

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. П. Г. ДЕМИДОВА



На правах рукописи

**Горюнов Владимир Евгеньевич**

**Диффузионная потеря устойчивости решений  
одного класса распределенных биофизических  
систем с самоорганизацией**

01.01.02 — Дифференциальные уравнения,  
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

**Научный руководитель**  
доктор физико-математических наук,  
профессор Глызин Сергей Дмитриевич

Ярославль – 2021

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1. Пространственно неоднородные режимы логистической модели с запаздыванием и малой диффузией в плоской области</b>	<b>15</b>
1.1. Постановка задачи . . . . .	15
1.2. Локальный анализ при $r$ , близком к бифуркационному значению . . . . .	17
1.2.1. Построение пространственно однородного решения . . . . .	17
1.2.2. Условие устойчивости пространственно однородного решения . . . . .	21
1.3. Численный анализ краевой задачи (1.1.1) . . . . .	27
1.3.1. Пространственно неоднородные режимы, ответвляющиеся от пространственно однородного . . . . .	28
1.3.2. Пространственно неоднородные решения типа самоорганизации . . . . .	30
1.4. Выводы . . . . .	38
<b>2. Бифуркация Андронова–Хопфа и режимы самоорганизации в одной биофизической модели реакции Белоусова</b>	<b>39</b>
2.1. Постановка задачи . . . . .	39
2.2. Локальный анализ окрестности состояния равновесия $(1, 1, 1)$ при $a$ , близком к критическому . . . . .	42
2.3. Диффузионная потеря устойчивости пространственно однородного цикла . . . . .	45
2.4. Численный анализ . . . . .	48
2.5. Выводы . . . . .	51
<b>3. Вычисление спектра ляпуновских показателей для систем с запаздывающими аргументами</b>	<b>53</b>
3.1. Описание алгоритма . . . . .	53
3.2. Тестирование алгоритма на примере уравнения Хатчинсона . . . . .	56
3.3. Квазиустойчивость сосуществующих аттракторов нейродинамической модели с запаздыванием . . . . .	61
3.4. Исследование пространственно неоднородных режимов логистического уравнения с запаздыванием и диффузией . . . . .	78
<b>Заключение</b>	<b>81</b>
<b>Литература</b>	<b>83</b>
<b>Приложение А</b>	<b>93</b>

Приложение В	109
Приложение С	110

# Введение

Для исследователей большой интерес представляют устойчивые пространственно распределенные режимы сложной структуры, особенно, если они обладают каким-либо отличительным свойством, как, например, самоорганизацией, рассматриваемой в этой работе. Но подразумевается не классическая самоорганизация в определении Николиса, Пригожина [60] и Хакена [67], то есть когда из хаоса без специфического воздействия рождается некая упорядоченная структура, а самоорганизация в более узком биофизическом смысле [25, 54]. При такой самоорганизации концентрация некоего вещества, если исследуется химическая реакция или физический процесс, либо численность некой популяции, если мы говорим о задаче из популяционной биологии, в среднем по пространству всегда отделена от значений, экстремально близких к нулю. Это означает, что в реальных условиях не может сложиться такая ситуация, при которой веществу либо биологическому виду после естественного сокращения не хватит внутренних ресурсов на восстановление до нетривиальных значений.

Одним из объектов изучения в данной работе является задача математического моделирования окислительно-восстановительных колебательных химических реакций, в основе которых лежит широко известный механизм реакции Белоусова, также именуемой реакцией Белоусова–Жаботинского. Интересующая нас реакция была открыта Б.П. Белоусовым в 1951 г., но широкую известность она получила значительно позже — в сокращенном виде результаты исследований колебательной реакции были опубликованы через 8 лет в ведомственном сборнике, выходившем небольшим тиражом (см. [6]), а подробная статья на эту тему вышла лишь спустя 30 лет (см. [7]). Экспериментальный анализ данной реакции и первая соответствующая математическая модель были опубликованы в работах А.М. Жаботинского (см. [39]). С тех пор реакции было посвящено большое число статей. В данной работе изучается достаточно упрощенная математическая модель с точки зрения состава компонентов реакции. Связь между рассматриваемыми нами веществами, вступающими в реакцию Белоусова, а именно: бромистой кислотой  $\text{HBrO}_2$ , церием  $\text{Ce}^{4+}$  и бромидом  $\text{Br}^-$  (см. [39, 60, 84]), наглядно можно описать следующей схемой (см. рис. 1), где знак "+" означает, что наличие одного вещества способствует появлению другого, а знак "-" свидетельствует об угнетении одного вещества другим.

Исходя из феноменологической близости получившейся схемы взаимодействия веществ к задаче «хищник – хищник – жертва», в [53] для описания этой реакции была предложена система дифференциальных уравнений, а в [25] система была модифицирована для более точного моделирования протекающих химических процессов.

В связи с этим во второй главе рассматривается параболическая краевая задача, состоящая из трех уравнений вольтерровского типа, которая представляет собой матема-



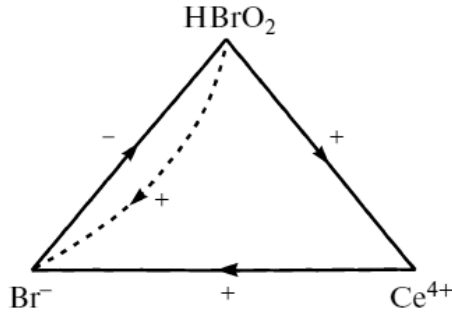


Рис. 1. Условная схема взаимодействия веществ в моделируемой реакции

тическую модель этой реакции:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_1}{\partial t} &= D_1 \Delta v_1 + r_1(1 + a(1 - v_3) - v_1)v_1, & \frac{\partial v_1}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} &= 0, \\
 \frac{\partial v_2}{\partial t} &= D_2 \Delta v_2 + r_2(v_1 - v_2)v_2, & \frac{\partial v_2}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} &= 0, \\
 \frac{\partial v_3}{\partial t} &= D_3 \Delta v_3 + r_3(\alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2 - v_3)v_3, & \frac{\partial v_3}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} &= 0,
 \end{aligned}$$

где функции  $v_1(t, s)$ ,  $v_2(t, s)$ ,  $v_3(t, s)$  отвечают за плотности концентраций реагирующих веществ  $\text{HBrO}_2$ ,  $\text{Ce}^{4+}$  и  $\text{Br}^-$  соответственно,  $s \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $t > 0$ ;  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $\Omega$  — выпуклая ограниченная плоская область с гладкой границей  $\partial\Omega$  и мерой, равной единице;  $\nu$  — направление внешней нормали к  $\partial\Omega$ ; параметры  $r_1, r_2, r_3, a, D_1, D_2, D_3$  положительны;  $\alpha \in (0, 1)$ . Такая модель ранее не была должным образом исследована аналитически, не были определены возможные сценарии при критических значениях параметров. Как показывают результаты проведенных ранее исследований в случае одномерной области (отрезка  $[0, 1]$ ), в такой модели удастся обнаружить режимы с самоорганизацией, которые по своей природе к тому же являются хаотическими.

Пространственная модель совсем иного рода, у которой при определенном выборе параметров могут наблюдаться в качестве решений устойчивые спиральные волны (классическая структура реакции Белоусова), но при этом основанная исключительно на внутривидовой борьбе за ресурсы и имеющая слагаемое с запаздыванием, изучается в первой главе. Она обладает гораздо более длительной историей своего становления.

На основе фундаментального предположения всех биологических моделей роста, что численность популяции пропорциональна ее скорости роста, Томасом Мальтусом, основоположником математических популяционных моделей, в 1798 г. была разработана первая математическая модель для описания динамики изменения численности вида [109]. Согласно его представлениям, любой вид при благоприятных условиях увеличивает свою численность по экспоненциальному закону:

$$\dot{N} = rN, \quad (0.0.1)$$

где  $N$  — численность вида,  $r$  — относительный коэффициент роста. Закон Мальтуса прекрасно согласуется с экспериментальными данными на ограниченных временных интервалах, когда размер популяции не слишком велик. В частности, он использовался Чарльзом Дарвином при разработке им теории борьбы за существование [38].

Но в уравнении (0.0.1) нет учета факторов, препятствующих росту популяции, таких как, например, ограниченности доступной пищи или размера территории обитания, температуры и влажности окружающей среды, возраста особей, различных болезней и многих других. В связи с этим в 1835–1838 гг. бельгийские математики Ламбер Адольф Жак Кетле и Пьер Франсуа Ферхюльст разработали новую модель изменений численности популяции [115, 122], которая получила название логистической модели:

$$\dot{N} = rN(1 - N/K), \quad (0.0.2)$$

где  $K$  — емкость среды, зависящая от количества пищи и размера ареала обитания. В результате была получена картина S-образного изменения численности популяции: периоды роста закономерно сменяются спадами.

В 1920 г. это же уравнение независимо вывели американские исследователи Реймонд Пирл и Лоуэл Джейкоб Рид [113]. Их исследование было построено на анализе колебаний численности населения Соединенных Штатов за столетний период. Позже Пирл показал, что модель описывает популяционную динамику других стран, а в экспериментах на лабораторных животных подтвердил, что при наличии лимитирующих факторов (пища, температура, влажность) популяционный рост имеет вид S-образной кривой.

Уравнение (0.0.2) обладает достаточно простой динамикой, при этом все решения с положительными начальными условиями стремятся к  $K$  при  $t \rightarrow \infty$ . Оно хорошо описывает динамику роста популяции простейших микроорганизмов, но заведомо не применимо для моделирования динамики численности большинства видов млекопитающих. Дело заключается в том, что численность массовых видов млекопитающих резко меняется с течением времени. Осцилляции численности популяций особенно ярко выражены в северных ареалах обитания (например, в Канаде [102] и Якутии [66]). Биоценозы в них содержат мало различных видов, что позволяет в первом приближении пренебречь влиянием конкурентов и хищников. Это кардинально отличается от точки зрения, что возникновение колебаний численности популяции является следствием взаимодействия хищника со своей жертвой (см. [65, 124]), и приводит к идее главенства внутривидовой борьбы над хищничеством и конкуренцией. В свою очередь, это означает, что дифференциальное уравнение для моделирования математической экологии обязано быть автоколебательным. К настоящему времени накоплено достаточно много природных наблюдений, подтверждающих приведенную точку зрения.

В связи с этим Джордж Хатчинсон предложил в 1948 г. [97] следующее обобщение логистического уравнения (0.0.2):

$$\dot{N} = r(1 - N(t - h)/K)N(t). \quad (0.0.3)$$

Введение положительной постоянной  $h$  — времени запаздывания — стало некоторой попыткой учесть фактор запаздывания, связанный с возрастной структурой популяции, поскольку родившиеся особи влияют на пополнение численности своего вида не сразу, а только после вступления в возрастную группу зрелости. Данное уравнение было названо уравнением Хатчинсона, и оно описывает следующую ситуацию: вид обитает в однородной среде, миграционные факторы несущественны, и имеется заданное количество пищи, которое возобновляется при уменьшении численности популяции. Закономерность, заложенная в это уравнение, хорошо согласовалась с результатами экспериментальных

исследований на мышевидных в лабораторных условиях. Кроме того, Р. Мэй получил качественное совпадение результатов теоретического исследования с экспериментальными данными для зеленой падальной мухи [110], а в других работах модель с запаздыванием позволила объяснить 4-летний цикл популяции пашенной полевки.

Нетрудно видеть, что при достаточно малом  $N$  численность популяции изменяется по экспоненциальному закону  $N(t) = e^{rt}$ . При  $\lambda = rh \leq 37/24$  все решения (0.0.3) с положительной начальной функцией стремятся к  $K$  при  $t \rightarrow \infty$  [96, 126]. При  $\lambda \leq \pi/2$  состояние равновесия  $N \equiv K$  асимптотически устойчиво, а при  $\lambda > \pi/2$  это уравнение имеет периодическое решение  $N(t, \lambda)$  [99]. При достаточно малых значениях  $\lambda - \pi/2$  и при достаточно больших  $\lambda$  этот цикл орбитально асимптотически устойчив [101]. Отметим еще, что количество неустойчивых периодических решений (0.0.3) неограниченно растет при  $\lambda \rightarrow \infty$  [45].

Присутствие слагаемого с дискретным запаздыванием означает, что в вычислениях учитывается размер популяции в момент времени, отстоящий от данного на некоторое определенное число временных единиц. Уравнения с дискретным запаздыванием также часто встречаются в других областях, например, в теории управления, при помощи которой моделируются некоторые задачи математической психологии [85, 86]. Дискретное запаздывание может служить достаточно точным описанием некоторых явлений, в частности, моделирование с его помощью нервного импульса как сигнала, передающегося через обратную связь [127]. В других ситуациях введение дискретного запаздывания не имеет смысла. К примеру, загрязнение окружающей среды умершими организмами носит кумулятивный характер. Однако, даже когда дискретное запаздывание достаточно хорошо описывает реальную модель, вполне вероятно, что на самом деле имеет место некоторое «размытие» запаздывания вблизи какого-то среднего значения. Развитие идеи запаздывания привело к возникновению моделей, в которых последствие учитывается более тонко: вместо одного запаздывания появилось несколько (причем величины могут различаться на порядки), запаздывание и коэффициенты начали зависеть от времени, наряду с сосредоточенным стали рассматривать распределенное запаздывание и т.д.

В данной работе исследуются сосуществующие сложные пространственно неоднородные режимы классической популяционной модели логистического уравнения с запаздыванием и диффузией в плоской области:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\Delta N + r(1 - N_{t-1})N, \quad \frac{\partial N}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

среди которых есть режимы, обладающие свойством самоорганизации. Здесь  $N(t, x)$  — плотность популяции в момент времени  $t$  в точке  $x$  выпуклой ограниченной плоской области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  с гладкой границей  $\partial\Omega$  и  $\text{mes } \Omega = 1$ ,  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $D$  — коэффициент диффузии,  $r$  — мальтузианский коэффициент линейного роста,  $N_{t-1} \equiv N(t-1, x)$ . Уравнение сопровождается краевыми условиями Неймана, причем  $\nu$  — направление внешней нормали к границе  $\partial\Omega$ .

Одни из первых серьезных результатов изучения режимов с самоорганизацией в двумерной области были представлены в работе Ю.С. Колесова и В.В. Майорова 1986 года [54]. В этой и последующих подобных работах авторы часто переходили от непрерывной модели к ее дискретному аналогу из-за существовавших ограничений вычислительных мощностей, что влияло на качество получаемых результатов; рассматривали узкие диапазоны изменения параметра диффузионной связи, отчего не наблюдалось

цельности общей картины происходящих в таких моделях процессов; выбирали слишком крупный шаг разбиения по пространству, вследствие чего рассматривались достаточно высокие значения коэффициента диффузии, что позволяло получать режимы лишь с укрупненными неоднородными структурами; не проводили обширных исследований с целью выявления возможных классов устойчивых режимов. Кроме того, в работе М. Бестехорна, Е.В. Григорьевой и С.А. Кащенко 2004 г. [74] исследовано формирование пространственно-временной турбулентности на пороге неустойчивости однородного стационарного решения при сколь угодно малой диффузии. Отдельно отметим работу С.А. Кащенко и В.Е. Фролова 2014 г. [41], в которой авторы попытались аналитически описать режимы ведущего центра и спиральной волны.

Все рассматриваемые в данной работе модели являются частным случаем параболической краевой задачей вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu D \Delta u + F(u), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (0.0.4)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $u \in \mathbb{R}^k$ ,  $k > 1$ ;  $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_k\}$ ,  $d_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, k$ ;  $\mu$  — параметр, отвечающий за пропорциональное уменьшение коэффициентов диффузии;  $\nu$  — внешняя нормаль к достаточно гладкой границе  $\partial \Omega$  ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$ ;  $F(u)$  — гладкая вектор-функция. Такую систему принято называть системой «реакция–диффузия», она служит математической моделью многих биофизических и экологических процессов [3, 59, 112]. В системах такого вида вполне типичной является ситуация так называемого «диффузионного хаоса», то есть наличия у краевой задачи (0.0.4) странного аттрактора<sup>1</sup>, возникающего из-за диффузионного воздействия в рассматриваемой области. Понятие хаоса вводилось разными авторами. Самое популярное определение было сформулировано Девани [81], которое было подвергнуто глубокому анализу в работах [71, 72, 120, 121]. Примеры других определений хаоса могут быть найдены в [50, 103]. Центральной особенностью хаоса во всех определениях является существенная зависимость от начальных условий.

В настоящее время существуют две концепции диффузионного хаоса — маломодовый и многомодовый хаос [91]. Первый из них может возникать в системе (0.0.4) при «средних» значениях параметра  $\nu$  (см. [3, 26, 107, 108, 117]), а второй — при  $\nu \rightarrow 0$  (см. [12, 21, 28, 48]).

Таким образом, наличие хаотического аттрактора может заметно усложнить анализ изучаемой модели. Поэтому важным вопросом является определение структуры решения, особенно в случаях квазипериодических колебаний, имеющих сложную форму и визуально слабо отличимых от хаотических, либо когда происходит крайне медленный переходный процесс в случае приближения к квазиустойчивому аттрактору. Имеются разные практические подходы к определению наличия хаоса: исследование спектра колебаний на основе анализа Фурье, вейвлет-анализ динамических систем, применение отображений Пуанкаре (сечений фазовой траектории при помощи секущей поверхности). Поскольку особенностью хаотических колебаний является их высокая чувствительность к малым изменениям начальных условий, то одним из наиболее надежных способов детектирования хаоса является определение скорости разбегания траекторий, которая оценивается с помощью показателей Ляпунова. Их определение можно найти в книге [9].

<sup>1</sup> Аттрактор — притягивающее предельное множество фазового пространства динамической системы.

Показателем Ляпунова непрерывной вектор-функции  $x(t)$ , заданной на полуоси  $\Pi = [0, \infty)$ , называется величина, определяемая формулой

$$\chi(x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |x(t)|. \quad (0.0.5)$$

Анализ спектра показателей Ляпунова широко применяется для исследования сложной динамики в системах обыкновенных дифференциальных уравнений и в моделях, сводящихся к отображениям. Случаи, когда их удается найти аналитически, являются исключительно редкими. Для вычисления старшего показателя обычно применяют метод Бенеттина [73]. Дальнейшее развитие данный метод получил в работе [125]. В ней в вычислительный алгоритм авторы добавили перенормировку начальных условий по алгоритму Грама–Шмидта [11], что позволило вычислять спектр показателей Ляпунова. Отдельно упомянем работы С.П. Кузнецова, П.В. Кушцова по этой тематике, например, [57, 58, 106]. В конечномерном случае, по теореме Оселедеца [62], линеаризованная на аттракторе система всегда является правильной по Ляпунову, и, тем самым, верхний предел в (0.0.5) может быть заменен на обычный, что позволяет эффективно численно оценивать показатели Ляпунова. В случае уравнений с запаздывающим аргументом и краевых задач такую теорему доказать не удастся. Поэтому при разработке алгоритмов вычисления ляпуновских показателей важно иметь модельное уравнение с запаздыванием, для которого спектр может быть вычислен каким-либо другим способом. Наличие такой задачи позволяет протестировать разработанный алгоритм и убедиться в его работоспособности. В статьях [4, 5, 55] вычисляются спектры ляпуновских показателей в моделях, состоящих из одного уравнения с запаздыванием, однако обоснования предложенного алгоритма, как, впрочем, и тестирующего примера авторы не приводят. Кроме того, в этих работах, как и в статье [1], рассмотрен случай лишь одного запаздывания, а также предусмотрено задание для возмущенных систем только дискретных начальных условий, что не является естественным для непрерывных математических моделей. Отдельно упомянем [83] — одну из первых работ по данной тематике.

Таким образом, наличие инструмента численной оценки характеристических показателей Ляпунова для уравнений с запаздыванием и краевых задач позволит проводить качественный анализ динамических систем из новых областей математического моделирования.

## Цели и задачи исследования

Целью диссертационной работы является исследование динамических систем с распределенными параметрами из популяционной биологии и биофизики, у которых обнаруживаются режимы самоорганизации, с использованием современных асимптотических и согласованных с ними численных методов. Также целью диссертации является разработка и тестирование алгоритма оценки спектра ляпуновских показателей для исследования систем дифференциальных уравнений с произвольным количеством запаздывающих аргументов с возможностью задания дискретных либо непрерывных начальных условий для векторов возмущения.

## Методология и методы исследования

Для изучения поведения динамических систем, рассматриваемых в работе, применяются теория бифуркаций, стандартные замены метода нормальных форм, методы теории усреднения, а также численные методы исследования пространственно распределенных моделей и моделей с запаздывающим аргументом. Алгоритм оценки спектра ляпуновских показателей динамических систем с запаздывающими аргументами основан на базовых принципах вычисления ляпуновских показателей систем, правильных по Ляпунову, и разложении в ряды Фурье.

## Содержание диссертационной работы

Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и приложений.

В первой главе рассмотрена задача поиска в плоской области устойчивых сосуществующих режимов динамики популяций, которая описывается логистическим уравнением с диффузией и запаздыванием вида

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\Delta N + r[1 - N_{t-1}]N, \quad \frac{\partial N}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

где  $N(t, x)$  — плотность популяции в момент времени  $t$  в точке  $x$  выпуклой ограниченной плоской области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  с гладкой границей  $\partial\Omega$ ,  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $D$  — коэффициент диффузии,  $r$  — мальтузианский коэффициент линейного роста,  $N_{t-1} \equiv N(t-1, x)$ ,  $\nu$  — направление внешней нормали к границе  $\partial\Omega$  [31]. Построена асимптотика пространственно однородного цикла и исследована зависимость его устойчивости от параметра диффузии, доказана бифуркационная теорема о фазовых перестройках в плоской области при критическом значении коэффициента диффузии. При значениях параметра роста популяции, не близких к критическим, приведены результаты обширного численного эксперимента, целью которого был поиск сосуществующих аттракторов задачи [35, 36], в результате чего сделан вывод о существовании у краевой задачи решений двух типов, первый из которых наследует свойства однородного решения, а второй, названный режимом самоорганизации, более сложно распределен по пространству и имеет существенно более предпочтительные с точки зрения популяционной динамики свойства [88, 89].

Во второй главе рассмотрена пространственно распределенная феноменологическая модель реакции Белоусова–Жаботинского, имеющая следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} &= D_1\Delta v_1 + r_1(1 + a(1 - v_3) - v_1)v_1, & \frac{\partial v_1}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} &= 0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} &= D_2\Delta v_2 + r_2(v_1 - v_2)v_2, & \frac{\partial v_2}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} &= 0, \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} &= D_3\Delta v_3 + r_3(\alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2 - v_3)v_3, & \frac{\partial v_3}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

где функции  $v_1(t, s)$ ,  $v_2(t, s)$ ,  $v_3(t, s)$  отвечают за плотности концентраций основных компонентов реакции,  $s \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $t > 0$ ;  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $\Omega$  — ограниченная плоская область с гладкой границей  $\partial\Omega$  и мерой, равной единице;  $\nu$  — направление внешней нормали к  $\partial\Omega$ ; параметры  $r_1, r_2, r_3, a, D_1, D_2, D_3$  положительны;  $\alpha \in (0, 1)$  [32]. Исследована

локальная динамика этого уравнения, определены условия для возникновения бифуркации Андронова–Хопфа, доказаны основные утверждения. Выделены критические случаи в задаче о диффузионной потере устойчивости пространственно однородного цикла [33, 93]. Показано, что в модели наряду с пространственно неоднородными режимами, бифурцирующими от пространственно однородного, присутствуют хаотические колебательные режимы с самоорганизацией [29, 87, 92].

В третьей главе рассмотрен вопрос вычисления оценок показателей Ляпунова для систем дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами. Описаны две методики обработки решений линеаризованных на изучаемом аттракторе систем, одна из которых основана на базисе импульсных функций, а другая — на базисе тригонометрических функций. Численно показана близость полученных оценок к корням характеристического квазиполинома уравнения Хатчинсона, равным искомым показателям Ляпунова [2, 34]. Продемонстрирована важность применения полученных алгоритмов для систем из нейродинамики, особенно в том случае, когда асимптотические методы перестают работать, а решения при этом обладают эффектом квазиустойчивого поведения, затрудняющим их численное исследование [30, 37, 69, 70]. Вычислены спектры оценок показателей Ляпунова для некоторых полученных в первой главе пространственных режимов, у части из них обнаружена квазиустойчивость.

### **Научная новизна результатов работы**

- 1) Получены условия возникновения пространственно неоднородных режимов в плоской области, наследующих свойства пространственно однородных, в модели динамики популяций, основанной на логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией, и модели реакции Белоусова–Жаботинского, феноменологически близкой к экологической задаче «хищник – хищник – жертва», с использованием современных асимптотических методов.
- 2) Предложен новый алгоритм оценки спектра ляпуновских показателей для систем дифференциальных уравнений с произвольным количеством запаздывающих аргументов и возможностью задания базиса импульсных функций либо базиса тригонометрических функций.
- 3) Проиллюстрирована обоснованность вычисления оценок показателей Ляпунова в случае систем из нейродинамики, у которых наблюдается эффект квазиустойчивого поведения.
- 4) Проведен обширный численный эксперимент для модели динамики популяций в квадратной области, в результате чего обнаружены три типа устойчивых режимов с эффектом самоорганизации вблизи критического значения диффузионного параметра; в широком диапазоне изменения диффузионного параметра исследованы устойчивые сосуществующие пространственно неоднородные режимы, одни из которых обладают эффектом самоорганизации, а другие наследуют свойства пространственно однородного режима.

## **Достоверность и обоснованность научных результатов работы**

Достоверность полученных результатов подтверждается соответствием данных, полученных с помощью аналитических методов, с данными численного моделирования, а также с результатами исследований, опубликованными другими авторами.

## **Теоретическая и практическая значимость работы**

- 1) Исследованы режимы самоорганизации в узком биологическом смысле, возникающие как в популяционной динамике, основанной на логистической модели с запаздыванием и диффузией, так и в химических процессах, описываемых упрощенной биологической моделью, в основе которой лежит реакция Белоусова–Жаботинского; для этих моделей проведен локальный анализ, основанный на современных асимптотических методах и подтверждающий критические значения параметров, полученные численным путем.
- 2) Разработаны алгоритмы вычисления оценок показателей Ляпунова для дифференциальных уравнений с запаздыванием, позволяющие проводить качественный анализ динамических систем из активно развивающихся областей математического моделирования.

## **Положения и результаты, выносимые на защиту**

- 1) Доказаны бифуркационные теоремы о фазовых перестройках в плоской области при критическом значении коэффициента диффузии для модели динамики популяций, основанной на логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией, и феноменологической модели реакции Белоусова–Жаботинского.
- 2) Доказана бифуркационная теорема о рождении устойчивого цикла в точечной феноменологической модели реакции Белоусова–Жаботинского.
- 3) Получены условия существования и устойчивости пространственно однородного орбитально асимптотически устойчивого предельного цикла в феноменологической модели реакции Белоусова–Жаботинского.
- 4) Построены сложные устойчивые пространственно неоднородные режимы, возникающие в плоской области в модели динамики популяций, основанной на логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией, численно определены границы их сосуществования, среди них выделены режимы с эффектом самоорганизации.
- 5) Показано сосуществование двух классов хаотических колебательных режимов, один из которых обладает релаксационными свойствами, а другой — эффектом самоорганизации, в феноменологической модели реакции Белоусова–Жаботинского в случае плоской области.
- 6) Разработаны и протестированы алгоритмы вычисления оценок показателей Ляпунова для дифференциальных уравнений с запаздыванием, основанных на разных наборах базисных функций, что позволило проиллюстрировать эффект квазиустойчивости в нейродинамических моделях.



## Личный вклад автора

Все основные результаты получены автором самостоятельно. Постановка задач и интерпретация результатов, представленных в диссертационной работе, выполнялись совместно с научным руководителем и соавторами опубликованных научных работ.

## Публикации и апробация результатов

По теме диссертации автором опубликовано 16 статей [2, 29–37, 69, 70, 87–89, 92, 93], в том числе 5 статей в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ, из них 4 статьи в зарубежных изданиях, индексируемых в Scopus.

Результаты работы были представлены на следующих конференциях:

- 1) Международная конференция «Нелинейные методы в физике и механике», посвященная 90-летию со дня рождения Мартина Крускала, 60-летию публикации результатов вычислительного эксперимента по проблеме Ферми–Паста–Улама, 1–3 октября 2015 г., Ярославль;
- 2) Научная конференция «Методы суперкомпьютерного моделирования» на базе «Интеркосмос» ИКИ РАН, 17–19 ноября 2015 г., Таруса;
- 3) International Conference «Supercomputer Simulations in Science and Engineering», 6–10 сентября 2016 г., Москва;
- 4) Международная конференция «Новые тенденции в нелинейной динамике», 5–7 октября 2017 г., Ярославль;
- 5) International Conference on Computer Simulation in Physics and beyond, 9–12 октября 2017 г., Москва;
- 6) International Conference on Computer Simulation in Physics and beyond, 24–27 сентября 2018 г., Москва;
- 7) Международная конференция «Интегрируемые системы и нелинейная динамика», 1–5 октября 2018 г., Ярославль;
- 8) Международная конференция «Воронежская зимняя математическая школа: Современные методы теории функций и смежные проблемы», 28 января – 2 февраля 2019 г., Воронеж;
- 9) Международная школа-конференция «Хаотические автоколебания и образование структур» (ХАОС-2019), 1–6 октября 2019 г., Саратов;
- 10) Международная научная конференция «Динамика. 2019. Ярославль», 10–12 октября 2019 г., Ярославль.

В ходе работы над диссертацией были разработаны:

- 1) программный комплекс «Моделирование логистического уравнения с запаздыванием и диффузией в плоской области», получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2016663274, Москва, 2016;

2) программный комплекс «LESPE (Lyapunov Exponents Spectrum Parallel Estimator)», получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2018664656, Москва, 2018.

Частично результаты диссертационной работы получены при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00158) и при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10055).

Кроме того, результаты диссертации неоднократно докладывались на семинаре «Нелинейная динамика и синергетика» кафедры математического моделирования Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова и на семинаре «Нелинейный анализ и его приложения» кафедры ФАиП Владимирского государственного университета им. А.Г. и Н.Г. Столетовых.

# Глава 1.

## Пространственно неоднородные режимы логистической модели с запаздыванием и малой диффузией в плоской области

### 1.1. Постановка задачи

Рассмотрим проблему потери устойчивости пространственно однородного решения логистической модели с диффузией и запаздыванием вида

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\Delta N + r(1 - N_{t-1})N, \quad \frac{\partial N}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.1.1)$$

часто применяемой в популяционной биологии, а также изучим режимы, возникающие при этом процессе, в том числе так называемые режимы самоорганизации — сложно распределенные по пространству режимы, обладающие предпочтительными биологическими характеристиками.

Здесь  $N(t, x)$  — плотность популяции в момент времени  $t$  в точке  $x$  выпуклой ограниченной плоской области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  с гладкой границей  $\partial\Omega$ ,  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $D$  — коэффициент диффузии,  $r$  — мальтузианский коэффициент линейного роста,  $N_{t-1} \equiv N(t-1, x)$ . Уравнение сопровождается краевыми условиями Неймана, причем  $\nu$  — направление внешней нормали к границе  $\partial\Omega$ . В качестве фазового пространства краевой задачи (1.1.1) из-за наличия пространственной распределенности и временного запаздывания выберем  $W_2^2(\Omega; \mathbb{R}) \times C[-1, 0]$ . Здесь и далее мы предполагаем, что  $\text{mes } \Omega = 1$ . Это равенство достигается подходящей заменой пространственных переменных.

Нас будут интересовать динамические свойства устойчивых режимов краевой задачи (1.1.1), для исследования которых будут применяться асимптотические и численные методы.

Применение асимптотических методов в данной задаче возможно при  $r$ , близком к критическому значению  $\pi/2$  (поскольку при  $r \in (0, \pi/2)$  в уравнении без диффузионного слагаемого асимптотически устойчиво единичное состояние равновесия, а при  $r > \pi/2$  образуется устойчивый цикл [96, 126]) и достаточно малых значениях коэффициента диффузии.

Также некоторые результаты удается получить в случае, когда параметр  $r$  достаточно велик. В остальных ситуациях используются численные методы. С их помощью у краевой задачи (1.1.1) выделяются сосуществующие устойчивые режимы и вычисляются их динамические характеристики.

Основной результат, полученный на этом пути, состоит в следующем: у краевой задачи (1.1.1) имеются два типа устойчивых режимов, один из которых сохраняет свойства пространственно однородного решения, а режимы второго типа, называемые режимами самоорганизации, являются более эффективными с точки зрения популяционной биологии (более высокое среднее по пространству и времени, не слишком близкие к нулю минимумы среднего по пространству).

Во втором параграфе главы 1 проводится локальный анализ задачи (1.1.1) вблизи бифуркационного значения параметра  $r_{cr} = \pi/2$ . Сначала проводится построение пространственно однородного решения через рассмотрение уравнения с запаздыванием без диффузионного слагаемого

$$\dot{N} = \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) (1 - N_{t-1}) N.$$

С помощью стандартных замен строится нормальная форма, после чего формулируется теорема о существовании орбитально асимптотически устойчивого цикла с указанной асимптотикой.

**Определение 1.1.** *Периодическое решение  $\phi(t)$  дифференциального уравнения  $\dot{x} = f(x)$  является асимптотически орбитально устойчивым, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ , что для всех  $x(t)$ , удовлетворяющих неравенству  $\|x(t_0) - \phi(t_0)\| < \delta$ , выполнены условия  $\inf_{\tau} \|x(t) - \phi(\tau)\| < \varepsilon$  для всех  $t \geq t_0$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\tau} \|x(t) - \phi(\tau)\| = 0$ .*

**Определение 1.2.** *Периодическое решение  $\phi(t)$  дифференциального уравнения  $\dot{x} = f(x)$  является экспоненциально орбитально устойчивым, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ , что для всех  $x(t)$ , удовлетворяющих неравенству  $\|x(t_0) - \phi(t_0)\| < \delta$ , выполнены условия  $\inf_{\tau} \|x(t) - \phi(\tau)\| < \varepsilon$  и  $\inf_{\tau} \|x(t) - \phi(\tau)\| \leq \alpha \|x(t_0) - \phi(t_0)\| e^{-\beta(t-t_0)}$  для всех  $t \geq t_0$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — положительные константы.*

Далее, происходит переход к распределенной краевой задаче с целью выяснения устойчивости найденного пространственно однородного решения. Для этого проводятся специальные замены и отсекаются нелинейные слагаемые. С помощью применения разложения в ряды Фурье по собственным функциям оператора Лапласа в области  $\Omega$  к получившейся линейной задаче и асимптотического разложения специальной методики теории усреднения приходим к условию устойчивости для пространственно однородного решения. Для выяснения границ применимости найденного условия проводится сравнение приближенных значений диффузии, вычисленных на основе аналитических формул и путем численного интегрирования модельной системы.

В третьем параграфе главы 1 проведен численный анализ краевой задачи (1.1.1), построен график зависимости значения диффузии от параметра  $r$ , рассмотрены пространственно неоднородные циклы, ответвляющиеся от пространственно однородного при прохождении параметра  $D$  через критическое значение  $D_*$ . После этого при  $r = 3$  проведен поиск решений особой природы — так называемых режимов самоорганизации, у которых

минимум среднего не опускается до значений, близких к нулю. Обнаружено 3 разновидности таких режимов при значении диффузии, близкой к критической, причем один из них сосуществует с пространственно однородным режимом. Приведены их типичные распределения по пространству, а также характеристики при разных значениях диффузии. Помимо этого, исследовано изменение структуры полученных режимов при понижении коэффициента диффузии и найдены некоторые иные устойчивые режимы, качественно схожие с изученными. Отдельно по шагам разобран процесс генерации устойчивого режима, основанного на шестнадцати спиральных волнах. В конце параграфа рассмотрена проблема сосуществования аттракторов и, тем самым, возникновения мультистабильности.

## 1.2. Локальный анализ при $r$ , близком к бифуркационному значению

### 1.2.1. Построение пространственно однородного решения

Уточним постановку задачи для данного случая. Положим

$$r = \pi/2 + \varepsilon, \quad D = \varepsilon d,$$

где  $\varepsilon$  — положительный малый параметр (при  $r = \pi/2 - \varepsilon$  устойчиво состояние равновесия  $N(t, x) \equiv 1$ ). Таким образом, получаем краевую задачу вида:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \varepsilon d \Delta N + \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) (1 - N_{t-1}) N, \quad \left. \frac{\partial N}{\partial \nu} \right|_{\partial \Omega} = 0. \quad (1.2.1)$$

Учитывая, что любое решение уравнения с запаздыванием

$$\dot{N} = \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) (1 - N_{t-1}) N, \quad (1.2.2)$$

$N(t)$  является также пространственно однородным решением краевой задачи (1.2.1), сосредоточимся сначала на поиске асимптотического приближения устойчивых решений уравнения (1.2.2).

Выполним в (1.2.2) стандартную замену метода нормальных форм

$$N(t, \varepsilon) = 1 + \sqrt{\varepsilon} u_0(t, s) + \varepsilon u_1(t, s) + \varepsilon^{3/2} u_2(t, s) + \dots, \quad (1.2.3)$$

где  $s = \varepsilon t$  — медленное время, а

$$u_0(t, s) = z(s) \exp(it\pi/2) + \bar{z}(s) \exp(-it\pi/2).$$

После подстановки замены (1.2.3) в уравнение (1.2.2) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $\sqrt{\varepsilon}$ , получим на первом шаге (при  $\sqrt{\varepsilon}$ ) верное тождество

$$zi \frac{\pi}{2} \exp(it\pi/2) + \text{к.с.} = -\frac{\pi}{2} \left( z \exp(i(t-1)\pi/2) + \text{к.с.} \right),$$

где под к.с. подразумевается комплексно сопряженное к данному в той же скобке выражению, а на втором шаге (при  $\varepsilon$ ) выражение для  $u_1(t, s)$ :

$$\dot{u}_1 = -\frac{\pi}{2}u_1(t-1) + i\frac{\pi}{2}z^2 \exp(i\pi t) - i\frac{\pi}{2}\bar{z}^2 \exp(-i\pi t),$$

из которого с помощью замены  $u_1(t) = z^2 \exp(i\pi t)w_2$  получаем

$$u_1(t, s) = \frac{2-i}{5}z^2(s) \exp(i\pi t) + \frac{2+i}{5}\bar{z}^2(s) \exp(-i\pi t).$$

Наконец, на третьем шаге (при  $\varepsilon^{3/2}$ ) получаем задачу для  $u_2(t, s)$ :

$$\begin{aligned} (z' \exp(it\pi/2) + \text{к.с.}) + \dot{u}_2 &= (zi \exp(it\pi/2) + \text{к.с.}) - \frac{\pi}{2}u_2(t-1) - \\ &- \frac{\pi}{2}(z'i \exp(it\pi/2) + \text{к.с.}) - \frac{\pi}{2}(z \exp(it\pi/2) + \bar{z} \exp(-it\pi/2)) \cdot \\ &\cdot \left( \frac{2-i}{5}z^2 \exp(i\pi(t-1)) + \text{к.с.} \right) - \frac{\pi}{2} \left( \frac{2-i}{5}z^2 \exp(i\pi t) + \right. \\ &\quad \left. + \text{к.с.} \right) (-iz \exp(it\pi/2) + i\bar{z} \exp(-it\pi/2)), \end{aligned}$$

из условия разрешимости которой в классе 4-периодических функций по переменной  $t$  получаем уравнение на величину  $z(s)$ :

$$z' = \frac{1}{1 + \pi^2/4} \left[ z \left( \frac{\pi}{2} + i \right) - z|z|^2 \frac{\pi}{20} (3\pi - 2 + i(\pi + 6)) \right], \quad (1.2.4)$$

у которого имеется автомодельный цикл вида

$$z(s) = \rho \exp(i\varphi).$$

В уравнении (1.2.4) штрихом обозначена производная по медленной переменной  $s$ .

Решая обыкновенное дифференциальное уравнение (1.2.4), убеждаемся, что у него имеется орбитально асимптотически устойчивый цикл вида:

$$z(s) = \sqrt{\frac{10}{3\pi - 2}} \exp \left( i \left( -\frac{2}{3\pi - 2}s + \gamma \right) \right),$$

где  $\gamma$  — произвольная постоянная, определяющая начальную фазу.

На основе данных рассуждений нетрудно сформулировать следующую теорему о существовании и асимптотике цикла в (1.2.2). Соответствующая теорема и простейшая асимптотика впервые были показаны в [51] (см. также [20, 96, 101, 105, 128]). Ниже мы приводим утверждение с уточненной асимптотикой, которая потребуется позже.

**Теорема 1.1.** *Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что для  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  уравнение (1.2.2) имеет орбитально асимптотически устойчивый цикл с асимптотикой вида*

$$\begin{aligned} N_*(t) &= 1 + \sqrt{\frac{10\varepsilon}{3\pi - 2}} \left( \exp \left( i \left( \frac{\pi}{2}t - \frac{2}{3\pi - 2}\varepsilon t + \gamma \right) \right) + \text{к.с.} \right) + \\ &+ \frac{10\varepsilon}{3\pi - 2} \left( \frac{2-i}{5} \exp \left( i \left( \pi t - \frac{4}{3\pi - 2}\varepsilon t + 2\gamma \right) \right) + \text{к.с.} \right) + O(\varepsilon^{3/2}), \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

где под к.с. подразумевается комплексно сопряженное к данному в той же скобке выражению.

Рассмотрим уравнение (1.2.4), у которого имеется глобально орбитально асимптотически устойчивый цикл. На этом уравнении можно проиллюстрировать определения 1.1 и 1.2, а также приемы доказательства устойчивости орбитально асимптотически устойчивых циклов, используемых как в теореме 1.1, так и в последующем.

**Лемма 1.1.** *Решение уравнения (1.2.4)*

$$z(s) = \sqrt{\frac{10}{3\pi - 2}} \exp\left(i\left(-\frac{2}{3\pi - 2}s + \gamma\right)\right), \quad (1.2.6)$$

где  $\gamma \in \mathbb{R}$  определяет начальную фазу, экспоненциально орбитально асимптотически устойчиво.

*Доказательство.* Для доказательства заменим в (1.2.4)  $z(s) = \rho(s) \exp(i\varphi(s))$ . Тогда для вещественных переменных на фазовом цилиндре  $\rho > 0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  имеем систему:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{\pi/2}{1 + \pi^2/4} \rho - \frac{(\pi/20)(3\pi - 2)}{1 + \pi^2/4} \rho^3, \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{1 + \pi^2/4} - \frac{(\pi/20)(\pi + 6)}{1 + \pi^2/4} \rho^2, \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

в которой первое уравнение не зависит от второго. Решим первое уравнение, зафиксировав некоторое начальное условие  $\rho(0) = \rho_0 > 0$ , тогда

$$\rho(s) = \left( \frac{1}{(3\pi - 2)/10 + \exp(-2\varphi_0 s)(1/\rho_0^2 - (3\pi - 2)/10)} \right)^{1/2}, \quad (1.2.8)$$

где  $\varphi_0 = (\pi/2)/(1 + \pi^2/4)$ .

Формула (1.2.8) дает два важных для доказательства результата. Первый из них состоит в том, что вне зависимости от начальных условий  $\rho_0 > 0$  при  $s \rightarrow \infty$  имеем

$$\rho(s) \rightarrow \sqrt{\frac{10}{3\pi - 2}}.$$

Более того, для достаточно малых  $\left| \rho_0 - \sqrt{10/(3\pi - 2)} \right| < \delta$  величина  $\left| \rho(s) - \sqrt{10/(3\pi - 2)} \right|$  может быть оценена сверху:

$$\left| \rho(s) - \sqrt{\frac{10}{3\pi - 2}} \right| \leq \alpha \left| \rho_0 - \sqrt{\frac{10}{3\pi - 2}} \right| \exp(-\beta s),$$

где  $\alpha = 1 + \sqrt{10/(3\pi - 2)}/\rho_0$ ,  $\beta = \varphi_0$ .

Перейдем теперь к решению второго уравнения (1.2.7). Зафиксировав некоторое начальное условие  $\varphi(0) = \varphi_0 \geq 0$ , получаем значение  $\varphi(s)$ :

$$\varphi(s) = -\frac{2}{3\pi - 2}s + \frac{\pi + 6}{3\pi - 2} \ln \left( \frac{3\pi - 2}{10} \rho_0^2 + \left(1 - \frac{3\pi - 2}{10} \rho_0^2\right) \exp(-2\varphi_0 s) \right) + \varphi_0.$$

Для достаточно малых  $\left| \rho_0 - \sqrt{10/(3\pi - 2)} \right| < \delta$  можно оценить  $\inf_{\tau} |z_2(s) - z_1(\tau)|$ , где

$$\begin{aligned} z_1(\tau) &= \sqrt{\frac{10}{3\pi - 2}} \exp(i\varphi_1(\tau)) = \sqrt{\frac{10}{3\pi - 2}} \exp\left(i\left(-\frac{2}{3\pi - 2}\tau + \gamma\right)\right), \\ z_2(s) &= \rho(s) \exp(i\varphi_2(s)) = \rho(s) \exp(i\varphi(s)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z_2(s) - z_1(\tau)| &= \left| \rho(s) \exp(i\varphi_2(s)) - \sqrt{\frac{10}{3\pi - 2}} \exp(i\varphi_1(\tau)) \right| = \\ &= \left| \rho(s) \exp\left(i(\varphi_2(s) - \varphi_1(\tau))\right) - \sqrt{\frac{10}{3\pi - 2}} \right|. \end{aligned}$$

Поскольку  $\inf_{\tau} |\varphi_2(s) - \varphi_1(\tau)| = 0$ , то

$$\inf_{\tau} |z_2(s) - z_1(\tau)| = \left| \rho(s) - \sqrt{\frac{10}{3\pi - 2}} \right| \leq \alpha \left| \rho_0 - \sqrt{\frac{10}{3\pi - 2}} \right| \exp(-\beta s),$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  определены выше.

Таким образом, лемма полностью доказана. □

Отметим, что уравнение (1.2.4) инвариантно относительно комплексного сопряжения, что позволяет использовать при изучении устойчивости автомодельных циклов таких уравнений следующий прием.

Рассмотрим систему, состоящую из уравнения (1.2.4) и комплексно сопряженного к нему

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \phi z + dz^2 \xi, \\ \dot{\xi} &= \bar{\phi} \xi + \bar{d} \xi^2 z. \end{aligned}$$

Для исследования устойчивости автомодельного цикла

$$z(s) = \rho_* \exp(i\varphi), \quad \xi(s) = \rho_* \exp(-i\varphi)$$

будем считать переменные  $z$  и  $\xi$  независимыми. Подставим  $z(s) = \rho_* \exp(i\varphi)(1 + h_1)$ ,  $\xi(s) = \rho_* \exp(-i\varphi)(1 + h_2)$  и выделим в уравнениях линейные части по  $h_1$  и  $h_2$ , в результате чего приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= d\rho_*^2(h_1 + h_2), \\ \dot{h}_2 &= \bar{d}\rho_*^2(h_1 + h_2). \end{aligned}$$

Характеристический многочлен матрицы этой системы

$$\begin{pmatrix} d & d \\ \bar{d} & \bar{d} \end{pmatrix}, \tag{1.2.9}$$

имеет вид  $\lambda^2 - (d + \bar{d})\lambda$ , корни которого

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2\operatorname{Re} d.$$

Собственные числа матрицы (1.2.9) соответствуют мультипликаторам  $\mu_j = \exp(\lambda_j)$  периодического решения  $\rho_* \exp(i\varphi s + \gamma)$ , один из которых всегда для периодического решения равен 1, а второй корень находится внутри единичного круга комплексной плоскости, что гарантирует устойчивость решения. В случае, если  $\operatorname{Re} d > 0$ , то  $|\mu_2| > 1$  и решение неустойчиво.



## 1.2.2. Условие устойчивости пространственно однородного решения

Начнем процесс поиска условия устойчивости пространственно однородного решения со следующего очевидного утверждения.

**Лемма 1.2.** *Решение  $N(t, x) \equiv N_*(t)$  является пространственно однородным решением краевой задачи (1.2.1).*

*Доказательство.* Поскольку решение  $N(t, x) \equiv N_*(t)$  не зависит от пространственной переменной, то в таком случае  $\Delta N = 0$ . Так что, подставив это решение в (1.2.1) с учетом выполнимости уравнения (1.2.2), получаем верное тождество.  $\square$

Рассмотрим проблему устойчивости этого решения при  $d > 0$  и найдем критическое значение  $d$ , при котором это решение теряет устойчивость.

Для исследования устойчивости выполним в краевой задаче (1.2.1) замены

$$N(t, x) = N_*(t) + v(t, x), \quad (1 + \delta\varepsilon)t \rightarrow \tau,$$

где  $\delta = -4/(\pi(3\pi - 2))$ , после чего приходим к краевой задаче вида

$$(1 + \delta\varepsilon)\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon d\Delta v - \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)(1 - N_*(\tau - 1 - \delta\varepsilon))N_* + \\ + \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)(1 - N_*(\tau - 1 - \delta\varepsilon) - v(\tau - 1 - \delta\varepsilon))(N_* + v), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0,$$

а затем выделим в ней линейную составляющую

$$(1 + \delta\varepsilon)\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon d\Delta v + \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)((1 - N_*(\tau - 1 - \delta\varepsilon))v - \\ - N_*v(\tau - 1 - \delta\varepsilon)), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.2.10)$$

Применяя к линейной краевой задаче (1.2.10) разложения в ряды Фурье по собственным функциям оператора Лапласа в области  $\Omega$ , получаем

$$(1 + \delta\varepsilon)\dot{\alpha}_k = -\varepsilon d\lambda_k\alpha_k + \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)((1 - N_*(\tau - 1 - \delta\varepsilon))\alpha_k - N_*\alpha_k(\tau - 1 - \delta\varepsilon)), \quad (1.2.11)$$

где  $\lambda_k$  — собственные числа, пронумерованные в порядке возрастания абсолютных величин, а  $u_k(x)$  — собственные функции оператора Лапласа, соответствующие им так, что

$$\Delta u_k = -\lambda_k u_k, \quad \left.\frac{\partial u_k}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

При этом

$$v(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(t) u_k(x).$$

Отметим, что для выпуклых областей с гладкой границей  $\lambda_0 = 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$

Для исследования на устойчивость линейных уравнений с запаздыванием (1.2.11) используем специальную методику теории усреднения [8, 52], для этого будем искать коэффициенты следующего асимптотического разложения:

$$\alpha_k(\tau) = \left( V_0(\tau) + \sqrt{\varepsilon}V_1(\tau) + \varepsilon V_2(\tau) + \dots \right) \exp \left( (\varepsilon D_0 + \varepsilon^2 D_1 + \dots)\tau \right), \quad (1.2.12)$$

где  $V_j(\tau)$  —  $1 \times 2$  вектор-функции периода четыре, а  $D_j$  —  $2 \times 2$  постоянные матрицы ( $j = 0, 1, \dots$ ). Очевидно, что

$$V_0(\tau) = \left( \exp(i\tau\pi/2), \exp(-i\tau\pi/2) \right).$$

На основе этих действий можно сформулировать следующую теорему.

**Теорема 1.2.** *Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что для  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  краевая задача (1.2.1) имеет пространственно однородный цикл  $N(t, x) \equiv N_*(t)$ , который экспоненциально орбитально устойчив при  $d > d_*$ , где*

$$d_* = \frac{2\pi}{\lambda_1(3\pi - 2)},$$

*и неустойчив при  $d < d_*$ . Здесь  $\lambda_1$  — первое ненулевое собственное число оператора Лапласа в области  $\Omega$ .*

*Доказательство.* После применения разложения (1.2.12) в уравнении (1.2.11), получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} (1 + \delta\varepsilon) \left( (\dot{V}_0 + \sqrt{\varepsilon}\dot{V}_1 + \varepsilon\dot{V}_2 + \dots) + (V_0 + \sqrt{\varepsilon}V_1 + \varepsilon V_2 + \dots)(\varepsilon D_0 + \right. \\ \left. + \varepsilon^2 D_1 + \dots) \right) \exp \left( (\varepsilon D_0 + \varepsilon^2 D_1 + \dots)\tau \right) = \left( -\varepsilon d \lambda_k + \left( \frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) (1 - \right. \\ \left. - N_*(\tau - 1 - \delta\varepsilon)) \right) (V_0 + \sqrt{\varepsilon}V_1 + \varepsilon V_2 + \dots) \exp \left( (\varepsilon D_0 + \right. \\ \left. + \varepsilon^2 D_1 + \dots)\tau \right) - N_* \left( \frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) (V_0(\tau - 1 - \delta\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}V_1(\tau - 1 - \delta\varepsilon) + \\ + \varepsilon V_2(\tau - 1 - \delta\varepsilon) + \dots) \exp \left( (\varepsilon D_0 + \varepsilon^2 D_1 + \dots)(\tau - 1 - \delta\varepsilon) \right). \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Кроме того, применяем в (1.2.13) следующие стандартные разложения:

$$V_j(\tau - 1 - \varepsilon\delta) = V_j(\tau - 1) - \varepsilon\delta\dot{V}_j(\tau - 1) + \dots,$$

$$N_*(\tau - 1 - \varepsilon\delta) = N_*(\tau - 1) - \varepsilon\delta\dot{N}_*(\tau - 1) + \dots,$$

в результате чего приходим к уравнению вида:

$$\begin{aligned}
(1 + \delta\varepsilon)((\dot{V}_0 + \sqrt{\varepsilon}\dot{V}_1 + \varepsilon\dot{V}_2 + \dots) + (V_0 + \sqrt{\varepsilon}V_1 + \\
+ \varepsilon V_2 + \dots)(\varepsilon D_0 + \varepsilon^2 D_1 + \dots)) = \left( -\varepsilon d\lambda_k + \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)(1 - \right. \\
\left. - N_*(\tau - 1) + \varepsilon\delta\dot{N}_*(\tau - 1) - \dots)\right)(V_0 + \sqrt{\varepsilon}V_1 + \varepsilon V_2 + \dots) - \\
- N_*\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)\left((V_0(\tau - 1) - \varepsilon\delta\dot{V}_0(\tau - 1) + \dots) + \sqrt{\varepsilon}(V_1(\tau - 1) - \right. \\
\left. - \varepsilon\delta\dot{V}_1(\tau - 1) + \dots) + \varepsilon(V_2(\tau - 1) - \varepsilon\delta\dot{V}_2(\tau - 1) + \dots) + \dots\right). \quad (1.2.14) \\
\cdot \left(E - (1 + \varepsilon\delta)(\varepsilon D_0 + \varepsilon^2 D_1 + \dots) + ((1 + \varepsilon\delta)(\varepsilon D_0 + \right. \\
\left. + \varepsilon^2 D_1 + \dots))^2 + \dots\right).
\end{aligned}$$

Далее, приравниваем в (1.2.14) коэффициенты при одинаковых степенях  $\sqrt{\varepsilon}$ . Таким образом, при степени  $\varepsilon^0$  получаем уравнение на  $V_0$ :

$$\dot{V}_0 = -\frac{\pi}{2}V_0(\tau - 1),$$

в результате чего находим

$$V_0(\tau) = \left(\exp\left(i\frac{\pi}{2}\tau\right), \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\tau\right)\right).$$

При степени  $\sqrt{\varepsilon}$  удается получить выражение для  $V_1$  следующего вида:

$$\dot{V}_1 = -\frac{\pi}{2}u_0(\tau - 1)V_0 - \frac{\pi}{2}V_1(\tau - 1) - \frac{\pi}{2}u_0(\tau)V_0(\tau - 1).$$

Рассматривая отдельно выражение для первой компоненты вектора  $V_1$ , приходим к следующему уравнению:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{11} = -\frac{\pi}{2}V_{11}(\tau - 1) - \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{10}{3\pi - 2}}\left(\left(\exp\left(i\frac{\pi}{2}\tau\right) + \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\tau\right)\right)(-i)\exp\left(i\frac{\pi}{2}\tau\right) + \right. \\
\left. + \left(-i\exp\left(i\frac{\pi}{2}\tau\right) + i\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\tau\right)\right)\exp\left(i\frac{\pi}{2}\tau\right)\right),
\end{aligned}$$

которое упрощается до следующего вида:

$$\dot{V}_{11} = -\frac{\pi}{2}V_{11}(\tau - 1) + \pi\sqrt{\frac{10}{3\pi - 2}}i\exp(i\pi\tau).$$

Используя замену  $V_{11} = \mu\exp(i\pi\tau)$ , находим

$$\mu = \frac{4 - 2i}{5}\sqrt{\frac{10}{3\pi - 2}}.$$

Таким же образом находим  $V_{12}$ , после чего получаем общий вид  $V_1$ :

$$V_1(\tau) = \left(\frac{4 - 2i}{5}\sqrt{\frac{10}{3\pi - 2}}\exp(i\pi\tau), \frac{4 + 2i}{5}\sqrt{\frac{10}{3\pi - 2}}\exp(-i\pi\tau)\right).$$

На следующем шаге рассмотрения уравнения (1.2.13) (при  $\varepsilon$ ) приходим к уравнению для  $V_2$ :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 + V_0 D_0 + \delta \dot{V}_0 = & -d\lambda_k V_0 - \frac{\pi}{2} u_0(\tau - 1) V_1 - \frac{\pi}{2} u_1(\tau - 1) V_0 + \\ & + \frac{\pi}{2} \delta \dot{V}_0(\tau - 1) E - \frac{\pi}{2} V_2(\tau - 1) E - V_0(\tau - 1) E - \\ & - \frac{\pi}{2} u_1 V_0(\tau - 1) E - \frac{\pi}{2} u_0 V_1(\tau - 1) E + \frac{\pi}{2} V_0(\tau - 1) D_0. \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

На основе уже известных значений  $V_0(\tau)$  и  $V_1(\tau)$  и представления матрицы  $D_0$ :

$$D_0 = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix},$$

вычисляем значения слагаемых (1.2.15):

$$V_0(\tau - 1) = \left( -i \exp(i \frac{\pi}{2} \tau), i \exp(-i \frac{\pi}{2} \tau) \right);$$

$$V_1(\tau - 1) = \left( -\frac{4 - 2i}{5} \theta \exp(i\pi\tau), -\frac{4 + 2i}{5} \theta \exp(-i\pi\tau) \right);$$

$$\begin{aligned} V_0 D_0 = & \left( \exp(i \frac{\pi}{2} \tau), \exp(-i \frac{\pi}{2} \tau) \right) \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \\ = & \left( d_{11} \exp(i \frac{\pi}{2} \tau) + d_{21} \exp(-i \frac{\pi}{2} \tau), d_{12} \exp(i \frac{\pi}{2} \tau) + d_{22} \exp(-i \frac{\pi}{2} \tau) \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_0(\tau - 1) D_0 = & \left( -i \exp(i \frac{\pi}{2} \tau), i \exp(-i \frac{\pi}{2} \tau) \right) \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \\ = & \left( -i d_{11} \exp(i \frac{\pi}{2} \tau) + i d_{21} \exp(-i \frac{\pi}{2} \tau), -i d_{12} \exp(i \frac{\pi}{2} \tau) + i d_{22} \exp(-i \frac{\pi}{2} \tau) \right); \end{aligned}$$

$$\dot{V}_0(\tau) = \left( i \frac{\pi}{2} \exp(i \frac{\pi}{2} \tau), -i \frac{\pi}{2} \exp(-i \frac{\pi}{2} \tau) \right);$$

$$\dot{V}_0(\tau - 1) = \left( \frac{\pi}{2} \exp(i \frac{\pi}{2} \tau), \frac{\pi}{2} \exp(-i \frac{\pi}{2} \tau) \right);$$

$$\begin{aligned} u_0 V_1(\tau - 1) = & \sqrt{\frac{10}{3\pi - 2}} \left( \exp(i \frac{\pi}{2} \tau) + \exp(-i \frac{\pi}{2} \tau) \right) \left( -\frac{4 - 2i}{5} \sqrt{\frac{10}{3\pi - 2}} \exp(i\pi\tau), \right. \\ & \left. -\frac{4 + 2i}{5} \sqrt{\frac{10}{3\pi - 2}} \exp(-i\pi\tau) \right) = -\frac{10}{3\pi - 2} \left( \frac{4 - 2i}{5} \left( \exp(i \frac{3\pi}{2} \tau) + \exp(i \frac{\pi}{2} \tau) \right), \right. \\ & \left. \frac{4 + 2i}{5} \left( \exp(-i \frac{\pi}{2} \tau) + \exp(-i \frac{3\pi}{2} \tau) \right) \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1(\tau - 1) V_0 = & \frac{10}{3\pi - 2} \left( -\frac{2 - i}{5} \exp(i\pi\tau) - \frac{2 + i}{5} \exp(-i\pi\tau) \right) \left( \exp(i \frac{\pi}{2} \tau), \exp(-i \frac{\pi}{2} \tau) \right) = \\ = & -\frac{10}{3\pi - 2} \left( \frac{2 - i}{5} \exp(i \frac{3\pi}{2} \tau) + \frac{2 + i}{5} \exp(-i \frac{\pi}{2} \tau), \frac{2 - i}{5} \exp(i \frac{\pi}{2} \tau) + \frac{2 + i}{5} \exp(-i \frac{3\pi}{2} \tau) \right); \end{aligned}$$

$$u_0(\tau - 1)V_1 = \sqrt{\frac{10}{3\pi - 2}} \left( -i \exp(i\frac{\pi}{2}\tau) + i \exp(-i\frac{\pi}{2}\tau) \right) \left( \frac{4 - 2i}{5} \sqrt{\frac{10}{3\pi - 2}} \exp(i\pi\tau), \right. \\ \left. \frac{4 + 2i}{5} \sqrt{\frac{10}{3\pi - 2}} \exp(-i\pi\tau) \right) = -i \frac{10}{3\pi - 2} \left( \frac{4 - 2i}{5} \left( \exp(i\frac{3\pi}{2}\tau) - \exp(i\frac{\pi}{2}\tau) \right), \right. \\ \left. \frac{4 + 2i}{5} \left( \exp(-i\frac{\pi}{2}\tau) - \exp(-i\frac{3\pi}{2}\tau) \right) \right);$$

$$u_1V_0(\tau - 1) = \frac{10}{3\pi - 2} \left( \frac{2 - i}{5} \exp(i\pi\tau) + \frac{2 + i}{5} \exp(-i\pi\tau) \right) \left( -i \exp(i\frac{\pi}{2}\tau), i \exp(-i\frac{\pi}{2}\tau) \right) = \\ = -i \frac{10}{3\pi - 2} \left( \frac{2 - i}{5} \exp(i\frac{3\pi}{2}\tau) + \frac{2 + i}{5} \exp(-i\frac{\pi}{2}\tau), -\frac{2 - i}{5} \exp(i\frac{\pi}{2}\tau) - \frac{2 + i}{5} \exp(-i\frac{3\pi}{2}\tau) \right).$$

Учитывая гармонику вектор-функции  $V_2$ , выпишем слагаемые первой компоненты результирующего вектора, которые не участвуют в определении  $V_2$  и образуют следующее уравнение:

$$0 = -d_{11} \exp(i\frac{\pi}{2}\tau) - d_{21} \exp(-i\frac{\pi}{2}\tau) - \delta i \frac{\pi}{2} \exp(i\frac{\pi}{2}\tau) - d\lambda_k \exp(i\frac{\pi}{2}\tau) - \\ - \frac{\pi}{2} i \frac{10}{3\pi - 2} \frac{4 - 2i}{5} \exp(i\frac{\pi}{2}\tau) + \frac{\pi}{2} \frac{10}{3\pi - 2} \frac{2 + i}{5} \exp(-i\frac{\pi}{2}\tau) + \\ + \frac{\pi^2}{4} \delta \exp(i\frac{\pi}{2}\tau) + i \exp(i\frac{\pi}{2}\tau) + \frac{\pi}{2} i \frac{10}{3\pi - 2} \frac{2 + i}{5} \exp(-i\frac{\pi}{2}\tau) + \\ + \frac{\pi}{2} \frac{10}{3\pi - 2} \frac{4 - 2i}{5} \exp(i\frac{\pi}{2}\tau) - \frac{\pi}{2} i d_{11} \exp(i\frac{\pi}{2}\tau) + \frac{\pi}{2} i d_{21} \exp(-i\frac{\pi}{2}\tau),$$

которое после упрощений выглядит следующим образом:

$$0 = \exp(-i\frac{\pi}{2}\tau) \left( -d_{21} + \frac{\pi(1 + 3i)}{3\pi - 2} + \frac{\pi}{2} i d_{21} \right) + \\ + \exp(i\frac{\pi}{2}\tau) \left( -d_{11} - \delta i \frac{\pi}{2} - d\lambda_k + \frac{2\pi(1 - 3i)}{3\pi - 2} + \frac{\pi^2}{4} \delta + i - \frac{\pi}{2} i d_{11} \right).$$

Это уравнение разбивается на два. При  $\exp(-i\frac{\pi}{2}\tau)$  находим  $d_{21}$ :

$$0 = -d_{21} + \frac{\pi(1 + 3i)}{3\pi - 2} + \frac{\pi}{2} i d_{21}.$$

$$d_{21}(2 - \pi i) = \frac{2\pi}{3\pi - 2}(1 + 3i).$$

$$d_{21}(\pi^2 + 4) = \frac{2\pi}{3\pi - 2}(2 + \pi i + 6i - 3\pi).$$

$$d_{21} = \frac{2}{\pi^2 + 4} \left( -\pi + \pi i \frac{\pi + 6}{3\pi - 2} \right).$$

При  $\exp(i\frac{\pi}{2}\tau)$  находим  $d_{11}$ :

$$0 = -d_{11} + \frac{4}{\pi(3\pi - 2)} i \frac{\pi}{2} - d\lambda_k + \frac{2\pi(1 - 3i)}{3\pi - 2} - \frac{\pi^2}{4} \frac{4}{\pi(3\pi - 2)} + i - \frac{\pi}{2} i d_{11}.$$

$$d_{11}(2 + \pi i) = -2d\lambda_k + 2\pi \frac{1 - 3i}{3\pi - 2}.$$

$$d_{11}(\pi^2 + 4) = -4d\lambda_k + 4\pi \frac{1 - 3i}{3\pi - 2} + 2i\pi d\lambda_k - 2i\pi^2 \frac{1 - 3i}{3\pi - 2}.$$

$$d_{11} = \frac{2}{\pi^2 + 4} \left( -2d\lambda_k - \pi - \pi i \left( -d\lambda_k + \frac{\pi + 6}{3\pi - 2} \right) \right).$$

Компонента  $d_{12}$  получается комплексно сопряженной относительно  $d_{21}$ , компонента  $d_{22}$  — комплексно сопряженной относительно  $d_{11}$ .

Матрица  $D_0$  определяет устойчивость пространственно однородного цикла. В случае, если ее собственные числа лежат в левой комплексной полуплоскости, эти решения устойчивы, а если хотя бы одно из них находится справа — неустойчивы. Из вида компонент матрицы  $D_0$  нетрудно получить условия устойчивости. След матрицы  $D_0$  равен

$$4(-2d\lambda_k - \pi)/(\pi^2 + 4)$$

и в силу неотрицательности  $\lambda_k$  отрицателен для всех  $k$ . В свою очередь, определитель  $D_0$  вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \det D_0 &= \frac{4}{(\pi^2 + 4)^2} \left( 4(-d\lambda_k)^2 + 4\pi d\lambda_k + \pi^2(-d\lambda_k)^2 - 2\pi^2 d\lambda_k \frac{\pi + 6}{3\pi - 2} \right) = \\ &= \frac{4}{(\pi^2 + 4)^2} \left( d\lambda_k \left( 4d\lambda_k + 4\pi + \pi^2 d\lambda_k - 2\pi^2 \frac{\pi + 6}{3\pi - 2} \right) \right) = \\ &= \frac{4}{(\pi^2 + 4)} \left( d\lambda_k \left( d\lambda_k - \frac{2\pi}{3\pi - 2} \right) \right), \end{aligned}$$

из которой получаем условие устойчивости для  $k$ -ой моды:

$$d > \frac{2\pi}{\lambda_k(3\pi - 2)}.$$

Определяющей является первая мода, поэтому при  $d > d_*$ , где

$$d_* = \frac{2\pi}{\lambda_1(3\pi - 2)},$$

пространственно однородный цикл  $N(t, x) \equiv N_*(t)$  экспоненциально орбитально устойчив, при  $d < d_*$  — неустойчив. □

Отметим, что подобное утверждение доказано в [47, 53] для одномерной области. При прохождении параметра  $d$  через критическое значение  $d = d_*$  пространственно однородный цикл дивергентным образом теряет устойчивость и от него на первой моде отходят пространственно неоднородные циклы. Отметим также, что динамические

Таблица 1.1. Сравнение приближенных значений диффузии ( $d_*$  — аналитическое,  $\hat{d}$  — численное) в зависимости от  $\varepsilon$

$\varepsilon$	$\varepsilon d_*$	$\varepsilon \hat{d}$	$\hat{d}$	$ d_* - \hat{d} $	$ d_* - \hat{d} /d_*$
0.01	0.000857	0.000857	0.0857	$< 0.0001$	$\approx 0$
0.05	0.004285	0.004265	0.0853	0.0004	0.0047
0.1	0.00857	0.00846	0.0846	0.0011	0.0128
0.2	0.01714	0.01656	0.0828	0.0029	0.0338
0.3	0.02571	0.02406	0.0802	0.0055	0.0548
0.4	0.03428	0.03068	0.0767	0.0090	0.0642
0.5	0.04285	0.0361	0.0722	0.0135	0.1575

свойства этих циклов (среднее, минимумы, минимумы средних) остаются практически неизменными по сравнению с пространственно однородным режимом.

С целью выяснения границ применимости теоремы 1.2 был проведен расчет критического значения диффузии в зависимости от  $\varepsilon$  в плоской квадратной области с единичной стороной по аналитическому результату и в численном эксперименте. Через  $\hat{d}$  обозначим приближенное критическое значение диффузии, полученное численным путем. Исходя из таблицы 1.1 нетрудно заметить, что асимптотические формулы сохраняют точность в широких пределах изменения параметра  $\varepsilon$ .

Асимптотические методы не позволяют проводить дальнейшие исследования в случае увеличения параметра  $r$  и уменьшения параметра  $d$ , поэтому будем пользоваться численными методами.

### 1.3. Численный анализ краевой задачи (1.1.1)

Краевую задачу (1.1.1) будем изучать численными методами в квадратной области  $\Omega$  ( $\Omega = \{(x_1, x_2) | 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ ). Для численного анализа в краевой задаче (1.1.1) оператор Лапласа заменим его разностным аналогом по известным формулам, полагая число точек разбиения  $m$  тем большим, чем меньше коэффициент диффузии, а значения в соответствующих прямоугольниках области  $\Omega$  будем считать одинаковыми и обозначим  $N_{i,j}$  ( $i, j \in \{1, \dots, m\}$ ):

$$\frac{dN_{i,j}}{dt} = D \left( \frac{N_{i-1,j} - 2N_{i,j} + N_{i+1,j}}{(\delta x_1)^2} + \frac{N_{i,j-1} - 2N_{i,j} + N_{i,j+1}}{(\delta x_2)^2} \right) + r(1 - N_{i,j}(t-1))N_{i,j}, \quad (1.3.1)$$

где  $\delta x_1 = \delta x_2 = 1/m$ , при этом граничные условия моделируются следующим образом:

$$\begin{aligned} N_{i,0} &\equiv N_{i,1}, & N_{i,m+1} &\equiv N_{i,m}, & \forall i \in 1, \dots, m; \\ N_{0,j} &\equiv N_{1,j}, & N_{m+1,j} &\equiv N_{m,j}, & \forall j \in 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Для решения системы применялся метод Дормана–Принса [95] с переменной длиной шага (DOPRI54). В большинстве экспериментов область  $\Omega$  покрывалась решеткой из  $100 \times$

100 узлов ( $m = 100$ ). Таким образом, рассматривалась система из 10000 уравнений с запаздыванием.

Численный анализ краевой задачи (1.1.1) при значениях  $r$ , не близких к  $\pi/2$ , будем выполнять сначала вблизи пространственно однородного режима с целью выяснить, какие пространственно неоднородные режимы могут возникнуть при уменьшении  $D$ , а затем будет выполнен широкий поиск сосуществующих с данными режимами устойчивых решений краевой задачи (1.1.1) с целью выяснить, в первую очередь, существуют ли такие режимы, и, во-вторых, качественную структуру таких режимов.

Отметим, что сведение краевой задачи типа “реакция–диффузия” к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, схожих с (1.3.1), для дальнейшего численного анализа было проведено в [16, 21, 91] в более простых случаях (рассматривалась система без запаздывания). Все расчеты были выполнены на вычислительном кластере ЯрГУ.

### 1.3.1. Пространственно неоднородные режимы, ответвляющиеся от пространственно однородного

В параграфе 1.2 нами показано, что при  $r$ , близких к  $\pi/2$ , пространственно однородный режим теряет устойчивость при значениях коэффициента диффузии  $D \approx (r - \pi/2)d_*$ . При этом для одномерной области удается доказать, что в этом случае от пространственно однородного цикла мягко ответвляется пара симметричных пространственно неоднородных циклов (см. [47]). Для выпуклой плоской области с гладкой границей, по всей вероятности, происходит аналогичная фазовая перестройка.

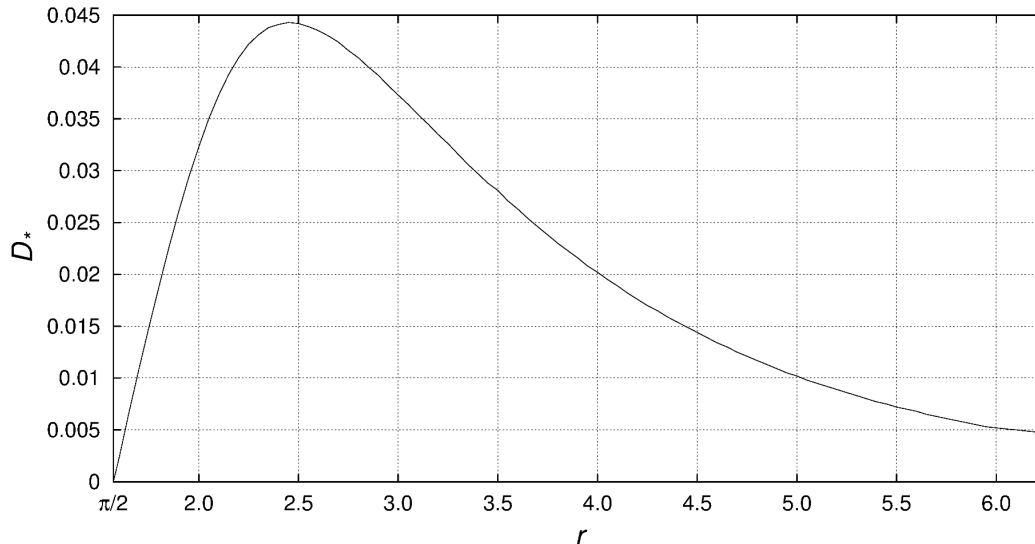


Рис. 1.1. Зависимость  $D_*$  от  $r$

Первой из задач численного счета является выяснение характера потери устойчивости пространственно однородного режима и подсчет значений  $D$ , при которых эта бифуркация происходит.

При значениях  $r$ , больших, но не близких к  $\pi/2$ , уравнение (1.2.2) также имеет устойчивый цикл, а, соответственно, краевая задача (1.2.1) имеет пространственно однородное решение.



Для рассматриваемой области нами вычислены критические значения коэффициента диффузии, которые обозначим через  $D_*$ . На рис. 1.1 представлен график зависимости  $D_*$  от  $r$ .

Численный анализ показывает, что при переходе через критические значения в широкой области изменения параметра  $r$  потеря устойчивости пространственно однородного режима происходит с возникновением пространственно неоднородных режимов, близких качественно к исходному.

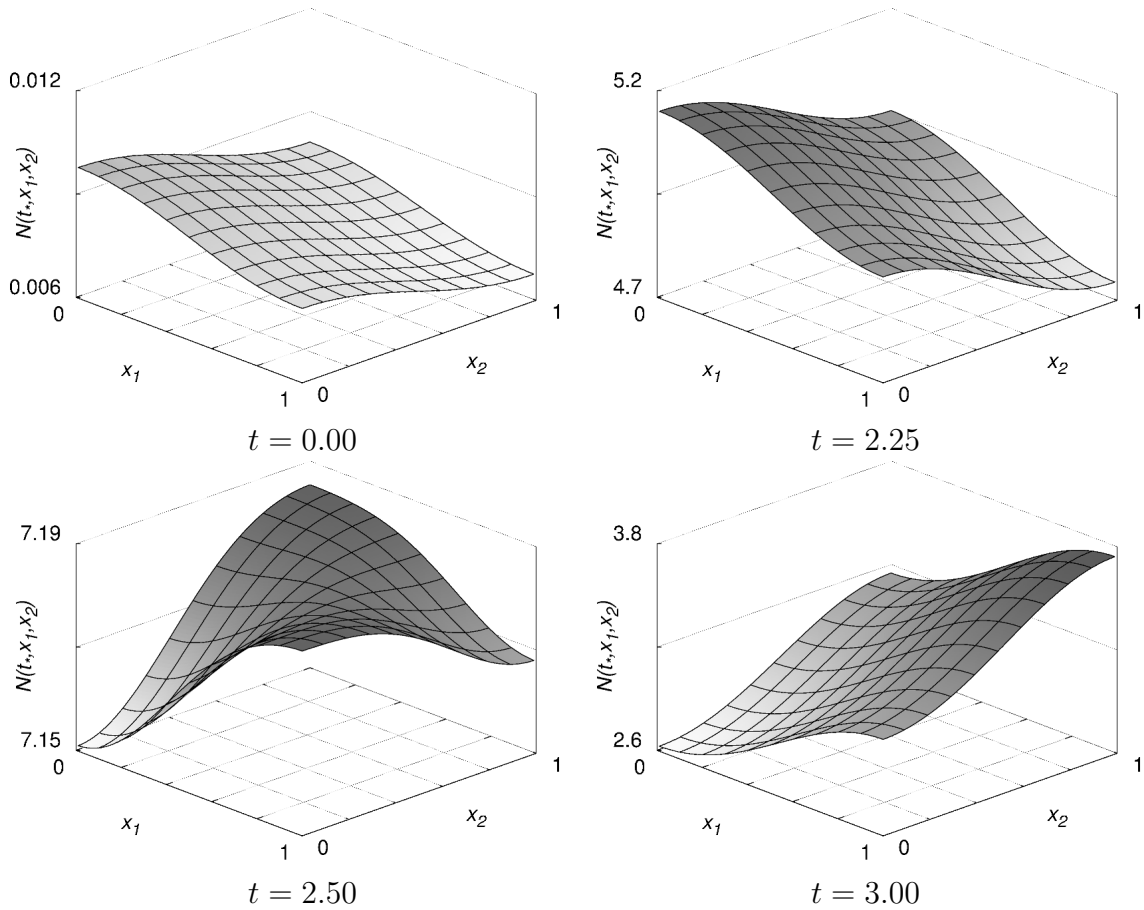


Рис. 1.2. Пространственно неоднородный цикл при  $r = 3$ ,  $D = 0.037$ .

Типичный вид пространственно неоднородного цикла при относительно больших значениях коэффициента  $r$  ( $r = 3$ ) и значении диффузии  $D$ , близком к критическому  $D_* \approx 0.0373$ , представлен на рис. 1.2. Здесь и далее для наглядности режимы такой структуры представлены в относительных масштабах для каждого момента времени. Отметим, что этот режим периодический, и за счет симметрии рассматриваемой области существует четыре таких симметричных режима по количеству углов области.

Введем значение среднего по пространству

$$\widehat{N}(t) = \frac{1}{\text{mes } \Omega} \int_{\Omega} N(t, x) dx,$$

после чего рассмотрим псевдофазовый портрет, построенный по значениям  $\widehat{N}(t - 1)$  и  $\widehat{N}(t)$ , который представлен на рис. 1.3.

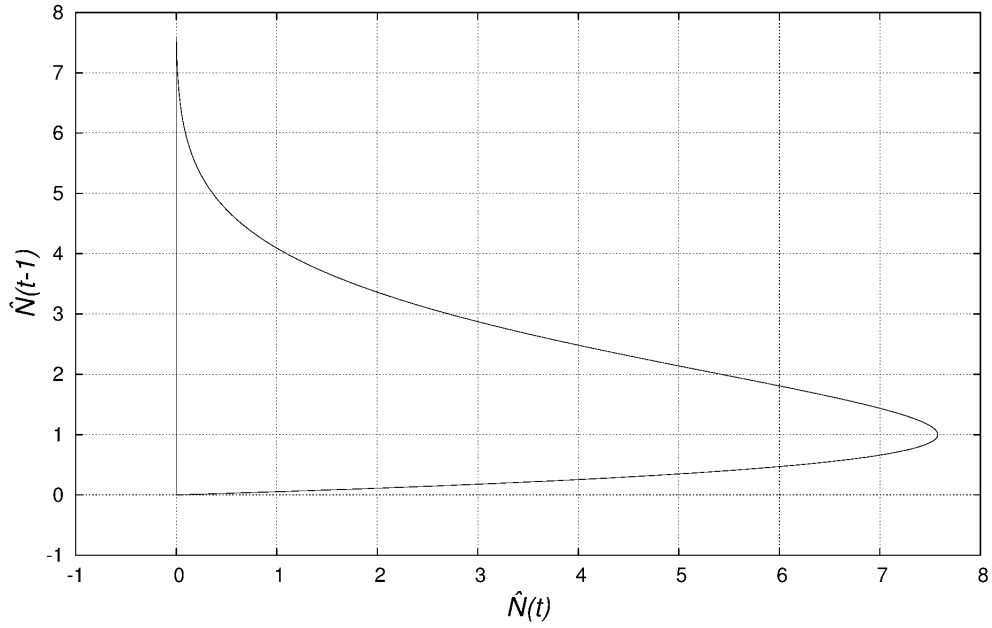


Рис. 1.3. Псевдофазовый портрет пространственно неоднородного цикла при  $r = 3$ ,  $D = 0.037$ , построенный по значениям  $\hat{N}(t)$  и  $\hat{N}(t - 1)$ .

В дальнейшем будем называть решения подобной структуры режимами ведущего центра [41, 42].

Перейдем теперь к описанию сосуществующих с данными режимами решений задачи (1.1.1) другой природы.

### 1.3.2. Пространственно неоднородные решения типа самоорганизации

Для численного анализа краевой задачи (1.1.1) выберем для определенности относительно большое значение  $r$ , равное 3. При этих значениях  $r$  уравнение (1.1.1) без диффузионного члена имеет цикл с интенсивными колебаниями, амплитуда которого близка к  $\exp(r - 1)$ , период близок к  $\exp(r)/r$ , а минимум близок к  $\exp(-\exp(r))$ . Вычисления показали, что для  $r = 3$   $N_{\max} \approx 7.582$ ,  $N_{\min} \approx 1.73 \cdot 10^{-6}$ , период  $T \approx 7.07$ . Отметим, что среднее по времени на данном цикле всегда равно 1. Этот факт нетрудно установить, если разделить соответствующее уравнение на  $N$  и проинтегрировать по периоду  $T$ . Таким образом, дальнейшее увеличение  $r$  приводит к значительным трудностям численной арифметики.

Представляет интерес поиск решений задачи (1.1.1), у которых минимум среднего не опускается до столь близких к нулю значений, как у данного режима. Режимы такого типа удастся получить относительно просто. Если в качестве начальных условий генерировать импульс, перемещающийся по границам и углам рассматриваемой области  $\Omega$  или ее части (по часовой стрелке или против нее) и напоминающий вихреобразную структуру, то можно прийти к следующим результатам.

Было получено три сосуществующих устойчивых решения краевой задачи (1.1.1) при  $D = 0.031$ , динамические характеристики которых резко отличаются от пространственно однородного решения. Два из них являются периодическими, одно — двухчастотное, и каждое из них имеет симметричную пару. Причем один из таких режимов сосуществует с пространственно однородным режимом краевой задачи.

Опишем первое из них. Это решение появляется при значениях  $D$ , больше критических ( $\widehat{D} \approx 0.148 > D_*$ , что, заметим, превышает критическое значение примерно в четыре раза), сохраняется практически в неизменном виде при значительном снижении  $D$  ниже  $\widehat{D}$  и является периодическим. На основе введенного значения среднего по пространству будем вычислять для изучаемого решения следующие характеристики: период  $T$ , среднее по времени  $M(\widehat{N})$ ,  $\widehat{N}_{\min} = \min_{t>0} \widehat{N}(t)$ ,  $\widehat{N}_{\max} = \max_{t>0} \widehat{N}(t)$ ,  $N_{\min} = \min_{t>0, x \in \Omega} N(t, x)$  и  $N_{\max} = \max_{t>0, x \in \Omega} N(t, x)$ . При  $r = 3$  удалось посчитать эти величины, которые сведены в таблицу 1.2.

Таблица 1.2. Значения характеристик режима самоорганизации “вихрь” при  $r = 3$  и разных значениях коэффициента диффузии  $D$ .

$D$	$T$	$M(\widehat{N})$	$\widehat{N}_{\min}$	$\widehat{N}_{\max}$	$N_{\min}$	$N_{\max}$
0.042	3.019	3.0128	2.8207	3.1993	$5.795 \cdot 10^{-7}$	19.2254
0.037	3.071	2.8974	2.7066	3.0823	$2.905 \cdot 10^{-7}$	19.0572
0.031	3.137	2.7656	2.5748	2.9499	$1.017 \cdot 10^{-7}$	19.0345

Характерный график распределения решения имеет “вихреобразную” структуру, представленную на рис. 1.4. В данном случае указано графическое представление режима на временном интервале в половину периода. Можно заметить, что после накопления популяции в углу области  $\Omega$  до некоего пикового значения происходит запуск миграции, в течение которой центр популяции начинает плавно смещаться к другому смежному углу, после чего процесс повторяется.

Псевдофазовый портрет такого режима, построенный по значениям  $\widehat{N}(t)$  и  $\widehat{N}(t - 1)$ , представлен на рис. 1.5.

Биологический смысл пространственно неоднородной структуры, названной нами режимом самоорганизации, состоит в том, что она предпочтительнее режима, качественно схожего с пространственно однородным, поскольку в таком случае популяция за счет постоянного перемещения по области  $\Omega$  не вымирает с течением времени, всегда сохраняя некоторый необходимый для дальнейшего существования запас особей. В случае же режима, у которого среднее по пространству иногда оказывается около нуля, реальная популяция может окончательно вымереть (в том числе за счет некоторых других неучтенных факторов) и тем самым прекратить свое существование.

Теперь перейдем к другим режимам самоорганизации, в основе которых лежат вихреобразные структуры.

Второй режим существует при  $D < D_*$ , является двухчастотным, сохраняется практически в неизменном виде при значительном уменьшении  $D$  и имеет характеристики, представленные в таблице 1.3. В таблице нет строки, соответствующей  $D = 0.042$ , поскольку не удалось найти этот режим при таком значении  $D$ .

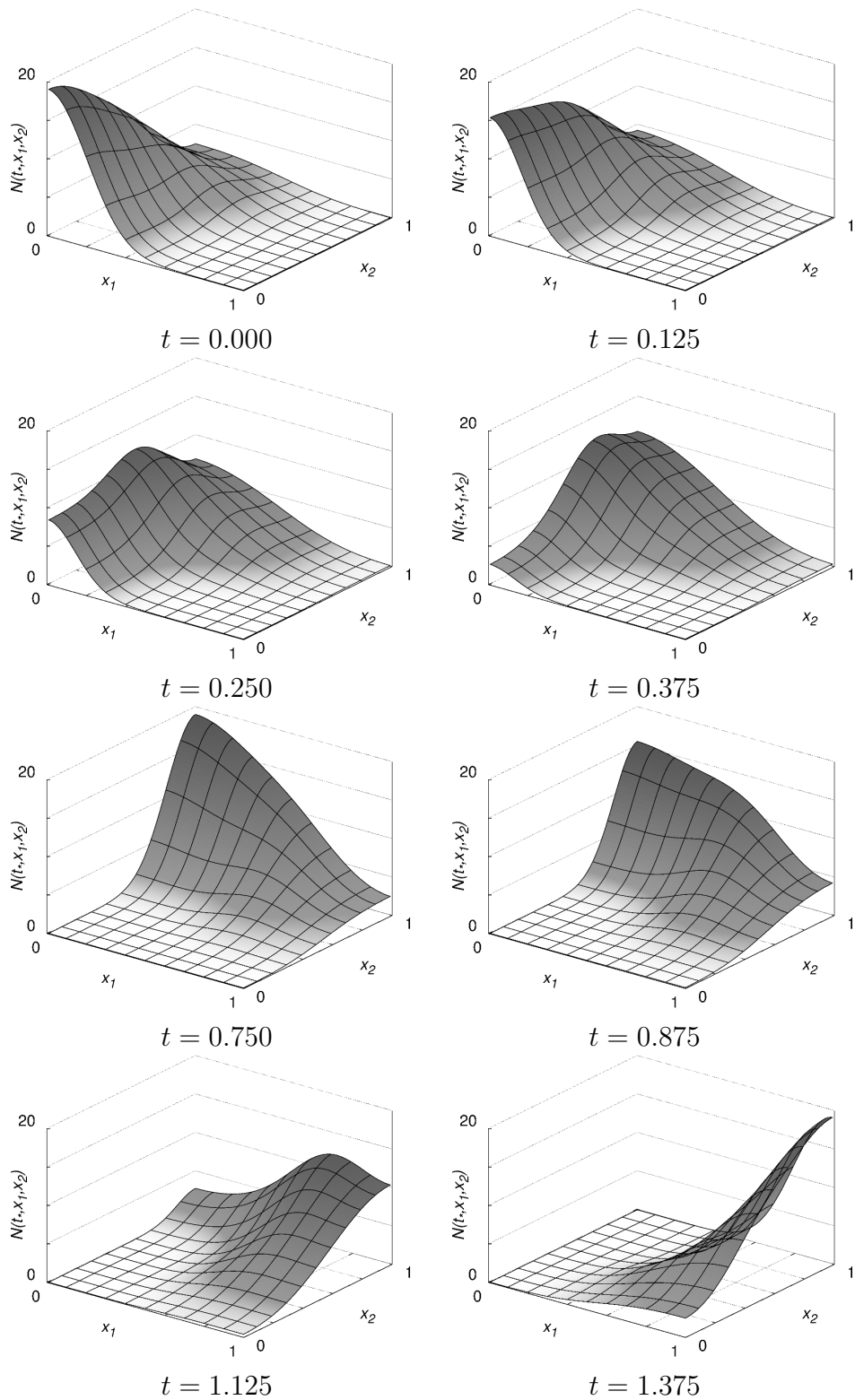


Рис. 1.4. Режим самоорганизации “вихрь” при  $r = 3$ ,  $D = 0.042$ .

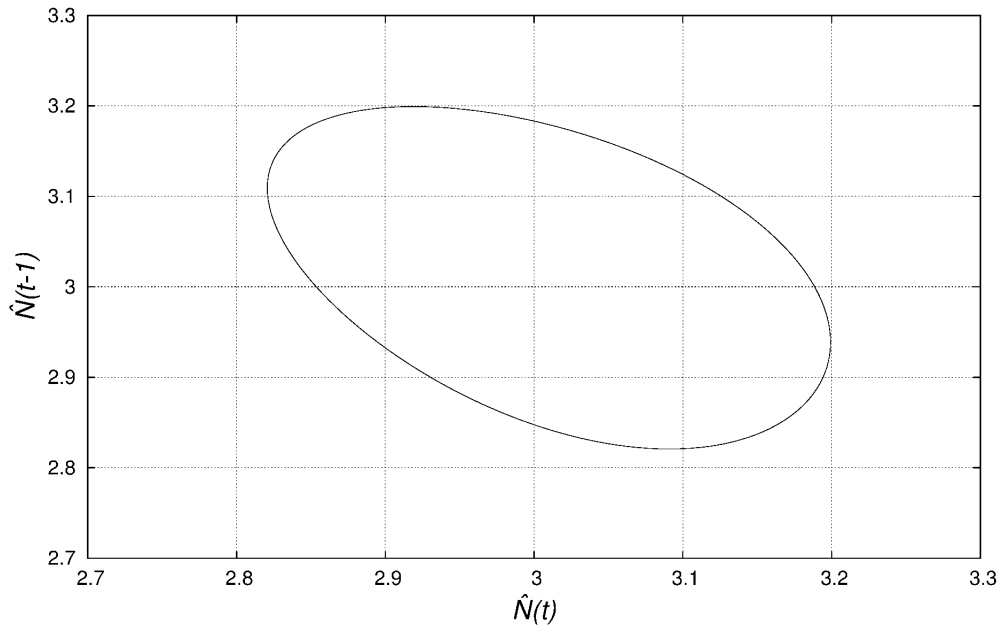


Рис. 1.5. Псевдофазовый портрет режима самоорганизации “вихрь” при  $r = 3$ ,  $D = 0.042$ , построенный по значениям  $\hat{N}(t)$  и  $\hat{N}(t - 1)$ .

Таблица 1.3. Значения характеристик режима двух согласованных вихрей при  $r = 3$  и разных значениях коэффициента диффузии  $D$ .

$D$	$M(\hat{N})$	$\hat{N}_{\min}$	$\hat{N}_{\max}$	$N_{\min}$	$N_{\max}$
0.037	3.9606	1.8136	7.1781	$1.580 \cdot 10^{-7}$	30.6139
0.031	4.2991	1.9130	7.7119	$1.125 \cdot 10^{-8}$	35.2103

Характерный график распределения такого решения имеет вид двух согласованных вихрей, представленный на рис. 1.6. В данном режиме популяции постоянно находятся на противоположных зонах области  $\Omega$ , в результате чего не наблюдается их слияния — лишь слабое взаимодействие в центре рассматриваемой области. Ось вращения таких вихреобразных структур не закреплена и совершает медленный оборот вокруг центра области  $\Omega$ .

Псевдофазовый портрет этого режима, построенный по значениям  $\hat{N}(t)$  и  $\hat{N}(t - 1)$ , представлен на рис. 1.7.

Исходя из характеристик, с точки зрения биологических процессов такой режим самоорганизации является менее предпочтительным, поскольку наблюдается значительная разница между максимумами и минимумами среднего по пространству и увеличение пикового уровня численности популяции, т.е. наблюдается усиленная борьба за ресурсы, приводящая к серьезным скачкам численности всей популяции. При этом средняя численность за достаточно большой промежуток времени на треть выше, что говорит о некоей эффективности такого подхода. То есть можно заключить, что по сравнению с предыдущим режимом, этот можно рассматривать как режим с усиленной внутренней конкуренцией.

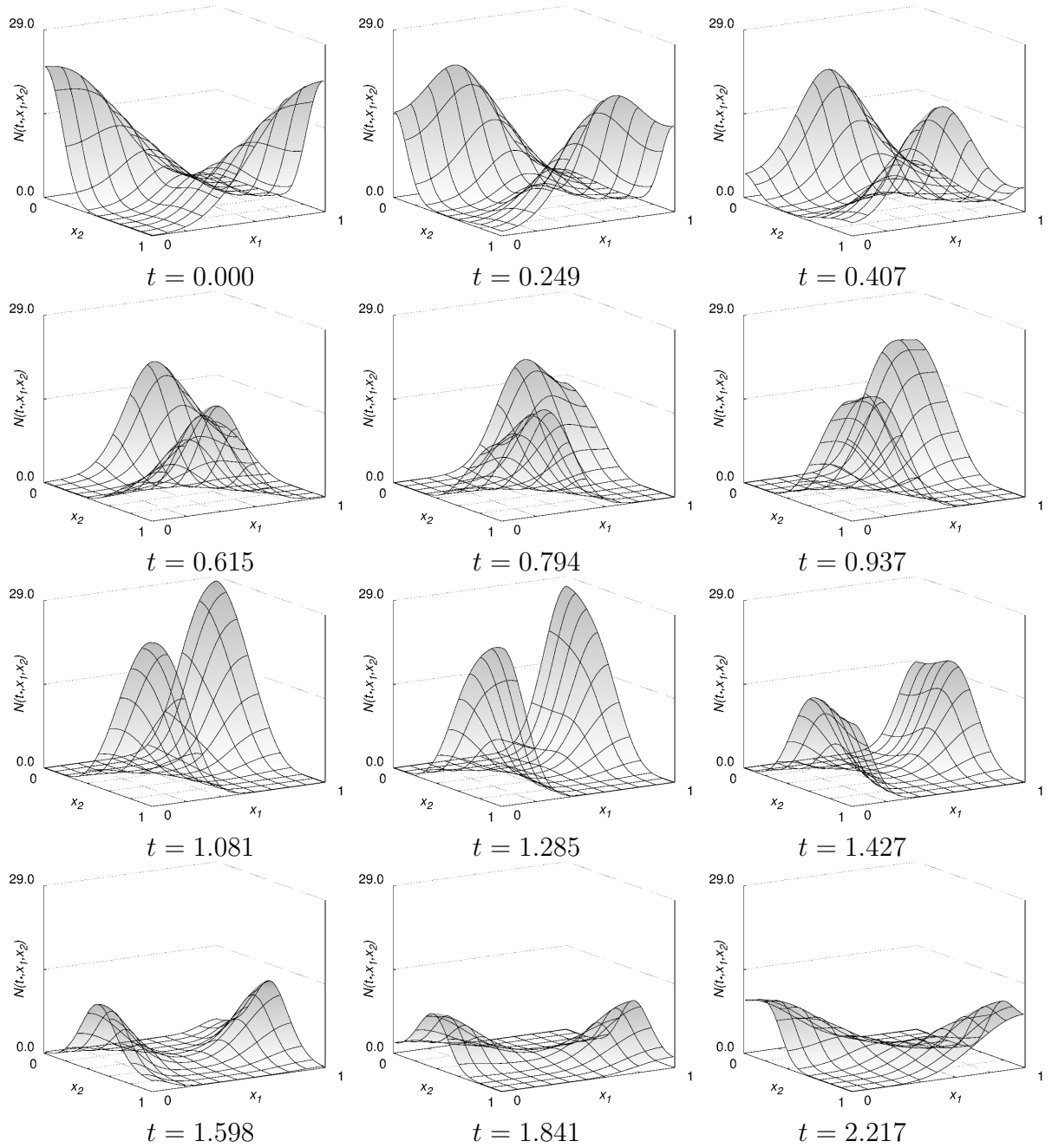


Рис. 1.6. Режим двух согласованных вихрей при  $r = 3$ ,  $D = 0.037$ .

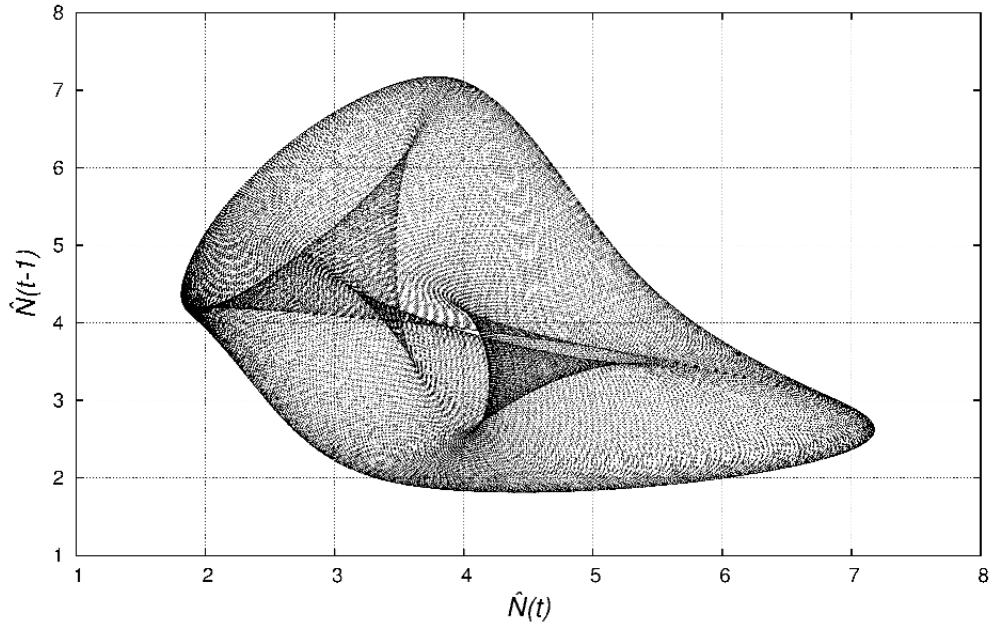


Рис. 1.7. Псевдофазовый портрет режима двух согласованных вихрей при  $r = 3$ ,  $D = 0.037$ , построенный по значениям  $\hat{N}(t)$  и  $\hat{N}(t - 1)$ .

Стоит отметить, что режим, подобный описанному режиму двух согласованных вихрей, но при этом являющийся одночастотным, построить не удалось. Учитывая относительную простоту построения подобных режимов с вихревой структурой, можно заключить, что в рассматриваемой краевой задаче не существует такого устойчивого решения.

Перейдем к третьему режиму самоорганизации, сосуществующему с описанными выше при  $D = 0.031$ .

Такой режим существует при значительном снижении  $D$  ниже  $\tilde{D}$ , где  $\tilde{D} \approx 0.031$ , является периодическим и имеет характеристики, описанные в таблице 1.4. В таблице нет строк, соответствующих  $D = 0.042$  и  $D = 0.037$ , поскольку не удалось найти этот режим при таких значениях  $D$ .

Таблица 1.4. Значения характеристик режима четырех согласованных вихрей при  $r = 3$  и разных значениях коэффициента диффузии  $D$ .

$D$	$T$	$M(\hat{N})$	$\hat{N}_{\min}$	$\hat{N}_{\max}$	$N_{\min}$	$N_{\max}$
0.031	2.620	3.3649	3.2178	3.5101	$5.467 \cdot 10^{-4}$	16.0828
0.028	2.639	3.6030	3.4294	3.7740	$1.970 \cdot 10^{-4}$	18.0610

Характерный график распределения такого решения, имеющий вид четырех согласованных вихрей, представлен на рис. 1.8. Популяция, находясь в центре области  $\Omega$ , начинает расходиться к двум серединам противоположных ребер области, а по их достижении получившиеся популяции снова делятся на 2 части каждая, распределяются по углам рассматриваемой области, после чего покидают углы и начинают обратный процесс слияния.

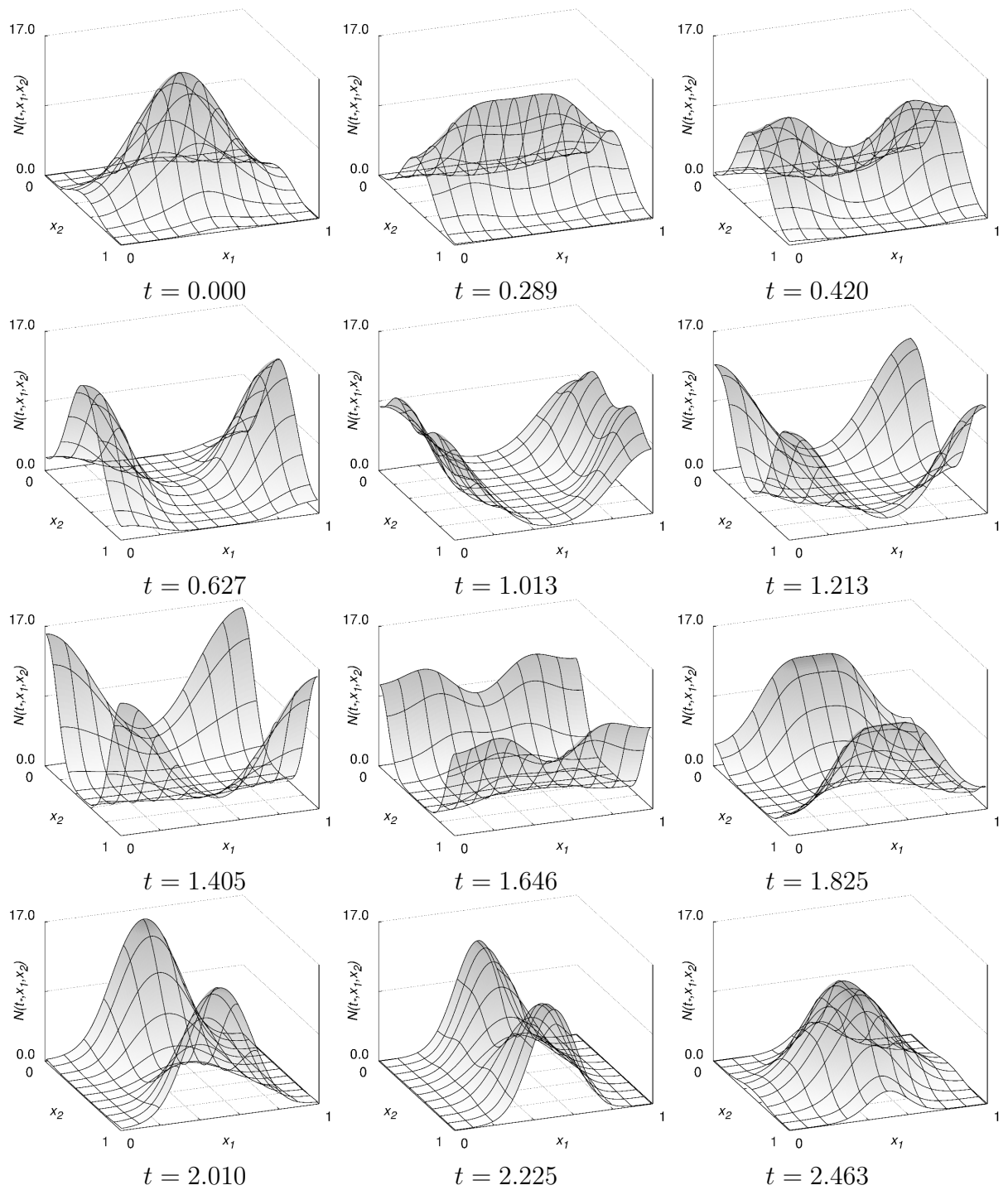


Рис. 1.8. Режим четырех согласованных вихрей при  $r = 3$ ,  $D = 0.031$ .



Псевдофазовый портрет этого режима, построенный по значениям  $\hat{N}(t)$  и  $\hat{N}(t - 1)$ , представлен на рис. 1.9.

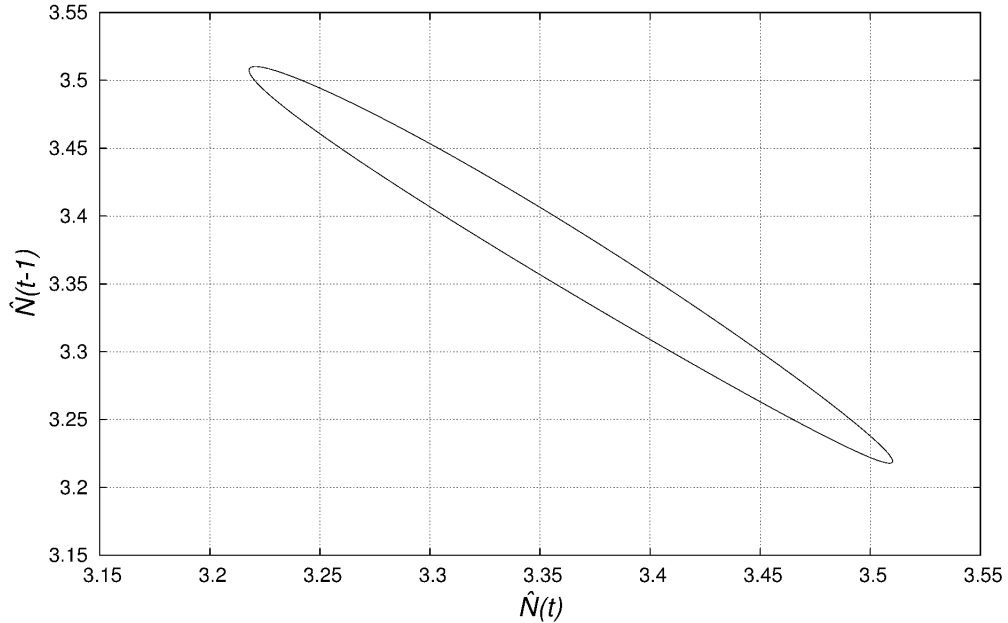


Рис. 1.9. Псевдофазовый портрет режима четырех согласованных вихрей при  $r = 3$ ,  $D = 0.031$ , построенный по значениям  $\hat{N}(t)$  и  $\hat{N}(t - 1)$ .

В биологическом смысле такой режим самоорганизации по сравнению с рассмотренными выше является самым предпочтительным, поскольку выровнены максимумы и минимумы среднего по пространству, т.е. процесса достаточно сильного вымирания всей популяции в рассматриваемой области не наблюдается. Помимо этого стоит отметить, что минимальное значение по всей области на несколько порядков выше, что может говорить о некотором слабом заселении тех участков территории, на которых в данный момент не находится основная группа особей.

В приложении 1 продемонстрированы трансформация режима ведущего центра, а также процесс перехода режима самоорганизации типа “вихрь” к классической спиральной волне за счет уменьшения значения  $D$ . Также изучены производные режимы сложной структуры при значении  $D$ , значительно ниже критического. Это режим «блуждающего ведущего центра», названный так из-за плавного циклического перемещения ведущего центра по одной из диагоналей рассматриваемой области, который является циклом с относительно большим периодом ( $T \approx 116.81$  при  $D = 0.0015$ ); режим двух однонаправленных пар согласованных вихрей — цикл с периодом  $T \approx 3.239$  при  $D = 0.005$ ; двухчастотный режим двух согласованных вихрей с разными направлениями вращения; многочастотный режим спиральной волны с тремя фронтами. Отдельно по шагам разобран процесс генерации устойчивого режима, основанного на шестнадцати спиральных волнах. Кроме того, рассмотрена проблема сосуществования аттракторов и, тем самым, возникновения мультистабильности. Особо выделены три интервала сосуществования описанных аттракторов —  $D \in (0.0085, 0.0207)$ , при котором сосуществуют шесть описанных в работе режимов, а также  $D \in [0.0012, 0.002]$ , при котором сосуществуют десять

описанных режимов, и  $D \in [0.0003, 0.0005]$ , при котором сосуществуют шесть описанных режимов.

## 1.4. Выводы

Проведенные эксперименты позволяют выделить два типа устойчивых решений краевой задачи (1.1.1).

Первый тип наследует свойства пространственно однородного режима и так же, как и он, имеет высокие максимумы, глубокие минимумы и равное единице среднее.

Режимы второго типа, которые уместно назвать режимами самоорганизации, имеют среднее по пространству и времени несколько больше единицы, максимумы среднего по пространству также несколько меньше, чем у режима первого типа, однако минимумы среднего по пространству этих режимов уже не близки к нулю. Некоторые из таких режимов существуют при  $D > D_*$ . При прохождении  $D$  через критическое значение они практически не меняют своего геометрического представления, зато наряду с ними возникают еще режимы следующего вида:

- режим двух согласованных вихрей, существующий при  $D < D_*$ ;
- режим четырех согласованных вихрей, существующий при  $D < \tilde{D}$ .

Дальнейшее уменьшение коэффициента диффузии  $D$  приводит к более сложно устроенным и разнообразным сосуществующим устойчивым режимам, которые по своей природе относятся к одному из двух перечисленных типов, среди которых наборы спиральных волн разной согласованности, а также режимы со структурой спирали с тремя фронтами.

Отметим, что с точки зрения популяционной динамики режимы самоорганизации, очевидно, предпочтительнее режимов первого типа.

## Глава 2.

# Бифуркация Андронова–Хопфа и режимы самоорганизации в одной биофизической модели реакции Белоусова

### 2.1. Постановка задачи

Рассматривается краевая задача следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} &= D_1 \Delta v_1 + r_1(1 + a(1 - v_3) - v_1)v_1, & \frac{\partial v_1}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} &= 0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} &= D_2 \Delta v_2 + r_2(v_1 - v_2)v_2, & \frac{\partial v_2}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} &= 0, \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} &= D_3 \Delta v_3 + r_3(\alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2 - v_3)v_3, & \frac{\partial v_3}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

где функции  $v_1(t, s)$ ,  $v_2(t, s)$ ,  $v_3(t, s)$  отвечают за плотности концентраций реагирующих веществ  $\text{HBrO}_2$ ,  $\text{Ce}^{4+}$  и  $\text{Br}^-$  соответственно,  $s \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $t > 0$ ;  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $\Omega$  — выпуклая ограниченная плоская область с гладкой границей  $\partial\Omega$  и мерой, равной единице;  $\nu$  — направление внешней нормали к  $\partial\Omega$ ; параметры  $r_1, r_2, r_3, a, D_1, D_2, D_3$  положительны;  $\alpha \in (0, 1)$ . В качестве фазового пространства краевой задачи (2.1.1) выберем  $W_2^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ . Введем для дальнейшего анализа вспомогательные обозначения:

$$R = r_1 + r_2 + r_3, \quad P = r_1 r_2 r_3, \quad Q = r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3.$$

Прежде всего, требуется определить условия потери устойчивости предельного цикла в окрестности нетривиального состояния равновесия системы (2.1.1) при значении параметра  $a$ , близком к критическому, и изменении параметров диффузии. Для этого необходимо предварительно построить асимптотику этого цикла. Отметим, что в [25] для случая  $a \gg 1$  соответствующий цикл был исследован с помощью метода большого параметра. Кроме того, с помощью численного анализа требуется рассмотреть типичные хаотические колебательные режимы с разной структурой при малом значении диффузии в плоской области, включая так называемые “режимы самоорганизации”.

В следующем параграфе проводится локальный анализ задачи (2.1.1) без диффузионных слагаемых

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= r_1(1 + a(1 - v_3) - v_1)v_1, \\ \dot{v}_2 &= r_2(v_1 - v_2)v_2, \\ \dot{v}_3 &= r_3(\alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2 - v_3)v_3\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

вблизи состояния равновесия  $(1, 1, 1)$ . Характеристический многочлен для такого состояния равновесия имеет следующий вид:

$$\lambda^3 + \lambda^2 R + \lambda(Q + r_1 r_3 a \alpha) + P(1 + a).\tag{2.1.3}$$

На его основе можно сформулировать следующие утверждения.

**Лемма 2.1.** Пусть  $a < a_{cr}$  ( $a > a_{cr}$ ), где

$$a_{cr} = (QR - P)/(r_1 r_3 (r_2 - \alpha R)).\tag{2.1.4}$$

Тогда состояние равновесия  $(1, 1, 1)$  устойчиво (неустойчиво).

*Доказательство.* Построив матрицу устойчивости на основе характеристического многочлена (2.1.3)

$$\begin{pmatrix} \zeta & \chi & 0 \\ 1 & \kappa & 0 \\ 0 & \zeta & \chi \end{pmatrix},$$

где  $\zeta = R$ ,  $\kappa = Q + r_1 r_3 a \alpha$ ,  $\chi = P(1 + a)$ , для определения границы колебательной устойчивости получаем уравнение

$$R(Q + r_1 r_3 a \alpha) - P(1 + a) = 0.$$

Таким образом, приходим к следующему условию:

$$a = (r_1 r_2 r_3 - (r_1 + r_2 + r_3)(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3))/(r_1 r_2 r_3 \alpha - r_1 r_2 r_3 + r_1 r_3 (r_1 + r_3) \alpha),$$

которое после применения вспомогательных обозначений выглядит так:

$$a = a_{cr} = (QR - P)/(r_1 r_3 (r_2 - \alpha R)).$$

Главный диагональный минор  $|\zeta|$  всегда положителен, остальные главные диагональные миноры

$$\begin{vmatrix} \zeta & \chi \\ 1 & \kappa \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \zeta & \chi & 0 \\ 1 & \kappa & 0 \\ 0 & \zeta & \chi \end{vmatrix}$$

положительны при  $a < a_{cr}$ , что свидетельствует об устойчивости состояния равновесия  $(1, 1, 1)$ , и отрицательны при  $a > a_{cr}$ , что свидетельствует о его неустойчивости.  $\square$

**Лемма 2.2.** Пусть  $a = a_{cr} + \varepsilon$ , где  $a_{cr}$  определяется формулой (2.1.4),  $\varepsilon$  — положительный малый параметр. Тогда корни характеристического многочлена (2.1.3)  $\lambda_{1,2}(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) + i\omega(\varepsilon)$  удовлетворяют следующим условиям:

$$\left. \frac{d\tau}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} > 0, \quad \omega(0) = \pm((r_2Q - \alpha P)/(r_2 - \alpha R))^{1/2}.$$

*Доказательство.* Первое условие является естественным требованием для стандартного сценария перехода корней характеристического многочлена через мнимую ось.

При  $\varepsilon = 0$  корнями характеристического многочлена (2.1.3) является комплексная пара  $\pm i\omega$ , где

$$\omega = (Q + r_1 r_3 a \alpha)^{1/2}. \quad (2.1.5)$$

Подставляя в (2.1.5) критическое значение параметра  $a$  из формулы (2.1.4), получаем:

$$\omega = \left( Q + r_1 r_3 \alpha (QR - P) / (r_1 r_3 (r_2 - \alpha R)) \right)^{1/2},$$

что после упрощений выглядит следующим образом:

$$\omega = ((r_2 Q - \alpha P) / (r_2 - \alpha R))^{1/2}.$$

□

С помощью стандартных замен строится нормальная форма, приводятся формулы коэффициентов, по которым определяется качественное поведение модели. Полученная нормальная форма позволяет доказать теорему о существовании орбитально асимптотически устойчивого предельного цикла, ответвляющегося от состояния равновесия, и найти его асимптотику. Для выяснения границ применимости найденной асимптотики проводится сравнение амплитуд колебаний одной из компонент периодического решения, полученных на основе асимптотических формул и путем численного интегрирования модельной системы. Наряду с основным случаем бифуркации Андронова–Хопфа рассмотрены различные комбинации значений коэффициентов нормальной формы, получающиеся при изменении параметров исследуемой системы, и изучено соответствующее им поведение решений вблизи рассматриваемого состояния равновесия.

В третьем параграфе главы 2 рассмотрена задача о диффузионной потере устойчивости полученного на первом этапе пространственно однородного цикла. С помощью построения квазинормальной формы краевой задачи (2.1.1) найдено критическое значение параметра диффузии, при котором этот цикл распределенной системы теряет устойчивость. Построен график критических значений параметра диффузии при увеличении параметра  $a$  для фиксированного набора параметров  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  и  $\alpha$ . Проведено описание пространственно неоднородных циклов, ответвляющихся от пространственно однородного при прохождении параметра  $d$  через критическое значение  $d = d_*$ .

В четвертом параграфе проведен численный анализ краевой задачи (2.1.1), описаны два сосуществующих хаотических режима разной природы, один из которых является режимом самоорганизации. Приведены их типичные распределения в рассматриваемой области, фазовые портреты, а также старшие ляпуновские показатели в зависимости от численного шага разбиения области.

## 2.2. Локальный анализ окрестности состояния равновесия $(1, 1, 1)$ при $a$ , близком к критическому

Уточним постановку задачи для данного случая. Рассмотрим задачу для пространственно однородного решения системы (2.1.1), в которой будем считать, что  $a = a_{cr} + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — положительный малый параметр,  $a_{cr} > 0$  определяется формулой (2.1.4), и при этом значении состояние равновесия  $(1, 1, 1)$  колебательным образом теряет устойчивость. Для этого сделаем замены:  $v_1 = u_1 + 1$ ,  $v_2 = u_2 + 1$ ,  $v_3 = u_3 + 1$ . Получившаяся система имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= r_1(u_1 + 1)(-u_1 - (a_{cr} + \varepsilon)u_3), \\ \dot{u}_2 &= r_2(u_2 + 1)(u_1 - u_2), \\ \dot{u}_3 &= r_3(u_3 + 1)(\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2 - u_3). \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Выполнив в (2.2.1) стандартную замену метода нормальных форм (см., например, [17]), решение будем искать в виде

$$(u_1, u_2, u_3)^T = \sqrt{\varepsilon}(\xi(\tau)e^{i\omega t}h + \text{к.с.}) + \varepsilon U_1(t, \tau) + \varepsilon^{3/2}U_2(t, \tau) + \dots, \quad (2.2.2)$$

где под к.с. подразумевается комплексно сопряженное к данному в тех же скобках выражению;  $\tau = \varepsilon t$  — медленное время;  $U_j(t, \tau)$  ( $j \geq 1$ ) — тригонометрические полиномы по  $t$ ;  $h = (h_1, h_2, h_3)^T$  — собственный вектор матрицы линеаризованной системы (2.2.1), соответствующий собственному числу  $i\omega$  так, что  $(A_0 - i\omega)h = 0$ , где

$$A_0 = \begin{pmatrix} -r_1 & 0 & -r_1 a_{cr} \\ r_2 & -r_2 & 0 \\ r_3 \alpha & r_3(1 - \alpha) & -r_3 \end{pmatrix},$$

$\omega = \sqrt{Q + r_1 r_3 a a \alpha}$ ; медленно меняющаяся комплексная амплитуда  $\xi(\tau)$  подлежит определению.

После приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $\sqrt{\varepsilon}$  на первом шаге (при  $\sqrt{\varepsilon}$ ) получим верное тождество, на втором шаге (при  $\varepsilon$ ) — выражение для  $U_1$ , а на третьем шаге (при  $\varepsilon^{3/2}$ ) из условия разрешимости задачи для  $U_2$  в классе тригонометрических полиномов приходим к уравнению на  $\xi(\tau)$ :

$$\xi' = (\varphi_0 + i\psi_0)\xi + (d_0 + ic_0)|\xi|^2\xi,$$

у которого имеется автомодельное решение вида  $\xi = \rho e^{i\varphi}$ , где  $\rho(\tau)$  и  $\varphi(\tau)$  удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \rho' &= \varphi_0 \rho + d_0 \rho^3, \\ \varphi' &= \psi_0 + c_0 \rho^2. \end{aligned}$$

Здесь  $\rho$  определяет амплитуду, а  $\varphi$  — поправку к частоте колебаний.

Параметры  $\varphi_0$  и  $\psi_0$  определяются по формуле  $\varphi_0 + i\psi_0 = (A_1 h, g)$ , где матрица  $A_1$  имеет вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а вектор  $g$  — собственный вектор сопряженной задачи  $(A_0^T + i\omega)g = 0$  с дополнительным условием на скалярное произведение в унитарном пространстве  $(h, g) = 1$ .

Параметры  $d_0$  и  $c_0$ , в свою очередь, определяются по формуле

$$d_0 + ic_0 = \left( F_2(w_0, h) + F_2(h, w_0) + F_2(w_1, \bar{h}) + F_2(\bar{h}, w_1) + \right. \\ \left. + F_3(h, h, \bar{h}) + F_3(h, \bar{h}, h) + F_3(\bar{h}, h, h), g \right),$$

где  $w_0 = -A_0^{-1}(F_2(h, \bar{h}) + F_2(\bar{h}, h))$ ,  $w_1 = (2i\omega E - A_0)^{-1}F_2(h, h)$ ,

$$F_2 = \begin{pmatrix} -r_1 u(u + aw) \\ r_2 v(u - v) \\ r_3 w(\alpha u + (1 - \alpha)v - w) \end{pmatrix}, \quad F_3 \equiv 0.$$

Таким образом, параметры  $\varphi_0$ ,  $\psi_0$ ,  $d_0$  и  $c_0$  имеют следующий вид:

$$\varphi_0 = r_1 r_3 (r_2 - \alpha R)^2 / \left( 2(r_2(R^2 + Q) - \alpha(R^3 + P)) \right), \\ \psi_0 = P(r_2 R - \alpha(R^2 - Q + \alpha r_1 r_3)) / \left( 2\sqrt{r_2(Q - \alpha r_1 r_3) / (r_2 - \alpha R)} \cdot \right. \\ \left. \cdot (r_2(R^2 + Q) - \alpha(R^3 + 4P)) \right), \\ d_0 = r_2^3 R(1 - \alpha)^2 (r_1 + r_2)^4 (r_1 + r_3)^2 (r_2 + r_3)^3 (Q - r_1 r_3 \alpha)^2 \cdot \\ \cdot \left( (1 + \alpha)r_1 + (\alpha - 3)r_2 + (3\alpha - 1)r_3 \right) / \left( 2r_3^2 (r_2(R^2 + Q) - \alpha(R^3 + P)) \right) \cdot \\ \cdot \left( r_2(R^2 + 4Q) - \alpha(R^3 + 4P) \right) (r_2 - \alpha R)^3, \\ c_0 = - \left( (1 - \alpha)^2 \sqrt{(P(1 - \alpha) + r_2^2 (r_1 + r_3)) / (r_2 - \alpha R) r_2^2 (r_1 + r_2)^4 (r_1 + r_3)^2} \cdot \right. \\ \cdot (r_2 + r_3)^3 (r_2^2 (12r_1^3 + 19r_1^2 r_2 + 12r_1 r_2^2 + r_2^3) + r_2 r_3 (21r_1^3 + 67r_1^2 r_2 + 57 \cdot \\ \cdot r_1 r_2^2 + 13r_2^3) + r_3^2 (10r_1^3 + 65r_1^2 r_2 + 94r_1 r_2^2 + 30r_2^3) + r_3^3 (19r_1^2 + 57r_1 r_2 + \\ + 32r_2^2) + r_3^4 (10r_1 + 11r_2) + r_3^5) - \alpha r_2 (2r_2^2 (r_1 + r_2) (9r_1^3 + 13r_1^2 r_2 + 10r_1 r_2^2 + \\ + r_2^3) + r_2 r_3 (28r_1^4 + 145r_1^3 r_2 + 204r_1^2 r_2^2 + 133r_1 r_2^3 + 24r_2^4) + r_3^2 (13r_1^4 + 129 \cdot \\ \cdot r_1^3 r_2 + 316r_1^2 r_2^2 + 265r_1 r_2^3 + 67r_2^4) + r_3^3 (35r_1^3 + 187r_1^2 r_2 + 264r_1 r_2^2 + 87r_2^3) + \\ + r_3^4 (37r_1^2 + 113r_1 r_2 + 63r_2^2) + r_3^5 (17r_1 + 19r_2) + 2r_3^6) + \alpha^2 (r_2^2 (r_1 + r_2)^2 \cdot \\ \cdot (7r_1^3 + 13r_1^2 r_2 + 9r_1 r_2^2 + r_2^3) + r_2 r_3 (r_1 + r_2) (7r_1^4 + 75r_1^3 r_2 + 109r_1^2 r_2^2 + 81 \cdot \\ \cdot r_1 r_2^3 + 12r_2^4) + r_3^2 (3r_1^5 + 59r_1^4 r_2 + 261r_1^3 r_2^2 + 361r_1^2 r_2^3 + 238r_1 r_2^4 + 44r_2^5) + \\ + r_3^3 (13r_1^4 + 129r_1^3 r_2 + 332r_1^2 r_2^2 + 291r_1 r_2^3 + 73r_2^4) + r_3^4 (22r_1^3 + 129r_1^2 r_2 + \\ + 200r_1 r_2^2 + 67r_2^3) + 2r_3^5 (9r_1^2 + 30r_1 r_2 + 17r_2^2) + r_3^6 (7r_1 + 8r_2) + r_3^7) - \alpha^3 \cdot \\ \cdot (r_1 r_2 (r_1 + r_2)^5 + r_2 r_3 (r_1 + r_2)^2 (14r_1^3 + 25r_1^2 r_2 + 16r_1 r_2^2 + r_2^3) + r_3^2 (r_1 + r_2) \cdot \\ \cdot (4r_1^4 + 63r_1^3 r_2 + 93r_1^2 r_2^2 + 67r_1 r_2^3 + 7r_2^4) + 2r_3^3 (8r_1^4 + 60r_1^3 r_2 + 92r_1^2 r_2^2 + \\ + 62r_1 r_2^3 + 9r_2^4) + r_3^4 (24r_1^3 + 105r_1^2 r_2 + 105r_1 r_2^2 + 22r_2^3) + r_3^5 (16r_1^2 + 42r_1 \cdot \\ \cdot r_2 + 13r_2^2) + r_3^6 (4r_1 + 3r_2)) + \alpha^4 r_1 r_3 R(R + 2r_3)(R^3 - 2P)) \Big) / \left( 6r_3^2 (r_2 - \alpha \cdot \right. \\ \left. \cdot R)^4 (r_2(R^2 + Q) - \alpha(R^3 + P))(r_2(R^2 + 4Q) - \alpha(R^3 + 4P)) \right).$$

Для случая  $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3$  зависимость  $\varphi_0$  и  $d_0$  от параметра  $\alpha$  представлена на рис. 2.1. Здесь сплошная линия обозначает зону положительных значений, а пунктирная — зону отрицательных значений.

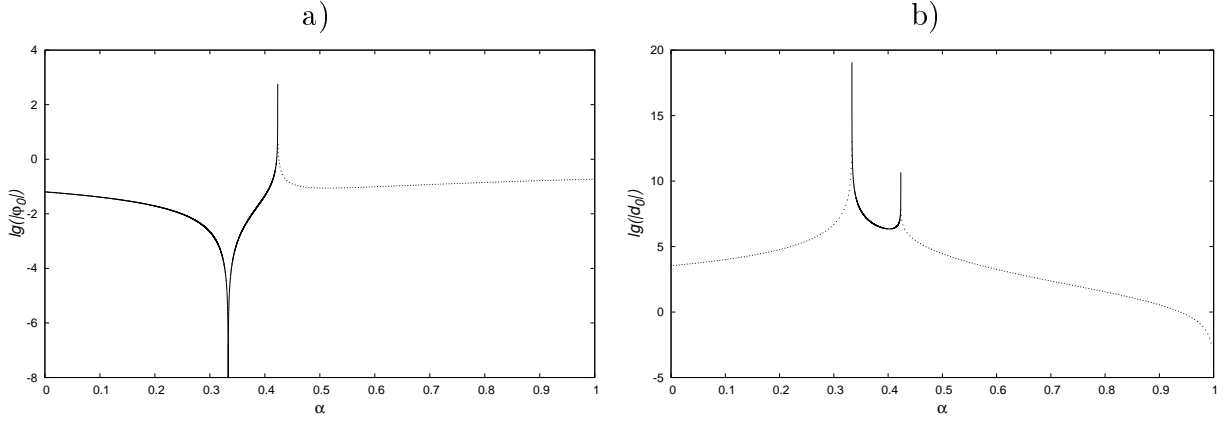


Рис. 2.1. Зависимость  $\varphi_0$  (а) и  $d_0$  (б) от  $\alpha$  при  $r_1 = 1.0, r_2 = 2.0, r_3 = 3.0$

Основываясь на формулах для  $\varphi_0$  и  $d_0$  и учитывая требование положительности параметра  $a > a_{cr}$ , мы можем выделить следующие множители, которые определяют знаки этих величин:

$$\begin{aligned} r_2(R^2 + Q) - \alpha(R^3 + P), \\ r_2(R^2 + 4Q) - \alpha(R^3 + 4P), \\ \alpha(R + 2r_3) + r_1 - 3r_2 - r_3. \end{aligned}$$

Учитывая, что при  $\varphi_0 > 0$  и  $d_0 < 0$  реализуется сценарий рождения устойчивого предельного цикла в результате бифуркации Андронова–Хопфа (см. [17]), сформулируем основное утверждение данного параграфа.

**Теорема 2.1.** Пусть выполнены неравенства:

$$\begin{aligned} r_1, r_2, r_3 > 0, \quad r_2 - \alpha R > 0, \quad r_2(R^2 + Q) - \alpha(R^3 + P) > 0, \\ r_2(R^2 + 4Q) - \alpha(R^3 + 4P) > 0, \quad \alpha(R + 2r_3) + r_1 - 3r_2 - r_3 < 0, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

а также  $a = a_{cr} + \varepsilon$ , где  $a_{cr}$  определяется формулой (2.1.4). Тогда существует  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  в некоторой достаточно малой окрестности нуля существует отвечающий от него орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл системы (2.2.1) с асимптотикой (2.2.2).

*Доказательство.* Перечисленные неравенства (2.2.3) полностью определяют знаки параметров  $\varphi_0$  и  $d_0$ . При выполнении условий  $r_1, r_2, r_3 > 0$  и  $r_2(R^2 + Q) - \alpha(R^3 + P) > 0$  всегда положительным является параметр  $\varphi_0$ . При выполнении всех перечисленных условий (2.2.3) всегда отрицательным является параметр  $d_0$ . Поскольку  $a = a_{cr} + \varepsilon$ , где  $a_{cr}$  определяется формулой (2.1.4), а  $\varepsilon$  — положительный малый параметр, то в таком случае реализуется стандартный сценарий рождения устойчивого предельного цикла.  $\square$

Кроме того, возможен сценарий, при котором  $\varphi_0 > 0$  и  $d_0 > 0$ . В таком случае можно сформулировать следующее утверждение, перед которым введем определение.



**Определение 2.1.** Жесткая потеря устойчивости — сценарий бифуркации Андронова–Хопфа, в ходе которого особая точка теряет устойчивость при переходе пары ее комплексно-сопряженных собственных значений через мнимую ось в результате стягивания в эту точку неустойчивого предельного цикла и приобретения отдаленного от нуля бассейна отталкивания.

**Теорема 2.2.** Пусть выполнены неравенства:

$$\begin{aligned} r_1, r_2, r_3 > 0, \quad r_2 - \alpha R > 0, \quad r_2(R^2 + Q) - \alpha(R^3 + P) > 0, \\ r_2(R^2 + 4Q) - \alpha(R^3 + 4P) > 0, \quad \alpha(R + 2r_3) + r_1 - 3r_2 - r_3 > 0. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Тогда нулевое состояние равновесия системы (2.2.1) жестко теряет устойчивость, к нему при  $a < a_{cr}$ , где  $a_{cr}$  определяется формулой (2.1.4), приближается неустойчивый цикл, который при  $a = a_{cr}$  сливается с данным состоянием равновесия и отбирает у него устойчивость.

Теорема доказывается по аналогии с предыдущей.

**Теорема 2.3.** Множества, определяемые условиями (2.2.3) или (2.2.4), непусты.

*Доказательство.* Эти условия реализуются, например, при  $r_1 = 1.0, r_2 = 1.0, r_3 = 2.0, \alpha = 0.2$  и  $r_1 = 4.0, r_2 = 1.0, r_3 = 1.0, \alpha = 0.1$  соответственно.  $\square$

Отметим, что величина амплитуды колебаний предельного цикла системы определяется значением  $\sqrt{-\varepsilon\varphi_0/d_0}$ . С целью выяснения границ применимости теоремы 2.1 был проведен расчет амплитуды колебаний для фиксированного набора параметров по аналитическому результату и в численном эксперименте. Через  $A_{loc}$  обозначим амплитуду, полученную с помощью локального анализа, а через  $A_{num}$  — амплитуду, полученную численным путем. Исходя из таблицы 2.1 нетрудно заметить, что асимптотические формулы сохраняют точность в широких пределах изменения параметра  $\varepsilon$ .

Таблица 2.1. Значения амплитуд колебаний цикла при  $r_1 = 1.0, r_2 = 2.0, r_3 = 3.0$

$\alpha$	$\varepsilon$	$A_{loc}$	$A_{num}$
0.1	0.01	0.22090794	0.22116161
0.1	0.1	0.69869911	0.69937442
0.3	0.01	0.08908736	0.08855718
0.3	0.1	0.28086436	0.28004238

## 2.3. Диффузионная потеря устойчивости пространственно однородного цикла

Дальнейшие рассуждения будем проводить в случае  $\varphi_0 > 0$  и  $d_0 < 0$ , т.е., если выполнены неравенства (2.2.3). Предположим, что

$$D_1 = \varepsilon dD_1^0, \quad D_2 = \varepsilon dD_2^0, \quad D_3 = \varepsilon dD_3^0. \quad (2.3.1)$$

Тогда методами локального анализа можно найти значение  $d$ , при котором построенный нами пространственно однородный цикл с асимптотикой (2.2.2) теряет устойчивость. Для определения такого критического значения  $d_*$  и природы пространственно неоднородного цикла, ответвляющегося от однородного, мы будем действовать по аналогии с выкладками статей [16, 88, 90, 91].

Выполнив в краевой задаче (2.1.1) с условием (2.3.1) замену

$$(u_1(t, s), u_2(t, s), u_3(t, s))^T = \sqrt{\varepsilon}(\xi(\tau, s)e^{i\omega t}h + \text{к.с.}) + \varepsilon U_1(t, \tau, s) + \varepsilon^{3/2}U_2(t, \tau, s) + \dots, \quad (2.3.2)$$

приходим к квазинормальной форме вида:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = d(Dh, g)\Delta \xi + (\varphi_0 + i\psi_0)\xi + (d_0 + ic_0)|\xi|^2\xi, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (2.3.3)$$

где  $\xi \equiv \xi(\tau, s)$ , а матрица  $D$  имеет вид:

$$D = \begin{pmatrix} D_1^0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2^0 & 0 \\ 0 & 0 & D_3^0 \end{pmatrix}.$$

Сделав в (2.3.3) следующие замены:  $\xi = \eta\sqrt{-\varphi_0/d_0}\exp(i\psi_0\tau)$ ,  $\tau^* = \varphi_0\tau$  и проведя переобозначение  $\tau = \tau^*$ , получим уравнение Гинзбурга–Ландау вида:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \mu(1 - ic_1)\Delta \eta + \eta - (1 + ic_2)|\eta|^2\eta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (2.3.4)$$

где  $\mu = d\text{Re}(Dh, g)/\varphi_0$ ,  $c_1 = -\text{Im}(Dh, g)/\text{Re}(Dh, g)$ ,  $c_2 = c_0/d_0$ .

Относительно уравнения (2.3.4) известно, что его грубым режимам соответствуют, при достаточно малых  $\varepsilon$ , грубые режимы исходной системы (2.1.1) с условием (2.3.1) той же устойчивости [10].

Уравнение (2.3.4) имеет однородный цикл

$$\eta = \exp(-ic_2\tau + i\gamma), \quad \gamma = \text{const}. \quad (2.3.5)$$

В точечной модели (2.2.1) цикл (2.3.5) является орбитально асимптотически устойчивым. Для исследования устойчивости этого цикла в случае распределенной модели (2.1.1) дополним (2.3.4) комплексно сопряженной задачей

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \tau} = \mu(1 + ic_1)\Delta \bar{\eta} + \bar{\eta} - (1 - ic_2)|\bar{\eta}|^2\bar{\eta}, \quad \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0. \quad (2.3.6)$$

После этого выполним замены

$$\eta = (1 + h_1)\exp(-ic_2\tau), \quad \bar{\eta} = (1 + h_2)\exp(ic_2\tau), \quad (2.3.7)$$

где  $h_1 \equiv h_1(\tau, s)$ ,  $h_2 \equiv h_2(\tau, s)$ , и отбросим нелинейные слагаемые, в результате чего приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial \tau} &= \mu(1 - ic_1)\Delta h_1 - (1 + ic_2)(h_1 + h_2), & \frac{\partial h_1}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} &= 0, \\ \frac{\partial h_2}{\partial \tau} &= \mu(1 + ic_1)\Delta h_2 - (1 - ic_2)(h_1 + h_2), & \frac{\partial h_2}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

к которой, в свою очередь, в случае, когда область  $\Omega$  — квадрат  $[0, 1] \times [0, 1]$ , применяем метод Фурье по системе функций  $\cos(k\pi s_1) \cdot \cos(m\pi s_2)$ ,  $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $s_1, s_2 \in \Omega$ . В результате убеждаемся, что за устойчивость однородного цикла (2.3.5) по отношению к пространственно неоднородным возмущениям начальных условий отвечает расположение спектра семейства матриц

$$-\begin{pmatrix} 1 + ic_2 & 1 + ic_2 \\ 1 - ic_2 & 1 - ic_2 \end{pmatrix} - (k^2 + m^2)\pi^2\mu \begin{pmatrix} 1 - ic_1 & 0 \\ 0 & 1 + ic_1 \end{pmatrix}, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.3.9)$$

причем  $k$  и  $m$  не обращаются в нуль одновременно. Анализ матриц (2.3.9) приводит к выводу о том, что цикл (2.3.5) краевой задачи (2.3.4) устойчив (неустойчив) при  $d - d_* > 0$  ( $< 0$ ), где

$$d_* = \frac{2\varphi_0(c_1c_2 - 1)}{\pi^2(1 + c_1^2)\text{Re}(Dh, g)}. \quad (2.3.10)$$

С учетом положительности параметра  $\varphi_0$  из (2.3.10) следует, что для появления диффузионной неустойчивости цикла необходимо выполнение условия

$$(c_1c_2 - 1)/\text{Re}(Dh, g) > 0. \quad (2.3.11)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Теорема 2.4.** Пусть выполнены условия (2.3.1) и (2.3.11), тогда при всех достаточно малых  $\varepsilon = a - a_{cr}$  краевая задача (2.1.1) имеет пространственно однородный цикл, асимптотика которого задается формулой (2.3.2), причем этот цикл экспоненциально орбитально устойчив при  $d > d_*$  и неустойчив при  $d < d_*$ , где  $d_*$  определяется формулой (2.3.10).

При прохождении параметра  $d$  через критическое значение  $d = d_*$  пространственно однородный цикл дивергентным образом теряет устойчивость, и от него ответвляются четыре симметричных пространственно неоднородных цикла. Аналогичные утверждения о построении асимптотик ответвляющихся пространственно неоднородных циклов, как в случае модели из главы 1, имеют место и здесь, однако из-за технических сложностей обосновать этот процесс возможно лишь численно. Численный анализ показал, что динамические свойства этих циклов (среднее значение по пространству, минимумы по пространству, минимумы среднего по пространству) остаются практически неизменными по сравнению с пространственно однородным циклом, в то же время при достаточно малом коэффициенте диффузии  $d$  задача имеет устойчивые режимы сложной структуры с физически более осмысленными свойствами (см. для сравнения [88]).

К сожалению, асимптотические методы не позволяют исследовать задачу при дальнейшем уменьшении параметра  $d$  и увеличении параметра  $a$ . В связи с этим приходится применять численные методы.

В численном эксперименте представляет интерес нахождение пространственно неоднородных режимов другой структуры, которые условно будем называть режимами самоорганизации. Следующий параграф посвящен численному анализу краевой задачи (2.1.1) и нахождению таких режимов.

При значениях  $a$ , больших, но не близких к  $a_{cr} + \varepsilon$ , система уравнений

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= r_1(u_1 + 1)(-u_1 - au_3), \\ \dot{u}_2 &= r_2(u_2 + 1)(u_1 - u_2), \\ \dot{u}_3 &= r_3(u_3 + 1)(\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2 - u_3)\end{aligned}$$

также имеет устойчивый цикл, а, соответственно, краевая задача (2.1.1) с условием (2.3.1) имеет пространственно однородное решение.

Для рассматриваемой области нами вычислены критические значения коэффициента диффузии  $d_*$  при фиксированном наборе параметров  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 2$ ,  $r_3 = 3$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $D_1^0 = 0.01$ ,  $D_2^0 = 0.08$ ,  $D_3^0 = 0.01$ . На рис. 2.2 представлен график зависимости  $d_*$  от  $a$ .

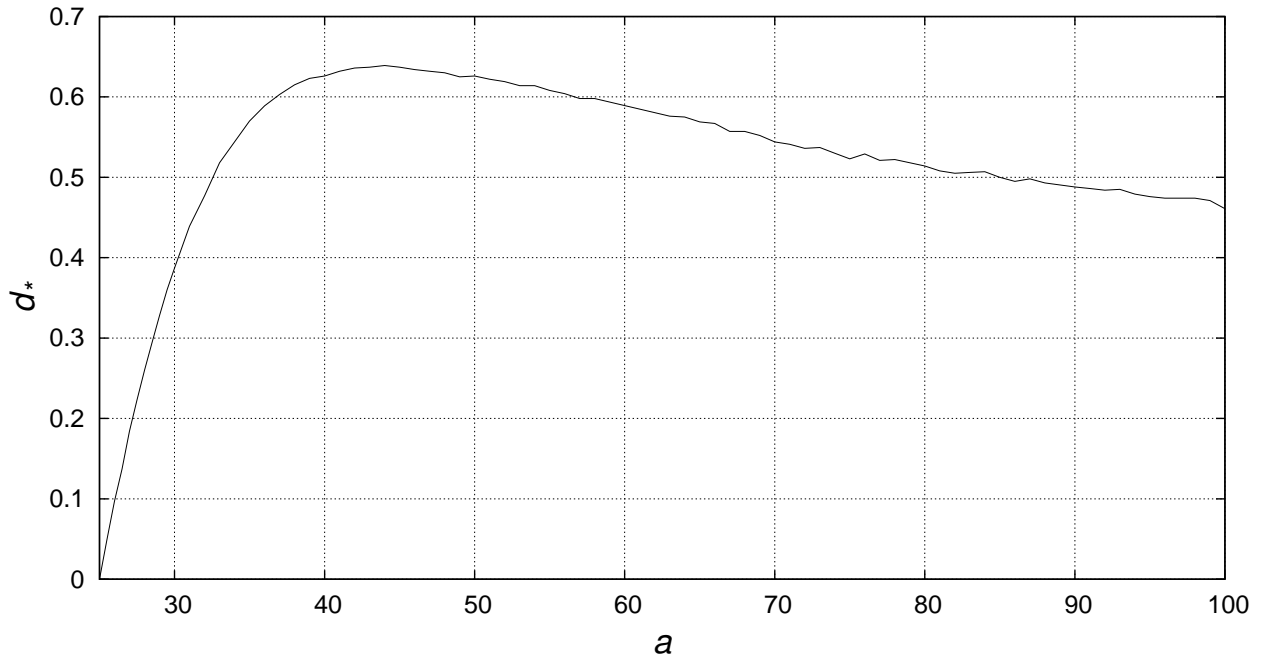


Рис. 2.2. Зависимость  $d_*$  от  $a$

Численные расчеты показывают, что при переходе через критические значения в широкой области изменения параметра  $a$  потеря устойчивости пространственно однородного режима все так же сопровождается возникновением пространственно неоднородных режимов, близких качественно к исходному.

## 2.4. Численный анализ

Краевую задачу (2.1.1) будем изучать численными методами в квадратной области  $\Omega$  ( $\Omega = \{(s_1, s_2) \mid 0 \leq s_1 \leq 1, 0 \leq s_2 \leq 1\}$ ). Для численного анализа в краевой задаче (2.1.1) оператор Лапласа заменим его разностным аналогом по известным формулам, полагая число точек разбиения  $m$  тем большим, чем меньше коэффициент диффузии, а

значения в соответствующих прямоугольниках области  $\Omega$  будем считать одинаковыми и обозначим  $v_{1,i,j}$ ,  $v_{2,i,j}$ ,  $v_{3,i,j}$  ( $i, j \in \{1, \dots, m\}$ ):

$$\begin{aligned}\frac{dv_{1,i,j}}{dt} &= dD_1^0 \left( \frac{v_{1,i-1,j} - 2v_{1,i,j} + v_{1,i+1,j}}{(\delta s_1)^2} + \frac{v_{1,i,j-1} - 2v_{1,i,j} + v_{1,i,j+1}}{(\delta s_2)^2} \right) + \\ &\quad + r_1(1 + a(1 - v_{3,i,j}) - v_{1,i,j})v_{1,i,j}, \\ \frac{dv_{2,i,j}}{dt} &= dD_2^0 \left( \frac{v_{2,i-1,j} - 2v_{2,i,j} + v_{2,i+1,j}}{(\delta s_1)^2} + \frac{v_{2,i,j-1} - 2v_{2,i,j} + v_{2,i,j+1}}{(\delta s_2)^2} \right) + \\ &\quad + r_2(v_{1,i,j} - v_{2,i,j})v_{2,i,j}, \\ \frac{dv_{3,i,j}}{dt} &= dD_3^0 \left( \frac{v_{3,i-1,j} - 2v_{3,i,j} + v_{3,i+1,j}}{(\delta s_1)^2} + \frac{v_{3,i,j-1} - 2v_{3,i,j} + v_{3,i,j+1}}{(\delta s_2)^2} \right) + \\ &\quad + r_3(\alpha v_{1,i,j} + (1 - \alpha)v_{2,i,j} - v_{3,i,j})v_{3,i,j},\end{aligned}$$

где  $\delta s_1 = \delta s_2 = 1/m$ , при этом граничные условия моделируются следующим образом:

$$\begin{aligned}v_{1,i,0} &\equiv v_{1,i,1}, & v_{1,i,m+1} &\equiv v_{1,i,m}, & v_{1,0,j} &\equiv v_{1,1,j}, & v_{1,m+1,j} &\equiv v_{1,m,j}, & \forall i, j &\in 1, \dots, m; \\ v_{2,i,0} &\equiv v_{2,i,1}, & v_{2,i,m+1} &\equiv v_{2,i,m}, & v_{2,0,j} &\equiv v_{2,1,j}, & v_{2,m+1,j} &\equiv v_{2,m,j}, & \forall i, j &\in 1, \dots, m; \\ v_{3,i,0} &\equiv v_{3,i,1}, & v_{3,i,m+1} &\equiv v_{3,i,m}, & v_{3,0,j} &\equiv v_{3,1,j}, & v_{3,m+1,j} &\equiv v_{3,m,j}, & \forall i, j &\in 1, \dots, m.\end{aligned}$$

Большинство экспериментов проводилось при  $m = 100$ .

Численный анализ показал, что построенный нами цикл при увеличении параметра  $a$  становится релаксационным и переходит в режимы, описанные в [25]. Поэтому далее будем рассматривать случай конечных  $r_1, r_2, r_3$  и относительно большого  $a$ . Исходя из этого, положим в (2.1.1)

$$\begin{aligned}D_1^0 &= 0.01, & D_2^0 &= 0.08, & D_3^0 &= 0.01, \\ r_1 &= 1, & r_2 &= 2, & r_3 &= 3, \\ \alpha &= 0.2, & a &= 100.\end{aligned}$$

При уменьшении коэффициента диффузии  $d$  колебательные режимы распределенной модели усложняются — возникают сосуществующие хаотические режимы разной природы, среди которых хаотические колебания с релаксационными свойствами и режимы типа самоорганизации.

- Решения первого типа близки по свойствам к однородному релаксационному циклу системы (глубокие минимумы и высокие  $\delta$ -образные всплески среднего по пространству значения  $v_1(t, s)$ ) (см. рис. 2.3, рис. 2.5 а), рис. 2.6 а)).
- Решения второго типа или решения с самоорганизацией имеют минимумы среднего значения  $v_1(t, s)$ , отделенные от нуля, при этом всплески не так велики, как для решений первого типа (см. рис. 2.4, рис. 2.5 б), рис. 2.6 б)).

Отметим, что наблюдаемой является именно первая компонента решения  $v_1(t, s)$ , графики зависимостей остальных компонент системы  $v_2(t, s)$  и  $v_3(t, s)$  отдельно не приводятся ввиду гораздо меньшей содержательности.

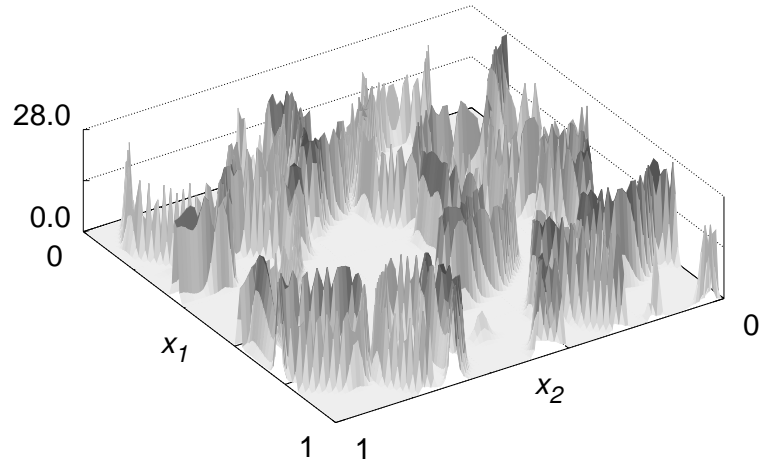


Рис. 2.3. Распределение значений  $v_1(t, s)$  по области  $\Omega$  при  $t = T_*$  в случае режима с релаксационными свойствами.

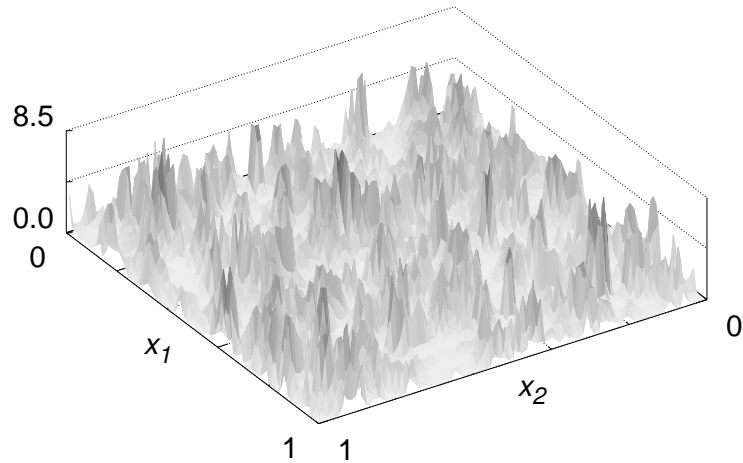


Рис. 2.4. Распределение значений  $v_1(t, s)$  по области  $\Omega$  при  $t = T_*$  в случае режима самоорганизации.

Сравнение динамических характеристик режимов разных типов приведено в таблице 2.2. Здесь  $\widehat{v}_1(t)$  — значение среднего по пространству, определяемое по формуле

$$\widehat{v}_1(t) = \frac{1}{\text{mes } \Omega} \int_{\Omega} v_1(t, s) ds,$$

$M(\widehat{v}_1(t))$  — среднее по времени,  $d = 0.002$ . Старшие ляпуновские показатели (см. [16, 27, 90, 91]) этих режимов вычислены для разного количества точек разбиения (см. рис. 2.7, рис. 2.8). Эти графики хорошо показывают разницу в хаотической структуре рассматриваемых режимов.

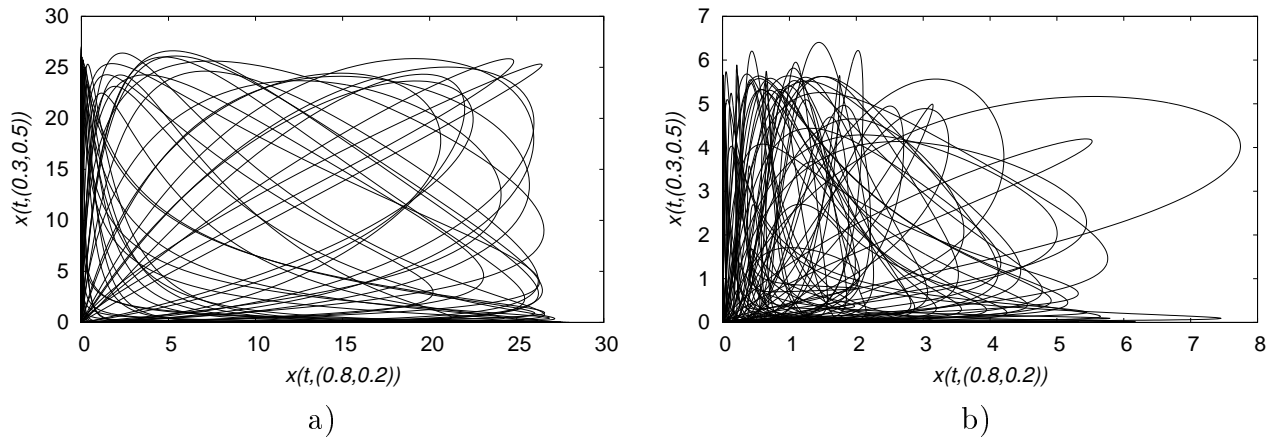


Рис. 2.5. Фазовый портрет  $v_1(t, s)$  (построен по точкам  $x(t, (0.8, 0.2))$  и  $x(t, (0.3, 0.5))$ ) режима а) с релаксационными свойствами ( $0 \leq t \leq 200$ ), б) самоорганизации ( $0 \leq t \leq 50$ ).

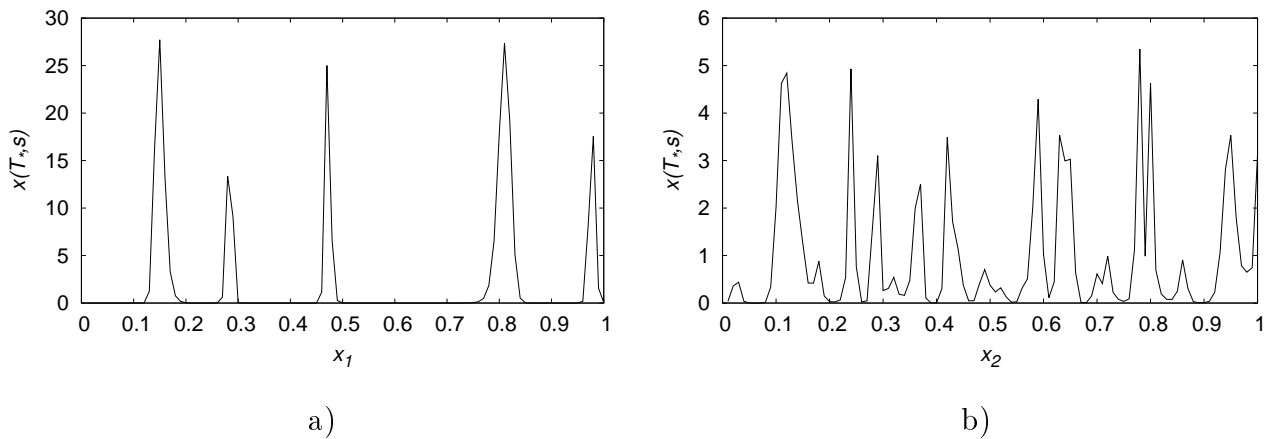


Рис. 2.6. Разрез  $v_1(t, s)$  по одной из осей области  $\Omega$  при  $t = T_*$  режима а) с релаксационными свойствами, б) самоорганизации.

## 2.5. Выводы

В первую очередь отметим найденные для точечной модели асимптотические формулы устойчивого периодического решения, являющегося пространственно однородным циклом модельной системы. Определены условия, при которых от него ответвляется пространственно неоднородный цикл. Эти асимптотики используются как отправная точка для численного эксперимента. Основным результатом численного моделирования краевой задачи состоит в том, что наряду с пространственно неоднородными режимами, бифурцирующими от пространственно однородного, она имеет более сложные колебательные режимы с самоорганизацией. Эти режимы неупорядочены и по времени, и по пространству. Вычисленный для них старший ляпуновский показатель оказался положительным, что как раз отражает его неупорядоченность. Вместе с тем, данные решения имеют более выраженный биофизический смысл. Это позволяет считать предложенный подход к моделированию колебательных химических реакций достаточно адекватным.

Таблица 2.2. Сравнение динамических характеристик двух типов режимов.

Тип режима	$M(\hat{v}_1(t))$	$\min \hat{v}_1(t)$	$\max \hat{v}_1(t)$	$\min v_1(t, s)$	$\max v_1(t, s)$
Релаксационный	0.9540	$10^{-11}$	3.44373	$10^{-12}$	29.81307
Самоорганизация	0.9722	0.79906	1.15436	$10^{-12}$	18.03019

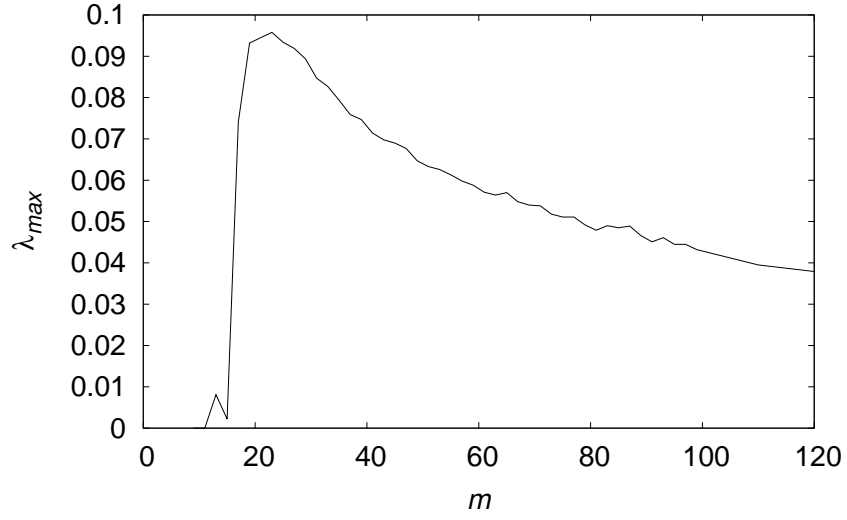


Рис. 2.7. Зависимость старшего ляпуновского показателя режима с релаксационными свойствами от количества точек разбиения.

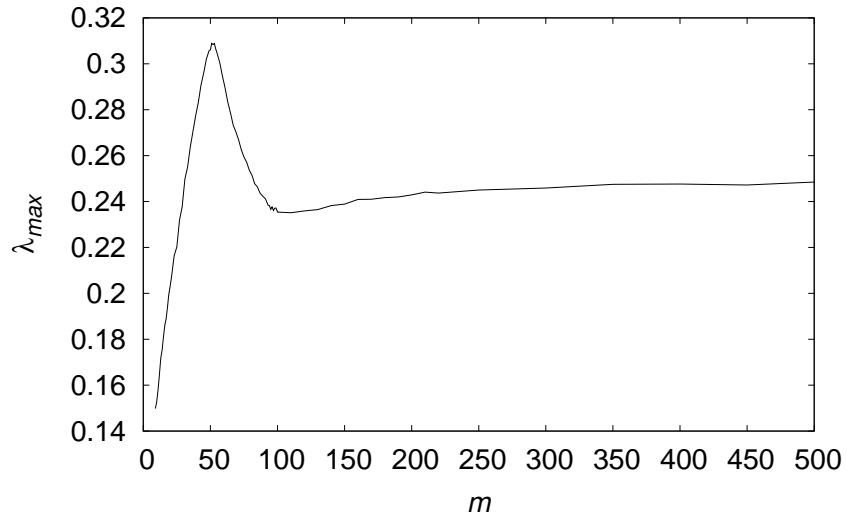


Рис. 2.8. Зависимость старшего ляпуновского показателя режима самоорганизации от количества точек разбиения.



## Глава 3.

# Вычисление спектра ляпуновских показателей для систем с запаздывающими аргументами

### 3.1. Описание алгоритма

В данной работе рассматривается расширение стандартного алгоритма [58] для вычисления нескольких первых показателей Ляпунова для систем дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами.

Отметим, что ляпуновские показатели для систем с запаздыванием могут не вполне корректно оцениваться численно. Дело в том, что для конечномерных систем имеет место известная теорема Оселедеца [62], в которой утверждается, что линеаризованная на устойчивом решении система является правильной по Ляпунову. Это позволяет в определении ляпуновских показателей [9] заменить верхний предел на обычный и численно оценивать эти величины. В случае уравнения с запаздыванием и краевых задач такого утверждения не доказано, но для случая равновесия в уравнении Хатчинсона, как будет показано ниже, получены результаты, иллюстрирующие «близость» оцениваемых характеристик и показателей Ляпунова. Отметим, что все численные результаты, описанные в этой главе, носят экспериментальный характер.

Опишем алгоритм получения оценок первых  $K$  показателей Ляпунова для систем дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами следующего вида:

$$\dot{x} = F(x, x(t - h_1), x(t - h_2), \dots, x(t - h_s)), \quad (3.1.1)$$

где для  $\forall t$   $x(t) \in \mathbb{R}^N$ ,  $N$  — размерность системы,  $h_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, s$ ),  $h_1 > h_2 > \dots > h_s > 0$ .

В качестве фазового пространства примем пространство непрерывных на отрезке  $[-h_1, 0]$  функций в  $\mathbb{R}^N$ , а именно  $C([-h_1, 0]; \mathbb{R}^N)$ .

Для численного решения системы (3.1.1) с начальными условиями

$$x_0(t) = f(t), \quad t \in [-h_1, 0], \quad f(t) \in C([-h_1, 0]; \mathbb{R}^N) \quad (3.1.2)$$

будем использовать метод Дормана–Принса пятого порядка (DOPRI54) с переменной длиной шага [95].

Таким образом, будем решать систему (3.1.1) с соответствующим начальным условием (3.1.2) выбранным методом до момента времени  $\Theta$ , достаточного для приближения траектории решения к изучаемому аттрактору. При этом на промежутке  $t \in [\Theta - h_1, \Theta]$  получим функцию  $x^{(0)}(t) \in C([\Theta - h_1, \Theta]; \mathbb{R}^N)$ , которая станет новым начальным условием системы (3.1.1).

Дополним систему уравнений (3.1.1) следующими  $K$  идентичными системами:

$$\begin{aligned} \dot{u}_j = & \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=x_*(t)} \cdot u_j + \frac{\partial F}{\partial x(t-h_1)} \Big|_{x(t-h_1)=x_*(t-h_1)} \cdot u_j(t-h_1) + \dots + \\ & + \frac{\partial F}{\partial x(t-h_s)} \Big|_{x(t-h_s)=x_*(t-h_s)} \cdot u_j(t-h_s), \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

где  $j = 1, \dots, K$ ,  $x_*(t)$  — решение системы уравнений (3.1.1) с начальным условием  $x(t) = x^{(0)}(t)$  при  $t > \Theta$ . Они представляют собой линеаризованные на решении  $x_*(t)$  системы уравнений (3.1.1).

Далее будем обозначать  $u_j = u_j(t) \stackrel{\text{def}}{=} (u_{1j}(t), \dots, u_{Nj}(t))^T$ , для которого введем норму

$$\|u_j(t)\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t-h_1}^t |u_{1j}(\tau)|^2 d\tau + \dots + \int_{t-h_1}^t |u_{Nj}(\tau)|^2 d\tau. \quad (3.1.4)$$

Для каждой системы уравнений (3.1.3) используем начальные условия в виде ортонормированных импульсных функций, например:

$$u_j(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{K}{Nh_1}} & \text{при } t \in [(\Theta - h_1) + (j-1)h_1/K, \\ & (\Theta - h_1) + jh_1/K], \quad j = 1, \dots, K, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3.1.5)$$

либо в виде ортонормированных тригонометрических функций:

$$u_j(t) = \begin{cases} 1, & j = 1, \\ \sin(j\pi(t - \Theta)/h_1)/\sqrt{2}, & j = 2, 4, 6, \dots \\ \cos((j-1)\pi(t - \Theta)/h_1)/\sqrt{2}, & j = 3, 5, 7, \dots \end{cases} \quad (3.1.6)$$

Решая совместно систему (3.1.1) с начальным условием  $x(t) = x^{(0)}(t)$  и системы уравнений (3.1.3) с начальными условиями (3.1.5) или (3.1.6) на промежутке  $t \in [\Theta, \Theta + T]$ , где  $T \geq h_1$ , получаем для каждой из линеаризованных систем решение  $u_j^{(1)}(t) = (u_{1j}^{(1)}(t), \dots, u_{Nj}^{(1)}(t))^T$ ,  $j = 1, \dots, K$ .

Учитывая, что решения  $u_j^{(1)}(t)$ , вообще говоря, ведут себя экспоненциально, необходимо их перенормировывать через определенные промежутки времени. Заметим, что проблему представляют как неограниченный рост решений, так и их стремление к нулю. Таким образом, на промежутке  $t \in [\Theta + T - h_1, \Theta + T]$  усредняем внутри каждого из  $M$  равных временных интервалов длины  $h_1/M$  вычисленные решения линеаризованных систем  $u_{1j}^{(1)}(t), \dots, u_{Nj}^{(1)}(t)$ , в результате чего получаем кусочно-непрерывные функции

$\tilde{u}_{1j}^{(1)}(t), \dots, \tilde{u}_{Nj}^{(1)}(t)$  соответственно, которые используем в одном из описанных ниже методов.

*Метод импульсных функций.*

- Применяем метод Грама–Шмидта [78] к  $\tilde{u}_j^{(1)}(t)$ .
- При этом после процедуры ортогонализации каждой функции, но перед ее перенормировкой вычисляем величины  $\xi_j^{(1)} = \|\tilde{u}_{\text{ort } j}^{(1)}\|$ , где  $\|\cdot\|$  — норма, определенная в (3.1.4),  $\tilde{u}_{\text{ort } j}^{(1)}(t)$  — ортогонализированная система функций  $\tilde{u}_j^{(1)}(t)$ ,  $j = 1, \dots, K$ .
- Продолжаем решать системы (3.1.1), (3.1.3), при этом в качестве начальных условий для линеаризованных систем используем полученную ортонормированную систему функций.

Для применения данного метода требуется в качестве начальных условий для линеаризованных систем выбрать систему ортонормированных импульсных функций (3.1.5).

*Метод тригонометрических функций.*

- Предварительно переводим функции  $\tilde{u}_j^{(1)}(t)$  в систему векторов  $v_j^{(1)} \in \mathbb{R}^{MN}$  по следующему правилу:  $v_{mnj}^{(1)} = \tilde{u}_{nj}^{(1)}(\Theta + T - h_1 + (m-1/2)h_1/M)$ ,  $m = 1, \dots, M$ ,  $n = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, K$ .
- К получившейся системе векторов применяем дискретное преобразование Фурье [61], в результате чего получаем комплекснозначные векторы  $c_j^{(1)} \in \mathbb{C}^{MN/2+1}$ .
- Векторы  $c_j^{(1)}$  разделяем на пары действительных векторов, состоящие из действительных и мнимых частей  $d_j^{(1)} \in \mathbb{R}^{MN+2}$ .
- К системе векторов  $d_j^{(1)}$  применяем метод Грама–Шмидта.
- При этом после процедуры ортогонализации каждого вектора, но перед его перенормировкой вычисляем величины

$$\xi_j^{(1)} = \|d_{\text{ort } j}^{(1)}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{K} \sum_{i=1}^{NM+2} |d_{\text{ort } ij}^{(1)}|^2},$$

где  $d_{\text{ort } j}^{(1)}$  — ортогонализированная система векторов  $d_j^{(1)}$ ,  $j = 1, \dots, K$ .

- Полученные ортонормированные действительные векторы переводим обратно в комплекснозначные, к которым применяем обратное дискретное преобразование Фурье, таким образом получая векторы  $w_j^{(1)} \in \mathbb{R}^{MN}$ .
- Строим систему функций  $\hat{u}_j^{(1)}(t)$  по правилу:  $\hat{u}_{nj}^{(1)}(t) = w_{mnj}^{(1)}$  при  $t \in [\Theta + T - h_1 + (m-1)h_1/M; \Theta + T - h_1 + mh_1/M]$ ,  $m = 1, \dots, M$ ,  $n = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, K$ .

- Продолжаем решать системы (3.1.1), (3.1.3), при этом в качестве начальных условий для линеаризованных систем используем систему функций  $\hat{u}_j^{(1)}(t)$ .

Для применения данного метода требуется в качестве начальных условий для линеаризованных систем выбрать систему ортонормированных тригонометрических функций (3.1.6).

Повторяем описанный процесс на временных интервалах  $[\Theta + kT - h_1, \Theta + kT]$ ,  $k > 1$ , в результате чего обработке алгоритмом подвергаются соответствующие решения  $u_j^{(k)}(t)$ . Оценка показателей Ляпунова в таком случае вычисляется по формуле

$$\lambda_j = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^L \ln \xi_j^{(k)}}{LT}, \quad j = 1, \dots, K. \quad (3.1.7)$$

Отметим, что выбор времени перенормировки  $T$  можно осуществлять двумя различными способами: через равные промежутки времени или динамически [13]. В последнем случае на каждом шаге алгоритма придется хранить не только  $\xi_j^{(k)}$ , но и  $T_k$ . Тогда формула оценки показателей Ляпунова будет иметь вид

$$\lambda_j = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^L \ln \xi_j^{(k)} / T_k}{L}, \quad j = 1, \dots, K.$$

Описанная структура алгоритма позволяет начинать вычисления и до выхода решения на изучаемый аттрактор, особенно когда сам процесс приближения решения к аттрактору может быть сопряжен с большими вычислительными трудностями, как это показано в [70]. В таком случае первые шаги, соответствующие временным интервалам, в которых решение еще не приблизилось к аттрактору на достаточное расстояние, должны отбрасываться и никак не учитываться в сумме из формулы (3.1.7).

Также рекомендуется отбрасывать несколько первых шагов и в общем случае, поскольку процесс формирования нового ортонормированного базиса линеаризованных систем может заметно отразиться на спектре показателей при не слишком большом количестве учтенных шагов  $L$  (см. подобный прием в [106]).

Теперь перейдем к результатам тестирования описанных методов.

## 3.2. Тестирование алгоритма на примере уравнения Хатчинсона

Вычислительные эксперименты проводились для уравнения Хатчинсона [97], которое имеет следующий вид:

$$\dot{x} = rx(t)(1 - x(t - 1)). \quad (3.2.1)$$

Как уже было сказано в главе 1, ненулевые решения уравнения (3.2.1) асимптотически устойчивы при  $r \in (0, \pi/2)$ , причем при  $r \in (0, e^{-1})$  монотонно, а при  $r \in (e^{-1}, \pi/2)$  колебательным образом решение стремится к единице. Кроме того, единичное решение обладает глобальной устойчивостью при  $r \leq 37/24$  [96, 100, 126], а в [40, 43] приведен

алгоритм, который допускает улучшение этой оценки. В случае единичного состояния равновесия при  $r < \pi/2$  показатели Ляпунова для уравнения Хатчинсона совпадают с вещественными частями корней характеристического квазиполинома  $P(\lambda) \equiv \lambda + r \exp(-\lambda)$ ,  $\lambda = \tau + i\omega$ . Для их вычисления используется система алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}\tau + r e^{-\tau} \cos \omega &= 0, \\ \omega - r e^{-\tau} \sin \omega &= 0.\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

Округленные компоненты решения  $\tau_i$  данной системы при разных значениях параметра  $r$  представлены во втором столбце таблиц 3.1–3.3. Будем называть их эталонными значениями.

Уравнение (3.2.1) дополняется системой линеаризованных уравнений:

$$\dot{u}_j = r(1 - x(t-1))u_j(t) - rx(t)u_j(t-1), \quad j = 1, \dots, K.\tag{3.2.3}$$

Для всех опытов применялись следующие параметры:

- количество вычисляемых показателей Ляпунова  $K = 10$ ;
- время выхода на аттрактор  $\Theta = 150$ ;
- время до перенормировки решений линеаризованных систем  $T = 4$ ;
- количество пересчетов показателей Ляпунова  $L = 5000$ .

Вычисленные ляпуновские показатели, абсолютная и относительная разности для удобства округлены до четвертого знака после запятой.

Как видно из таблиц 3.1–3.3, точность вычисления показателей зависит от величины выбранного разбиения. При увеличении  $M$  в 10 раз со 100 до 1000 относительная погрешность уменьшилась на порядок. В крайнем случае, когда количество точек разбиения равно количеству вычисляемых показателей Ляпунова, достигаемая точность мала.

Таким образом, при выборе достаточного количества точек разбиения  $M$  оцениваемые характеристики могут оказаться качественно близкими к показателям Ляпунова.

Стоит также отметить немаловажную разницу между двумя описанными методами — скорость расчетов. В процессе применения на практике описанных методов было замечено, что если решение является относительно гладким, т.е. оно не обладает участками с острыми пиками, то метод тригонометрических функций, вообще говоря, работает быстрее метода импульсных функций. Если же решение содержит большое количество участков с достаточно острыми пиками, то метод импульсных функций является предпочтительным по скорости работы, причем в некоторых случаях метод тригонометрических функций может оказаться неприменим ввиду потери части информации из-за спектральной «утечки» на этапе применения дискретного преобразования Фурье, как в некоторых режимах модели из следующего параграфа. Скорости применения в обоих случаях могут различаться на порядок. Скажем, при  $r = 3$  при прочих равных параметрах расчеты спектра показателей Ляпунова получающегося цикла методом тригонометрических функций происходили в 12 раз быстрее, чем методом импульсных функций. Причем чаще всего это обусловлено автоматически определяемым размером шага интегрирования, что существенно может влиять и на объем хранимой информации по текущему решению (на интервале длины максимального запаздывания) в оперативной памяти вычислительного устройства, особенно в случае пространственно распределенных задач.

Таблица 3.1. Первые 10 вычисленных показателей Ляпунова ( $\check{\lambda}_i$  – методом импульсных функций,  $\tilde{\lambda}_i$  – методом тригонометрических функций) для уравнения Хатчинсона при  $r = 1.5$ , а также абсолютная разность  $\check{\sigma}_i$  и относительная разность  $\check{\rho}_i$  между ними и эталонными значениями.

$i$	$\tau_i$	$\check{\lambda}_i$	$\check{\sigma}_i$	$\check{\rho}_i$	$\tilde{\lambda}_i$	$\tilde{\sigma}_i$	$\tilde{\rho}_i$
$M = 100$							
1	-0.0328	-0.0338	0.0010	0.0305	-0.0335	0.0007	0.0213
2	-0.0328	-0.0338	0.0010	0.0305	-0.0336	0.0008	0.0244
3	-1.6509	-1.6544	0.0035	0.0021	-1.6540	0.0031	0.0019
4	-1.6509	-1.6544	0.0035	0.0021	-1.6541	0.0032	0.0019
5	-2.2447	-2.2491	0.0044	0.0020	-2.2488	0.0041	0.0018
6	-2.2447	-2.2491	0.0044	0.0020	-2.2489	0.0042	0.0019
7	-2.6130	-2.6179	0.0049	0.0019	-2.6178	0.0048	0.0018
8	-2.6130	-2.6179	0.0049	0.0019	-2.6179	0.0049	0.0019
9	-2.8811	-2.8866	0.0055	0.0019	-2.8868	0.0057	0.0020
10	-2.8811	-2.8866	0.0055	0.0019	-2.8869	0.0058	0.0020
$M = 1000$							
1	-0.0328	-0.0329	0.0001	0.0030	-0.0326	0.0002	0.0061
2	-0.0328	-0.0330	0.0002	0.0061	-0.0327	0.0001	0.0030
3	-1.6509	-1.6513	0.0004	0.0002	-1.6509	0.0000	0.0000
4	-1.6509	-1.6513	0.0004	0.0002	-1.6510	0.0001	0.0001
5	-2.2447	-2.2452	0.0005	0.0002	-2.2448	0.0001	0.0000
6	-2.2447	-2.2452	0.0005	0.0002	-2.2449	0.0002	0.0001
7	-2.6130	-2.6134	0.0004	0.0002	-2.6132	0.0002	0.0001
8	-2.6130	-2.6134	0.0004	0.0002	-2.6132	0.0002	0.0001
9	-2.8811	-2.8815	0.0004	0.0001	-2.8813	0.0002	0.0001
10	-2.8811	-2.8815	0.0004	0.0001	-2.8813	0.0002	0.0001
$M = 2000$							
1	-0.0328	-0.0329	0.0001	0.0030	-0.0325	0.0003	0.0091
2	-0.0328	-0.0330	0.0002	0.0061	-0.0326	0.0002	0.0061
3	-1.6509	-1.6512	0.0003	0.0002	-1.6507	0.0002	0.0001
4	-1.6509	-1.6512	0.0003	0.0002	-1.6508	0.0001	0.0001
5	-2.2447	-2.2450	0.0003	0.0001	-2.2446	0.0001	0.0000
6	-2.2447	-2.2450	0.0003	0.0001	-2.2447	0.0000	0.0000
7	-2.6130	-2.6132	0.0002	0.0001	-2.6130	0.0000	0.0000
8	-2.6130	-2.6132	0.0002	0.0001	-2.6130	0.0000	0.0000
9	-2.8811	-2.8812	0.0001	0.0000	-2.8811	0.0000	0.0000
10	-2.8811	-2.8812	0.0001	0.0000	-2.8811	0.0000	0.0000

Таблица 3.2. Первые 10 вычисленных показателей Ляпунова ( $\check{\lambda}_i$  – методом импульсных функций,  $\tilde{\lambda}_i$  – методом тригонометрических функций) для уравнения Хатчинсона при  $r = 1.0$ , а также абсолютная разность  $\check{\sigma}_i$  и относительная разность  $\check{\rho}_i$  между ними и эталонными значениями.

$i$	$\tau_i$	$\check{\lambda}_i$	$\check{\sigma}_i$	$\check{\rho}_i$	$\tilde{\lambda}_i$	$\tilde{\sigma}_i$	$\tilde{\rho}_i$
$M = 100$							
1	-0.3181	-0.3195	0.0014	0.0044	-0.3192	0.0011	0.0035
2	-0.3181	-0.3196	0.0015	0.0047	-0.3194	0.0013	0.0041
3	-2.0623	-2.0663	0.0040	0.0019	-2.0659	0.0036	0.0017
4	-2.0623	-2.0663	0.0040	0.0019	-2.0660	0.0037	0.0018
5	-2.6532	-2.6580	0.0048	0.0018	-2.6578	0.0046	0.0017
6	-2.6532	-2.6580	0.0048	0.0018	-2.6578	0.0046	0.0017
7	-3.0202	-3.0257	0.0055	0.0018	-3.0256	0.0054	0.0018
8	-3.0202	-3.0257	0.0055	0.0018	-3.0257	0.0055	0.0018
9	-3.2878	-3.2938	0.0060	0.0018	-3.2943	0.0065	0.0020
10	-3.2878	-3.2938	0.0060	0.0018	-3.2943	0.0065	0.0020
$M = 1000$							
1	-0.3181	-0.3183	0.0002	0.0006	-0.3180	0.0001	0.0003
2	-0.3181	-0.3184	0.0003	0.0009	-0.3181	0.0000	0.0000
3	-2.0623	-2.0628	0.0005	0.0002	-2.0622	0.0001	0.0000
4	-2.0623	-2.0628	0.0005	0.0002	-2.0624	0.0001	0.0000
5	-2.6532	-2.6537	0.0005	0.0002	-2.6533	0.0001	0.0000
6	-2.6532	-2.6537	0.0005	0.0002	-2.6534	0.0002	0.0001
7	-3.0202	-3.0207	0.0005	0.0002	-3.0204	0.0002	0.0001
8	-3.0202	-3.0207	0.0005	0.0002	-3.0205	0.0003	0.0001
9	-3.2878	-3.2882	0.0004	0.0001	-3.2880	0.0002	0.0001
10	-3.2878	-3.2882	0.0004	0.0001	-3.2880	0.0002	0.0001
$M = 2000$							
1	-0.3181	-0.3182	0.0001	0.0003	-0.3178	0.0003	0.0009
2	-0.3181	-0.3184	0.0003	0.0009	-0.3180	0.0001	0.0003
3	-2.0623	-2.0626	0.0003	0.0001	-2.0620	0.0003	0.0001
4	-2.0623	-2.0626	0.0003	0.0001	-2.0622	0.0001	0.0000
5	-2.6532	-2.6534	0.0002	0.0001	-2.6531	0.0001	0.0000
6	-2.6532	-2.6534	0.0002	0.0001	-2.6531	0.0001	0.0000
7	-3.0202	-3.0204	0.0002	0.0001	-3.0202	0.0000	0.0000
8	-3.0202	-3.0204	0.0002	0.0001	-3.0202	0.0000	0.0000
9	-3.2878	-3.2879	0.0001	0.0000	-3.2877	0.0001	0.0000
10	-3.2878	-3.2879	0.0001	0.0000	-3.2877	0.0001	0.0000

Таблица 3.3. Первые 10 вычисленных показателей Ляпунова ( $\check{\lambda}_i$  – методом импульсных функций,  $\tilde{\lambda}_i$  – методом тригонометрических функций) для уравнения Хатчинсона при  $r = 0.5$ , а также абсолютная разность  $\check{\sigma}_i$  и относительная разность  $\check{\rho}_i$  между ними и эталонными значениями.

$i$	$\tau_i$	$\check{\lambda}_i$	$\check{\sigma}_i$	$\check{\rho}_i$	$\tilde{\lambda}_i$	$\tilde{\sigma}_i$	$\tilde{\rho}_i$
$M = 100$							
1	-0.7941	-0.7959	0.0018	0.0023	-0.7957	0.0016	0.0020
2	-0.7941	-0.7961	0.0020	0.0025	-0.7957	0.0016	0.0020
3	-2.7721	-2.7770	0.0049	0.0018	-2.7766	0.0045	0.0016
4	-2.7721	-2.7770	0.0049	0.0018	-2.7767	0.0046	0.0017
5	-3.3533	-3.3591	0.0058	0.0017	-3.3588	0.0055	0.0016
6	-3.3533	-3.3591	0.0058	0.0017	-3.3589	0.0056	0.0017
7	-3.7173	-3.7237	0.0064	0.0017	-3.7237	0.0064	0.0017
8	-3.7173	-3.7237	0.0064	0.0017	-3.7237	0.0064	0.0017
9	-3.9835	-3.9906	0.0071	0.0018	-3.9914	0.0079	0.0020
10	-3.9835	-3.9907	0.0072	0.0018	-3.9914	0.0079	0.0020
$M = 1000$							
1	-0.7941	-0.7942	0.0001	0.0001	-0.7939	0.0002	0.0003
2	-0.7941	-0.7944	0.0003	0.0004	-0.7940	0.0001	0.0001
3	-2.7721	-2.7726	0.0005	0.0002	-2.7722	0.0001	0.0000
4	-2.7721	-2.7726	0.0005	0.0002	-2.7723	0.0002	0.0001
5	-3.3533	-3.3539	0.0006	0.0002	-3.3536	0.0003	0.0001
6	-3.3533	-3.3539	0.0006	0.0002	-3.3537	0.0004	0.0001
7	-3.7173	-3.7178	0.0005	0.0001	-3.7177	0.0004	0.0001
8	-3.7173	-3.7178	0.0005	0.0001	-3.7177	0.0004	0.0001
9	-3.9835	-3.9840	0.0005	0.0001	-3.9839	0.0004	0.0001
10	-3.9835	-3.9840	0.0005	0.0001	-3.9839	0.0004	0.0001
$M = 2000$							
1	-0.7941	-0.7941	0.0000	0.0000	-0.7937	0.0004	0.0005
2	-0.7941	-0.7943	0.0002	0.0003	-0.7939	0.0002	0.0003
3	-2.7721	-2.7724	0.0003	0.0001	-2.7719	0.0002	0.0001
4	-2.7721	-2.7724	0.0003	0.0001	-2.7720	0.0001	0.0000
5	-3.3533	-3.3536	0.0003	0.0001	-3.3533	0.0000	0.0000
6	-3.3533	-3.3536	0.0003	0.0001	-3.3533	0.0000	0.0000
7	-3.7173	-3.7175	0.0002	0.0001	-3.7173	0.0000	0.0000
8	-3.7173	-3.7175	0.0002	0.0001	-3.7173	0.0000	0.0000
9	-3.9835	-3.9836	0.0001	0.0000	-3.9835	0.0000	0.0000
10	-3.9835	-3.9837	0.0002	0.0001	-3.9835	0.0000	0.0000



Поэтому самым очевидным подходом в выборе применяемого алгоритма к конкретной задаче является сравнение результатов расчетов алгоритмов на небольшом количестве шагов и скорости их выполнения.

### 3.3. Квазистойчивость сосуществующих аттракторов нейродинамической модели с запаздыванием

Для целого ряда моделей, в частности, генных сетей и нейронных ассоциаций [15], исследуемых в последнее время, является характерным так называемое квазистойчивое поведение.

**Определение 3.1.** Будем считать аттрактор квазистойчивым, если спектр его устойчивости лежит внутри единичной окружности комплексной плоскости и имеются мультипликаторы, близкие к единичной окружности.

Наличие у динамической системы квазистойчивых режимов приводит к появлению длительных переходных процессов. В некоторых случаях с применением методов большого параметра удается доказать существование и дать асимптотическую оценку мультипликаторов исследуемой системы. Однако в случае, если методы большого параметра неприменимы, требуется инструмент численной оценки мультипликаторов. Такой инструмент дают алгоритмы оценки показателей Ляпунова.

В качестве системы с наблюдаемой квазистойчивостью рассматривается модель синаптического взаимодействия двух импульсных нейронов, состоящая из пары дифференциально-разностных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \left( \lambda f(u_1(t-1)) + b g(u_2(t-h)) \ln(u_*/u_1) \right) u_1, \\ \dot{u}_2 &= \left( \lambda f(u_2(t-1)) + b g(u_1(t-h)) \ln(u_*/u_2) \right) u_2. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Данная феноменологическая модель основана на идее быстрой пороговой модуляции (fast threshold modulation [118, 119]) и является модификацией модели, предложенной в статье [19]. В отличие от модели в [19], система (3.3.1) содержит дополнительное запаздывание  $h > 1$  в цепи связи. Здесь  $u_1(t), u_2(t) > 0$  — нормированные мембранные потенциалы нейронов. Каждый нейрон моделируется сингулярно возмущенным дифференциально-разностным уравнением

$$\dot{u} = \lambda f(u(t-1))u \quad (3.3.2)$$

из статьи [46] (о нейромоделях с одним запаздыванием см. также [44]). Параметр  $\lambda \gg 1$  характеризует скорость протекания электрических процессов, функция  $f(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$ , где  $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$ , такова, что

$$f(0) = 1; \quad f(u) + a, \quad u f'(u), \quad u^2 f''(u) = O(1/u) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty, \quad (3.3.3)$$

где  $a = \text{const} > 0$ . Слагаемое  $b g(u_{j-1}(t-h)) \ln(u_*/u_j)u_j$  в (3.3.1) моделирует синаптическое взаимодействие. Связь предполагается пороговой с запаздыванием  $h > 1$  по

времени. Параметр  $b = \text{const} > 0$ ,  $u_* = \exp(c\lambda)$  — пороговое значение, управляющее взаимодействием,  $c = \text{const} \in \mathbb{R}$ .

Функция  $g(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} \forall u > 0 \quad g(u) > 0, \quad g(0) = 0; \\ g(u) - 1, \quad ug'(u), \quad u^2g''(u) = O(1/u) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

В работе [46] показано, что при всех  $\lambda \gg 1$  уравнение (3.3.2) допускает экспоненциально орбитально устойчивый релаксационный цикл  $u_*(t, \lambda) > 0$  периода  $T_*(\lambda)$ , удовлетворяющий предельным соотношениям

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_*(\lambda) = T_0, \quad \max_{0 \leq t \leq T_*(\lambda)} |x_*(t, \lambda) - x_0(t)| = O(1/\lambda), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

где

$$T_0 \stackrel{\text{def}}{=} 2 + a + \frac{1}{a}, \quad t_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{1}{a}, \quad (3.3.5)$$

$x_*(t, \lambda) = \ln(u_*(t, \lambda))/\lambda$ , а  $T_0$ -периодическая функция  $x_0(t)$  задается равенствами

$$x_0(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 - a(t - 1) & \text{при } 1 \leq t \leq t_0 + 1, \\ t - T_0 & \text{при } t_0 + 1 \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad x_0(t + T_0) \equiv x_0(t). \quad (3.3.6)$$

Отметим, что в задачах, подобных (3.3.1) (и (3.3.2)) уместно сделать экспоненциальную замену [49]

$$u_j = \exp(\lambda x_j), \quad j = 1, 2, \quad (3.3.7)$$

которая позволит перейти к следующей системе с более содержательным предельным объектом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(\exp(\lambda x_1(t - 1))) + b(c - x_1)g(\exp(\lambda x_2(t - h))), \\ \dot{x}_2 &= f(\exp(\lambda x_2(t - 1))) + b(c - x_2)g(\exp(\lambda x_1(t - h))). \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

При устремлении  $\lambda$  к бесконечности правые части (3.3.8) стремятся к релейным функциям:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\exp(\lambda x)) &= R(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ -a, & x > 0, \end{cases} \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} g(\exp(\lambda x)) &= H(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда в качестве предельного объекта модели (3.3.1) можно рассматривать релейную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= R(x_1(t - 1)) + b(c - x_1)H(x_2(t - h)), \\ \dot{x}_2 &= R(x_2(t - 1)) + b(c - x_2)H(x_1(t - h)). \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

В работах [14, 19, 22, 23, 64] для систем, подобных (3.3.1) (с произвольным числом осцилляторов и без запаздывания  $h$  в цепи связи), показано существование дискретных бегущих волн. Система (3.3.1) рассматривалась в работах [24, 63, 114], где для нее исследовался вопрос существования и устойчивости специальных релаксационных периодических режимов:

- 1) импульсно-рефрактерного [63],
- 2) однородного [24],
- 3) противофазного [114].

**Определение 3.2.** Назовем периодическое решение системы (3.3.1) импульсно-рефрактерным, если одна из функций  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  претерпевает периодические асимптотически высокие всплески, а другая при этом асимптотически мала при всех значениях  $t > 0$ .

Введем обозначения для констант:

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} \exp(-bt_0), \quad \eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a+1}{1-\xi} + \frac{1}{b} + c.$$

Следующая теорема, доказанная в [63], означает наличие импульсно-рефрактерного режима у системы (3.3.1).

**Теорема 3.1.** Для каждого  $q > 0$ , для которого выполнено неравенство

$$\eta < -q,$$

существует такое достаточно малое число  $\varepsilon_0 > 0$ , что при каждом  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  система (3.3.8) допускает экспоненциально орбитально устойчивое решение  $(x_1(t, \lambda), x_2(t, \lambda))^T$  периода  $T(\lambda)$ , удовлетворяющее предельным равенствам

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( \max_{0 \leq t \leq T(\lambda)} |x_1(t, \lambda) - x_0(t)| + \max_{0 \leq t \leq T(\lambda)} |x_2(t, \lambda) - y_0(t)| \right) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T(\lambda) = T_0.$$

$$y_0(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} e(t) & \text{при } h \leq t \leq t_0 + h, \\ t - t_0 - h + e(t_0 + h) & \text{при } t_0 + h \leq t \leq T_0 + h, \end{cases} \quad y_0(t + T_0) \equiv y_0(t),$$

где

$$e(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a+1}{1-\xi} \exp(-b(t-h)) + \frac{1}{b} + c.$$

Периодическая функция  $x_0$  меняет знак, причем на периоде она обладает одним промежутком положительности и одним промежутком отрицательности, а функция  $y_0$  при этом всюду отрицательна. В силу экспоненциальной зависимости  $u_j$  ( $j = 1, 2$ ) от функций  $x_j$ , близких к  $x_0$  и  $y_0$ , это означает, что при больших  $\lambda$  функция  $u_1$  обладает на периоде асимптотически высоким всплеском, а  $u_2$  асимптотически мала. Таким образом, решению, описанному в теореме 3.1, соответствует импульсно-рефрактерный режим системы (3.3.1). Отметим, что в силу симметричного вхождения неизвестных функций  $u_1$ ,  $u_2$  в систему (3.3.1), из теоремы 3.1 следует, что (3.3.1) обладает двумя импульсно-рефрактерными режимами.

Далее, перейдем к описанию синхронных режимов систем (3.3.1) и (3.3.8).

**Определение 3.3.** Назовем периодическое решение системы (3.3.1) синхронным, если функция  $u_2(t)$  получается из  $u_1(t)$  сдвигом по времени:  $u_1(t) = u(t)$ ,  $u_2(t) = u(t + \Delta)$ .

**Определение 3.4.** Синхронное решение системы (3.3.1) назовем однородным (синфазным), если сдвиг  $\Delta = 0$ .

**Определение 3.5.** Синхронное решение системы (3.3.1) назовем противофазным, если  $\Delta = T/2$ , где  $T$  — это период функции  $u(t)$  (см. [118]).

Синхронные режимы системы (3.3.8) определяются аналогично.

Введем понятие *bursting-эффекта* — специального свойства решения, характерного для нейродинамических систем (см. [18, 77, 79, 82, 98, 116]).

**Определение 3.6.** *Bursting-эффект* — чередование нескольких подряд идущих высокоамплитудных всплесков, сменяющихся асимптотически малыми значениями мембранного потенциала.

В работах [24, 114] получен следующий результат, означающий существование у системы (3.3.1) устойчивых однородного и противофазного режимов с *bursting-эффектом*.

**Теорема 3.2.** *Зафиксируем натуральное число  $l$ . Пусть*

$$\Delta = \frac{1}{3 - \xi^l} ((h - \eta)(1 - \xi^l) + lT_0(1 + \xi^l)),$$

параметры  $a, b, c, h$  удовлетворяют ограничениям

$$a + \eta < 0, \quad t_0 + 1 + (2l - 1)T_0 - \frac{1}{2}(1 - \xi^l)(\eta + a) < h < 2lT_0.$$

Тогда система (3.3.8) одновременно обладает экспоненциально орбитально устойчивыми однородным и противофазным решениями. Причем функции  $x_1 = x_*(t, h, 2l)$ ,  $x_2 = x_*(t, h, 2l)$  однородного режима содержат по  $2l$  промежутков положительности на периоде, а  $x_1 = x_*(t, h - \Delta, l)$ ,  $x_2 = x_*(t + \Delta, h - \Delta, l)$  противофазного решения содержат по  $l$  промежутков положительности. Здесь

$$x_*(t, \theta, s) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x_0(t) & \text{при } t \in [0, \theta], \\ e_k(t, \theta, \theta) & \text{при } t \in [\theta + kT_0, \theta + t_0 + kT_0], \\ & k = 0, \dots, s - 1, \\ t - \beta_k(\theta, \theta) & \text{при } t \in [\theta + t_0 + kT_0, \theta + (k + 1)T_0], \\ & k = 0, \dots, s - 1, \\ t - \beta_{s-1}(\theta, \theta) & \text{при } t \in [\theta + sT_0, \beta_{s-1}(\theta, \theta)], \end{cases}$$

$$e_k(t, \theta, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \alpha_k(\theta) - \frac{1}{b} - c \right) \exp(-b(t - \tau - kT_0)) + \frac{1}{b} + c, \quad (3.3.10)$$

$$\beta_k(\theta, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} \tau + t_0 + kT_0 - \left( \alpha_k(\theta) - \frac{1}{b} - c \right) \xi - \frac{1}{b} - c, \quad (3.3.11)$$

$$\alpha_k(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \xi^k (x_0(\theta) - \eta) + \eta. \quad (3.3.12)$$

Перейдем теперь к мультипликаторам импульсно-рефрактерного и синхронных режимов. В работах [24, 63, 114] в процессе исследования устойчивости этих режимов доказаны следующие утверждения.

**Лемма 3.1.** *Импульсно-рефрактерный режим из теоремы 3.1 имеет мультипликаторы  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = \xi + O(e^{-q\lambda})$  ( $\lambda \rightarrow \infty$ ), а все остальные его мультипликаторы  $\mu_j$  ( $j = 3, 4, \dots$ ) экспоненциально малы.*

Здесь и далее параметр  $q$  — положительная константа, точное значение которой не важно.

**Лемма 3.2.** *Однородный режим из теоремы 3.2 обладает единичным мультипликатором  $\mu_1 = 1$ ; мультипликатором*

$$\mu_2 = 2\xi^{2l} - 1 + O(e^{-q\lambda}) \quad (\lambda \rightarrow \infty); \quad (3.3.13)$$

*все остальные его мультипликаторы  $\mu_j$  ( $j = 3, 4, \dots$ ) экспоненциально малы.*

**Лемма 3.3.** *Противофазный режим из теоремы 3.2 обладает единичным мультипликатором  $\mu_1 = 1$ ; двумя мультипликаторами*

$$\mu_{2,3} = -\frac{1}{2} - \xi^l \pm i \frac{\sqrt{3 - 4\xi^l}}{2} + O(e^{-q\lambda}) \quad (\lambda \rightarrow \infty); \quad (3.3.14)$$

*все остальные мультипликаторы  $\mu_j$  ( $j = 4, 5, \dots$ ) экспоненциально малы.*

Отметим, что близость мультипликаторов (3.3.13), (3.3.14) к единичной окружности означает, что соответствующие им решения квазиустойчивы, то есть траектория приближается к этому решению достаточно медленно, и в процессе вычислительного эксперимента выход на устойчивое решение может занять много времени.

Перейдем к формулировке утверждений о сосуществовании у релейной задачи устойчивых циклов с различным числом областей положительности. Сперва дадим определение буферности.

**Определение 3.7.** *Система обладает феноменом буферности, если по каждому натуральному числу  $l$  можно так подобрать параметры, что система будет иметь  $l$  устойчивых режимов с указанным механизмом их накопления.*

Зафиксируем число  $n \in \mathbb{N}$ . Учитывая экспоненциальную зависимость величины  $\xi$  от параметров  $a$  и  $b$ , будем далее предполагать выполненными следующие неравенства:

$$a + \eta < 0, \quad (3.3.15)$$

$$(n - 1)T_0 + \eta < 0, \quad (3.3.16)$$

$$(n - 1)T_0 + t_0 + 1 - \xi\eta \leq h \leq nT_0 + \xi\eta. \quad (3.3.17)$$

Удается доказать следующее утверждение, означающее наличие буферности в системе (3.3.9).

**Теорема 3.3.** *Пусть параметры  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $h$  удовлетворяют ограничениям (3.3.15)–(3.3.17). Тогда система (3.3.9) имеет  $2n - 1$  периодических орбитально асимптотически устойчивых режимов, которые устроены следующим образом. Функции  $x_1$  и  $x_2$  имеют*

соответственно  $2n - m$  и  $m$  ( $m = 1, \dots, 2n - 1$ ) промежутков положительности, которые сменяются продолжительным промежутком отрицательности. Точные формулы решений имеют следующий вид:

$$x_1^{(m)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x_0(t) & \text{при } t \in [0, h + d_*], \\ e_k(t, h + d_*, h + d_*) & \text{при } t \in [h + d_* + kT_0, \\ & h + d_* + t_0 + kT_0], \\ & k = 0, \dots, 2n - m - 1, \\ t - \beta_k(h + d_*, h + d_*) & \text{при } t \in [h + d_* + t_0 + kT_0, \\ & h + d_* + (k + 1)T_0], \\ & k = 0, \dots, 2n - m - 1, \\ t - \beta_{2n-m-1}(h + d_*, h + d_*) & \text{при } t \in [h + d_* + (2n - m)T_0, \\ & \beta_{2n-m-1}(h + d_*, h + d_*)], \end{cases} \quad (3.3.18)$$

$$x_2^{(m)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} t - d_* & \text{при } t \in [0, d_*], \\ x_0(t - d_*) & \text{при } t \in [d_*, h], \\ e_k(t, h - d_*, h) & \text{при } t \in [h + kT_0, h + t_0 + kT_0], \\ & k = 0, \dots, m - 1, \\ t - \beta_k(h - d_*, h) & \text{при } t \in [h + t_0 + kT_0, h + (k + 1)T_0], \\ & k = 0, \dots, m - 1, \\ t - \beta_{m-1}(h - d_*, h) & \text{при } t \in [h + mT_0, \\ & \beta_{2n-m-1}(h + d_*, h + d_*)], \end{cases} \quad (3.3.19)$$

$$d_* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2(n - m)T_0 + \xi^m(h - (2n - m)T_0 - \eta) - \xi^{2n-m}(h - mT_0 - \eta)}{2 - \xi^m - \xi^{2n-m}}. \quad (3.3.20)$$

Вследствие экспоненциальной связи (3.3.7) функций  $u_i$  и  $x_i$ ,  $i = 1, 2$ , свойства решения, описанные в теореме 3.3, означают, что  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  обладают  $m$  и  $n - m$  всплесками соответственно. Это означает, что решению из теоремы 3.3 соответствует решение (3.3.1) с bursting-эффектом.

В процессе доказательства теоремы 3.3 [30] удастся получить явный вид первых мультипликаторов.

**Лемма 3.4.** *Режимы из теоремы 3.3 обладают единичным мультипликатором  $\mu_1 = 1$ ; мультипликатором*

$$\mu_2 = -1 + \xi^m + \xi^{2n-m} + O(e^{-q\lambda}) \quad (\lambda \rightarrow \infty);$$

*все остальные мультипликаторы  $\mu_j$  ( $j = 3, 4, \dots$ ) экспоненциально малы.*

Отметим, что так же, как в леммах 3.2, 3.3, в данном случае получаем мультипликатор, по модулю близкий к единице. Таким образом, режимы релейной системы (3.3.9), описанные в теореме 3.3, оказываются квазиустойчивыми.

Таким образом, при  $\lambda \rightarrow \infty$  показаны существование и устойчивость режимов, у которых один или несколько мультипликаторов близки по модулю к единице. Причем эта

близость не является асимптотической, а обусловлена малостью величины  $\xi^n$ , где, напомним,  $\xi = \exp(-bt_0)$ . При обычно (см. [19]) рассматриваемых значениях параметров  $a = 1.5$ ,  $b = 2$  ( $t_0 = 1 + 1/a$  в этом случае равно  $5/3$ ) величина  $\xi$  оказывается равной  $\exp(-10/3)$ , что при  $n$ , например, равном 8 приводит к  $\xi^8 \approx 2 \cdot 10^{-12}$ . Это означает, что решения системы (3.3.1), находящиеся в бассейне притяжения одного из рассматриваемых выше циклов, на промежутке длины периода устойчивого решения претерпевают изменения, по воздействию близкие к  $1 - \xi^n$ , что обуславливает очень длинный переходный процесс, который, как не трудно видеть, реализуется и при значениях  $\lambda$ , не являющихся асимптотически большими. Таким образом, численный анализ задачи (3.3.1) сопряжен с существенными трудностями. В случае, если параметр  $\lambda$  не велик, эти трудности могут остаться незамеченными, и тогда в качестве устойчивого режима, полученного на основе вычислительного эксперимента, может быть предъявлена часть переходного процесса, что приведет к неверным результатам. Для того, чтобы продиагностировать наличие такого явления, требуется вычисление спектра показателей Ляпунова для изучаемого решения системы по алгоритму, описанному в первом параграфе этой главы.

Перейдем к результатам численного исследования системы (3.3.8). В качестве функций  $f(u)$  и  $g(u)$ , удовлетворяющих условиям (3.3.3) и (3.3.4), выберем функции следующего вида:  $f(u) = (a - au)(a + u)^{-1}$ ,  $g(u) = u(1 + u)^{-1}$ . Во всех экспериментах применялись следующие параметры:

- количество вычисляемых показателей Ляпунова  $K = 4$ ;
- время  $\Theta$  выхода на аттрактор — от 1000 до 3000, при этом в зависимости от скорости сходимости решения к моделируемому режиму не учитывалось в оценке (3.1.7) некоторое количество вычисленных норм из первых шагов обработки методом импульсных функций;
- интервал до следующей перенормировки решений линеаризованных систем  $T = h$ ;
- количество точек разбиения решений линеаризованных систем  $M = 1000$ ;
- параметр  $\lambda = 100$ .

Значения показателей Ляпунова для удобства округлены до четвертого знака после запятой.

Далее представлены комплекты сосуществующих режимов изучаемой в этом параграфе структуры при разных значениях параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $h$ . Наличие у моделируемых режимов нескольких промежутков положительности на периоде означает, что соответствующие режимы исходной модели (3.3.1) обладают bursting-эффектом. Отметим, что импульсно-рефрактерный режим удастся получить при всех представленных наборах параметров, поскольку они удовлетворяют условию теоремы 3.1, но для краткости та-

Таблица 3.4. Первые 4 показателя Ляпунова сосуществующих режимов (a)–(d) при  $a = 1.5$ ,  $b = 2$ ,  $c = -10.81$ ,  $h = 11.75$

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
(a)	0.0000	-0.0011	-1.2020	-1.2050
(b)	0.0000	0.0000	-1.1966	-1.2070
(c)	0.0000	0.0000	-1.1918	-1.2084
(d)	0.0000	-0.8033	-3.3004	-3.6840

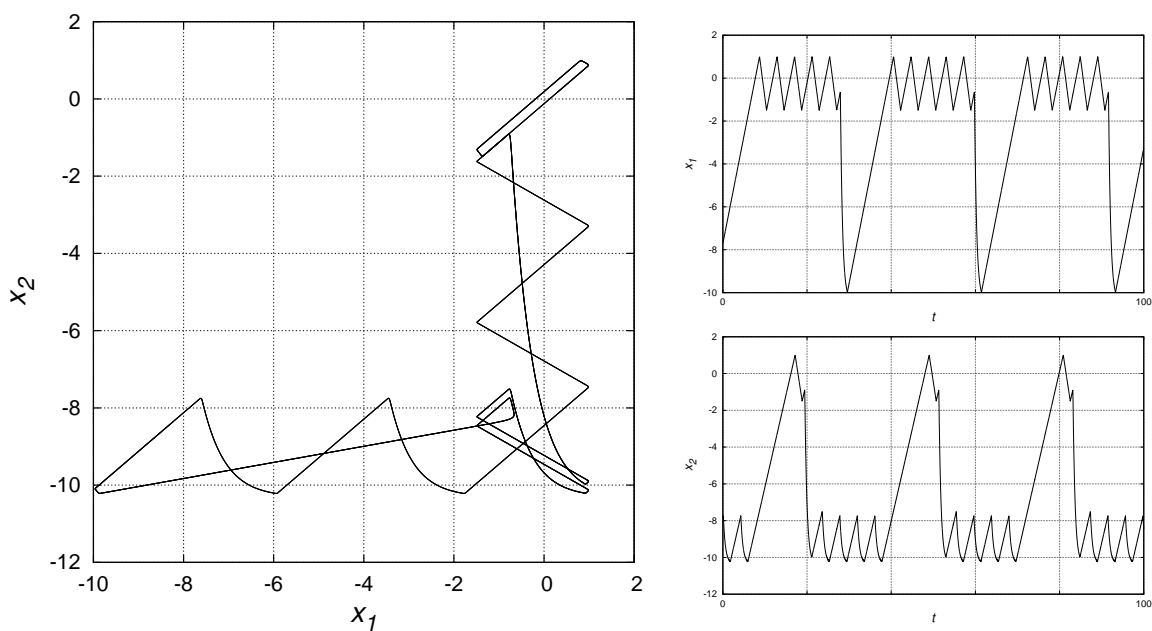


Рис. 3.1. Периодическое решение с пятью промежутками положительности первой компоненты и одним второй компоненты (а).

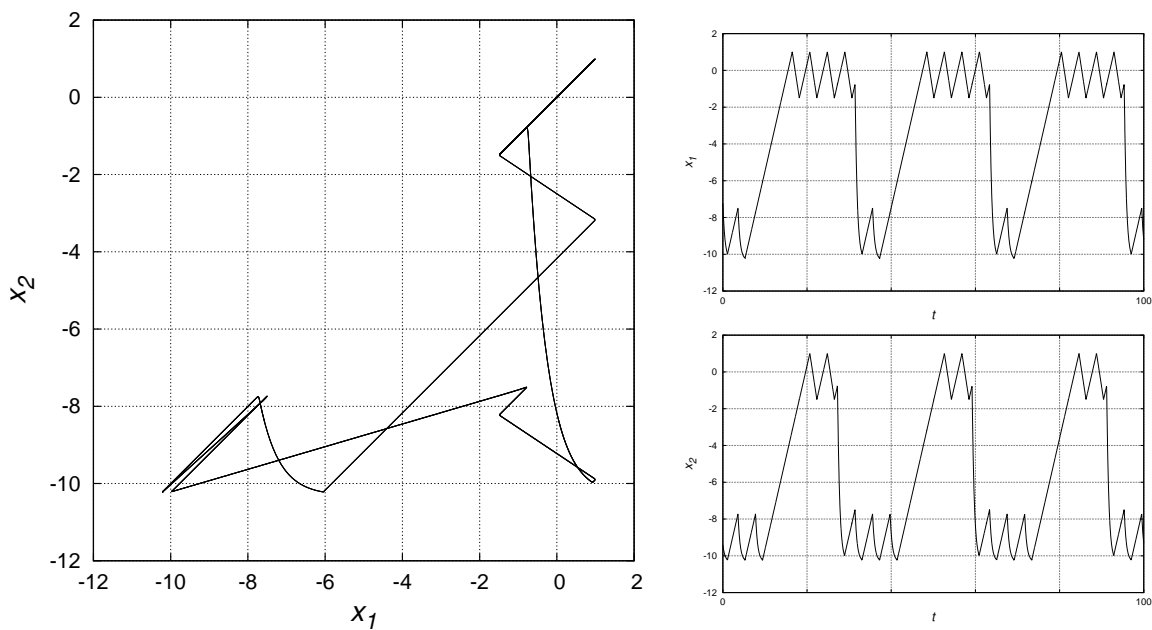


Рис. 3.2. Периодическое решение с четырьмя промежутками положительности первой компоненты и двумя второй компоненты (б).

кой режим будет проиллюстрирован лишь в случае первого набора из-за однотипного графического представления и сходства устройства спектров показателей Ляпунова.



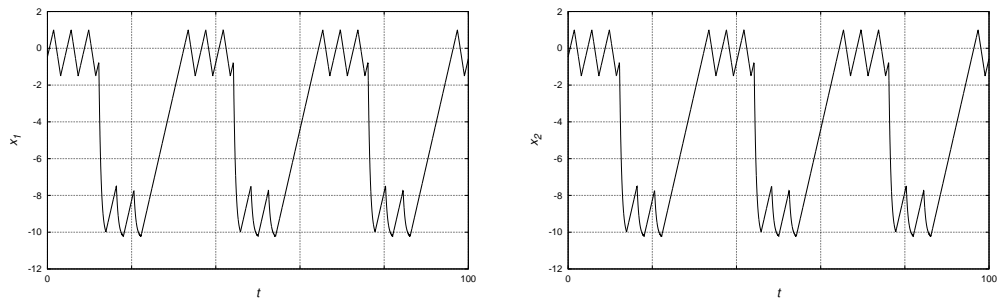


Рис. 3.3. Однородный режим с суммарно шестью промежутками положительности (с).

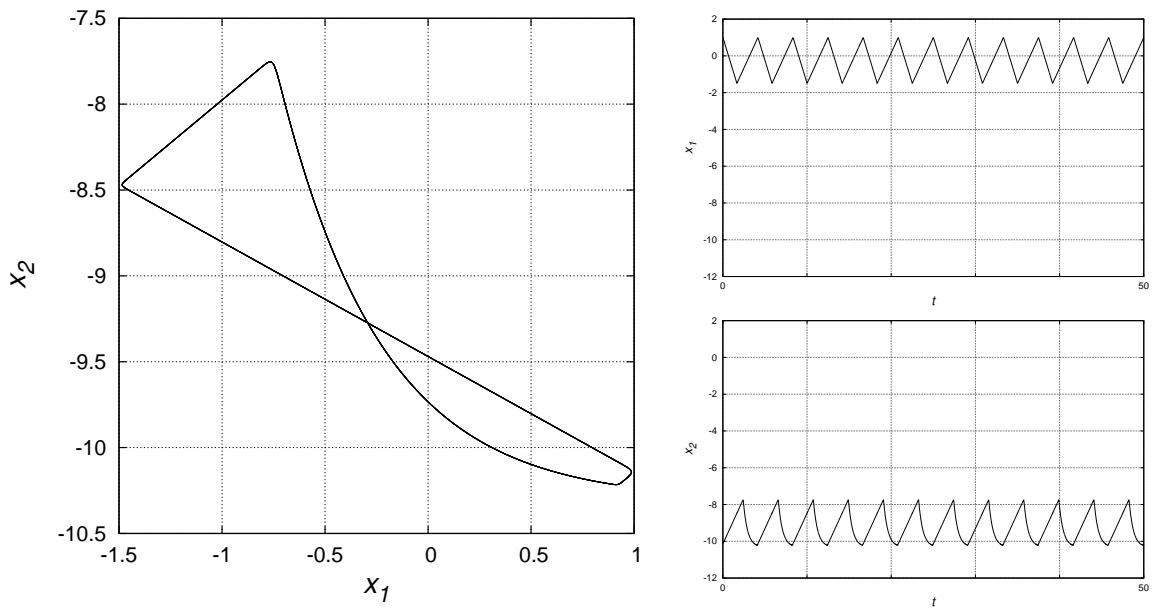


Рис. 3.4. Импульсно-рефрактерный режим (d).

Сначала рассмотрим режимы при  $a = 1.5$ ,  $b = 2$ ,  $c = -10.81$ ,  $h = 11.75$  (см. рис. 3.1–3.4 и таблицу 3.4). Режимы (a)–(c) обладают суммарно шестью промежутками положительности на длине периода. Режим (с) является однородным, поэтому для этого режима (и подобных однородных режимов при других параметрах) представлены лишь графики изменения компонент системы по времени. Близость к нулю вторых показателей Ляпунова у режимов (a), (b) и (с) подтверждает близость к единичной окружности мультипликаторов  $\mu_2$ , описанных в лемме 3.4, что указывает на наличие у этих режимов феномена

Таблица 3.5. Первые 4 показателя Ляпунова сосуществующих режимов (e)–(h) при  $a = 1.5$ ,  $b = 2$ ,  $c = -15.13$ ,  $h = 15.92$

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
(e)	0.0000	-0.0007	-0.8801	-0.8842
(f)	0.0000	0.0000	-0.8750	-0.8842
(g)	0.0000	0.0000	-0.8694	-0.8807
(h)	0.0000	0.0000	-0.8686	-0.8820

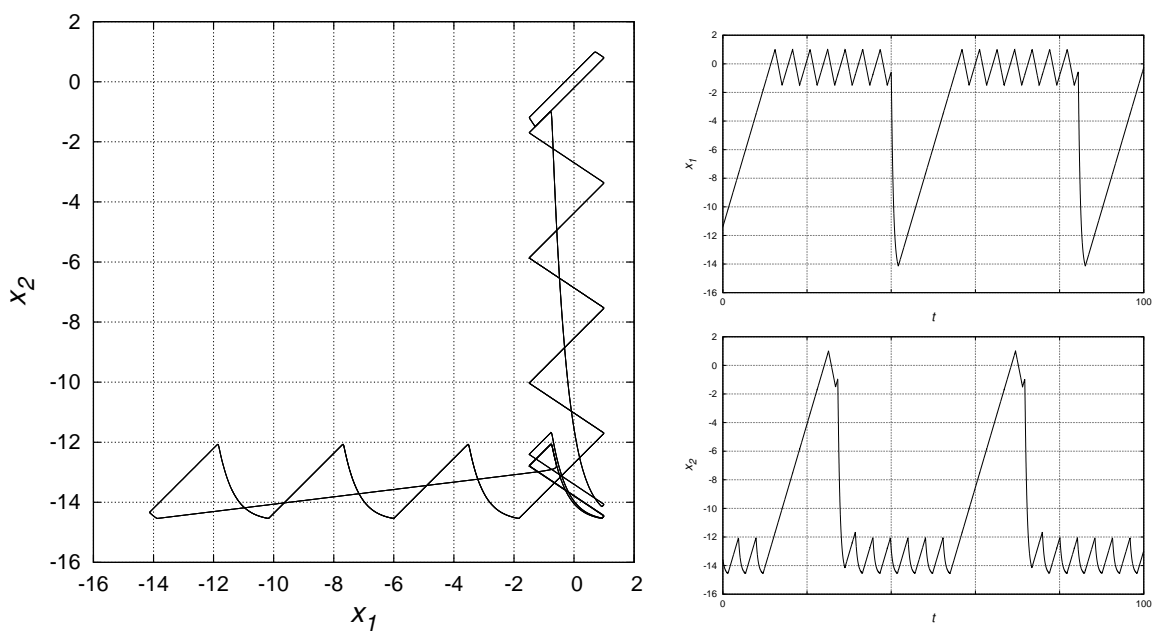


Рис. 3.5. Периодическое решение с семью промежутками положительности первой компоненты и одним второй компоненты (e).

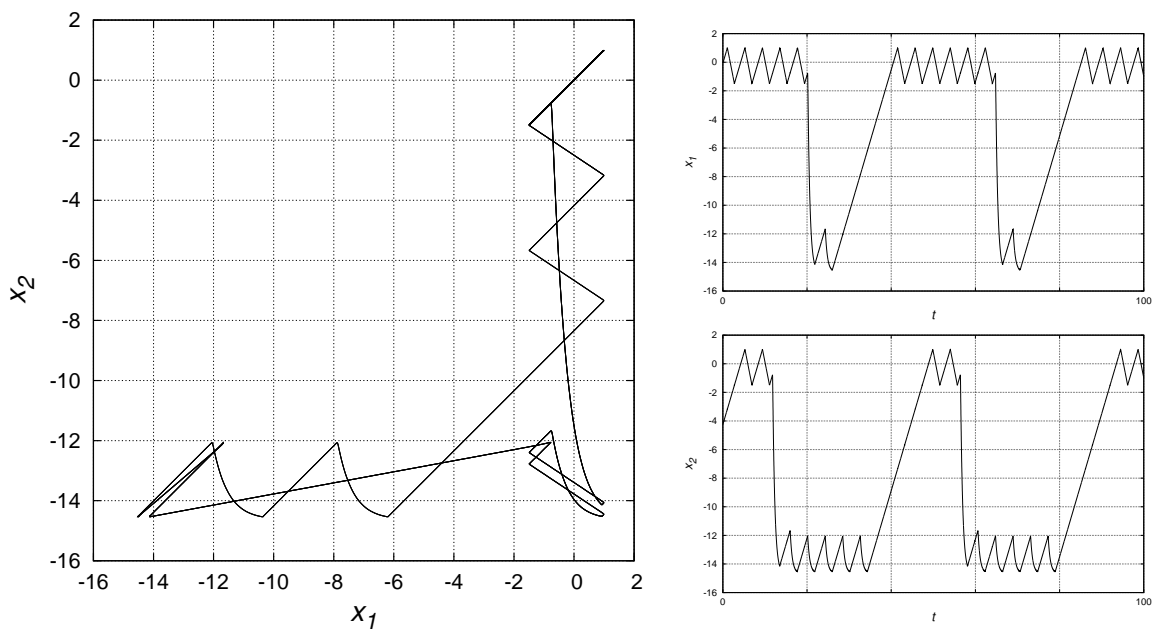


Рис. 3.6. Периодическое решение с шестью промежутками положительности первой компоненты и двумя второй компоненты (f).

квазиустойчивости. Режим (d) является импульсно-рефрактерным; отделенность от нуля второго показателя Ляпунова соответствует значениям мультипликаторов, описанным в лемме 3.1.

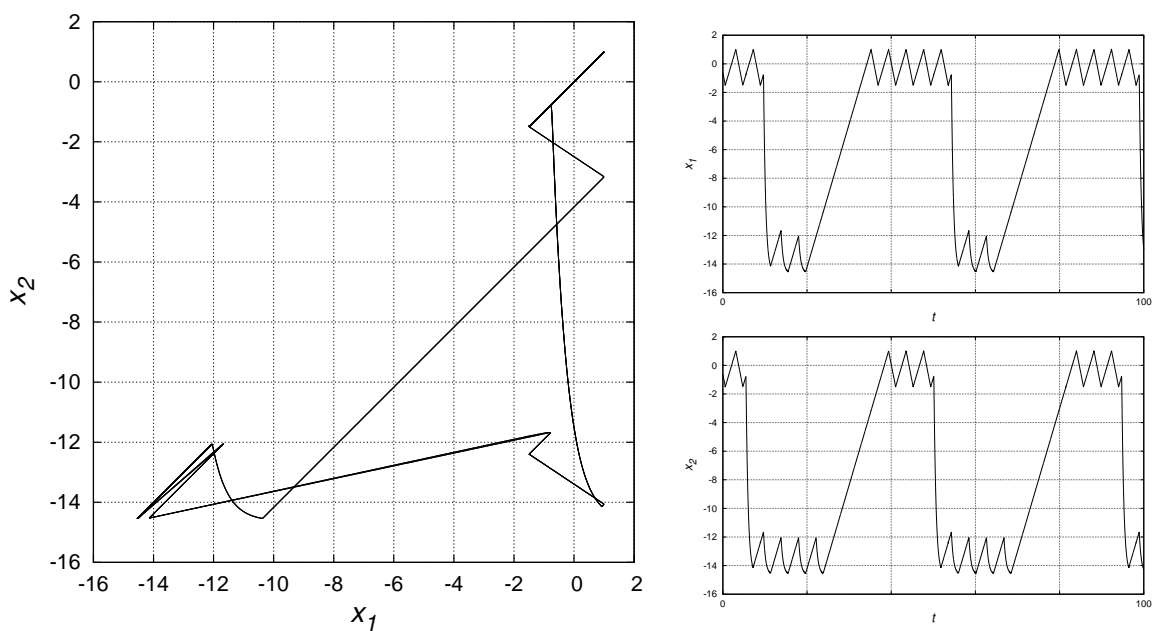


Рис. 3.7. Периодическое решение с пятью промежутками положительности первой компоненты и тремя второй компоненты (g).

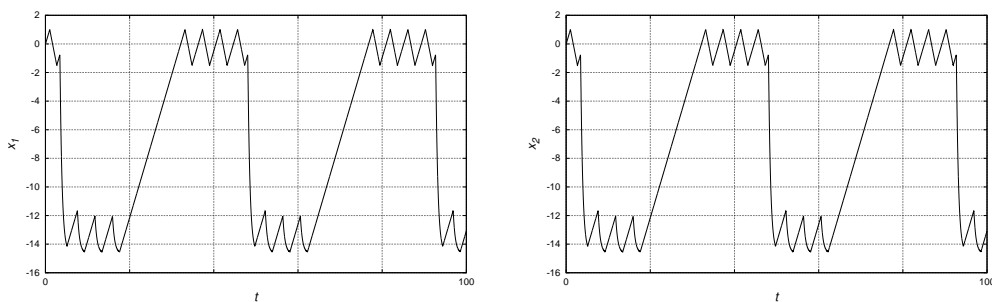


Рис. 3.8. Однородный режим с суммарно восемью промежутками положительности (h).

Перейдем теперь к другому комплекту сосуществующих режимов, которые реализуются при  $a = 1.5$ ,  $b = 2$ ,  $c = -15.13$ ,  $h = 15.92$  (см. рис. 3.5–3.8, таблицу 3.5). Все представленные режимы обладают суммарно восемью промежутками положительности, при этом режим (h) является однородным. Численные результаты подтверждают наличие феномена квазистойчивости у всех режимов (e)–(h).

Таблица 3.6. Первые 4 показателя Ляпунова сосуществующих режимов (i)–(m) при  $a = 1.5$ ,  $b = 2$ ,  $c = -4.5$ ,  $h = 15.9167$

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
(i)	0.0000	-0.0011	-0.9167	-0.9533
(j)	0.0000	0.0000	-0.9828	-1.0417
(k)	0.0000	0.0000	-1.0422	-1.0446
(l)	0.0000	0.0000	-1.0413	-1.0443
(m)	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9570

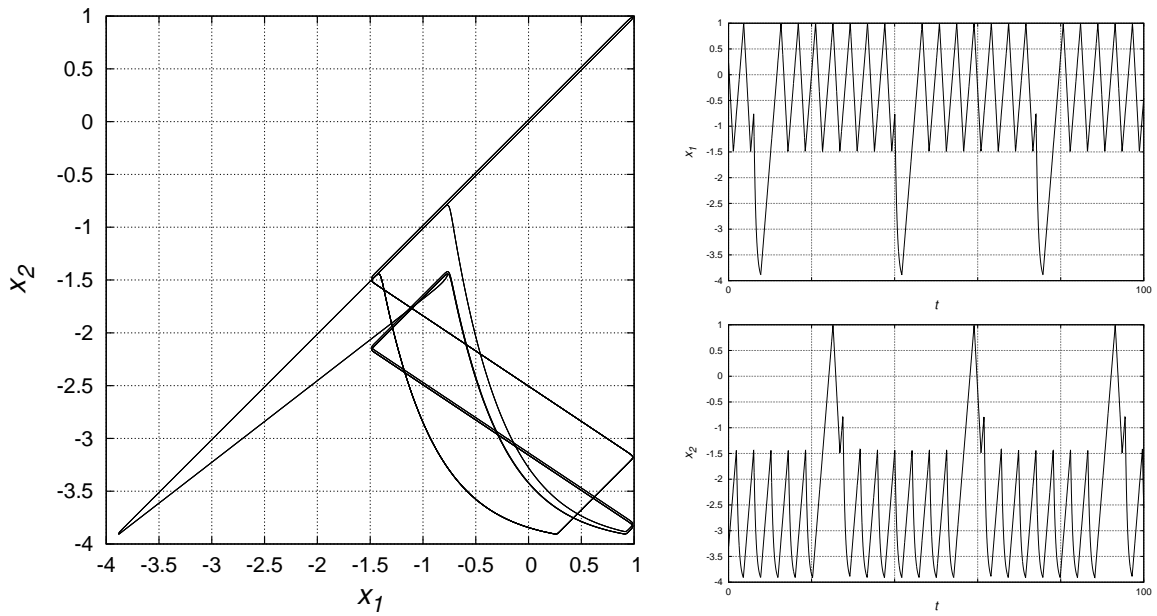


Рис. 3.9. Периодическое решение с семью промежутками положительности первой компоненты и одним второй компоненты (i).

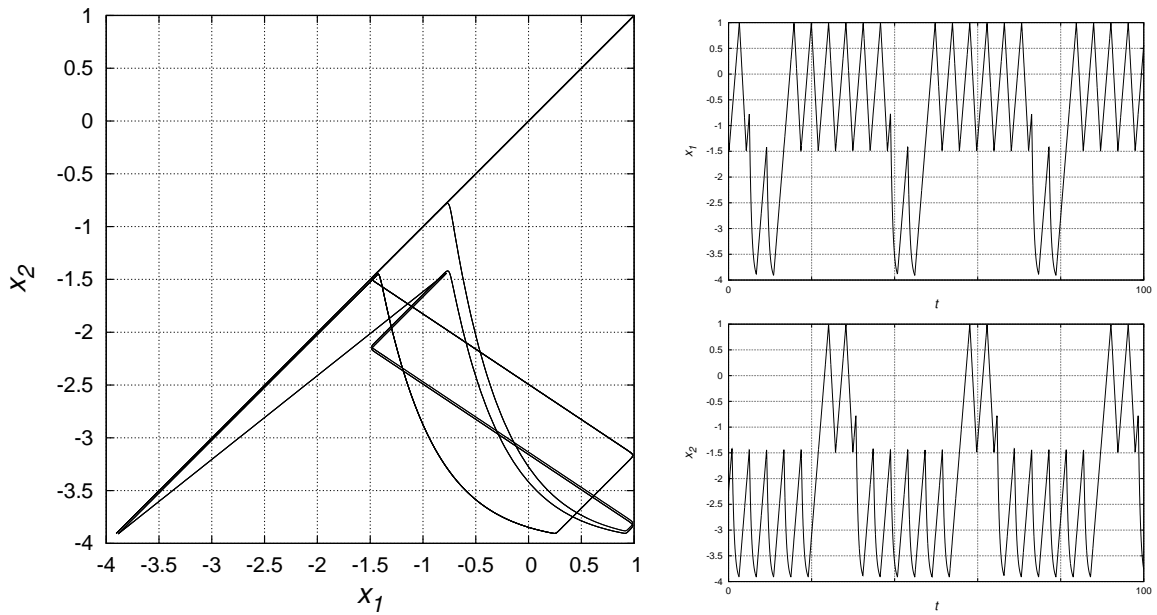


Рис. 3.10. Периодическое решение с шестью промежутками положительности первой компоненты и двумя второй компоненты (j).

Все указанные сосуществующие режимы при  $a = 1.5$ ,  $b = 2$ ,  $c = -4.5$ ,  $h = 15.9167$  (см. рис. 3.9–3.13, таблицу 3.6) обладают четным количеством суммарных промежутков положительности на периоде, причем у режимов (i)–(l) наблюдается по восемь суммарных

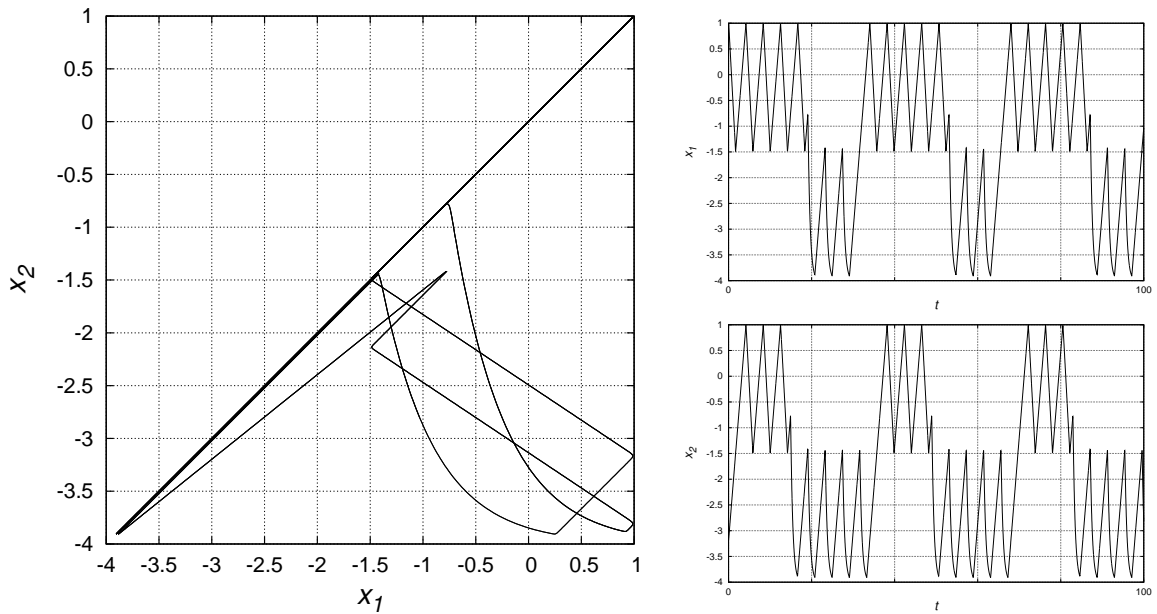


Рис. 3.11. Периодическое решение с пятью промежутками положительности первой компоненты и тремя второй компоненты (к).

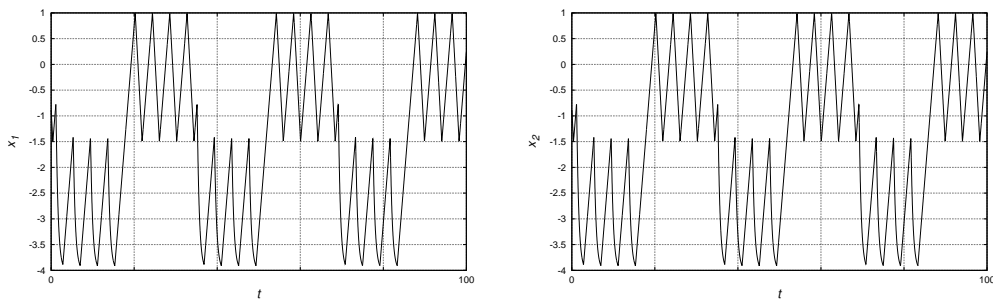


Рис. 3.12. Однородный режим с суммарно восемь промежутками положительности (л).

промежутков положительности, а у противофазного режима (м) — четыре суммарных промежутка положительности. Близость к нулю второго и третьего показателей Ляпунова у противофазного режима соответствует значениям мультипликаторов, описанным в лемме 3.3. Таким образом, у всех режимов (i)–(м) численно подтверждается феномен квазиустойчивости.

Таблица 3.7. Первые 4 показателя Ляпунова сосуществующих режимов (n)–(p) при  $a = 1.5$ ,  $b = 2$ ,  $c = -4.5$ ,  $h = 7.58333$

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
(n)	0.0000	-0.0020	-2.0710	-2.0797
(o)	0.0000	-0.0001	-2.0781	-2.0857
(p)	0.0000	-0.0041	-0.0041	-2.1927

Рассмотрим значения параметров  $a = 1.5$ ,  $b = 2$ ,  $c = -4.5$ ,  $h = 7.58333$  и сосуществующие режимы, им соответствующие (см. рис. 3.14–3.16, таблицу 3.7). Удалось получить

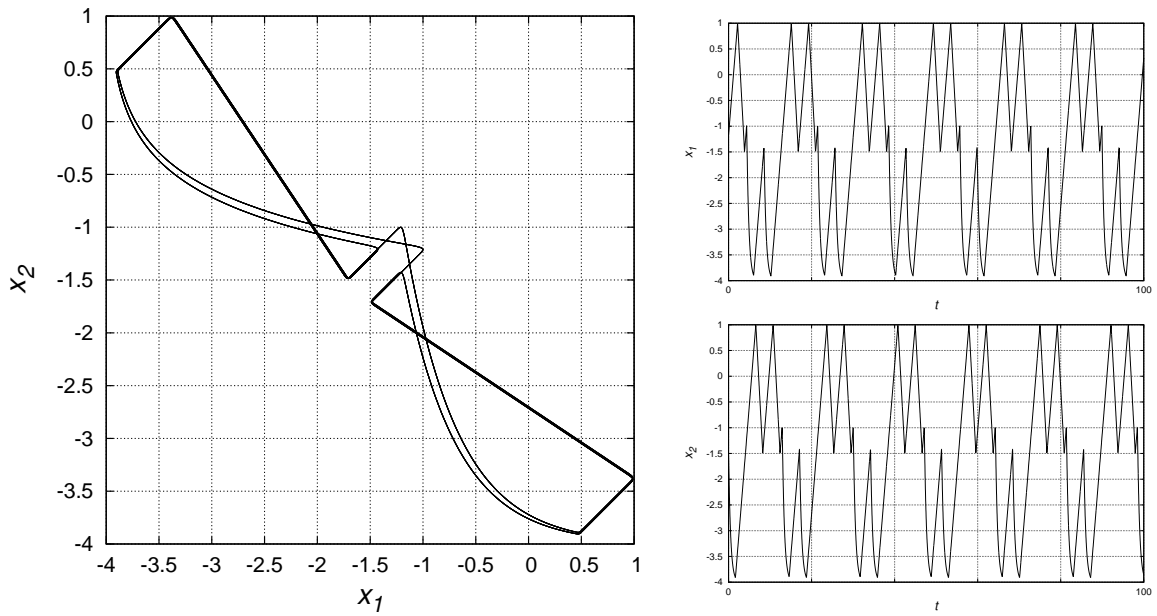


Рис. 3.13. Противофазный режим с суммарно четырьмя промежутками положительности (m).

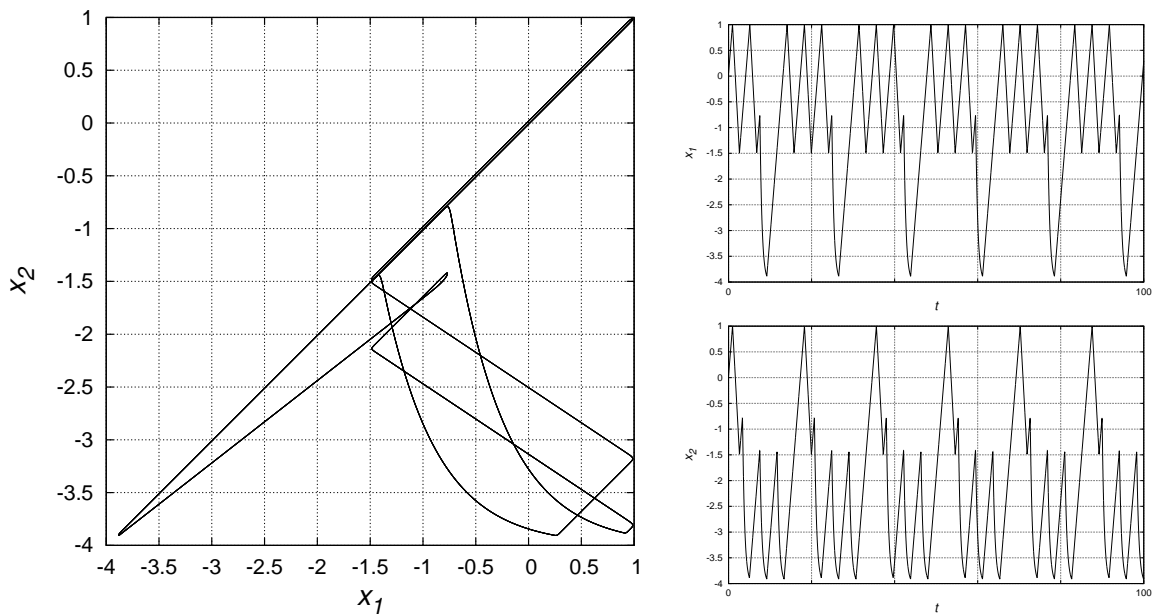


Рис. 3.14. Периодическое решение с тремя промежутками положительности первой компоненты и одним второй компоненты (n).

режимы (n) и (o), причем режим (o) является однородным, — суммарно у каждого из них по четыре суммарных промежутка положительности, а также противофазный ре-

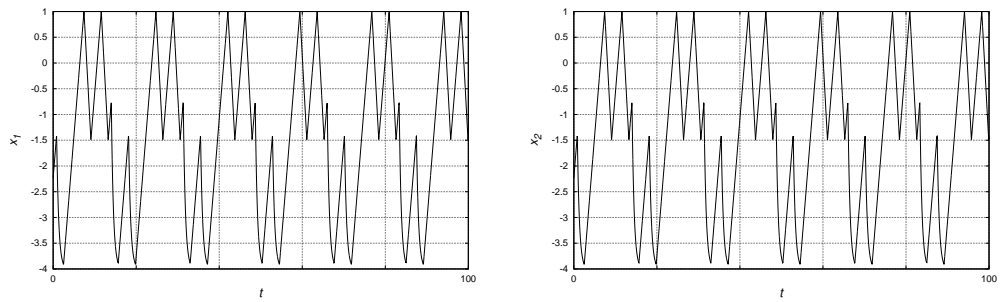


Рис. 3.15. Однородный режим с суммарно четырьмя промежутками положительности (o).

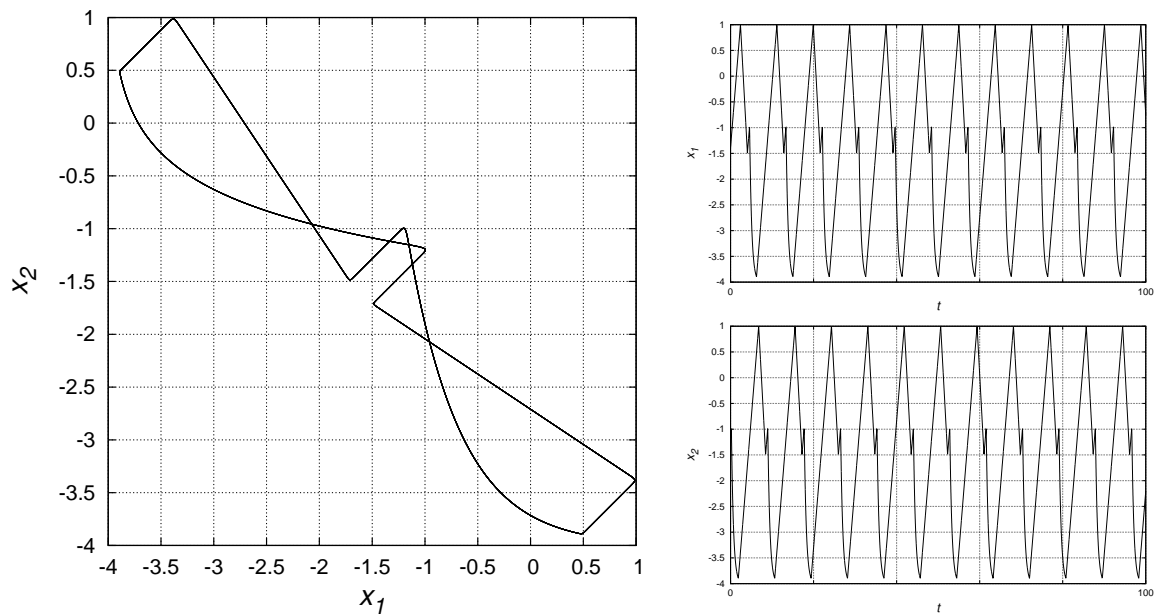


Рис. 3.16. Противофазный режим с суммарно двумя промежутками положительности (p).

жим (p), у которого лишь два промежутка положительности на периоде, при этом все представленные режимы обладают феноменом квазистойчивости.

Все рассмотренные выше режимы, за исключением импульсно-рефрактерного, обладают четным суммарным количеством промежутков положительности на периоде, что обусловлено специальным выбором параметров для соответствия представленным в этом параграфе аналитическим результатам. Но численно удается показать наличие феномена квазистойчивости и у режимов схожей структуры с нечетным суммарным количеством промежутков положительности, например, при значениях параметров  $a = 1.5$ ,  $b = 2$ ,  $c = -4.5$ ,  $h = 13.7$  (см. рис. 3.17–3.19, таблицу 3.8).

Отметим, что сосуществующие режимы при  $b = 7$ , у части из которых проявляется квазистойчивое поведение, представлены в работе [70].

Таким образом, отметим, что асимптотический анализ устойчивых релаксационных периодических режимов сингулярно возмущенной системы (3.3.1) и сопутствующая ему

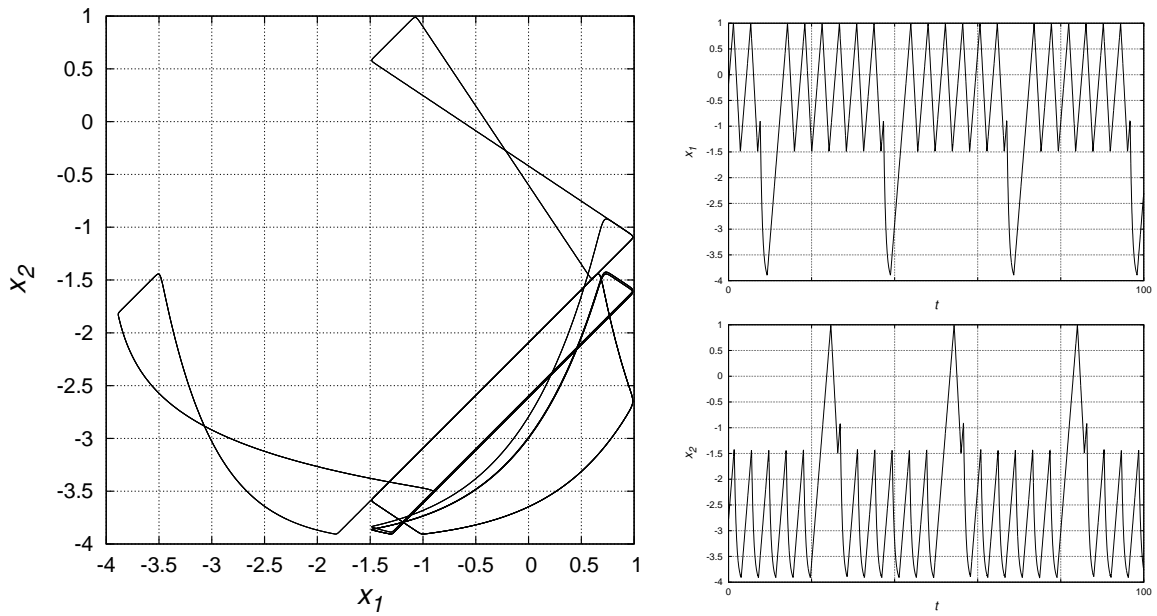


Рис. 3.17. Периодическое решение с шестью промежутками положительности первой компоненты и одним второй компоненты ( $q$ ).

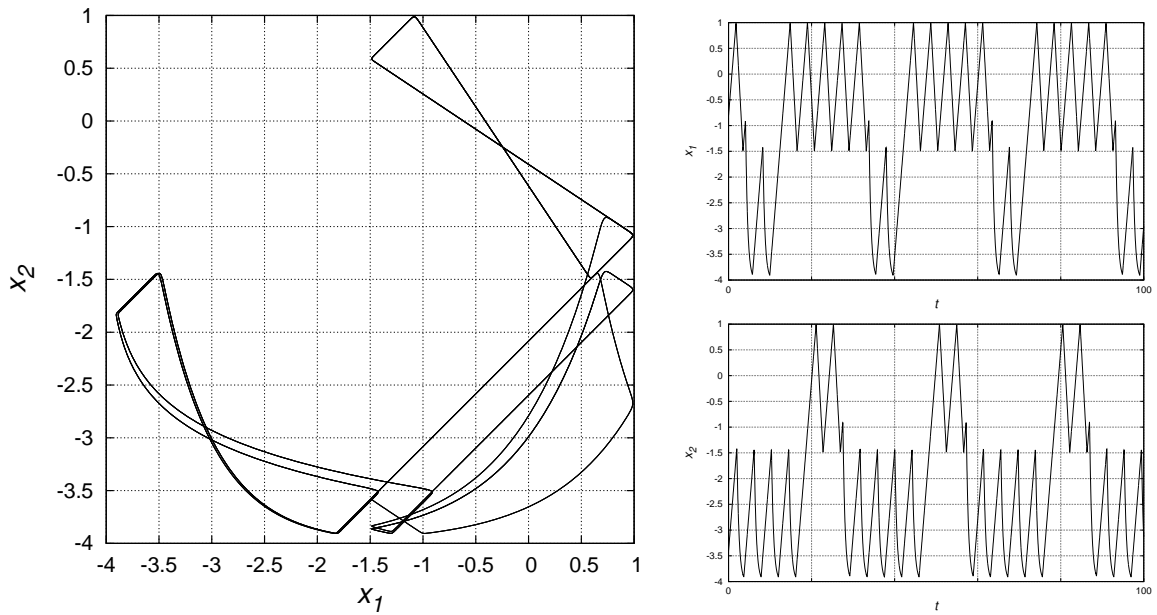


Рис. 3.18. Периодическое решение с пятью промежутками положительности первой компоненты и двумя второй компоненты ( $r$ ).

численная оценка ляпуновских показателей этих режимов демонстрируют наличие у них эффекта квазиустойчивости. При этом, в отличие от статьи [15], где один из мультипликаторов задачи асимптотически близок к единичному значению, в нашем случае



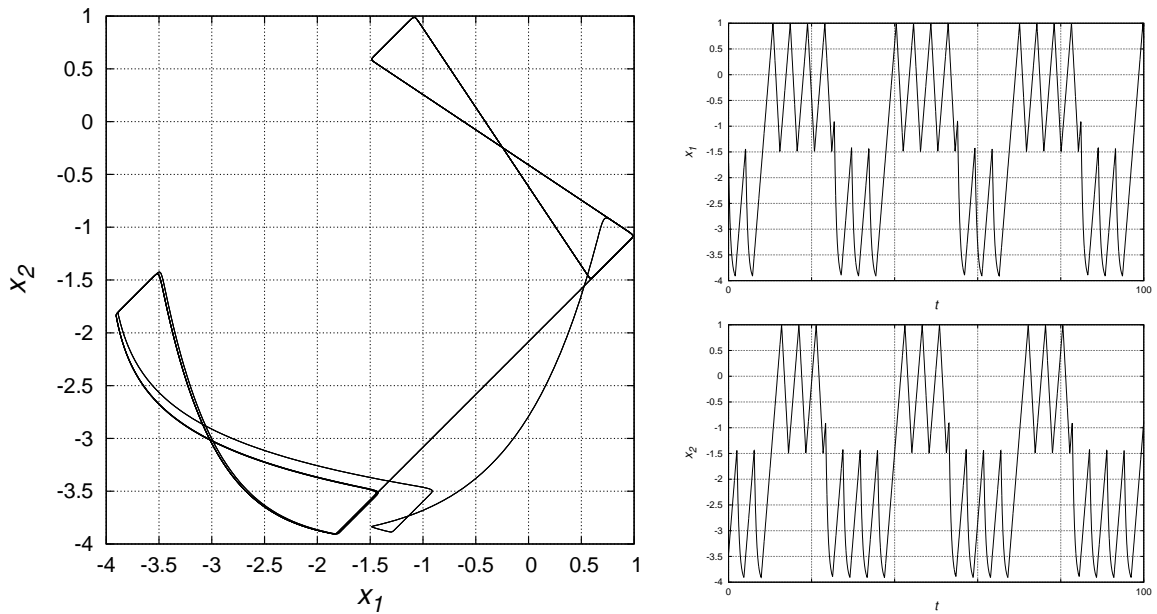


Рис. 3.19. Периодическое решение с четырьмя промежутками положительности первой компоненты и тремя второй компоненты (s).

Таблица 3.8. Первые 4 показателя Ляпунова сосуществующих режимов (q)–(s) при  $a = 1.5$ ,  $b = 2$ ,  $c = -4.5$ ,  $h = 13.7$

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
(q)	0.0000	-0.0012	-1.0672	-1.1220
(r)	0.0000	0.0000	-1.1962	-1.1982
(s)	0.0000	0.0000	-1.1975	-1.2015

мультипликаторы оказываются близкими к единице не по причине наличия большого параметра, а в соответствии с выбором параметров задачи, каждый из которых имеет порядок единицы. Таким образом, вполне общей является ситуация, когда в динамической системе, на первый взгляд, вовсе нет малого или большого параметра, а переходный процесс к периодическому решению оказывается весьма длительным. Предложенный в этой работе алгоритм оценки спектра ляпуновских показателей позволяет эффективно диагностировать такие феномены. Близость к нулю не только старшего, но и еще какого-то количества ляпуновских показателей, свидетельствует о том, что либо устойчивый режим динамической системы является многочастотным, либо, как в случае рассматриваемой модели, реализуется явление квазиустойчивости. Знание этой дополнительной информации позволяет более эффективно применять численные методы к динамическим системам с запаздыванием.

### 3.4. Исследование пространственно неоднородных режимов логистического уравнения с запаздыванием и диффузией

Описанный в первом параграфе алгоритм позволяет получать оценки спектра показателей Ляпунова и в случае пространственно распределенных задач. Поэтому в качестве объектов исследования выберем некоторые устойчивые режимы из первой главы диссертации.

Таким образом, совместно с системой (1.3.1), которая задается решением  $N_{i,j}(t)$ , численно будем решать комплект линеаризованных на изучаемом аттракторе систем вида

$$\frac{d\tilde{N}_{k,i,j}}{dt} = D \left( \frac{\tilde{N}_{k,i-1,j} - 2\tilde{N}_{k,i,j} + \tilde{N}_{k,i+1,j}}{(\delta x_1)^2} + \frac{\tilde{N}_{k,i,j-1} - 2\tilde{N}_{k,i,j} + \tilde{N}_{k,i,j+1}}{(\delta x_2)^2} \right) + r(1 - N_{i,j}(t-1))\tilde{N}_{k,i,j} - rN_{i,j}\tilde{N}_{k,i,j}(t-1), \quad (3.4.1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{k,i,0} &\equiv \tilde{N}_{k,i,1}, & \tilde{N}_{k,i,m+1} &\equiv \tilde{N}_{k,i,m}, & \forall i \in 1, \dots, m; \\ \tilde{N}_{k,0,j} &\equiv \tilde{N}_{k,1,j}, & \tilde{N}_{k,m+1,j} &\equiv \tilde{N}_{k,m,j}, & \forall j \in 1, \dots, m, \end{aligned}$$

где  $k = 1, \dots, K$ ,  $K$  — количество вычисляемых показателей Ляпунова.

Для всех опытов применялись следующие параметры:

- время до перенормировки решений линеаризованных систем  $T = 1$ ;
- количество пересчетов показателей Ляпунова  $L = 2000$ ;
- количество точек разбиения решений линеаризованных систем  $M = 1000$ ;
- $K = 5$ ;
- $r = 3$ .

Значения показателей Ляпунова для удобства округлены до второго знака после запятой.

Применялся как метод импульсных функций, так и метод тригонометрических функций, но по причине отсутствия расхождений в двух знаках после запятой выбор метода для указанных ниже спектров показателей Ляпунова опущен. Отметим, что различие в скорости расчетов указанными методами для такой пространственно распределенной задачи оказалось несущественным.

Поскольку описанные параметры подразумевают решение суммарно 60000 уравнений с запаздыванием методом Дормана–Принса пятого порядка с переменной длиной шага интегрирования, то для получения результата вычислений за приемлемое время (хотя бы в рамках одной-двух недель) требуется серьезный объем оперативной памяти и большое количество ядер для параллельных вычислений, что приводит к необходимости применения кластерных технологий.

Далее представлены спектры показателей Ляпунова для:

- a) режима ведущего центра при  $D = 0.037$  (рис. 1.2),
- b) режима ведущего центра при  $D = 0.0078$  (рис. А.1),
- c) режима самоорганизации “вихрь” при  $D = 0.042$  (рис. 1.4),
- d) режима самоорганизации “вихрь” при  $D = 0.0091$  (рис. А.4),
- e) режима самоорганизации “вихрь” при  $D = 0.0054$  (рис. А.5),
- f) режима спиральной волны при  $D = 0.0025$  (рис. А.5),
- g) режима спиральной волны при  $D = 0.0004$  (рис. А.6),
- h) режима двух согласованных вихрей при  $D = 0.037$  (рис. 1.6),
- i) режима четырех согласованных вихрей при  $D = 0.031$  (рис. 1.8),
- j) режима тройной спиральной волны при  $D = 0.02$  (рис. А.12).

Таблица 3.9. Первые 5 показателей Ляпунова режимов (a)–(j)

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
(a)	0.00	0.00	-0.01	-0.21	-0.69
(b)	0.00	-0.05	-0.07	-0.13	-0.13
(c)	0.00	-0.15	-0.15	-0.42	-0.42
(d)	0.00	0.00	0.00	-0.26	-0.26
(e)	0.00	0.00	0.00	-0.27	-0.27
(f)	0.00	0.00	0.00	-0.27	-0.27
(g)	0.00	0.00	0.00	-0.22	-0.22
(h)	0.00	0.00	-0.02	-0.02	-0.02
(i)	0.00	0.00	-0.01	-0.02	-0.02
(j)	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.05

Учитывая одночастотность режима ведущего центра (a) (рис. 1.3) и режима четырех согласованных вихрей (i) (рис. 1.9), а также опираясь на сказанное в предыдущем параграфе, можно заключить, что в случае этих режимов наблюдается эффект квазиустойчивости. Правда, это объясняется близостью к соответствующему им критическому значению диффузии. Дополнительные опыты показывают, что при уменьшении значения  $D$  второй показатель у этих режимов отделяется от нуля. Нулевой второй показатель режима двух согласованных вихрей (h) обусловлен двухчастотностью режима (см. псевдофазовый портрет на рис. 1.7). Многочастотность вихревых режимов (d)–(e) при низких значениях диффузии и спиральных волн (f)–(g) проявилась в трех нулевых показателях, а в случае режима тройной спиральной волны (j) — в четырех. Обратим внимание на то, что у режимов (f)–(g) влияние дополнительных частот на поведение решения ничтожно, поскольку практически не проявлялось при оценке их динамических характеристик.

Малые значения показателей Ляпунова говорят о медленной сходимости решений к указанным режимам в случае не слишком удачного выбора начальных условий, что

подчеркивает сложность задачи обнаружения новых аттракторов в рассматриваемой системе.

Отдельно отметим, что в случае вихревых режимов, у которых наблюдается спиралевидный хвост (режимы (d)–(g)), первые пять показателей Ляпунова при уменьшении значения коэффициента диффузии  $D$  меняются несущественно, что указывает на отсутствие качественной разницы в сходимости к этим режимам при достаточно заметной визуальной разнице между ними.

## Заключение

В заключение перечислим основные результаты, полученные в работе.

В диссертационной работе изложен ряд численных и аналитических результатов исследования систем разной природы в плоской области, у которых обнаруживаются режимы с самоорганизацией. Сначала была рассмотрена задача поиска устойчивых сосуществующих режимов одной нелинейной краевой задачи с запаздыванием из популяционной динамики. С помощью метода нормальных форм построена асимптотика пространственно однородного цикла и исследована зависимость его устойчивости от параметра диффузии, доказана бифуркационная теорема о фазовых перестройках в плоской области при критическом значении коэффициента диффузии. При значениях параметра роста популяции, не близких к критическим, процесс потери устойчивости пространственно однородного решения изучен численными методами, основанными на вычислении системы из 10000 дифференциальных уравнений с запаздыванием методом Дормана–Принса пятого порядка с переменной длиной шага интегрирования. Затем был проведен обширный численный эксперимент с целью поиска сосуществующих аттракторов задачи. На основе численного анализа сделан вывод о существовании у краевой задачи решений двух типов, первый из которых имеет простое пространственное распределение и наследует свойства однородного решения, а второй, названный режимом самоорганизации, более сложно распределен по пространству и имеет существенно более предпочтительные с точки зрения популяционной динамики свойства. Обнаружены три типа устойчивых режимов с эффектом самоорганизации вблизи критического значения диффузионного параметра. Проведены исследования эволюции некоторых полученных режимов при изменении параметра диффузии, в том числе рассмотрен переход режимов вихревой структуры в режимы спиральных волн. При малом значении диффузии указаны режимы со сложной структурой, в частности спиральные волны с тремя фронтами. Приведен пример генерации сложного режима, основанного на множестве согласованных спиральных волн. Затронута проблема возникновения мультистабильности.

Далее, рассмотрена параболическая краевая задача, состоящая из трех уравнений вольтерровского типа, которая представляет собой математическую модель реакции Белоусова–Жаботинского. Исследованы локальная динамика этого уравнения и задача о диффузионной потере устойчивости пространственно однородного цикла. Доказана бифуркационная теорема о рождении устойчивого цикла в точечной модели. Получены условия существования и устойчивости пространственно однородного орбитально асимптотически устойчивого предельного цикла. Доказана бифуркационная теорема о фазовых перестройках в плоской области при критическом значении коэффициента диффузии. Проведен численный анализ сосуществующих хаотических колебательных режимов краевой задачи в плоской области, возникающих при уменьшении коэффициента диф-

фузии. Показано, что в модели наряду с пространственно неоднородными режимами, бифурцирующими от пространственно однородного, присутствуют хаотические колебательные режимы с самоорганизацией.

Наконец, в последней части работы разработан алгоритм численной оценки спектра показателей Ляпунова для систем с запаздывающими аргументами, включающий в себя две методики обработки решений, одна из которых основана на базисе импульсных функций, а другая — на базисе тригонометрических функций, получены результаты его тестирования на уравнении Хатчинсона в случае устойчивого единичного состояния равновесия. Численно показана близость полученных значений характеристик к вещественным частям корней характеристического квазиполинома, что позволяет считать используемый метод вполне корректным. Проиллюстрировано применение алгоритма к модели из нейродинамики. Получены результаты численного анализа, подтверждающие наличие у некоторых сосуществующих режимов феномена квазиустойчивости. Также вычислены спектры показателей Ляпунова некоторых пространственно неоднородных режимов логистического уравнения с запаздыванием, для части из которых также обнаруживается квазиустойчивость.

Для генерации описанных в первой главе пространственно неоднородных режимов, а также для получения оценки спектра показателей Ляпунова на основе описанных методик были созданы программные комплексы, получены свидетельства о регистрации в Федеральной службе по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам Российской Федерации.

# Литература

1. *Алешин, С.В.* Оценка инвариантных числовых показателей аттракторов систем дифференциальных уравнений с запаздыванием / *С.В. Алешин* // Вычислительные технологии в естественных науках: методы суперкомпьютерного моделирования. 1–3 окт. 2014, Россия, Таруса: сб. тр. / Под ред. Р.Р. Назирова, Л.Н. Щура. М.: ИКИ РАН, 2014. С. 10–17.
2. *Алешин, С.В.* Оценка инвариантных числовых показателей квазиустойчивых аттракторов динамических систем с запаздыванием / *С.В. Алешин, В.Е. Горюнов* // Международная научная конференция «Интегрируемые системы и нелинейная динамика», 1–5 октября 2018 г., Ярославль. С. 90–91.
3. *Ахромеева, Т.С.* Структуры и хаос в нелинейных средах / *Т.С. Ахромеева, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, А.А. Самарский* — М.: Физматлит. 2007.
4. *Балякин, А.А.* Вычисление спектра показателей Ляпунова для распределенных систем радиофизической природы / *А.А. Балякин, Е.В. Блохина* // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 2. С. 87–110.
5. *Балякин, А.А.* Особенности расчета спектров показателей Ляпунова в распределенных системах с запаздывающей обратной связью / *А.А. Балякин, Н.М. Рыскин* // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 6. С. 3–21.
6. *Белоусов, Б.П.* Периодически действующая реакция и ее механизм / *Б.П. Белоусов* // Сборник рефератов по радиационной медицине за 1958 г., Медгиз. 1959. С. 145–147.
7. *Белоусов, Б.П.* Периодически действующая реакция и ее механизм / *Б.П. Белоусов* // Автоволновые процессы в системах с диффузией. 1981. С. 176–186.
8. *Боголюбов, Н.Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / *Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский* — М.: Наука. 1974.
9. *Былов, Б.Ф.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / *Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, Д.М. Гробман, В.В. Немыцкий* — М.: Наука. 1966.
10. *Васильева, А.Б.* Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией / *А.Б. Васильева, С.А. Кащенко, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов* // Мат. сб. 1986. Т. 130(172), № 4(8). С. 488–499.

11. *Гантмахер, Ф.Р.* Теория матриц / *Ф.Р. Гантмахер* — М., 2 изд. 1966.
12. *Гапонов-Грехов, А.В.* Автоструктуры. Хаотическая динамика ансамблей / *А.В. Гапонов-Грехов, М.И. Рабинович* // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. М.: Наука. 1987. С. 7–44.
13. *Глызин, С.Д.* Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора / *С.Д. Глызин, С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов* // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 2. С. 284–289.
14. *Глызин, С.Д.* Дискретные автоволны в нейронных системах / *С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52, № 5. С. 840–858.
15. *Глызин, С.Д.* Квазиустойчивые структуры в кольцевых генных сетях / *С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58, № 5. С. 682–704.
16. *Глызин, С.Д.* Конечномерные модели диффузионного хаоса / *С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50, № 5. С. 860–875.
17. *Глызин, С.Д.* Локальные методы анализа динамических систем: учебное пособие / *С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов* — Ярославль: ЯрГУ. 2006. 92 с.
18. *Глызин, С.Д.* Моделирование эффекта взрыва в нейронных системах / *С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов* // Матем. заметки. 2013. Т. 93, № 5. С. 684–701.
19. *Глызин, С.Д.* Об одном способе математического моделирования химических синапсов / *С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов* // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 10. С. 1227–1244.
20. *Глызин, С.Д.* Пространственно-неоднородные периодические решения в распределенном уравнении Хатчинсона / *С.Д. Глызин, С.А. Кащенко, А.С. Полстянов* // Модел. и анализ информ. систем. 2009. Т. 16, № 4. С. 77–85.
21. *Глызин, С.Д.* Разностные аппроксимации уравнения «реакция–диффузия» на отрезке / *С.Д. Глызин* // Модел. и анализ информ. систем. 2009. Т. 16, № 3. С. 96–116.
22. *Глызин, С.Д.* Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов / *С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов* // УМН. 2015. Т. 70, № 3(423). С. 3–76.
23. *Глызин, С.Д.* Релаксационные автоколебания в сетях Хопфилда с запаздыванием / *С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов* // Изв. РАН. Сер. матем. 2013. Т. 77, № 2. С. 53–96.
24. *Глызин, С.Д.* Релаксационные автоколебания в системе из двух синаптически связанных импульсных нейронов / *С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Е.А. Марушкина, М.М. Преображенская* // XIX международная научно-техническая конференция Нейроинформатика-2017, сб. науч. тр.: часть 1. 2017. С. 29–39.



25. *Глызин, С.Д.* Релаксационные колебания и диффузионный хаос в реакции Белоусова / *С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51, № 8. С. 1400–1418.
26. *Глызин, С.Д.* Сценарии фазовых перестроек одной конечноразностной модели уравнения «реакция-диффузия» / *С.Д. Глызин* // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33, № 6. С. 805–811.
27. *Глызин, С.Д.* Хаотическая буферность в цепочках связанных осцилляторов / *С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов* // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 1. С. 41–49.
28. *Глызин, С.Д.* Численное обоснование гипотезы Ландау–Колесова о природе турбулентности / *С.Д. Глызин* // Математические модели в биологии и медицине. Ин-т математики и кибернетики АН Лит. ССР. Вильнюс, 1989. Вып. 3. С. 31–36.
29. *Глызин, С.Д.* Численный анализ диффузионного хаоса в задаче, моделирующей реакцию Белоусова / *С.Д. Глызин, В.Е. Горюнов, А.Ю. Колесов* // Международная научная конференция «Новые тенденции в нелинейной динамике», 5–7 октября 2017 г., Ярославль. С. 29–30.
30. *Горюнов, В.Е.* Квазиустойчивость сосуществующих аттракторов нейродинамической модели с запаздыванием / *В.Е. Горюнов, М.М. Преображенская* // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2019. Т. 173. С. 26–47.
31. *Горюнов, В.Е.* Пространственно-неоднородные режимы логистического уравнения с запаздыванием при диффузии, близкой к критической / *В.Е. Горюнов* // Международная конференция «Нелинейные методы в физике и механике», посвященная 90-летию со дня рождения Мартина Крускала, 60-летию публикации результатов вычислительного эксперимента по проблеме Ферми–Паста–Улама, 1–3 октября 2015 г., Ярославль. С. 28–29.
32. *Горюнов, В.Е.* Бифуркация Андронова–Хопфа в одной биофизической модели реакции Белоусова / *В.Е. Горюнов* // Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Селима Григорьевича Крейна, 13–19 ноября 2017 г., Воронеж. С. 87–88.
33. *Горюнов, В.Е.* Бифуркация Андронова–Хопфа в одной биофизической модели реакции Белоусова / *В.Е. Горюнов* // Модел. и анализ информ. систем. 2018. Т. 25, № 1. С. 63–70.
34. *Горюнов, В.Е.* Особенности вычислительной реализации алгоритма оценки ляпуновских показателей систем с запаздыванием / *В.Е. Горюнов* // Модел. и анализ информ. систем. 2019. Т. 26, № 4. С. 572–582.
35. *Горюнов, В.Е.* Режимы с самоорганизацией одного класса распределенных биофизических моделей / *В.Е. Горюнов* // Международная научная конференция «Динамика. 2019. Ярославль», 10–12 октября 2019 г., Ярославль. С. 32–34.

36. Горюнов, В.Е. Сложные пространственно неоднородные режимы одного класса распределенных биофизических моделей / В.Е. Горюнов // Материалы XII Международной школы-конференции «Хаотические автоколебания и образование структур» (ХАОС-2019), 1–6 октября 2019 г., Саратов. С. 57–58.
37. Горюнов, В.Е. Численное определение квазиустойчивости аттракторов динамических систем с запаздыванием / В.Е. Горюнов // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа», 28 января – 2 февраля 2019 г. С. 108–109.
38. Дарвин, Ч. Происхождение видов / Ч. Дарвин — М.-Л.: Сельхозгиз, 1935. 630 с.
39. Жаботинский, А.М. Концентрационные автоколебания / А.М. Жаботинский — М.: Наука, 1974.
40. Кащенко, С.А. Асимптотика решений обобщённого уравнения Хатчинсона / С.А. Кащенко // Модел. и анализ информ. систем. 2012. Т. 19, № 3. С. 32–62.
41. Кащенко, С.А. Асимптотика установившихся режимов конечно-разностных аппроксимаций логистического уравнения с запаздыванием и с малой диффузией / С.А. Кащенко, В.Е. Фролов // Модел. и анализ информ. систем. 2014. Т. 21, № 1. С. 94–114.
42. Кащенко, С.А. Асимптотика установившихся режимов конечно-разностных аппроксимаций уравнения Хатчинсона с малой диффузией / С.А. Кащенко // Динамика биологических популяций. Межвузовский сборник. Горький, изд. ГГУ. 1986. С. 14–23.
43. Кащенко, С.А. К вопросу об оценке в пространстве параметров области глобальной устойчивости уравнения Хатчинсона / С.А. Кащенко // Нелинейные колебания в задачах экологии. Ярославль: ЯрГУ. 1985. С. 9.
44. Кащенко, С.А. Модели волновой памяти / С.А. Кащенко, В.В. Майоров — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». 2009.
45. Кащенко, С.А. О периодических решениях уравнения  $x'(t) = -\lambda x(t-1)[1 + x(t)]$  / С.А. Кащенко // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: ЯрГУ. 1978. С. 110–117.
46. Колесов, А.Ю. Об одной модификации уравнения Хатчинсона / А.Ю. Колесов, Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50, № 12. С. 2099–2112.
47. Колесов, А.Ю. Об устойчивости пространственно однородного цикла уравнения Хатчинсона с диффузией / А.Ю. Колесов // Вильнюс: ИМК. 1985. № 1. С. 93–102.
48. Колесов, А.Ю. Описание фазовой неустойчивости системы гармонических осцилляторов, слабо связанных через диффузию / А.Ю. Колесов // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 1. С. 831–835.

49. Колесов, А.Ю. Реле с запаздыванием и его  $C^1$ -аппроксимация / А.Ю. Колесов, Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 1997. Т. 216. С. 126–153.
50. Колесов, А.Ю. К вопросу об определении хаоса / А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов // УМН. 2009. Т. 64, № 4(388). С. 125–172.
51. Колесов, Ю.С. Автоколебания в системах с запаздыванием / Ю.С. Колесов, Д.Й. Швitra — Вильнюс: Мокслас. 1979. 146 с.
52. Колесов, Ю.С. Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами / Ю.С. Колесов, В.В. Майоров // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10, № 10. С. 1778–1788.
53. Колесов, Ю.С. Проблема адекватности экологических уравнений / Ю.С. Колесов — Деп. в ВИНТИ № 1901-85. 1985.
54. Колесов, Ю.С. Пространственная и временная самоорганизация в одновидовом биоценозе / Ю.С. Колесов, В.В. Майоров // Динамика биологических популяций. Межвузовский сборник. Горький, изд. ГГУ. 1986. С. 3–13.
55. Колоскова, А.Д. Метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием / А.Д. Колоскова, О.И. Москаленко, А.А. Короновский // Письма в ЖТФ. 2018. Т. 44, № 9. С. 19–25.
56. Кудряшов, Н.А. О точных решениях уравнений семейства Фишера / Н.А. Кудряшов // Теоретическая и математическая физика. 1993. Т. 94, № 2. С. 296–306.
57. Кузнецов, С.П. Динамический хаос / С.П. Кузнецов — М.: Физматлит. 2006.
58. Купцов, П.В. Вычисление показателей Ляпунова для распределённых систем: преимущества и недостатки различных численных методов / П.В. Купцов // Изв. вузов «ПНД». 2010. Т. 18, № 5. С. 93–112.
59. Мищенко, Е.Ф. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией / Е.Ф. Мищенко, В.А. Садовничий, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов — М.: Физматлит. 2005.
60. Николис, Г. Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации / Г. Николис, И. Пригожин — М.: Мир. 1979.
61. Нуссбаумер, Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток / Г. Нуссбаумер — М.: Радио и связь. 1985.
62. Оселедец, В.И. Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем / В.И. Оселедец // Труды ММО. 1968. Т. 19. С. 179–210.

63. *Преображенская, М.М.* Импульсно-рефракторный режим в кольцевой цепи синаптически связанных осцилляторов нейронного типа / *М.М. Преображенская* // Модел. и анализ информ. систем. 2017. Т. 24, № 5. С. 550–566.
64. *Преображенская, М.М.* Релаксационные циклы в модели синаптически взаимодействующих осцилляторов / *М.М. Преображенская* // Модел. и анализ информ. систем. 2017. Т. 24, № 2. С. 186–204.
65. *Свирижев, Ю.М.* Устойчивость биологических сообществ / *Ю.М. Свирижев, Д.О. Логофет* — М.: Наука. 1978. 352 с.
66. *Тавровский, В.А.* Млекопитающие Якутии / *В.А. Тавровский, О.В. Егоров, В.Г. Кривошеев, М.В. Попов, Ю.В. Лабутин* — М.: Наука. 1971. 659 с.
67. *Хакен, Г.* Информация и самоорганизация: Макроскопический подход к сложным системам / *Г. Хакен* — М.: Мир. 1991. 240 с.
68. *Ablowitz, M.J.* Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed / *M.J. Ablowitz, A. Zeppetella* // Bull. Math. Biology. 1979. V. 41. P. 835–840.
69. *Aleshin, S.* Estimation of Lyapunov exponents for quasi-stable attractors of dynamical systems with time delay / *S. Aleshin, D. Glyzin, S. Glyzin, V. Goryunov* // International Conference on Computer Simulation in Physics and beyond, September 24–27, 2018, Moscow, Russia, Book of Abstracts. P. 70.
70. *Aleshin, S.V.* Estimation of Lyapunov exponents for quasi-stable attractors of dynamical systems with time delay / *S.V. Aleshin, D.S. Glyzin, S.D. Glyzin, V.E. Goryunov* // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1163, No. 012045.
71. *Assaf IV, D.* Definition of chaos / *D. Assaf IV, S. Gadbois* // Amer. Math. Monthly. 1992. V. 99, No. 9. P. 865.
72. *Banks, J.* On Devaney's definition of chaos / *J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey* // Amer. Math. Monthly. 1992. V. 99, No. 4. P. 332–334.
73. *Benettin, G.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part I: Theory. Part II: Numerical application / *G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J.-M. Strelcyn* // Meccanica. 1980. V. 15. P. 9–30.
74. *Bestehorn, M.* Spatiotemporal structures in a model with delay and diffusion / *M. Bestehorn, E.V. Grigorieva, S.A. Kaschenko* // Phys. Rev. E. 2004. V. 70, No. 026202.
75. *Britton, N.F.* Reaction-diffusion equations and their applications to biology / *N.F. Britton* — New York: Academic Press. 1986.
76. *Britton, N.F.* Spatial structures and periodic travelling waves in an integro-differential reaction-diffusion population model / *N.F. Britton* // SIAM J. Appl. Math. 1990. V. 50. P. 1663–1688.

77. *Chay, T.R.* Bursting, beating, and chaos in an excitable membrane model / *T.R. Chay, J. Rinzel* // *Biophys. J.* 1985. V. 47, No. 3. P. 357–366.
78. *Cheney, W.* *Linear Algebra: Theory and Applications* / *W. Cheney, D. Kincaid* — Sudbury, Ma: Jones and Bartlett. 2009.
79. *Coombes, S.* *Bursting: the genesis of rhythm in the nervous system* / *S. Coombes, P.C. Bressloff* — World Scientific Publishing Company. 2005.
80. *Danilov, V.G.* *Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes* / *V.G. Danilov, V.P. Maslov, K.A. Volosov* — Dordrecht, Kluwer. 1995.
81. *Devaney, R.L.* *An introduction to chaotic dynamical systems* / *R.L. Devaney* — Addison-Wesley Stud. Nonlinearity, Addison-Wesley, Redwood City, CA. 1989.
82. *Ermentrout, G.B.* Parabolic bursting in an excitable system coupled with a slow oscillation / *G.B. Ermentrout, N. Kopell* // *SIAM J. Appl. Math.* 1986. V. 46, No. 2. P. 233–253.
83. *Farmer, J.D.* Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system / *J.D. Farmer* // *Physica D.* 1986. V. 4, No. 3. P. 366–393.
84. *Field, R.J.* Oscillations in chemical systems. IV. Limit cycle behavior in a model of a real chemical reaction / *R.J. Field, R.M. Noyes* // *Journal of Chemical Physics.* 1974. V. 60. P. 1877–1884.
85. *Glass, L.* Oscillations and chaos in physiological control systems / *L. Glass, M.C. Mackey* // *Science.* 1977. V. 197. P. 287–289.
86. *Glass, L.* Pathological conditions resulting from instabilities in physiological control systems / *L. Glass, M.C. Mackey* // *Ann. N. Y. Acad. Sci.* 1979. V. 316. P. 214–235.
87. *Glyzin, S.* Invariant numerical characteristics of diffusion chaos in the problem of Belousov reaction simulating / *S. Glyzin, V. Goryunov, A. Kolesov* // *International Conference on Computer Simulation in Physics and beyond, October 9–12, 2017, Moscow, Russia, Book of Abstracts.* P. 90.
88. *Glyzin, S.* Spatially inhomogeneous modes of logistic differential equation with delay and small diffusion in a flat area / *S. Glyzin, V. Goryunov, A. Kolesov* // *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 2017. V. 38, No. 5. P. 898–905.
89. *Glyzin, S.* Spatially inhomogeneous modes of logistic equation with delay and small diffusion in a flat area / *S. Glyzin, V. Goryunov, A. Kolesov* // *International Conference «Supercomputer Simulations in Science and Engineering», September 6–10, 2016, Moscow, Russia, Book of Abstracts.* P. 13.
90. *Glyzin, S.D.* Diffusion chaos in the reaction–diffusion boundary problem in the dumbbell domain / *S.D. Glyzin, P.L. Shokin* // *Automatic Control and Computer Sciences.* 2016. V. 50, No. 7. P. 625–635.

91. *Glyzin, S.D.* Dimensional Characteristics of Diffusion Chaos / *S.D. Glyzin* // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. V. 47, No. 7. P. 452–469.
92. *Glyzin, S.D.* Invariant characteristics of self-organization modes in Belousov reaction modeling / *S.D. Glyzin, V.E. Goryunov, A.Yu. Kolesov* // Journal of Physics: Conference Series. 2018. V. 955, No. 012024.
93. *Goryunov, V.E.* The Andronov–Hopf Bifurcation in a Biophysical Model of the Belousov Reaction / *V.E. Goryunov* // Automatic Control and Computer Sciences. 2018. V. 52, No. 7. P. 694–699.
94. *Gourley, S.A.* Nonlocality of Reaction-Diffusion Equations Induced by Delay: Biological Modeling and Nonlinear Dynamics / *S.A. Gourley, J.W.-H. So, J.H. Wu* // J. of Mathematical Sciences. 2004. V. 124, No. 4. P. 5119–5153.
95. *Hairer, E.* Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems / *E. Hairer, S.P. Nørsett, G. Wanner* — Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2008.
96. *Hale, J.* Theory of functional differential equations / *J. Hale* — New York. 1977.
97. *Hutchinson, G.E.* Circular causal systems in ecology / *G.E. Hutchinson* // Ann. N.Y. Acad. Sci. 1948. V. 50. P. 221–246.
98. *Izhikevich, E.* Neural excitability, spiking and bursting / *E. Izhikevich* // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2000. V. 10, No. 6. P. 1171–1266.
99. *Jones, G.S.* The existence of periodic solutions of  $f'(x) = -\alpha f(x - 1)[1 + f(x)]$  / *G.S. Jones* // T. Math. Anal. and Appl. 1962. V. 5. P. 435–450.
100. *Kakutani, S.* On the nonlinear difference-differential equation  $y'(t) = (A - By(t - \tau))y(t)$  / *S. Kakutani, L. Markus* // Contributions to the theory of nonlinear oscillations. 1958. V. 4. P. 1–18.
101. *Kashchenko, S.A.* Asymptotics of periodical solution of Hutchinson generalized equation / *S.A. Kashchenko* // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. V. 47, No. 7. P. 470–494.
102. *Keith, L.B.* Wildlife’s ten-year cycle / *L.B. Keith* — The university of Wisconsin press. Madison. 1963.
103. *Knudsen, C.* Chaos without nonperiodicity / *C. Knudsen* // Amer. Math. Monthly. 1994. V. 101, No. 6. P. 563–565.
104. *Kolesov, A.Yu.* Relaxational oscillations in mathematical models of ecology (Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics) / *A.Yu. Kolesov, Yu.S. Kolesov* // American Mathematical Society. 1995. V. 199, No. 1. P. 1–126.
105. *Kuang, Y.* Delay Differential Equations. With Applications in Population Dynamics / *Y. Kuang* — Academic Press, New York. 1993.

106. *Kuptsov, P.V.* Violation of hyperbolicity in a diffusive medium with local hyperbolic attractor / *P.V. Kuptsov, S.P. Kuznetsov* // *Phys. Rev. E.* 2009. V. 80, No. 016205.
107. *Kuramoto, Y.* Diffusion-Induced Chaos in Reaction Systems / *Y. Kuramoto* // *Prog. Theor. Phys. Supplement.* 1978. V. 64. P. 346–367.
108. *Lorenz, E.N.* Deterministic nonperiodic flow / *E.N. Lorenz* // *J. Atmos. Sci.* 1963. V. 20. P. 130–141.
109. *Malthus, T.* An Essay on the Principle of Population / *T. Malthus* — London. 1798.
110. *May, R.M.* Stability complexity in model ecosystems / *R.M. May* — Princeton. 1973.
111. *Murray, J.D.* Mathematical Biology. I. An Introduction / *J.D. Murray* — Third Edition, Berlin. 2001.
112. *Nicolis, G.* Self-Organization in Non-Equilibrium Systems / *G. Nicolis, I. Prigogine* — Wiley. 1977.
113. *Pearl, R.* On the Rate of Growth of the Population of the United States Since 1790 and its Mathematical Representation / *R. Pearl, L.J. Reed* // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America.* 1920. V. 6, No. 6. P. 275–288.
114. *Preobrazhenskaya, M.M.* Multipliers of an Antiphase Solution in a System of Two Coupled Nonlinear Relaxation Oscillators / *M.M. Preobrazhenskaya* // *Journal of Physics: Conference Series.* 2019. V. 1163, No. 012062.
115. *Quetelet, A.* Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou Essai de physique sociale / *A. Quetelet* — Bachelier, Paris. 1835.
116. *Rabinovich, M.I.* Dynamical principles in neuroscience / *M.I. Rabinovich, P. Varona, A.I. Selverston, H.D.I. Abarbanel* // *Rev. Mod. Phys.* 2006. V. 78. P. 1213–1265.
117. *Ruelle, D.* On the nature of turbulence / *D. Ruelle, F. Takens* // *Comm. Math. Phys.* 1971. V. 20. P. 167–192.
118. *Somers, D.* Anti-phase solutions in relaxation oscillators coupled through excitatory interactions / *D. Somers, N. Kopell* // *J. Math. Biol.* 1995. V. 33. P. 261–280.
119. *Somers, D.* Rapid synchronization through fast threshold modulation / *D. Somers, N. Kopell* // *Biol. Cybern.* 1993. V. 68. P. 393–407.
120. *Touhey, P.* Yet another definition of chaos / *P. Touhey* // *Amer. Math. Monthly.* 1997. V. 104, No. 5. P. 411–414.
121. *Vellekoop, M.* On intervals, transitivity = chaos / *M. Vellekoop, R. Berglund* // *Amer. Math. Monthly.* 1994. V. 101, No. 4. P. 353–355.
122. *Verhulst, P.F.* Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement / *P.F. Verhulst* // *Correspondance mathématique et physique.* 1838. V. 10. P. 113–121.

123. *Volpert, A.* Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems / *A. Volpert, V. Volpert, V. Volpert* — American Mathematical Society. 2000.
124. *Volterra, V.* Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie / *V. Volterra* — Paris. 1931.
125. *Wolf, A.* Determining Lyapunov exponents from a time series / *A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, J.A. Vastano* // *Physica D.* 1985. V. 16. P. 285–317.
126. *Wright, E.M.* A non-linear difference-differential equation / *E.M. Wright* // *J. Reine Angew. Math.* 1955. V. 194. P. 66–87.
127. *Wu, J.* Introduction to neural dynamics and signal transmission delay / *J. Wu* — De Gruyter series in nonlinear analysis and applications. Berlin: de Gruyter. 2002.
128. *Wu, J.* Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations / *J. Wu* — Springer-Verlag, New York. 1996.
129. *Zhabotinsky, A.M.* Autowave processes in a distributed chemical system / *A.M. Zhabotinsky, A.N. Zaikin* // *J. Theor. Biol.* 1973. V. 40, No. 1. P. 45–61.



# Приложение А

## Эволюция полученных режимов краевой задачи (1.1.1) при изменении коэффициента диффузии

Рассмотрим поведение некоторых из описанных в первой главе режимов при постепенном изменении значения коэффициента диффузии  $D$ .

Начнем с режима ведущего центра. Являясь устойчивым при посткритических значениях диффузии, близких к критическому значению  $D_*$ , этот режим теряет устойчивость при  $D > D_*$  и переходит в пространственно однородный режим.

При плавном уменьшении  $D$  наблюдается иная картина. Ведущий центр, т.е. пик неоднородности, в котором зарождается волна, бегущая в противоположный угол, начинает медленно смещаться к центру рассматриваемой области. Отчетливо это становится заметно при  $D \approx 0.016$ . Дальнейшее уменьшение  $D$  приводит к переносу ведущего центра в середину области  $\Omega$  (см. рис. А.1). Происходит это при  $D \approx 0.0085$ . Режим при этом сохраняет устойчивость.

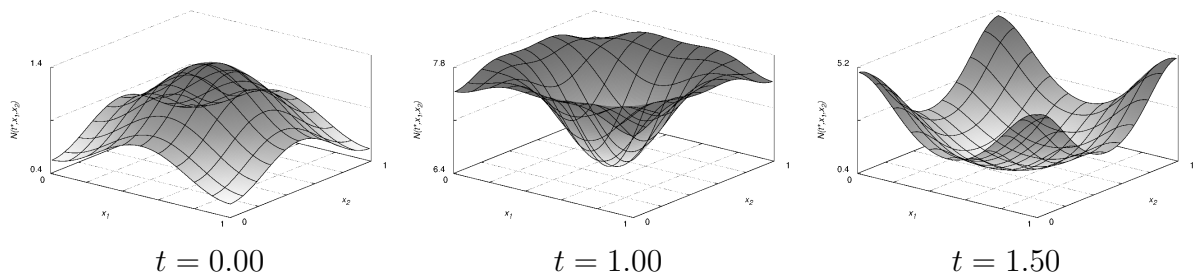


Рис. А.1. Ведущий центр при  $r = 3$ ,  $D = 0.0078$ .

При  $D \approx 0.002$  ведущий центр разделяется на четыре симметричных синхронных ведущих центра, помещенных в центральные зоны соответствующих четвертей области  $\Omega$  (см. рис. А.2). Такой режим перестает быть устойчивым.

Если же продолжать уменьшать значение коэффициента диффузии  $D$ , то наблюдается повторение процесса учетверения ведущих центров. Шестнадцать синхронных ведущих центров можно наблюдать при  $D \approx 0.0005$  (см. рис. А.3).

Динамические характеристики таких режимов качественно сохраняют структуру пространственно однородного цикла.

Перейдем теперь к режиму самоорганизации “вихрь”. Как уже было отмечено ранее, режим сосуществует с пространственно однородным циклом, причем он не теряет устойчивость при значительном превышении критического значения диффузии. Опыты

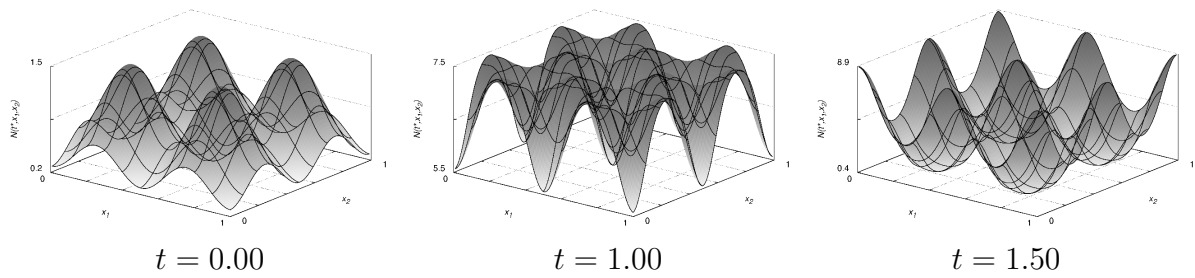


Рис. А.2. Ведущие центры при  $r = 3$ ,  $D = 0.0015$ .

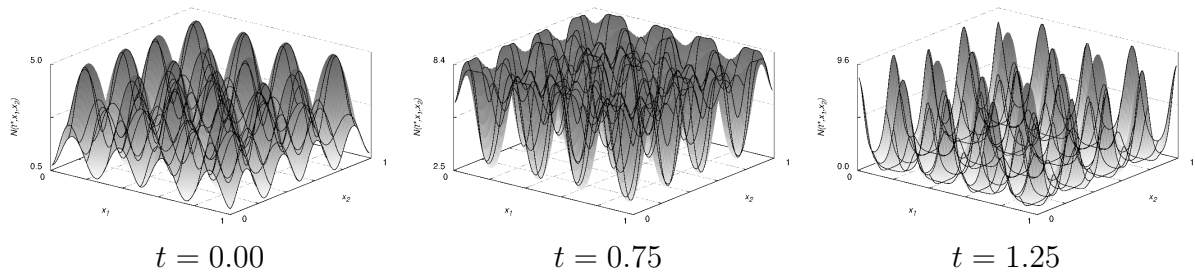


Рис. А.3. Ведущие центры при  $r = 3$ ,  $D = 0.0001$ .

показывают, что при  $D \approx 0.148$  режим разваливается и переходит в пространственно однородный цикл.

Теперь рассмотрим процесс плавного понижения значения коэффициента диффузии. На протяжении существенного интервала значения диффузии  $D$  от 0.031 до 0.01 визуальное представление цикла остается практически неизменным — в основном, меняются лишь динамические характеристики. При дальнейшем понижении  $D$  происходит процесс заметного уменьшения ширины основной группы популяции и удлинения с ярко выраженным изгибом вблизи центра рассматриваемой области (см. рис. А.4).

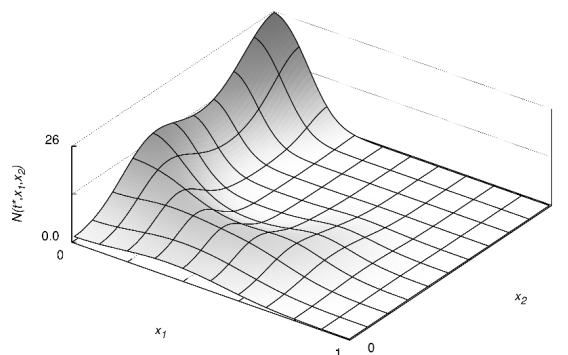


Рис. А.4. Пример типичной структуры режима “вихрь” при  $r = 3$ ,  $D = 0.0091$ .

Продолжение понижения значения коэффициента диффузии приводит к более контрастной структуре, по своей форме напоминающей классические спиральные волны [6, 7, 39, 41, 129], при этом уменьшается радиус первоначального распространения популяции (см. рис. А.5).

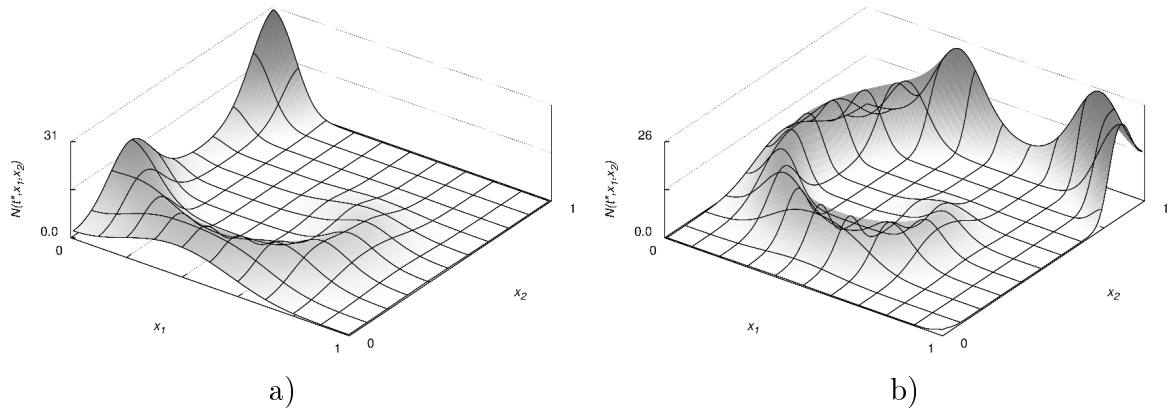


Рис. А.5. Переход режима “вихрь” в режим спиральной волны при  $r = 3$ , а)  $D = 0.0054$ , б)  $D = 0.0025$ .

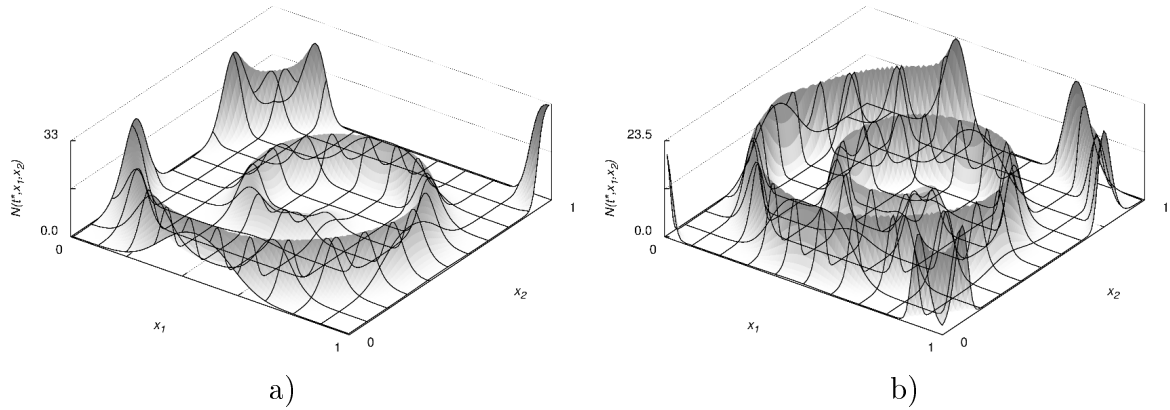


Рис. А.6. Спиральная волна при  $r = 3$ , а)  $D = 0.0009$ , б)  $D = 0.0004$ .

Наконец, при  $D = 0.0009$  наблюдается наличие полного витка спиральной волны, а при  $D = 0.0004$  — наличие двух витков (см. рис. А.6). Дальнейшее понижение  $D$  приводит к более тонкой и сильно закрученной структуре классической спиральной волны.

Характеристики режима спиральной волны представлены в таблице А.10. Отметим, что значения  $D = 0.0091$  и  $D = 0.0054$  попадают в диапазон сильно проявляющейся многочастотности вихревого режима — при таких значениях центр вращения заметно смещается по области  $\Omega$ .

Таблица А.10. Значения характеристик спиральной волны при  $r = 3$  и разных значениях коэффициента диффузии  $D$ .

$D$	$T$	$M(\hat{N})$	$\hat{N}_{\min}$	$\hat{N}_{\max}$	$N_{\min}$	$N_{\max}$
0.0025	3.303	3.5335	3.3852	3.5352	$6.108 \cdot 10^{-13}$	37.6447
0.0009	3.304	3.9996	3.9147	4.0124	$1.237 \cdot 10^{-12}$	41.5143
0.0004	3.306	4.1913	4.1271	4.1982	$1.468 \cdot 10^{-11}$	40.7313

Низкое значение коэффициента диффузии позволяет использовать еще два способа генерации спиральных волн. Первый способ основан на применении специальной конфигурации начального условия, состоящего из узкой полоски всплеска и нулевых значений в остальной части области, и короткого воздействия на область  $\Omega$ , проявляющегося в виде так называемой мертвой зоны — приставленного сбоку от всплеска отрезка такого же размера, в котором решение резко падает к нулю на протяжении нескольких первых единиц времени либо фиксированно равно нулю, что является временной деформацией области  $\Omega$ . Второй способ заключается в спонтанном возникновении спиральной структуры в диффузионном хаосе на протяжении длительного счета, что в численных экспериментах происходило достаточно часто, но при этом крайне сложно контролировать количество появляющихся спиральных волн и направления их вращений.

## Некоторые производные режимы сложной структуры

В процессе широкого поиска режимов иного вида, а также изучения поведения описанных в работе ранее решений при понижении коэффициента диффузии были получены различные режимы, каждый из которых так или иначе основывается на структуре режима самоорганизации “вихрь” (при достаточно низких значениях диффузии — на структуре спиральной волны) либо на механике ведущего центра. Перейдем к описанию некоторых из таких режимов.

Режим “блуждающего ведущего центра”, названный так из-за плавного циклического перемещения ведущего центра по одной из диагоналей рассматриваемой области, является циклом с относительно большим периодом ( $T \approx 116.81$  при  $D = 0.0015$ ). Образуется этот режим после потери устойчивости и полного распада четырех симметричных синхронных ведущих центров при значении коэффициента диффузии  $D \approx 0.0015$ . Стоит отметить, что края диагональной траектории перемещения такого ведущего центра совпадают с расположением пары ведущих центров распавшегося режима. Помимо основного центра всплесков, в некоторые моменты времени наблюдается также пара слабых центров, расположенных симметрично относительно диагонали траектории и меняющих свою конфигурацию в зависимости от удаления основного ведущего центра от середины области  $\Omega$ .

Характерный график распределения решения представлен на рис. А.7 и рис. А.8. За счет симметрии перемещения ведущего центра по диагональной траектории приведена визуализация только половины периода.

Псевдофазовый портрет этого режима, построенный по значениям  $\hat{N}(t)$  и  $\hat{N}(t-1)$ , представлен на рис. А.9.

Динамические характеристики блуждающего ведущего центра выглядят следующим образом:  $M(\hat{N}) \approx 1.1159$ ,  $\hat{N}_{\min} = 2.634 \cdot 10^{-5}$ ,  $\hat{N}_{\max} \approx 5.8368$ ,  $N_{\min} = 2.5 \cdot 10^{-11}$ ,  $N_{\max} \approx 15.747$ , что говорит о сохранении близости к природе пространственно однородного решения.

Следующий режим основан на синхронном взаимодействии двух пар вихрей, но в отличие от режима четырех согласованных вихрей, описанного выше, в этом случае направление вращения пар совпадает. Реализуется такой цикл с периодом  $T \approx 3.239$  при  $D = 0.005$ . Характерный график распределения решения представлен на рис. А.10. Его динамические характеристики устроены следующим образом:  $M(\hat{N}) \approx 2.7119$ ,  $\hat{N}_{\min} = 2.0258$ ,  $\hat{N}_{\max} \approx 3.5532$ ,  $N_{\min} = 1.16 \cdot 10^{-9}$ ,  $N_{\max} \approx 22.7038$ .

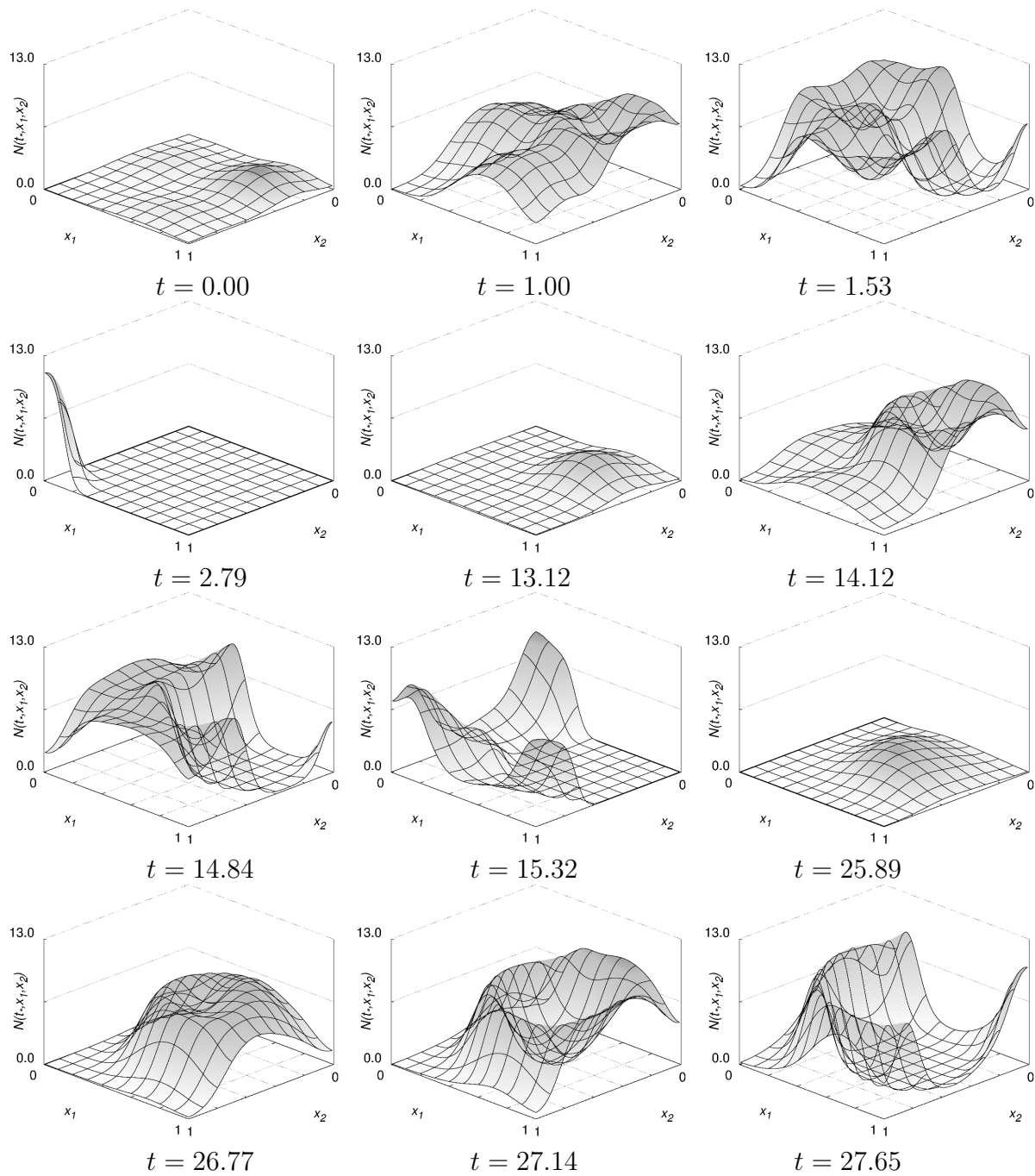


Рис. А.7. Режим блуждающего ведущего центра при  $r = 3$ ,  $D = 0.0015$ .

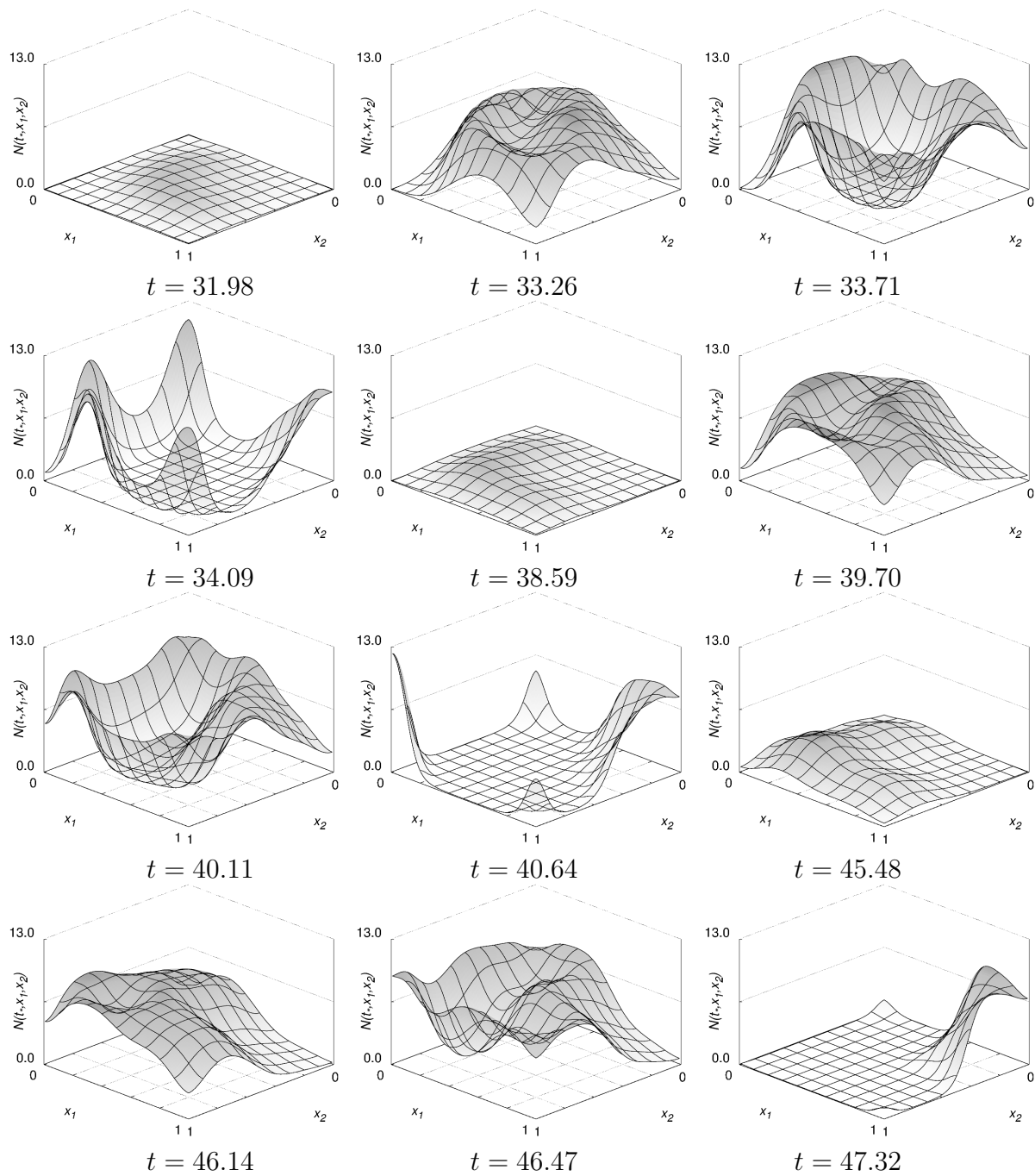


Рис. А.8. Режим блуждающего ведущего центра при  $r = 3$ ,  $D = 0.0015$ .

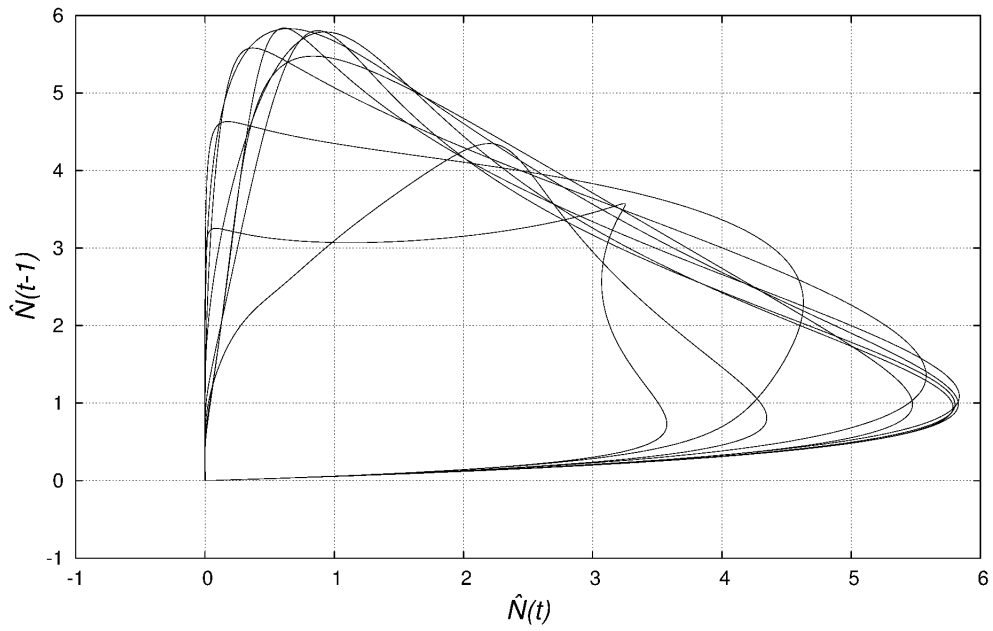


Рис. А.9. Псевдофазовый портрет режима блуждающего ведущего центра при  $r = 3$ ,  $D = 0.0015$ , построенный по значениям  $\hat{N}(t)$  и  $\hat{N}(t - 1)$ .

Еще один режим синхронного вращения пары вихрей представлен на рис. А.11. Колебания этого режима имеют две существенно различные частоты. Малая частота, близкая к периоду вращения предыдущих режимов, определяет расстояние между пиками, а вто-

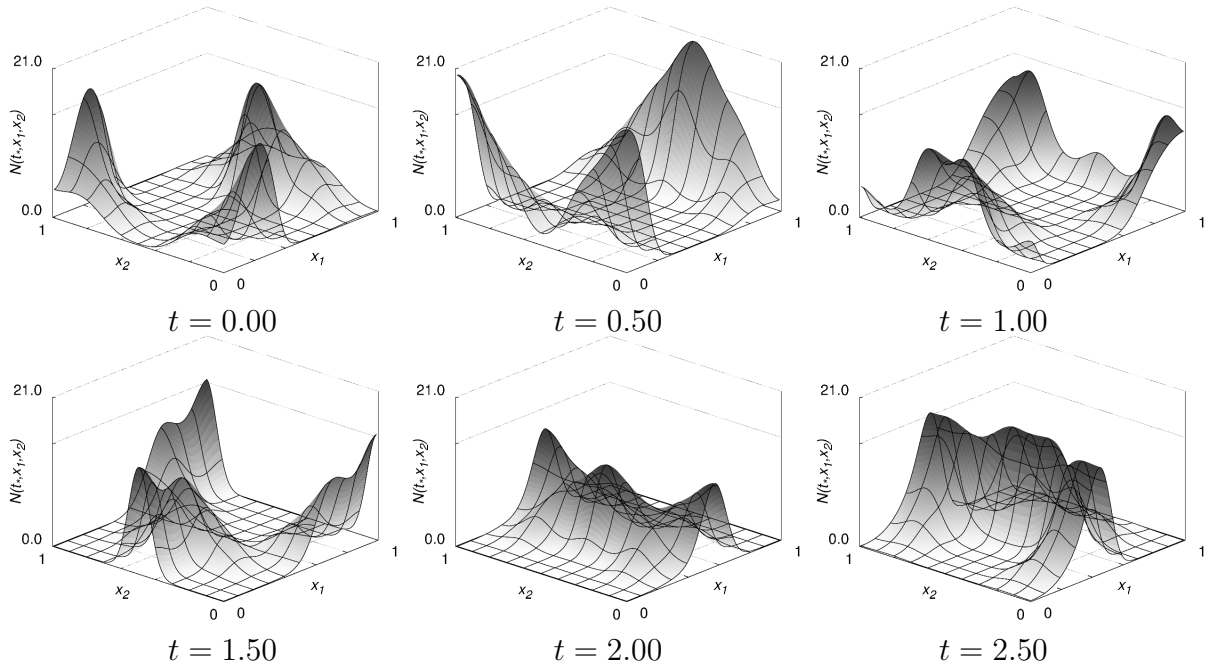


Рис. А.10. Режим двух однонаправленных пар согласованных вихрей при  $r = 3$ ,  $D = 0.005$ .

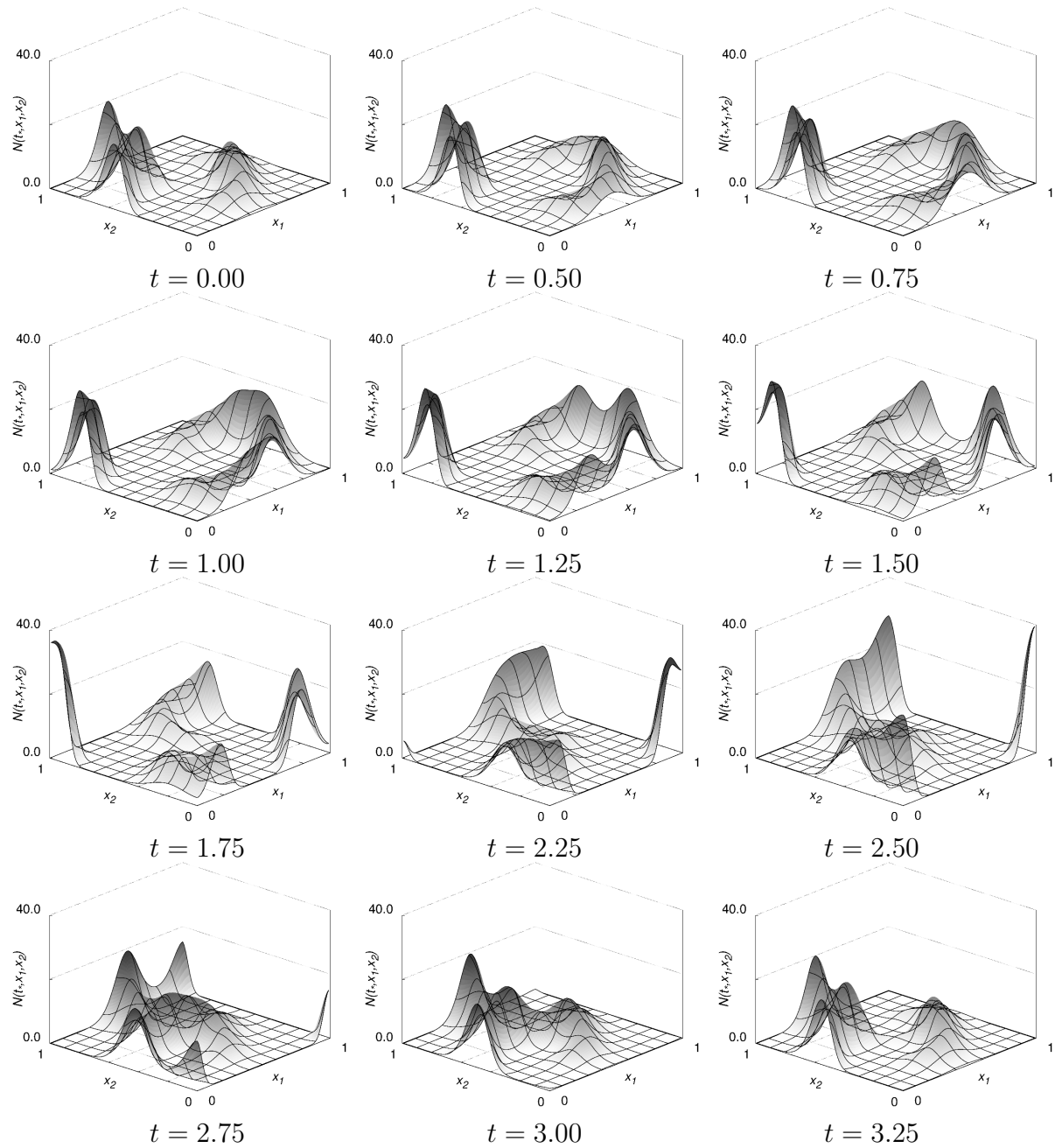


Рис. А.11. Двухчастотный режим двух согласованных вихрей с разными направлениями вращения при  $r = 3$ ,  $D = 0.003$ .



рая частота описывает изменения огибающей пиковые значения, проявляющейся в колебательном движении центров вращения вблизи диагонали области  $\Omega$ . Таким образом, повторение колебаний происходит через  $T \approx 1748.577$  при  $D = 0.003$ . Стоит заметить, что хвосты спиральной закрутки завихрений сливаются в сплошную волну,двигающуюся от их центров в сторону одного из двух углов рассматриваемой области. Динамические характеристики такого режима:  $M(\hat{N}) \approx 3.1638$ ,  $\hat{N}_{\min} = 2.2563$ ,  $\hat{N}_{\max} \approx 4.3428$ ,  $N_{\min} = 3.70 \cdot 10^{-14}$ ,  $N_{\max} \approx 44.3767$ .

Также важно отметить, что при понижении значения диффузии до некоего низкого значения (например,  $D = 0.00001$ ) все описанные режимы сложной вихревой структуры будут визуально унифицированы в виде нескольких спиральных волн с согласованным поведением и сохранившимся направлением вращения.

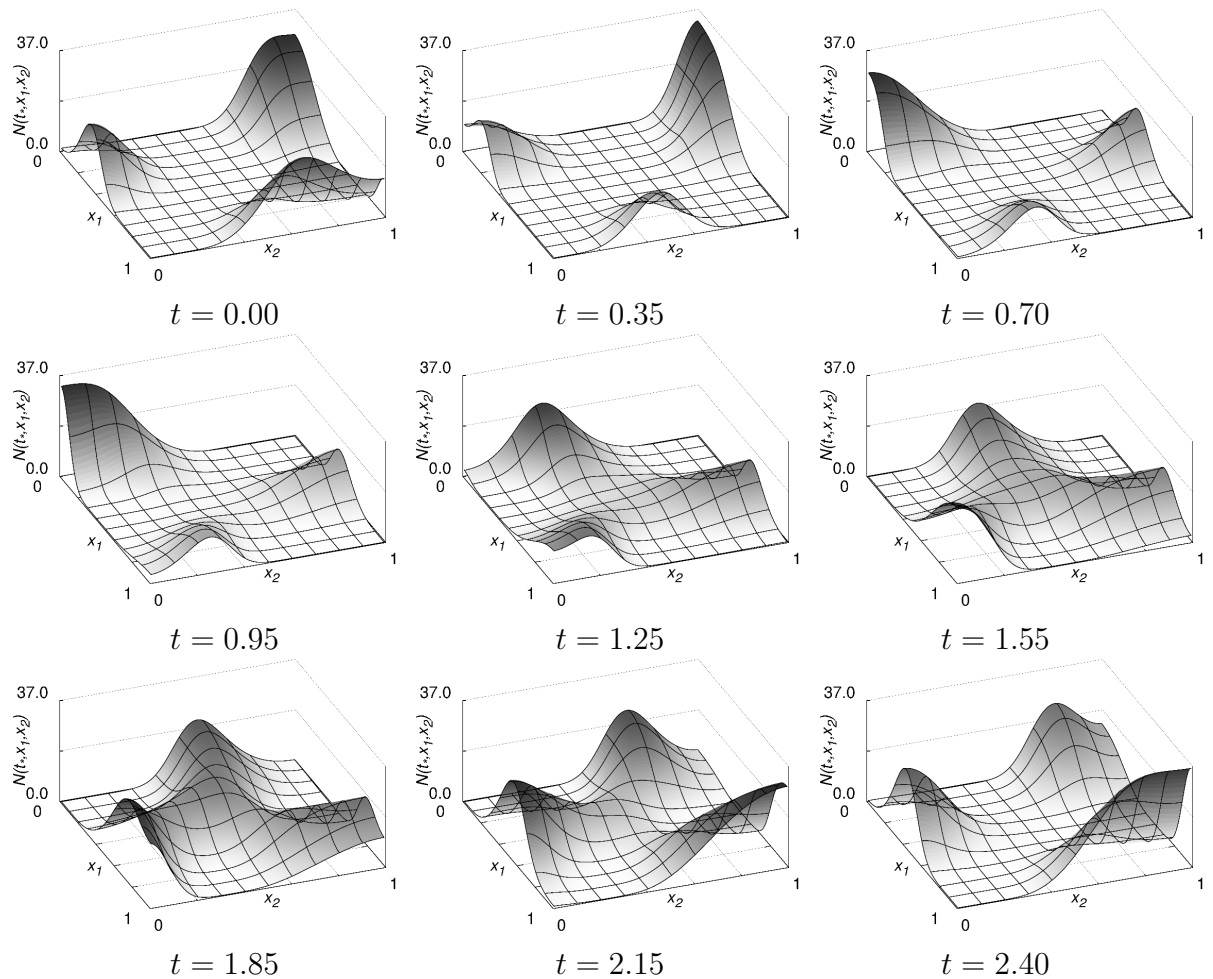


Рис. А.12. Режим спиральной волны с тремя фронтами при  $r = 3$ ,  $D = 0.02$ .

Последний режим также основан на спиральных волнах, но имеет сложную структуру самоорганизации. При достаточно низком значении параметра  $D$  визуально он напоминает спиральную волну с тремя хвостами, но в реальности представляет собой три синхронные спиральные волны с центрами, образующими равносторонний треугольник и медленно вращающимися вокруг осевого центра, при этом в определенные короткие промежутки времени концы этих волн сходятся в центральной точке, образуя времен-

ную перемижку и цельность всего режима. Узлы вращения двигаются не по окружности, а по более сложной траектории, из-за чего осевая точка режима перемещается по области  $\Omega$ , но ее координаты зависят от расположения узлов вращения. Отметим, что помимо описанных визуально заметных периодических перемещений также присутствует медленное колебание пиковых значений. Таким образом, данный режим является как минимум трехчастотным. Опыты показали, что режим разваливается при повышении значения коэффициента диффузии до  $D \approx 0.0207$ . Типичный вид режима при  $D = 0.02$  представлен на рис. А.12, при  $D = 0.0001$  — на рис. А.13. При  $D = 0.02$  повторение колебаний происходит через  $T \approx 368.397$ , а динамические характеристики имеют следующий вид:  $M(\hat{N}) \approx 4.9098$ ,  $\hat{N}_{\min} = 2.7840$ ,  $\hat{N}_{\max} \approx 7.9241$ ,  $N_{\min} = 9.63 \cdot 10^{-9}$ ,  $N_{\max} \approx 33.7733$ . В случае  $D = 0.0001$  повторение колебаний происходит через  $T \approx 111.967$ , при этом динамические характеристики устроены следующим образом:  $M(\hat{N}) \approx 4.2455$ ,  $\hat{N}_{\min} = 4.1701$ ,  $\hat{N}_{\max} \approx 4.3474$ ,  $N_{\min} = 8.08 \cdot 10^{-9}$ ,  $N_{\max} \approx 35.3569$ .

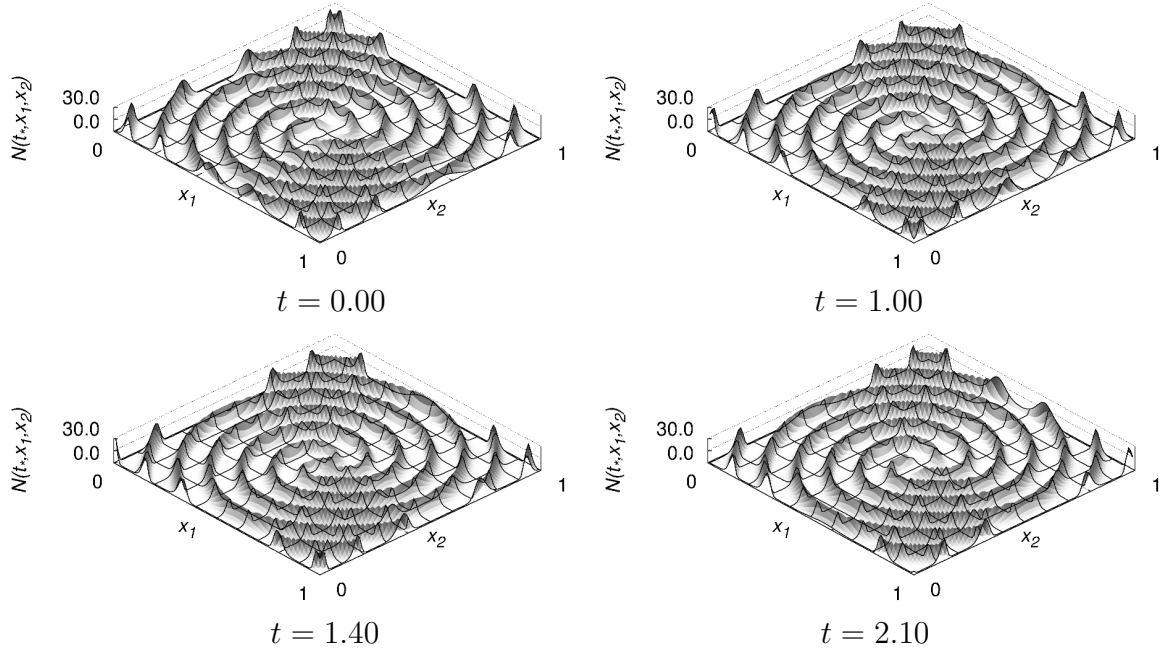


Рис. А.13. Режим спиральной волны с тремя фронтами при  $r = 3$ ,  $D = 0.0001$ .

Псевдофазовый портрет такого режима при  $D = 0.02$ , построенный по значениям  $\hat{N}(t)$  и  $\hat{N}(t - 1)$ , представлен на рис. А.14.

Допустимы комбинации таких режимов в области  $\Omega$ . В качестве примера приведем случай двух согласованных спиралей с тремя фронтами при  $D = 0.0001$  (см. рис. А.15). Его динамические характеристики:  $M(\hat{N}) \approx 4.1449$ ,  $\hat{N}_{\min} = 3.9903$ ,  $\hat{N}_{\max} \approx 4.3280$ ,  $N_{\min} = 8.97 \cdot 10^{-9}$ ,  $N_{\max} \approx 35.4057$ . Отметим, что время до повторения колебаний режима двух согласованных спиралей с тремя фронтами не отличается от времени до повторения колебаний режима одной спирали с тремя фронтами при таком же выборе  $D = 0.0001$ .

Получить режим как с одной спиральной волной с тремя фронтами, так и с двумя удавалось только через использование так называемых мертвых зон, описанных в конце предыдущего пункта. Спонтанное возникновение режима такой структуры в диффузионном хаосе крайне маловероятно.

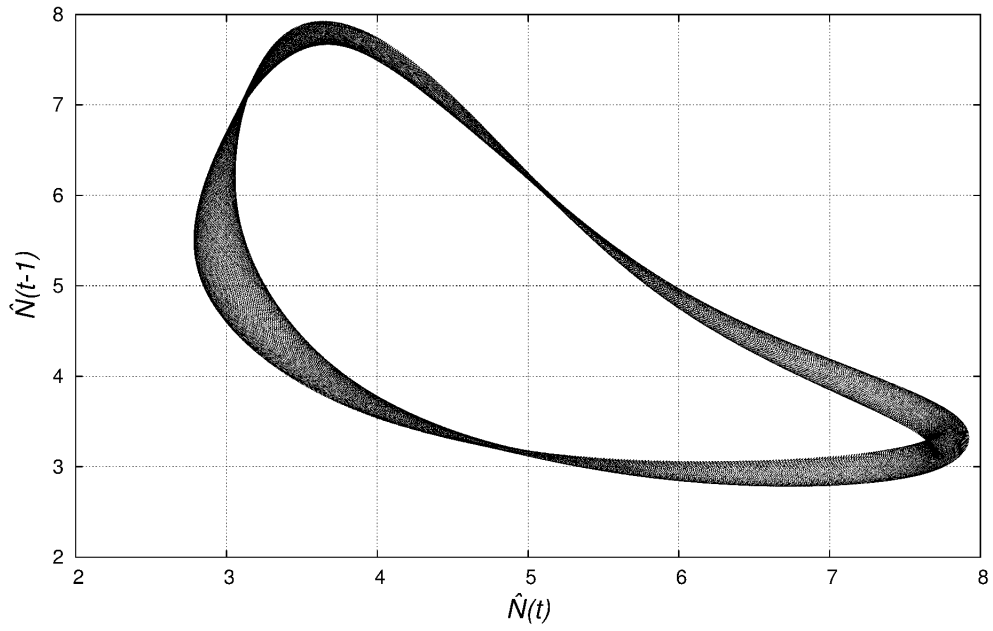


Рис. А.14. Псевдофазовый портрет режима спиральной волны с тремя фронтами при  $r = 3$ ,  $D = 0.02$ , построенный по значениям  $\hat{N}(t)$  и  $\hat{N}(t - 1)$ .

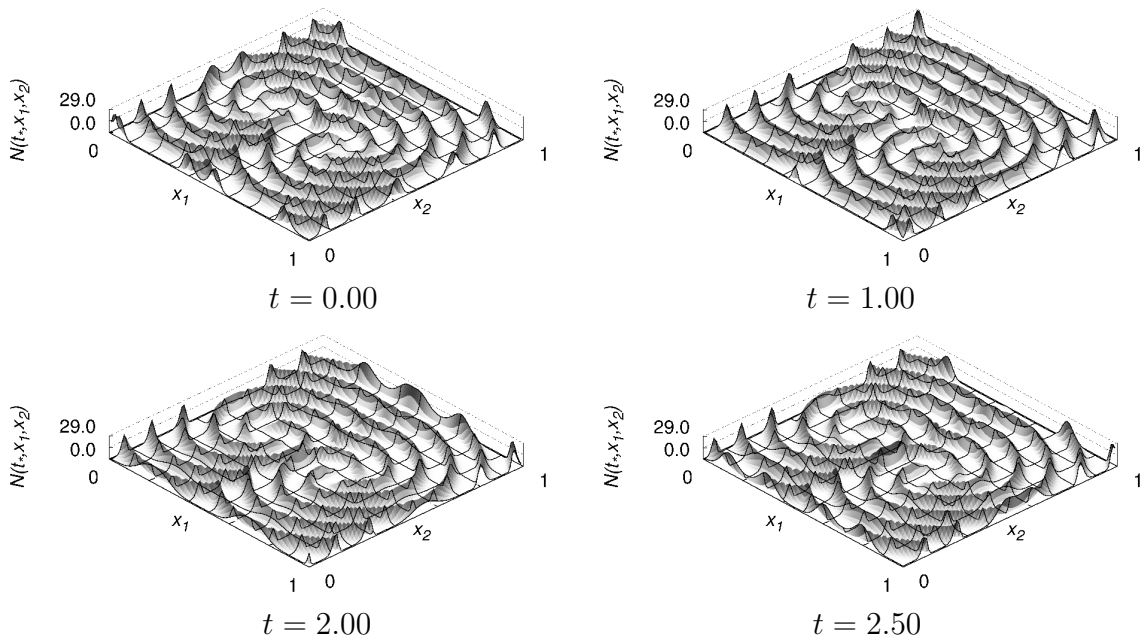


Рис. А.15. Режим двух спиральных волн с тремя фронтами при  $r = 3$ ,  $D = 0.0001$ .

## Генерация режима, состоящего из шестнадцати спиральных волн

В заключение рассмотрения результатов численного моделирования различных устойчивых режимов задачи (1.1.1) подробно опишем процесс получения режима, в основе которого лежат шестнадцать спиральных волн.

На всех рис. А.16–А.19 указано абсолютное время описываемого эксперимента.

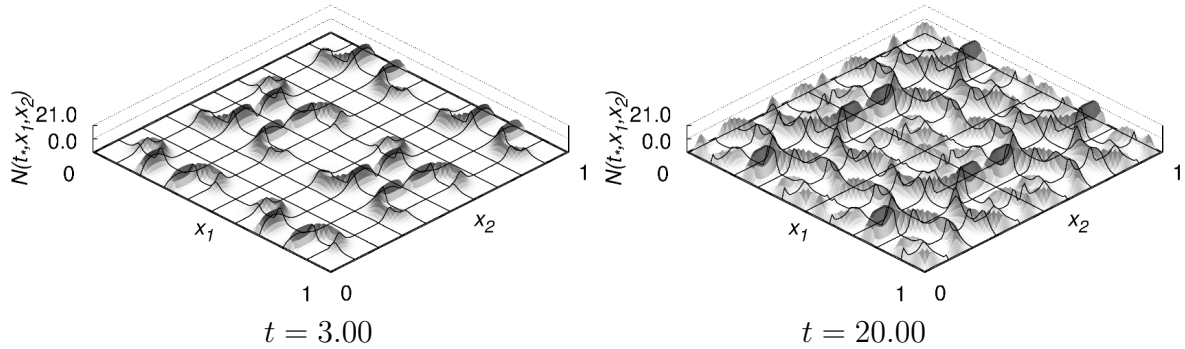


Рис. А.16. Генерация режима из шестнадцати спиральных волн при  $r = 3$ ,  $D = 0.0001$ .

На первом этапе в строго определенных местах устанавливаются шестнадцать полос с ненулевыми значениями и рядом с каждой по полосе так называемых мертвых зон, которые будут источниками возникновения спиральных волн с заданным направлением. Помимо этого, устанавливаются стенки минимально возможной толщины, делящие область  $\Omega$  на четыре равных квадранта, для препятствования взаимодействию образуемых спиральных волн в разных квадрантах. Первоначально  $D = 0.0001$  для наиболее эффективного процесса генерации требуемых структур. Мертвые зоны должны быть убраны ровно в тот момент, когда образуется загнутая волна (в экспериментах это происходило при  $t = 8$ ). Таким образом, в каждом квадранте образуются по четыре спиральные волны с требуемыми направлениями вращения (см. рис. А.16).

После установления согласованных устойчивых режимов в каждом квадранте происходит увеличение значения параметра диффузии с  $D = 0.0001$  при  $t = 200$  до  $D = 0.0004$  с шагом 0.0001 каждые 10 временных единиц. Таким образом, происходит визуальное укрупнение спиральных волн к  $t = 240$ . Установившиеся согласованные устойчивые спиральные волны при  $D = 0.0004$  изображены на рис. А.17.

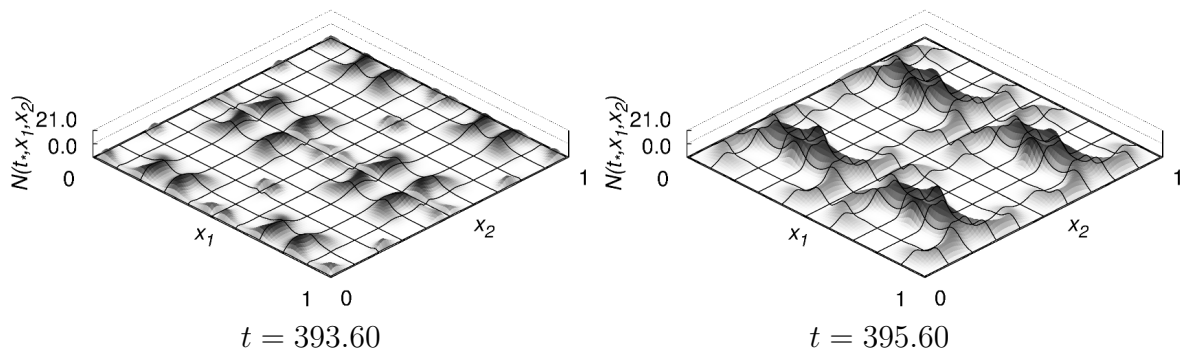


Рис. А.17. Генерация режима из шестнадцати спиральных волн при  $r = 3$ ,  $D = 0.0004$ .

На следующем этапе (при  $t = 400$ ) убираются стенки между квадрантами, после чего появляется дополнительное взаимодействие между режимами. Получающийся согласованный устойчивый режим изображен на рис. А.18.

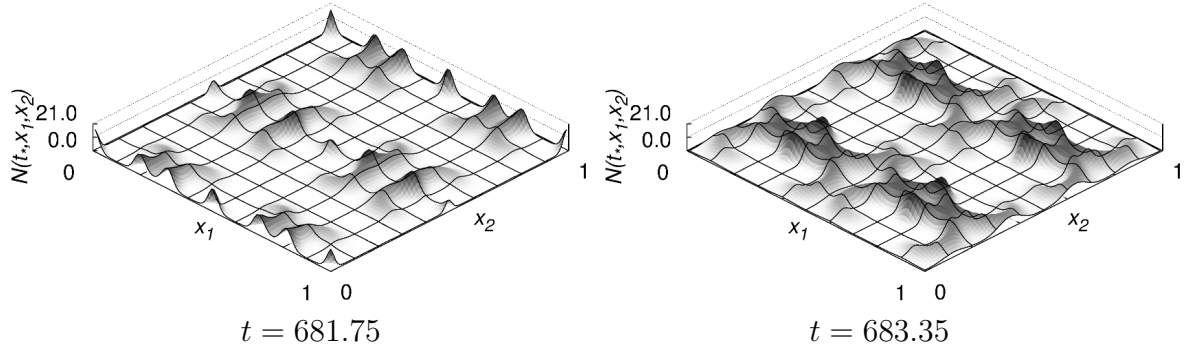


Рис. А.18. Генерация режима из шестнадцати спиральных волн при  $r = 3$ ,  $D = 0.0004$ .

На последнем этапе, начиная с  $t = 700$ , значение параметра диффузии увеличивается с текущего  $D = 0.0004$  до  $D = 0.006$  с шагом  $0.0001$  каждые 30 временных единиц. Отметим, что при  $D = 0.007$  описанный режим разваливается. В результате всех описанных действий получается режим с периодом  $T \approx 2.681$  (см. рис. А.19). Его псевдофазовый портрет изображен на рис. А.20, а динамические характеристики устроены следующим образом:  $M(\hat{N}) \approx 3.7507$ ,  $\hat{N}_{\min} = 3.5543$ ,  $\hat{N}_{\max} \approx 3.9433$ ,  $N_{\min} = 6.664 \cdot 10^{-5}$ ,  $N_{\max} \approx 19.7859$ .

Описанный метод позволяет генерировать практически любую конфигурацию из спиральных волн и доводить до требуемого значения коэффициента диффузии  $D$ . Отметим, что не каждый режим, получаемый таким способом, окажется устойчивым. Кроме того, учитывая стартовое значение коэффициента диффузии  $D = 0.0001$ , которое может быть изменено в достаточно узких пределах, становится понятным, что невозможно конструировать режимы таким образом при значительно более низких значениях  $D$ .

## Проблема сосуществующих аттракторов

Отдельно остановимся на вопросе сосуществования аттракторов с описанными выше конфигурациями при разных значениях коэффициента диффузии. Отметим, что проблема обнаружения всех возможных сосуществующих режимов остается открытой, поскольку при уменьшении значения коэффициента диффузии режимы усложняются и становятся более многочисленными, но также могут сосуществовать наряду с представленными и решения других неизвестных структур.

Как было показано ранее, режим вихревого типа (рис. 1.2) существует в крайне широких диапазонах значений коэффициента диффузии —  $D \in [0.0001, 0.148)$ . Минимальное значение левой границы здесь и далее зафиксировано значением  $0.0001$ , поскольку при шаге разбиения рассматриваемой области  $\Omega$  в  $1/100$  более низкие значения  $D$  приводят к появлению артефактов численного счета, что требует уменьшения шага разбиения. Также отметим, что точность границ всех указанных интервалов приближительна и может быть улучшена гораздо более долгими расчетами описанных режимов из-за их достаточно медленного разрушения при значениях  $D$ , близких к критическим.

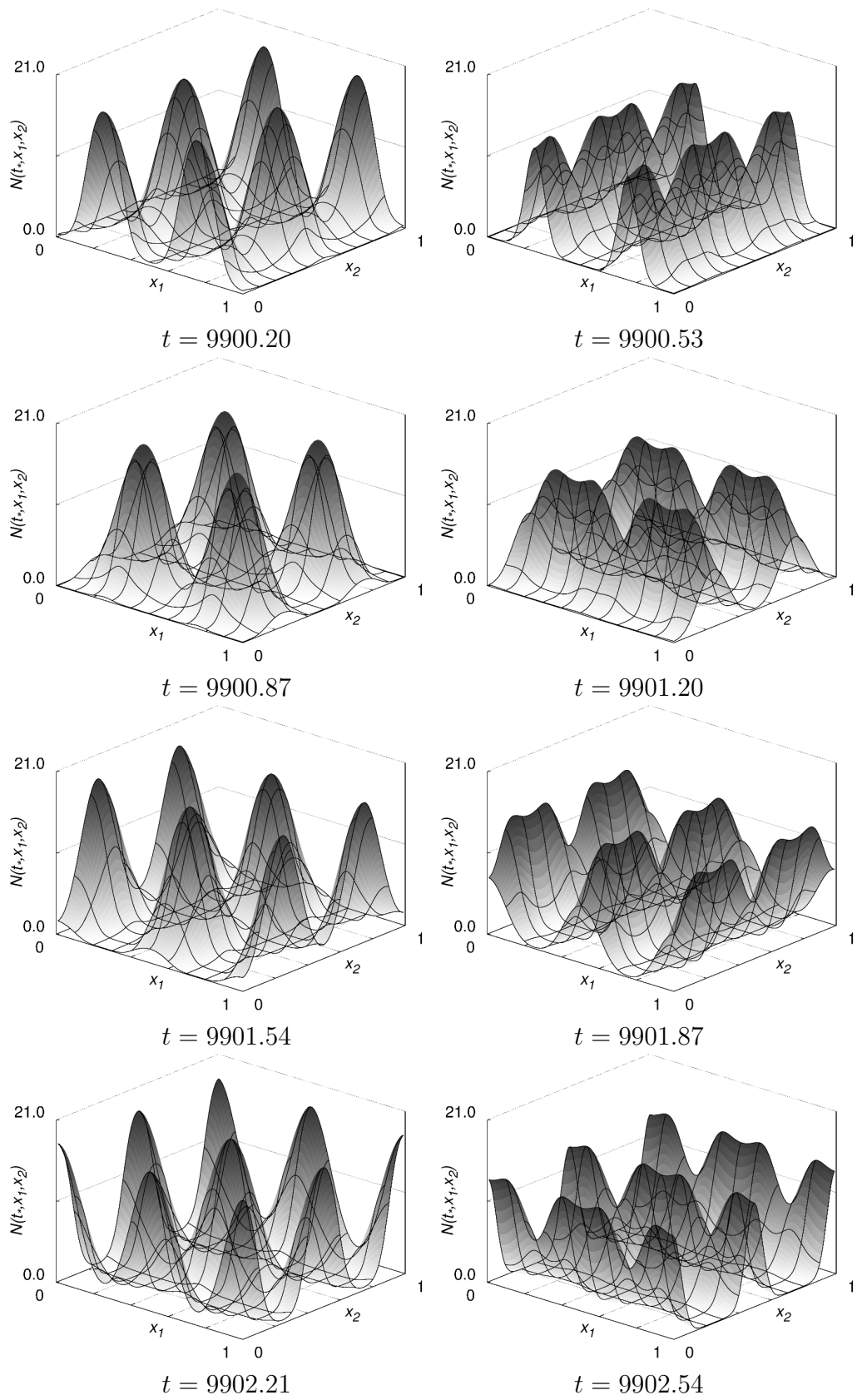


Рис. А.19. Генерация режима из шестнадцати спиральных волн при  $r = 3$ ,  $D = 0.006$ .

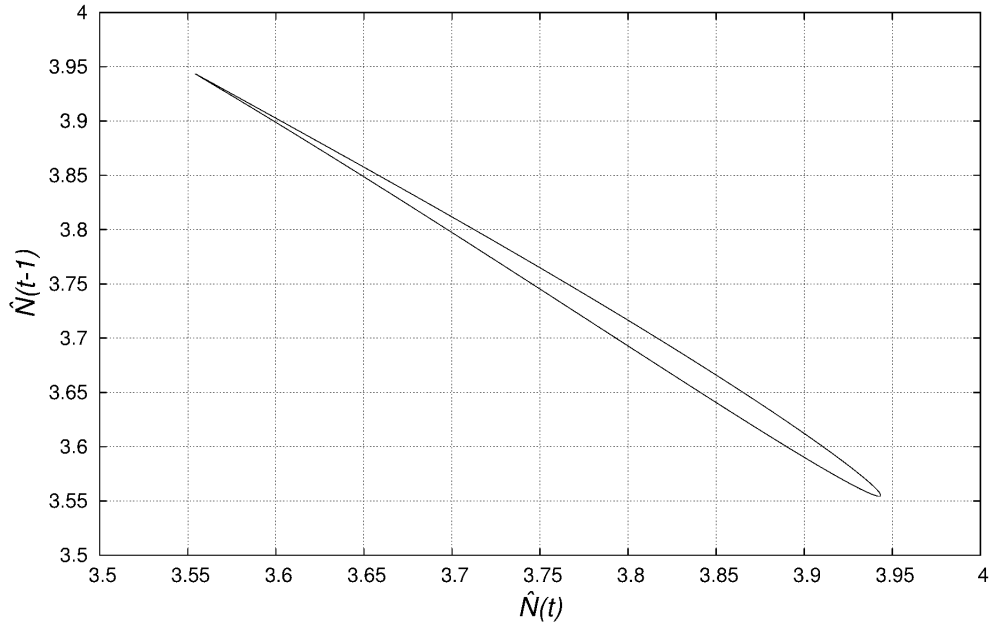


Рис. А.20. Псевдофазовый портрет генерируемого режима при  $r = 3$ ,  $D = 0.006$ , построенный по значениям  $\hat{N}(t)$  и  $\hat{N}(t - 1)$ .

Режим двух согласованных вихрей (рис. 1.6) не претерпевает качественных трансформаций при понижении  $D$  с максимального значения для этого режима  $0.037$  до  $0.0001$ , но так как при  $D < 0.0006$  слияние сходящихся волн отделено от центров вращения дополнительными витками сформировавшихся при низком уровне диффузии спиралей, то будем считать, что исходная конфигурация с небольшими неминуемыми изменениями при низком  $D$  сохраняется в интервале  $[0.0006, 0.037]$ .

Режим четырех согласованных вихрей (рис. 1.8), так же, как и предыдущий, не разрушается при понижении коэффициента диффузии  $D$  с максимального значения  $0.0031$  до  $0.0001$ , но при  $D \leq 0.0045$  вращающиеся пиковые импульсы при их движении из центра рассматриваемой области  $\Omega$  и достижении ими боковых границ разделяются не только на два импульса, расходящихся к ближайшим углам области, но и на еще один, остающийся у центра боковой стороны и быстро растворяющийся. Поэтому границами существования описанного режима будем считать интервал  $D \in [0.0046, 0.031]$ .

Режимы ведущего центра проходят через качественные трансформации при понижении  $D$  с  $0.0373$  до  $0.0001$  (см. рис. 1.2, А.1, А.2, А.3) — от пика, зарождающегося в одном из углов рассматриваемой области  $\Omega$  при  $D \in (0.0085, 0.0373]$ , к одному пику в центре области  $\Omega$  при  $D \in (0.002, 0.0085]$ , затем к четырем пикам при  $D \in (0.0005, 0.002]$ , затем к шестнадцати синхронным пикам при  $D \in [0.0001, 0.0005]$ .

Режим блуждающего ведущего центра (рис. А.7, А.8) существует при  $D \in [0.0012, 0.0022]$ .

Режим двух однонаправленных пар согласованных вихрей (рис. А.10) не претерпевает качественных трансформаций при понижении  $D$  с  $0.008$  до  $0.0001$ , но затухающий в центре области  $\Omega$  сгусток от столкновения двух фронтов при  $D < 0.0003$  теряет со-

единение с отходящей к боковой стороне волной, поэтому будем считать, что режим в описанной конфигурации существует при  $D \in [0.0003, 0.008]$ .

Режим двух согласованных вихрей с общей хвостовой волной (рис. А.11) существует в широком диапазоне —  $D \in [0.0001, 0.031]$ .

Режим спиральной волны с тремя фронтами (рис. А.12, А.13) устойчив при  $D \in [0.0001, 0.0207)$  и претерпевает такие же визуальные изменения, как и режим вихревого типа.

Режим двух синхронных спиральных волн с тремя фронтами (рис. А.15) существует при  $D \in [0.0001, 0.0033]$ .

У режима из шестнадцати спиральных волн ситуация такая же, как и у режима четырех согласованных вихрей, — он не претерпевает качественных трансформаций при понижении  $D$  с максимального для этого режима значения 0.006 до 0.0001, но при  $D < 0.001$  у центров вращения проявляются хвосты спиральных волн, из-за чего возникают отцепляющиеся затухающие сгустки плотности. Поэтому будем считать, что в представленной выше конфигурации режим существует при  $D \in [0.001, 0.006]$ .

Таким образом, на основе указанных интервалов значений коэффициента диффузии  $D$  можно увидеть границы сосуществования различных комбинаций режимов. Отдельно выделим три интервала —  $D \in (0.0085, 0.0207)$ , при котором сосуществуют шесть описанных режимов, а также  $D \in [0.0012, 0.002]$ , при котором сосуществуют десять описанных режимов, и  $D \in [0.0003, 0.0005]$ , при котором сосуществуют шесть описанных режимов. Тем самым, в этих промежутках имеет место мультистабильность.



# Приложение В

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



**СВИДЕТЕЛЬСТВО**  
о государственной регистрации программы для ЭВМ

**№ 2016663274**

**Моделирование логистического уравнения с запаздыванием  
и диффузией в плоской области**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования «Ярославский  
государственный университет им. П.Г. Демидова» (RU)*

Авторы: *Горюнов Владимир Евгеньевич (RU),  
Ивановский Леонид Игоревич (RU)*

Заявка № **2016660737**  
Дата поступления **12 октября 2016 г.**  
Дата государственной регистрации  
в Реестре программ для ЭВМ **29 ноября 2016 г.**

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

 **Г.П. Ивлиев**



# Приложение С

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



**СВИДЕТЕЛЬСТВО**  
о государственной регистрации программы для ЭВМ  
**№ 2018664656**

**LESPE (Lyapunov Exponents Spectrum Parallel Estimator)**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Научный центр Российской академии наук в Черноголовке (НЦЧ РАН) (RU)*

Авторы: *Алешин Сергей Владимирович (RU),  
Горюнов Владимир Евгеньевич (RU)*

Заявка № **2018662215**  
Дата поступления **02 ноября 2018 г.**  
Дата государственной регистрации  
в Реестре программ для ЭВМ **20 ноября 2018 г.**

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

 **Г.П. Ивалиев**

