Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
(МИАН)

119991, Москва, ул. Губкина, д. 8
Тел.: (499) 135-22-91. Факс: (499) 135-05-55. Для телеграмм: Москва, 119333, математика
E-mail: steklov@mi.ras.ru http://www.mi.ras.ru
ОКПО 02699547 ОГРН 1027739665436 ИНН/КПП 7736029594/773601001

__________ № 11102-______________

На № ____________ от ______________

УТВЕРЖДАЮ
Зам. директора
ФГБУН Математический институт
им. В.А. Стеклова
Российской академии наук
чл.-корр. РАН Д.В. Трещёв

10 декабря 2014 г.

О Т З Ы В

ведущей организации ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук
на диссертационную работу Ю.А. Левченко
«О топологической классификации диффеоморфизмов трехмерного многообразия
с поверхностными базисными множествами»,
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 «дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление»

Диссертация Ю.А. Левченко написана в классических традициях нижегородской школы нелинейных колебаний, основанной академиком А.А. Андроновым. Она посвящена вопросу топологической классификации диффеоморфизмов трёхмерного многообразия, обладающих поверхностными базисными множествами.

Под полной топологической классификацией некоторого класса G динамических систем понимается решение следующих задач:

- указание некоторых инвариантов $I(g)$ динамических систем g из класса G;

- доказательство полноты множества найденных инвариантов, то есть доказательство того, что равенство инвариантов $I(g) = I(g')$ является необходимым и достаточным условием топологической эквивалентности (сопряженности) двух динамических систем $g, g' \in G$;

- реализация, то есть построение по заданному I из множества возможных значений инвариантов стандартного представителя $g_I \in G$, для которого $I(g_I) = I$.

Решения проблемы топологической классификации в такой канонической постановке известны лишь для некоторых классов структурно устойчивых систем. Так, класс эквивалентности грубого потока на окружности однозначно определяется числом его неподвижных точек. Для структурно устойчивых каскадов на окружности полный топологический инвариант был получен А.Г. Майером в 1939 году, он состоит из трех чисел: числа периодических орбит, их периода и так называемого порядкового числа. В 1971 году М.М. Пейшото, обобщив понятие схемы Леонтович—Майера для двумерной сферы, доказал, что для структурно устойчивых потоков на произвольных поверхностях полным топологическим инвариантом является класс изоморфности ориентированного графа, вершины которого находятся во взаимно-однозначном соответствии с состояниями равновесия и замкнутыми траекториям, а ребра соответствуют компонентам связности инвариантных многообразий состояний равновесия и замкнутых траекторий. Далее была получена вначале топологическая классификация структурно устойчивых каскадов с регулярной динамикой на поверхностях посредством комбинаторных инвариантов аналогичных графу Пейшото, оснащенных подстановками на множестве вершин, с привлечением аппарата марковских цепей, а затем классификация каскадов с нетривиальными базисными множествами типа подковы Смейла, аносовских торов и одномерных аттракторов и репеллеров с использованием инвариантов, описываемых автоморфизмами фундаментальных групп носителей базисных множеств. Этими задачами занимались такие отечественные и зарубежные математики, как Х. Бонатти, А.Н. Безденежных, В.З. Гринес, Х.Х. Калай, Р. Ланжевен, Р.В. Плыкин, Я.Г. Синай и другие.

На многообразиях размерности 3 нетривиальные базисные множества могут иметь любую топологическую размерность от нуля до трёх. Если размерность базисного множества равна трём, то неблуждающее множество совпадает с несущим многообразием, а каскад является диффеоморфизмом Аносова на трехмерном торе. Топологическая классификация этих каскадов исчерпывающим образом получена в работах Ш. Ньюхауса, А. Мэннинга, Д. Френкса, и состоит в том, что каждый диффеоморфизм Аносова f на трехмерном торе топологически сопряжён с алгебраическим автоморфизмом, индуцированным действием f в фундаментальной группе. Таким образом, проблема топологической классификации сводится к алгебраической задаче.

Подобный сценарий решения аналогичной проблемы удалось применить диссертантке Ю.А. Левченко для класса G диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме А С. Смейла на замкнутых 3-многообразиях M^3, и у которых каждое базисное множество имеет топологическую размерность два и принадлежит двумерной поверхности. В диссертации построен класс Φ модельных диффеоморфизмов на многообразиях $M_{\widehat{J}}$, полученных из $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ отождествлением точек $(z,1)$ и $(\widehat{J}(z),0)$, где $\widehat{J}$ — алгебраический автоморфизм тора $\mathbb{T}^2$, заданный унимодулярной целочисленной матрицей J, которая является либо гиперболической, либо равна $\pm\mathrm{Id}$. Каждый диффеоморфизм $\phi \in \Phi$ является локально прямым произведением алгебраического автоморфизма тора $\mathbb{T}^2$, заданного гиперболической матрицей $C \in GL(2,\mathbb{Z})$ такой, что $CJ = JC$, и структурно устойчивого диффеоморфизма окружности $\mathbb{S}^1$. В главах 2 и 3 диссертации (теоремы 2.1, 3.1, 3.4—3.6) доказано, что любой структурно устойчивый диффеоморфизм $f \in G$ топологически сопряжен с некоторым модельным диффеоморфизмом $\phi \in \Phi$ и найдены алгебраические критерии топологической сопряженности моделей из класса Φ, являющиеся комбинацией инвариантов аносовского диффеоморфизма тора и грубого преобразования окружности Майера (теорема 3.2).

Следует отметить, что существуют двумерные базисные множества трехмерных диффеоморфизмов, не лежащие на поверхностях, а устроенные локально как произведение канторовского множества на диск. Классификация структурно устойчивых каскадов на 3-многообразиях с такими базисными множествами была получена в работах В.З. Гринеса и Е.В. Жужомы. Ими было доказано, что структурно устойчивые диффеоморфизмы с такими базисными множествами существуют только на трехмерном торе и каждый такой каскад топологически сопряжен с каскадом, полученным из аносовского автоморфизма посредством хирургической операции С. Смейла. Отсюда следует, что неблуждающее множество такого диффеоморфизма наряду с двумерным базисным множеством необходимо содержит нульмерный источник или сток. В силу результата А. Брауна (2010) все базисные множества размерности два диффеоморфизмов на 3-многообразиях исчерпываются двумя вышеописанными случаями. Поэтому результаты глав 2 и 3 данной диссертации следует рассматривать как полную топологическую классификацию произвольных структурно устойчивых диффеоморфизмов на 3-многообразиях, обладающих двумерным неблуждающим множеством, что, несомненно, придаёт значительный вес работе. Кроме того, диссертанткой доказано, что любой диффеоморфизм из класса G объемлюще Ω-сопряжен с некоторым модельным диффеоморфизмом $\Phi \in \Phi$ (теорема 3.3).

В главе 4 получена топологическая классификация содержательного класса структурно устойчивых каскадов на 3-многообразиях с одномерными базисными множествами, расположенными на гладко вложенной поверхности (теоремы 4.3 и 4.4).

Результаты диссертации вносят существенный вклад в качественную теорию динамических систем (а именно, диффеоморфизмов трёхмерных многообразий). Они снабжены полными и подробными доказательствами.

Достоинством диссертации является также детальность и продуманность изложения, в том числе наличие подробной вводной главы, содержащей все необходимые определения. Разумеется, в работе такого объёма неизбежны технические недочёты: например, в доказательстве предложения 2.2 (с. 65) не определены множества V_A и V_R, а понятие динамической когерентности появляется в следствии 3.1 на с. 73–74, в то время как его определение даётся лишь на с. 79. Эти погрешности никоим образом не влияют на общую положительную оценку диссертационной работы.

Полученные в диссертации результаты своевременно опубликованы, в том числе в журналах, рекомендованных ВАК. Автореферат правильно отражает её содержание.

Полученные результаты могут найти применение в исследованиях по теории динамических систем, ведущихся в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Московском, Санкт-Петербургском и Нижегородском университетах, а также при чтении специальных курсов по динамическим системам для студентов старших курсов, магистрантов и аспирантов.

В связи с вышесказанным считаю, что рассматриваемая диссертация удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор Левченко Юлия Алексеевна заслуживает присвоения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании отдела дифференциальных уравнений Математического института им. В. А. Стеклова РАН 3 декабря 2014 г. (протокол №4).

Составитель отзыва,
старший научный сотрудник
отдела дифференциальных уравнений МИАН,
кандидат физико-математических наук — А.В. Клименко

119991, Москва, ул. Губкина, д. 8
Тел. +7 (495) 984 81 41, доб. 39-95
E-mail: klimenko05@mail.ru

И.о. заведующего отделом
дифференциальных уравнений МИАН,
доктор физико-математических наук,
профессор — М.С. Никольский

119991, Москва, ул. Губкина, д. 8
Тел. +7 (495) 984 81 41, доб. 36-77
E-mail: mni@mi.ras.ru