.

Следствие 2.2.2. *Пусть при любом* $(x_1, \dots, x_n, v) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *функция* $g(\cdot, x_1, \dots, x_n, v) : [0, T] \to \mathbb{R}$ *измерима, а при п.в.* $t \in [0, T]$ *функция* $g(t, \cdot) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *по каждому из первых* n *аргументов* $x_1, \dots, x_n$ *убывает и непрерывна справа, а по последнему аргументу* v *является непрерывной. Пусть для функций* $\nu, \eta \in AC_n$ *выполнены неравенства*

$$
\begin{gathered}
\nu^{(i)}(0) \geq \eta^{(i)}(0), \quad i = \overline{0, n-1}, \ \ \nu^{(n)}(t) \geq \eta^{(n)}(t), \ \ t \in [0, T]; \\
\nu^{(i+1)}(t) \geq \nu^{(i)}(t), \ \ i = \overline{0, n-2}, \ \ g\big(t, \nu(t), \dot{\nu}(t), \dots, \nu^{(n)}(t)\big) \geq 0, \ \ t \in [0, T]; \\
\eta^{(i+1)}(t) \leq \eta^{(i)}(t), \ \ i = \overline{0, n-2}, \ \ g\big(t, \eta(t), \dot{\eta}(t), \dots, \eta^{(n)}(t)\big) \leq 0, \ \ t \in [0, T].
\end{gathered}
$$

Тогда для любого $A = (A_0, \dots, A_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ *такого, что*

$$
\eta^{(i)}(0) \leq A_i \leq \nu^{(i)}(0), \quad i = \overline{0, n-1},
$$

существует решение $x \in AC_n$ *задачи Коши для уравнения* (2.2.9) *с начальным условием*

$$
x(0) = A_0, \ \dots, \ x^{(n-1)}(0) = A_{n-1}, \tag{2.2.11}
$$

удовлетворяющее неравенствам

$$
\eta^{(n)}(t) \leq x^{(n)}(t) \leq \nu^{(n)}(t), \quad t \in [0, T]. \tag{2.2.12}
$$

Кроме того, во множестве решений задачи (2.2.9), (2.2.11), *удовлетворяющих неравенствам* (2.2.12), *существуют решения с наименьшей и наибольшей производной n-го порядка.*

Сформулируем частный случай следствия 2.2.2 — утверждение о разрешимости неявного уравнения второго порядка

$$g(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{2.2.13}$$

Следствие 2.2.3. *Пусть при всех $(x_1, x_2, v) \in \mathbb{R}^3$ функция $g(\cdot, x_1, x_2, v) : [0, T] \to \mathbb{R}$ измерима, при п.в. $t \in [0, T]$ функция $g(t, \cdot) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ по первому и второму аргументам x_1, x_2 убывает и непрерывна справа, а по третьему аргументу v является непрерывной. Пусть для функций $\nu, \eta \in AC_2$ выполнены неравенства*

$$\begin{aligned}
&\nu(0) \geq \eta(0), \quad \dot{\nu}(0) \geq \dot{\eta}(0), \quad \ddot{\nu}(t) \geq \ddot{\eta}(t), \quad t \in [0, T]; \\
&\dot{\nu}(t) \geq \nu(t), \quad g\big(t, \nu(t), \dot{\nu}(t), \ddot{\nu}(t)\big) \geq 0, \quad t \in [0, T]; \\
&\dot{\eta}(t) \leq \eta(t), \quad g\big(t, \eta(t), \dot{\eta}(t), \ddot{\eta}(t)\big) \leq 0, \quad t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Тогда для любых $A_0, A_1 \in \mathbb{R}$ таких, что

$$\eta(0) \leq A_0 \leq \nu(0), \quad \dot{\eta}(0) \leq A_1 \leq \dot{\nu}(0),$$

существует решение $x \in AC_2$ задачи Коши для уравнения (2.2.13) *с начальным условием*

$$x(0) = A_0, \quad \dot{x}(0) = A_1, \tag{2.2.14}$$

удовлетворяющее неравенствам

$$\ddot{\eta}(t) \leq \ddot{x}(t) \leq \ddot{\nu}(t), \quad t \in [0, T]. \tag{2.2.15}$$

Кроме того, во множестве решений задачи (2.2.13), (2.2.14), *удовлетворяющих неравенствам* (2.2.15), *существуют решения с наименьшей и наибольшей второй производной.*

Проиллюстрируем полученные утверждения исследованием конкретных дифференциальных уравнений.

Пример 2.2.1. Пусть заданы неотрицательные числа $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Рассмотрим на полуоси $t \geq 0$ задачу Коши для уравнения

$$\ddot{x}^2 = \bar{a}\dot{x} + \bar{b}x + \bar{c} \tag{2.2.16}$$

с начальным условием

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1 \tag{2.2.17}$$

(частный случай уравнения (2.2.16) см. [90, с. 521, уравнение 6.236]). Покажем, что для этой задачи выполнены условия следствия 2.2.3.

Выберем произвольное $T > 0$. Определим функцию

$$g : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad g(t, x_1, x_2, v) := v^2 - \bar{a}x_1 - \bar{b}x_2 - \bar{c}.$$

Эта функция измерима по первому аргументу, непрерывна по остальным трем аргументам, убывает по второму и третьему аргументам. Определим также функции $\nu, \eta \in AC_2$ формулами

$$\eta(t) := 1, \quad \nu(t) := \mathcal{A}\exp(t), \quad \text{где } \mathcal{A} = \max\Big\{1, \, \frac{1}{2}\left(\bar{a} + \bar{b} + \sqrt{(\bar{a} + \bar{b})^2 + 4\bar{c}}\,\right)\Big\}.$$

Непосредственными вычислениями легко проверяется, что эти функции удовлетворяют требованиям следствия 2.2.3. Таким образом, в силу следствия 2.2.3, можно утверждать, что существует решение $x \in AC_2$ задачи (2.2.16), (2.2.17), удовлетворяющее неравенствам

$$0 \leq \ddot{x}(t) \leq \mathcal{A}\exp(t), \quad t \in [0, T],$$

и во множестве решений задачи (2.2.16), (2.2.17), удовлетворяющих этим неравенствам есть решения с наименьшей и наибольшей второй производной. А так как число $T > 0$ может быть любым, то соответствующее утверждение справедливо при $t \in [0, \infty)$.

Отметим, что полученное утверждение справедливо и для более общего уравнения

$$\ddot{x}^2 = a(t)\dot{x} + b(t)x + c(t)$$

с переменными коэффициентами — измеримыми неотрицательными функциями, удовлетворяющими неравенствам

$$a(t) \leq \bar{a}, \quad b(t) \leq \bar{b}, \quad c(t) \leq \bar{c}. \tag{2.2.18}$$

Пример 2.2.2. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}^2 = \bar{a}\chi(\dot{x}) + \bar{b}\chi(x) + \bar{c}, \quad t \geq 0, \tag{2.2.19}$$

с начальным условием

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \tag{2.2.20}$$

Здесь $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$ Для исследования этого неявного дифференциального уравнения многие известные методы не применимы еще и потому, что правая часть является разрывной по x и $\dot{x}$ функцией.

Для произвольного $T > 0$ определим функцию

$$g : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad g(t, x_1, x_2, v) := v^2 - \bar{a}\chi(x_1) - \bar{b}\chi(x_2) - \bar{c}.$$

Эта функция измерима по первому аргументу, непрерывна справа и убывает по по второму и третьему аргументам, непрерывна по третьему аргументу. Определим функции $\nu, \eta \in AC_2$ формулами

$$\eta(t) := 0, \quad \nu(t) := \exp(\lambda t), \quad \text{где } \lambda = \max\left\{1, \sqrt{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}}\right\}.$$

Определенные здесь функции удовлетворяют требованиям следствия 2.2.3. Поэтому, согласно следствию 2.2.3, существует решение $x \in AC_2$ задачи (2.2.19), (2.2.20), удовлетворяющее неравенствам

$$0 \leq \ddot{x}(t) \leq \lambda^2 \exp(\lambda t),$$

во множестве решений задачи (2.2.16), (2.2.17), удовлетворяющих этим неравенствам есть решения с наименьшей и наибольшей второй производной. Данное утверждение также справедливо и для более общего уравнения

$$\ddot{x}^2 = a(t)\chi(\dot{x}) + b(t)\chi(x) + c(t),$$

где измеримые неотрицательные функциями a, b, c удовлетворяют неравенствам (2.2.18).

2.2.2 Дифференциальное неравенство для периодической краевой задачи

Для дифференциального уравнения (2.2.2) здесь рассматривается краевая задача с условием, определяемым функционалом $x(0) - x(1)$.

Пусть задана диагональная $n \times n$ - матрица $\lambda := \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, где $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. По функциям f_i определим функции $g_i^\lambda : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, формулой

$$g_i^\lambda(t, x, v, y_i) := f_i(t, x, v + \lambda x, y_i + \lambda_i x_i), \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.2.21}$$

Будем предполагать, что для функций g_i^λ, $i = \overline{1,n}$, выполнено условие

(G↓) *При п.в.* $t \in [0,1]$, *любых* $x, v \in \mathbb{R}^n$ *и* $y_i \in \mathbb{R}$ *функция* $g_i^\lambda(\cdot, x, v, y_i) : [0,1] \to \mathbb{R}$ *измерима, функция* $g_i^\lambda(t, \cdot, v, y_i) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *возрастает* *и непрерывна справа по каждому аргументу* $x_1, \dots, x_n$, *функция* $g_i^\lambda(t, x, \cdot, y_i) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *убывает и непрерывна справа по каждому аргументу* $v_1, \dots, v_n$, *функция* $g_i^\lambda(t, x, v, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна.*

При таком предположении имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.2.2. *Пусть для некоторых функций* $\nu, \eta \in AC^n$ *таких, что*

$$\nu(0) - \nu(1) \geq \eta(0) - \eta(1), \quad \dot{\nu} - \lambda\nu \geq \dot{\eta} - \lambda\eta, \tag{2.2.22}$$

выполнены неравенства (2.2.3) *Тогда для любого* $A \in \mathbb{R}^n$, *для которого*

$$\eta(0) - \eta(1) \leq A \leq \nu(0) - \nu(1),$$

существует решение $x \in AC^n$ *краевой задачи для системы* (2.2.2) *с условием*

$$x(0) - x(1) = A, \tag{2.2.23}$$

удовлетворяющее неравенствам

$$\dot{\eta} - \lambda\eta \leq \dot{x} - \lambda x \leq \dot{\nu} - \lambda\nu; \tag{2.2.24}$$

кроме того, существует наименьшая функция во множестве функций $z := \dot{x} - \lambda x$, *где* x *— решение задачи* (2.2.2), (2.2.23), *удовлетворяющее неравенствам* (2.2.24).

Доказательство. Для редукции краевой задачи (2.2.2), (2.2.23) к системе интегральных уравнений используем W-подстановку Азбелева (см. [37]). Для этого рассмотрим вспомогательную краевую задачу для системы

$$\dot{x} - \lambda x = v, \quad v = (v_1, \dots, v_n) \in L^n,$$

с условиями (2.2.23). Ее решение $x = (x_1, \ldots, x_n) \in AC^n$ определяется формулой $x_i = W_i v_i$, $i = \overline{1,n}$, где

$$W_i : L^1 \to AC^1, \quad (W_i v_i)(t) = (1 - \exp\lambda_i)^{-1}\big(X_i(t)A + \int_0^1 \mathcal{W}_i(t,s)v_i(s)ds\big),$$

$$X_i(t) = \exp\lambda_i t, \quad \mathcal{W}_i(t,s) = \begin{cases} \exp\lambda_i(t-s), & 0 \le s \le t \le 1, \\ \exp\lambda_i(t-s+1), & 0 \le t < s \le 1. \end{cases}$$

Отметим, что интегральный оператор $W = (W_1, \ldots, W_n) : L^n \to AC^n$ является антитонным. Представим уравнение (2.2.2) в виде

$$f_i(t, x, \dot{x} - \lambda x + \lambda x, \dot{x}_i - \lambda_i x_i + \lambda_i x_i) = 0 \;\Leftrightarrow\; g_i^\lambda(t, x, \dot{x} - \lambda x, \dot{x}_i - \lambda_i x_i) = 0.$$

После замены $v := \dot{x} - \lambda x$ краевая задача (2.2.2), (2.2.23) записывается в виде системы интегральных уравнений:

$$g_i^\lambda(t, (Wv)(t), v(t), v_i(t)) = 0, \quad t \in [0,1], \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.2.25}$$

Для функций $\vartheta = \dot{\nu} - \lambda\nu$, $\varsigma = \dot{\eta} - \lambda\eta$ из неравенств (2.2.3) следует, что

$$g_i^\lambda(t, (W\vartheta)(t), \vartheta(t), \vartheta_i(t)) \ge 0, \quad g_i^\lambda(t, (W\varsigma)(t), \varsigma(t), \varsigma_i(t)) \le 0.$$

Определим подпространство $X = \{u \in L^n : \varsigma \le u \le \vartheta\}$ частично упорядоченного пространства L^n и определим отображение $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) : X \times X \to M^n$ формулой

$$\big(\psi_i(y,v)\big)(t) := g_i^\lambda(t, (Wv)(t), v(t), y_i(t)) \quad t \in [0,1], \quad i = \overline{1,n}.$$

Дальнейшее доказательство состоит в проверке того, что для определённого здесь оператора ψ и, соответственно, для системы (2.2.25) (которая, очевидно, записывается в виде $\psi(v,v) = 0$) выполнены предположения следствия 1.2.2. Эти рассуждения мы опустим, так как они повторяют рассуждения, проведённые при доказательстве теоремы 2.2.1.

Согласно следствию 1.2.2 множество принадлежащих X решений уравнения (2.2.25) не пусто, и в нем существует минимальный элемент. Обозначим этот элемент через $v^{\min}$ и покажем, что этот минимальный элемент является наименьшим.

Пусть существует решение $\overline{v} \in X$ такое, что $v^{\min} \not\leq \overline{v}$. Определим суммируемую функцию $\overline{\vartheta}$ с компонентами

$$\overline{\vartheta}_i(t) = \min\{v_i^{\min}(t), \overline{v}_i(t)\}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Имеем $\overline{\vartheta} < v^{\min}$. Для каждого $i = \overline{1, n}$ определим множества

$$E_{i1} = \{t \in [0,1] : v_j^{\min}(t) \leq \overline{v}_i(t)\}, \quad E_{i2} = \{t \in [0,1] : v_j^{\min}(t) > \overline{v}_i(t)\}.$$

Для п.в. $t \in E_{i1}$ вследствие условия $(\mathbf{G}\!\downarrow)$ и антитонности операторов $W_1, \ldots, W_n : L^1 \to AC^1$ при любом $i = \overline{1, n}$ имеем

$$\begin{aligned}
&g_i^\lambda\big(t, (W_1\overline{\vartheta}_1)(t), \ldots, (W_n\overline{\vartheta}_n)(t), \overline{\vartheta}_1(t), \ldots, \overline{\vartheta}_n(t), \overline{\vartheta}_i(t)\big) = \\
&g_i^\lambda\big(t, (W_1\overline{\vartheta}_1)(t), \ldots, (W_n\overline{\vartheta}_n)(t), \overline{\vartheta}_1(t), \ldots, \overline{\vartheta}_n(t), v_i^{\min}(t)\big) \geq \\
&g_i^\lambda\big(t, (W_1v_1^{\min})(t), \ldots, (W_nv_n^{\min})(t), v_1^{\min}(t), \ldots, v_n^{\min}(t), v_i^{\min}(t)\big) = 0.
\end{aligned}$$

Аналогично показывается, что и для п.в. $t \in E_{i2}$ выполнено неравенство

$$g_i^\lambda\big(t, (W_1\overline{\vartheta}_1)(t), \ldots, (W_n\overline{\vartheta}_n)(t), \overline{\vartheta}_1(t), \ldots, \overline{\vartheta}_n(t), \overline{\vartheta}_i(t)\big) \geq 0.$$

Итак, справедливо $\psi(\overline{\vartheta}, \overline{\vartheta}) \geq 0$. Согласно доказанному выше существует решение $v \in L^n$ такое, что $\dot{\eta} \leq v \leq \overline{\vartheta} < v^{\min}$, но это противоречит тому, что $v^{\min}$ есть минимальный элемент множества принадлежащих X решений уравнения (2.2.25). $\square$

В заключение сформулируем условия разрешимости периодической краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (2.2.7). По функциям $\widetilde{f}_i$ определим функции $\widetilde{g}_i^\lambda : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, формулой

$$\widetilde{g}_i^\lambda(t,x,v,y_i) := \widetilde{f}_i(t,x,v+\lambda x, y_i + \lambda_i x_i) - \lambda_i x_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Будем предполагать, что для функций $\widetilde{g}_i^\lambda$, $i = \overline{1,n}$, выполнено условие

(G↑) *При п.в.* $t \in [0,1]$, *любых* $x, v \in \mathbb{R}^n$ *и* $y_i \in \mathbb{R}$ *функция* $g_i^\lambda(\cdot, x, v, y_i) : [0,1] \to \mathbb{R}$ *измерима, функция* $g_i^\lambda(t,\cdot,v,y_i) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *убывает и непрерывна справа по каждому аргументу* $x_1,\ldots,x_n$, *функция* $g_i^\lambda(t,x,\cdot,y_i) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *возрастает и непрерывна справа по каждому аргументу* $v_1,\ldots,v_n$, *функция* $g_i^\lambda(t,x,u,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна.*

При таком предположении имеет место следующее утверждение.

Следствие 2.2.4. *Пусть для некоторых функций* $\nu, \eta \in AC^n$, *удовлетворяющих соотношениям* (2.2.22), *выполнены неравенства* (2.2.8) *Тогда для любого вектора* $A \in \mathbb{R}^n$ *такого, что*

$$\eta(0) - \eta(1) \le A \le \nu(0) - \nu(1),$$

существует решение $x \in AC^n$ *краевой задачи* (2.2.7), (2.2.23), *удовлетворяющее неравенствам* (2.2.24); *кроме того, существует наименьшая функция во множестве функций* $z := \dot{x} - \lambda x$, *где* x — *решение задачи* (2.2.7), (2.2.23), *удовлетворяющее неравенствам* (2.2.24).

Для уравнения (2.2.2) можно аналогично исследовать краевую задачу с несколько более общим краевым двухточечным условием

$$\gamma_{0i}\, x_i(0) + \gamma_{1i}\, x_i(1) = A_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.2.26}$$

где $\gamma_{0i}, \gamma_{1i}, A_i,$ — заданные числа, $i=\overline{1,n}$. Частным случаем этой задачи при $\gamma_{0i}=1$, $\gamma_{1i}=-1$, $i=\overline{1,n}$, является периодическая краевая задача с условием (2.2.23).

Пусть задана диагональная $n\times n$ - матрица $\lambda := \operatorname{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$, где $\lambda_i>0$, $i=\overline{1,n}$. По функциям f_i определим функции $g_i^\lambda : [0,1]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, формулой (2.2.21). Будем предполагать, что для функций g_i^λ, $i=\overline{1,n}$, выполнено условие $(\mathbf{G}\!\downarrow)$. При таком предположении имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.2.3. *Предположим, что* $\gamma_{1i}<0$, $0<\gamma_{0i}<-\gamma_{1i}\exp\lambda_i$. *Пусть для некоторых функций* $\nu,\eta\in AC^n$ *таких, что*

$$\gamma_{0i}\nu_i(0)+\gamma_{1i}\nu_i(1)\geq\gamma_{0i}\eta_i(0)+\gamma_{1i}\eta_i(1),\quad \dot\nu_i-\lambda_i\nu_i\geq\dot\eta_i-\lambda_i\eta_i,\quad i=\overline{1,n},$$

выполнены неравенства

$$f_i(t,\nu(t),\dot\nu(t),\dot\nu_i(t))\geq 0,\quad f_i(t,\eta(t),\dot\eta(t),\dot\eta_i(t))\leq 0,\quad i=\overline{1,n}. \tag{2.2.27}$$

Тогда для любых A_i *таких, что*

$$\gamma_{0i}\eta_i(0)+\gamma_{1i}\eta_i(1)\leq A_i\leq\gamma_{0i}\nu_i(0)+\gamma_{1i}\nu_i(1),\quad i=\overline{1,n},$$

существует решение $x\in AC^n$ *краевой задачи* (2.2.2), (2.2.26), *удовлетворяющее неравенствам*

$$\dot\eta-\lambda\eta\leq\dot x-\lambda x\leq\dot\nu-\lambda\nu; \tag{2.2.28}$$

кроме того, существует наименьшая и наибольшая функции во множестве функций $z:=\dot x-\lambda x$, *где* x *— решение задачи* (2.2.2), (2.2.26), *удовлетворяющее неравенствам* (2.2.28).

Доказательство. Используем W-подстановку Азбелева [37] для редукции рассматриваемой краевой задачи к интегральному уравнению. Введем новую неизвестную функцию $v \in L^n$, компоненты которой определяются равенствами $v_i = x_i - \lambda_i x_i$, где x — решение задачи (2.2.2), (2.2.26). Эту замену можно также записать в виде $x_i = W_i v_i$, $i = \overline{1,n}$, где

$$W_i : L^1 \to AC^1, \ \ (W_i v_i)(t) = (\gamma_{0i} + \gamma_{1i} \exp \lambda_i)^{-1} \big(X_i(t) A_i + \int_0^1 \mathcal{W}_i(t,s) v_i(s) ds \big),$$

$$X_i(t) = \exp \lambda_i t, \quad \mathcal{W}_i(t,s) = \begin{cases} \gamma_{0i} \exp \lambda_i (t-s), & 0 \le s \le t \le 1, \\ -\gamma_{1i} \exp \lambda_i (t-s+1), & 0 \le t < s \le 1. \end{cases}$$

Отметим, что интегральный оператор $W = (W_1, \ldots, W_n) : L^n \to AC^n$ является антитонным. Вследствие этого свойства и принятых предположений для полученного интегрального оператора оказывается выполненным следствие 1.2.2, из которого и вытекает разрешимость рассматриваемой краевой задачи.

Доказательство существования наименьшей и наибольшей функции во множестве функций $z := \dot{x} - \lambda x$ при всевозможных решениях x задачи (2.2.2), (2.2.26), повторяет доказательство соответствующего утверждения в теореме 2.2.2. □

2.2.3 Дифференциальные неравенство для задачи управления

В этом пункте рассматривается задача управления для системы (2.2.2) дифференциальных уравнений.

Пусть заданы функции $f_i : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$. Рассмотрим не разрешенную относительно производных систему дифференциальных уравнений

$$f_i(t, x, \dot{x}, \dot{x}_i, u) = 0, \quad t \in [0, 1], \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.2.29}$$

где управление u — измеримая функция. Теоремы 2.2.1 и 2.2.2 позволяют показать, что при соответствующих предположениях для каждого u из некоторого заданного множества управлений существует решение $x = x_u \in AC^n$ этой системы с начальным условием (2.2.4) или с краевым условием (2.2.23).

Будем предполагать, что для двух заданных управлений $\underline{u}, \overline{u} \in M^m$ система (2.2.29) разрешима, ее решениями являются некоторые абсолютно непрерывные функции $x_{\underline{u}} = \eta$, $x_{\overline{u}} = \nu$.

Теорема 2.2.4. *Пусть при* $i = \overline{1, n}$ *функция* $f_i(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, u) : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *для любого* $u \in \mathbb{R}^m$ *удовлетворяет условию* $(\mathbf{F}{\downarrow})$, *а функция* $f_i(t, x, v, y_i, \cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *при п.в.* $t \in [0, 1]$, *любых* $x, v \in \mathbb{R}^n$ *и* $y_i \in \mathbb{R}$ *возрастает и непрерывна справа по каждому аргументу* $u_1, \ldots, u_n$. *Тогда, если имеют место неравенства*

$$\underline{u} \le \overline{u}, \quad \eta(0) \le \nu(0), \quad \dot{\eta} \le \dot{\nu},$$

то для любого $A \in \mathbb{R}^n$ *такого, что* $\eta(0) \le A \le \nu(0)$, *и любого управления* $u \in M^m$, *для которого* $\underline{u} \le u \le \overline{u}$, *существует решение* $x \in AC^n$ *системы* (2.2.29) *с начальным условием* (2.2.4), *удовлетворяющее неравенствам* (2.2.5); *кроме того, во множестве решений задачи* (2.2.29), (2.2.4), *удовлетворяющих неравенствам* (2.2.5), *существует решение с наименьшей производной.*

Теперь сформулируем условия существования решения управляемой системы (2.2.29) с периодическим краевым условием (2.2.23).

Пусть задана диагональная $n \times n$ -матрица $\lambda := \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, где $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. По функциям f_i определим функции $g_i^\lambda : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, формулой

$$g_i^\lambda(t, x, v, y_i, u) := f_i(t, x, v + \lambda x, y_i + \lambda_i x_i, u), \quad i = \overline{1,n}.$$

Теорема 2.2.5. *Пусть при $i = \overline{1,n}$ функция $g_i^\lambda(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, u) : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ для любого $u \in \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условию $(\mathbf{G}\!\downarrow)$, а функция $g_i^\lambda(t, x, v, y_i, \cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ при п.в. $t \in [0,1]$, любых $x, v \in \mathbb{R}^n$ и $y_i \in \mathbb{R}$ возрастает и непрерывна справа по каждому аргументу $u_1, \ldots, u_n$. Тогда, если имеют место неравенства*

$$\underline{u} \le \overline{u}, \quad \nu(0) - \nu(1) \ge \eta(0) - \eta(1), \quad \dot{\nu} - \lambda\nu \ge \dot{\eta} - \lambda\eta,$$

то для любого $A \in \mathbb{R}^n$ такого, что $\eta(0) - \eta(1) \le A \le \nu(0) - \nu(1)$, и любого управления $u \in M^m$, для которого $\underline{u} \le u \le \overline{u}$, существует решение $x \in AC^n$ системы (2.2.29) с краевым условием (2.2.23), удовлетворяющее неравенствам (2.2.24); кроме того, существует наименьшая функция во множестве функций $z := \dot{x} - \lambda x$, где x — решение задачи (2.2.29), (2.2.23), удовлетворяющее неравенствам (2.2.24).

Теоремы 2.2.4 и 2.2.5 очевидно выводятся из теорем 2.2.1 и 2.2.2 соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация направлена на разработку новых подходов к исследованию неявных дифференциальных уравнений. С этой целью предлагаются новые утверждениях об операторных неравенствах с отображениями, определенными на частично упорядоченном пространстве и действующими во множество, на котором либо не заданы какие-либо отношения, либо задано рефлексивное отношение. С использованием таких результатов в диссертации получены утверждения типа теоремы Чаплыгина о неравенстве для задачи Коши, периодической краевой задачи и задачи управления для систем неявных дифференциальных уравнений. Эти утверждения позволяют устанавливать существование решений, получать оценки решений, исследовать некоторые свойства множеств решений. Основными результатами диссертации являются:

- Получены утверждения о существовании и оценках точек совпадения двух отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в множество с бинарным отношением; утверждения о существовании и оценках точек совпадения двух отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в множество, на котором не задано бинарное отношение; условия устойчивости точек совпадения двух отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в множество, на котором не задано бинарное отношение.

- Получены утверждения о существовании и оценках решений операторных уравнений с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в множество с бинарным отношением;

утверждения о существовании и оценках решений операторных уравнений с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в множество, на котором не задано бинарное отношение.

- Получены утверждения (типа теоремы Чаплыгина) о существовании и оценках решений системы функциональных уравнений в пространстве измеримых функций.
- Получены утверждения (типа теоремы Чаплыгина) о существовании и оценках решений задачи Коши для системы неявных дифференциальных уравнений.
- Получены утверждения (типа теоремы Чаплыгина) о существовании и оценках решений периодической краевой задачи для системы неявных дифференциальных уравнений.
- Получены утверждения (типа теоремы Чаплыгина) о существовании и оценках решений системы управления для неявных дифференциальных уравнений.

В дальнейших исследованиях планируется близкими методами получить теоремы о точках совпадения многозначных отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в пространство с рефлексивным бинарным отношением, а также теоремы о точках совпадения отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в произвольное множество.

Далее планируется исследование вопросов разрешимости получение оценок решений включения $G(x) \ni y$ с многозначным отображением G, действующим из частично упорядоченного пространства в множество с рефлексивным бинарным отношением, а также многозначным отображением G, действующих из частично упорядоченного пространства в произвольное множество. На основании полученных утверждений можно будет получить утверждения типа теоремы Чаплыгина о неравенстве для дифференциального включения вида

$$f(t, x, \dot{x}) \ni 0,$$

(где $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$). Для этого включения планируется рассмотреть задачу Коши и краевые задачи. Эти результаты планируется применить к исследованию систем управления, получению условий управляемости и наблюдаемости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abbas M., Jungck G.* Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2008. V. 341. № 1. P. 416–420.

2. *Agarwal R.P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A.* Nonoscillation theory of functional differential equations with applications. Springer, New York-Dordrecht-Heidelberg-London, 2012.

3. *Agarwal R., Karapinar E., Roldan-Lopez-de-Hierro, A.-F.* Some remarks on 'Multidimensional fixed point theorems for isotone mappings in partially ordered metric spaces' // Fixed Point Theory Appl. 2014. Article number: 245 (2014). 13 p.

4. *Amini-Harandi A.* Coupled and tripled fixed point theory in partially ordered metric spaces with application to initial value problem // Math. Comput. Model. 2013. V. 57. № 9–10. P. 2343–2348.

5. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. V. 179. № 1. P. 13–33.

6. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2016. V. 201. P. 330–343.

7. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Caristi-like condition and the existence of minima of mappings in partially ordered spaces // J. Optim. Theory Appl. 2019. V. 180. P. 48-61.

8. *Azam A., Beg I.* Common fixed points of fuzzy maps // Mathematical and computer modelling. 2009. V. 49. № 7/8. P. № 1331–1336.

9. *Berezansky L., Braverman E.* On oscillations of equations with distributed delay // Z. Anal. Anwend. 2001. № 20. P. 489–504.

10. *Brondsted A.* On a lemma of Bishop and Phelps // Pasif. J. Math. 1974. V. 55. P. 335–341.

11. *Banach S.* Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales, Fund. Math. 1922. V. 3. P. 133–181.

12. *Berinde V.* Coupled fixed point theorems for f-contractive mixed monotone mappings in partially ordered metric spaces // Nonlinear Anal. 2012. V. 75. № 6. P. 3218–3228.

13. *Borcut M.* Tripled coincidence theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces // Appl. Math. Comput. 2012. V. 218. P. 7339–7346.

14. *Camlibel M., Pang J., Shen J.* Lyapunov stability of complementarity and extended systems // SIAM J. Optim. 2006. V. 17. № 4. P. 1056–1101.

15. *Dalal S., Khan L.A., Masmali I., Radenovic S.* Some remarks on multidimensional fixed point theorems in partially ordered metric spaces // J. Adv. Math. 2014. V. 7. № 1. P. 1084–1094.

16. *Granas A., Dugundji D.* Fixed Point Theory. 2003. Springer-Verlag, NY.

17. *Fomenko T.N., Podoprikhin D.A.* Fixed points and coincidences of mappings of partially ordered sets // J. Fixed Point Theory Appl. 2016. V. 18. № 4. P. 823–842.

18. *Karapinar E., Yüksel U.* Some common fixed point theorems in partial metric spaces // Journal of Applied Mathematics. 2011. V. 2011. Article ID 263621. 16 p.

19. *Khan Z.* On Some Fundamental Integrodifferential Inequalities // Applied Mathematics. 2014. V. 5. № 19. P. 2968–2973.

20. *Lee H., Kim S.* Multivariate coupled fixed point theorems on ordered partial metric spaces // J. Korean Math. Soc. 2014. V. 51. № 6. P. 1189–1207.

21. *Mutlu A., Gürdal U.* An infinite dimensional fixed point theorem on function spaces of ordered metric spaces // Kuwait J. Sci. 2015. V. 42. № 3. P. 36–49.

22. *Furati K.M., Tatar N.-E.* Some fractional differential inequalities and their applications // Mathematical Inequalities Applications. 2006. V. 9. № 4. P. 577–598.

23. *Hoang N.S., Ramn A.G.* Nonlinear Differential Inequality // Math. Inequal. Appl. 2011. V. 14. № 4. P. 967–976.

24. *Pang J.-S., Stewart D.E.* Solution dependence on initial conditions in differential variational inequalities // Mathematical Programming. 2009. V. 116. P. 429–460.

25. *Roldan A., Martinez-Moreno J.,Roldan C., Cho Y.J.* Multidimensional fixed point theorems under (ψ, φ)-contractive conditions in partially ordered complete metric spaces // J. Comput. Appl. Math. 2015. V. 273. P. 76–87.

26. *Smithson R.E.* fixed points of order preserving multifunctions // Proc. Amer. Soc. 1971. V. 27. № 1. P. 304–310.

27. *Lakshmikantham V., Leela S.* Differential and Integral Inequalities. Theory and applications. V. 1. Academic Press, N.Y., 1969.

28. *Lukoyanov N.Yu.* Functional Hamilton—Jacobi type equations in ci-derivatives for systems with distributed delays // Nonlinear Funct. Anal. and Appl. 2003. V. 8. № 3. P. 365–397.

29. *Pang J., Stewart D.* Differential Variational Inequalities // Mathematical Programming. Series A. 2008. V. 113. № 2. P. 345–424.

30. *Rabczuk R.* Elementy nierownosci rozniczkowych. PWN, Warszawa, 1976.

31. *Ramm A.G.* Dynamical systems method for solving operator equations. Amsterdam: Elsevier, 2007.

32. *Szarski J.* Differential Inequalities. PWN, Warszawa, 1967.

33. *Takamura H.* Improved Kato's lemma on ordinary differential inequality and its application to semilinear wave equations // Nonlinear Analysis. 2015. V. 125. P. 227–240.

34. *Tokens F.* Constrained equations; a study of imphcit differential equations and their discontinuous solutions. Lect. Notes Math. 1976. № 525. P. 143–234.

35. *Uhl R.* Ordinary differential inequalities and quasimonotonicity in ordered topological vector spaces // Proceedings of the American Mathematical Society. 1998. V. 126. № 7. P. 1999–2003.

36. *Walter W.* Differential and Integral Inequalities. Springer Verlag, Berlin, 1970.

37. *Азбелев Н.В.* Как это было (Об основных этапах развития современной теории функционально дифференциальных уравнений) // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. 2003. Т. 9. № 1(17). С. 1–22.

38. *Азбелев Н.В.* О границах применимости теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах // Мат. сборник. 1956. Т. 39. № 2. С. 161–178.

39. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

40. *Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф.* К вопросу о функционально-дифференциальных неравенствах и монотонных операторах // Функц.-дифференц. уравнения. Пермь: Изд-во Перм. политехн. ин-та, 1986. С. 3–9.

41. *Азбелев Н.В., Цалюк З.Б.* Об одном применении принципа неподвижной точки к операторам, заданным в полуупорядоченном пространстве // Научн. доклады высш. школы. Физ.-мат. науки. 1958. № 6. С. 96–98.

42. *Азбелев Н.В., Цалюк З.Б.* Об интегральных неравенствах // Мат. сборник. 1962. Т. 56. № 3. С. 325–342.

43. *Андреев А.С., Перегудова О.А.* К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости // Доклады Академии наук. 2005. Т. 400, № 5. С. 621–624.

44. *А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин.* Теория колебаний. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы. 1959.

45. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Знание. Сер. мат., кибернетика. 1981. № 9.

46. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. № 5. С. 475–478.

47. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады академии наук. 2013. Т. 453. № 6. С. 595–598.

48. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О мощности множества точек совпадения отображений метрических, нормированных и частично упорядоченных пространств // Матем. сб. 2018. Т. 209. № 8. С. 3–28.

49. *Ахмеров Р.Р., Садовский Б.Н.* Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск, 2002.

50. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. М.: Мир, 1965.

51. *Бенараб С.* Интегральные неравенства в пространстве измеримых функций // Колмогоровские чтения. общие проблемы управления и их приложения (ОПУ–2020). Материалы IX Международной научной конференции, посвященной 70-летию со дня рождения Александра Ивановича Булгакова и 90-летию Института математики, физики и информационных технологий Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина. Тамбов, 2020. С. 25–27.

52. *Бенараб С.* Теорема типа Чаплыгина о неявном интегральном неравенстве в пространстве суммируемых функций // Теория управления и математическое моделирование. Материалы Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Ижевск, 2020. С. 45–46.

53. *Бенараб С.* Дифференциальное неравенство для периодической краевой задачи // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби (CGS'2020). Материалы III Международного семинара, посвященного 75-летию акад. А.И. Субботина. Екатеринбург, 2020. С. 115–116.

54. *Бенараб С.* Двусторонние оценки решений краевых задач для неявных дифференциальных уравнений //Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 134. С. 216–220.

55. *Бенараб С.* О теореме Чаплыгина для неявного дифференциального уравнения n-го порядка //Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 225–233.

56. *Бенараб С., Жуковская Т.В.* О накрывающем отображении, действующем из упорядоченного множества в неупорядоченное // Современные методы теории краевых задач. Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа Понтрягинские чтения - XXX. Воронеж, 2019. С. 58–59.

57. *Бенараб С., Жуковская З.Т., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О функциональных и дифференциальных неравенствах и их приложе-

ниях к задачам управления // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1471–1482.

58. *Бенараб С., Жуковский Е.С.* О накрывающих отображениях со значениями в пространстве с рефлексивным бинарным отношением // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. 2018. Т. 23. № 122. С. 210–215.

59. *Бенараб С., Жуковский Е.С.* Об условиях существования точек совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. 2018. Т. 23. № 121. С. 10–16.

60. *Бенараб С., Жуковский Е.С.* О точках совпадения двух отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в произвольное множество // Изв. вузов. Математика. 2020. № 5. С. 11–21.

61. *Бенараб С., Жуковский Е.С., Мерчела В.* Теоремы о возмущениях накрывающих отображений в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. С. 52–63.

62. *Бенараб С., Жуковский Е.С., Мерчела В.* Распространение теорем о возмущениях накрывающих отображений // Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019). Материалы Международной конференции, посвященной 95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского. Екатеринбург, 2019. С. 67–70.

63. *Биркгоф Г.* Теория решеток / пер. с англ. М.: Наука, 1984.

64. *Биркгоф Г.* Теория структур. М.: ИЛ, 1952.

65. *Богаевский И.А.* Неявные обыкновенные дифференциальные уравнения: перестройки и усиление эквивалентности // Изв. РАН. Сер. матем. 2014. Т. 78. № 6. С. 5–20.

66. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: ЛИБРОКОМ, 2011. 224 с.

67. *Васильева А.Б., Нефедов Н.Н.* Теоремы сравнения. Метод дифференциальных неравенств Чаплыгина. М.: МГУ, 2007.

68. *Власенко Л.А., Руткас А.Г.* О дифференциальной игре в системе, описываемой неявным дифференциально-операторным уравнением // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 6. С. 785–795.

69. *Галахов Е.И., Салиева О.А.* Ситуация blow-up для некоторых нелинейных дифференциальных неравенств // Труды МФТИ. 2014. Т. 6. № 3. С. 37–42.

70. *Гришина Ю.А., Давыдов А.А.* Структурная устойчивость простейших динамических неравенств // Труды МИАН. 2007. Т. 256. С. 89–101

71. *Гусаренко Е.Л., Гусаренко С.А.* Об одном обобщении интегро-дифференциального неравенства Виртингера // Вестник пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2011. № 2(6). С. 4–7.

72. *Давыдов А.А.* Особенности предельных направлений типичных неявных ОДУ высших порядков // Дифференциальные уравнения и динамические системы, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко. Тр. МИАН, 2002. Т. 236, С. 134–141.

73. *Давыдов А.А.* Особенности типичного дохода в модели Арнольда циклических процессов // Дифференциальные уравнения и динамические системы, Сборник статей. Тр. МИАН. 2005. Т. 250. С. 79–94.

74. *Давыдов А.А. Мена Матош Е.* Типичные фазовые переходы и особенности выгоды в модели Арнольда // Матем. сб. 2007. Т. 198. № 1. С. 21–42.

75. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 896 с.

76. *Дмитрук А.В., Милютин А.А., Осмоловский Н.П.* Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. 1980. Т. 35. № 6(216). С. 11–46.

77. *Жуковская Т.В., Жуковский Е.С., Серова И.Д.* Некоторые вопросы анализа отображений метрических и частично упорядоченных пространств // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 132. С. 345–358.

78. *Жуковская Т.В., Забродский И.А., Серова И.Д.* О функциональных неравенствах // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2016. Т. 21. № 6. С. 1963–1968.

79. *Жуковская Т.В., Серова И.Д.* Об оценке решения краевой задачи для неявного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом // Материалы Всероссийской научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», посвященной 85-летию профессора М.Т. Терёхина. Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина. Рязань, 17–18 мая 2019 г. Часть 2. Итоги науки и техн.

Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2020. Т. 186. М.: ВИНИТИ РАН, 2020. С. 38–44.

80. *Жуковский Е.С.* Об интегральных неравенствах в пространствах суммируемых функций // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 4. С. 580–584.

81. *Жуковский Е.С.* Неравенства Вольтерра в функциональных пространствах // Матем. сб. 2004. Т. 195. № 9. С. 3–18.

82. *Жуковский Е.С.* Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. № 1. С. 96–127.

83. *Жуковский Е.С.* Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1610–1627.

84. *Жуковский Е.С.* Неравенства Вольтерра в функциональных пространствах // Матем. сб. 2004. Т. 195. № 9. С. 3–18.

85. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Многозначные накрывающие отображения пространств с векторнозначной метрикой в исследовании функциональных включений // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2016. Т. 21. № 6. С. 1974–1982.

86. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А., Якубовская Е.М.* Об устойчивости упорядоченного накрывания многозначных отображений при антитонных возмущениях // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2016. Т. 21. № 6. С. 1969–1973.

87. *Жуковский Е.С., Якубовская Е.М.* О существовании и оценках решений функциональных включений // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 45–54.

88. Избранные труды Н.В. Азбелева (ред. *Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.*). М.-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2012.

89. *Ильин Ю.А.* Общие вопросы интегрирования дифференциальных неравенств в явном виде // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). № 4 С. 597–607.

90. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.

91. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.

92. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.

93. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.

94. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.

95. *Кротов Н.В.* Модифицированный метод Чаплыгина в частично упорядоченном B-пространстве // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2010. Т. 3. № 1. с. 165–167.

96. *Курпель Н.С., Шувар Б.А.* Двусторонние операторные неравенства и их применения. Киев: Наукова думка, 1980.

97. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. Наука, М., 1966.

98. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.

99. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А.А.* Устойчивость движения: метод сравнения. Киев: Наукова думка, 1991.

100. *Ларионов А.С., Никишина И.А.* Разрешимость нелинейного дифференциального уравнения первого порядка с последействием и его приложения // Системы. Методы. Технологии. 2013. № 3(19). С. 100–105.

101. *Лузин Н.Н.* О методе приближённого интегрирования акад. С. А. Чаплыгина // УМН. 1951. Т. 6. № 6(46). С. 3–27.

102. *Лукоянов Н.Ю.* Дифференциальные неравенства для негладкого функционала цены в задачах управления системами с последействием // Управление, устойчивость и обратные задачи динамики. Сборник научных трудов. Тр. ИММ УрО РАН. 2006. Т. 12. № 2. С. 108–118.

103. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982.

104. *Мамедов Я.Д., Аширов С., Атдаев С.* Теоремы о неравенствах. Ашхабад: Ылым, 1980.

105. *Мамий К.С.* О колеблемости решений нелинейных дифференциальных неравенств и уравнений второго порядка // Труды ФОРА. 2009. № 14. С. 55–61.

106. *Олесов А.В.* Дифференциальные неравенства для целых функций ко-

нечной степени и рациональных функций с предписанными полюсами // Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51. № 6. С. 1396–1421.

107. *Перегудова О.А.* Метод сравнения в задачах устойчивости и управления движениями механических систем. Ульяновск, 2009.

108. *Пилия А.Д., Федоров В.И.* Особенности поля электромагнитной волны в холодной анизотропной плазме с двумерной неоднородностью // ЖЭТФ. 1971. Т. 60. № 1. С. 389–399.

109. *Подоприхин Д.А.* Неподвижные точки и совпадения отображений упорядоченных множеств. Дисс. канд. физ.-мат. н. М., 2018.

110. *Подоприхин Д.А., Фоменко Т.Н.* Многозначные гомотопии в упорядоченном множестве, неподвижные точки и совпадения отображений, применения в теории игр // Матем. заметки. 2019. Т. 106. № 4. С. 565–577.

111. *Трубников Ю.В., Перов А.И.* Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. Минск: Наука и техника, 1986. 199 с.

112. *Филиппов А.Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестник Московского университета. Серия математ., механ., астрон., физ., хим. 1959. № 2. С. 25–32.

113. *Фоменко Т.Н.* Неподвижные точки и совпадения семейств отображений упорядоченных множеств и некоторые метрические следствия // Изв. РАН. Сер. матем. 2019. Т. 83. № 1. С. 168–191.

114. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

115. *Чаплыгин С.А.* Основания нового способа приближённого интегрирования дифференциальных уравнений. М., 1919 (Собрание сочинений. Т. I. Гостехиздат, 1948. С. 348–368).

116. *Чудинов К.М.* Функционально-дифференциальные неравенства и оценка функции Коши уравнения с последействием // Известия вузов. Математика. 2014. № 4. С. 52–61.

117. *Шрагин И.В.* Суперпозиционная измеримость при обобщенных условиях Каратеодори // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. 2014. Т. 19. № 2. С. 476–478.