

## ОТЗЫВ

на автореферат диссертации И. А. Богаевского  
на соискание ученой степени доктора физико-математических наук  
*Фронты стратифицированных лежандровых подмногообразий  
в задачах теории дифференциальных уравнений и оптимизации*

Теория особенностей фронтов гладких лежандровых многообразий была построена В. И. Арнольдом и его учениками в 80–90-х годах прошлого века. Ее построение было мотивировано задачами из механики и геометрической оптики. В настоящее время это хорошо изученная и развитая область математики, нашедшая новые применения в механике, математической физике, геометрической оптике, теории дифференциальных уравнений и оптимальном управлении. Построенная тогда теория изучала наиболее распространенные гладкие лежандровы многообразия в лежандровых расслоениях.

Однако в последнее время из приложений пришел большой круг задач, в которых приходится иметь дело с особыми лежандровыми многообразиями и их фронтами. Соответствующее расширение теории лежандровых особенностей в направлении включения в рассмотрение негладких лежандровых многообразий натолкнулось на принципиальную сложность, не встречающуюся в гладком случае. Эта сложность заключается в том, что хорошего функционального пространства, которое содержало бы в себе как гладкие, так и особые лежандровы многообразия, не существует: условие изотропности (лежандровости) выделяет в пространстве всех поверхностей (скажем, параметризованных или заданных как полное пересечение) подпространство с особенностями бесконечной коразмерности. Для точек этого подпространства понятия нормальных форм и версальных деформаций в принципе неприменимы.

В то же время давно известно некоторое количество естественных конкретных примеров особых лежандровых многообразий, представляющих математический интерес, — так называемые *раскрытый зонтик Уитни*, *раскрытый ласточкин хвост* и некоторые другие. Изучение этих примеров позволило со временем сформулировать принцип классификации фронтов особых лежандровых многообразий. Он заключается в том, что нужно зафиксировать (с точностью до контактоморфизма) само лежандрово многообразие, фронты деформации которого рассматриваются, и классифицировать особенности фронтов с точностью до контактоморфизмов объемлющего пространства, сохраняющих лежандрову проекцию. В результате возникает целый ряд классификационных задач, формально не связанных друг с другом, но имеющих близкую методологию решения. Эти задачи состоят в изучении особенностей фронтов лежандровых многообразий, имеющих особенности предписанного вида. Конкретный вид допустимых особенностей для лежандрова многообразия диктуется потребностями тех или иных приложений.

Представленная к защите работа является итогом и результатом систематизации исследований особенностей фронтов негладких лежандровых многообразий, проводившихся в последние десятилетия при активном участии соискателя. Для решения разнообразных классификационных задач из этой области автором был разработан универсальный метод. Его идея заключается в том, что исходное негладкое лежандрово многообразие можно зафиксировать, и использовать в качестве объекта классификации всевозможные деформации слоев лежандровых расслоений, подвергаемые контактоморфизмам, сохраняющим исходное лежандрово многообразие. В свою очередь, для классификации таких деформаций можно применить стандартную технику производящих семейств функций. Соискатель продемонстрировал эффективность это-



го метода, получив полную классификацию типичных особенностей фронтов и их перестроек невысоких размерностей в целом ряде постановок.

Для таких негладких лежандровых многообразий как раскрытый зонтик Уитни, или раскрытый ласточкин хвост, или цилиндр над полукубической параболой, список типичных особенностей фронтов в пространствах невысоких размерностей был известен ранее. Соискатель, в частности, построил классификацию простых особенностей фронтов еще одного особого лежандрова многообразия  $\Lambda_2$ , найденного В. И. Арнольдом. Его характерным свойством является наличие неалгебраических особенностей (логарифмического типа). Такие фронты возникают при изучении внутреннего рассеяния волн в управляемых системах с сублоренцевым управлением.

Несомненным достижением соискателя является завершение классификации особенностей выпуклых оболочек гиперповерхностей в четырехмерном пространстве, а также лежандровых многообразий, имеющих границу выпуклой оболочки в качестве фронта. В частности, было доказано отсутствие функциональных модулей в нормальной форме.

Разработанный автором метод оказался применимым для классификации особенностей неявных дифференциальных уравнений. Было доказано, в частности, что полученная ранее Арнольдом контактная классификация конических точек неявных дифференциальных уравнений допускает усиление до орбитальной эквивалентности.

Среди многих других интересных результатов стоит отметить построение нормальной формы перестройки фронта цилиндра над раскрытым зонтиком Уитни, при котором сложенный зонтик скользит по ребру возврата ласточкиного хвоста.

Автореферат написан ясно, четко излагает идеологию классификации особенностей фронтов особых лежандровых подмногообразий. Выносимые на защиту результаты строго сформулированы. В целом по автореферату можно заключить, что диссертация И. А. Богаевского "Фронты стратифицированных лежандровых подмногообразий в задачах теории дифференциальных уравнений и оптимизации" является научно-квалификационной работой, полностью удовлетворяющей требованиям Положения о порядке присуждения ученых степеней (постановление Правительства РФ № 842 от 24 сентября 2013 г.), предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук.

Д.ф.-м.н.  
ведущий научный сотрудник  
Математического института  
им. В.А.Стеклова РАН,  
профессор  
факультета математики НИУ ВШЭ

М. Э. Казарян

Д.ф.-м.н.  
профессор  
факультета математики НИУ ВШЭ



С. К. Ландо

Адрес организации:  
119048, Москва, ул. Усачёва, 6  
Факультет математики НИУ ВШЭ  
Тел.:  
+7-495-772-9590 доб. 12744  
E-mail:  
mkazarian@hse.ru, lando@hse.ru