

# О Т З Ы В

официального оппонента

о диссертации Устинова Никиты Сергеевича

«Полулинейные уравнения с дробными лапласианами»,

представленной на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения,

динамические системы и оптимальное управление

Уравнения с производными дробных порядков очень активно исследуются в настоящее время. Этот интерес обусловлен двумя главными причинами. Во-первых, это всегда очень обогащает теорию, когда дискретному параметру (в данном случае — порядок производной) «разрешается» стать непрерывным. Во-вторых, указанные уравнения полезны для разнообразных и многочисленных приложений, не покрываемых классической теорией *дифференциальных* уравнений. В рамках указанного научного направления дробные степени оператора Лапласа вызывают особый интерес — достаточно отметить, что специалисты в этой области насчитывают не менее десяти различных определений дробного лапласиана (которые, впрочем совпадают между собой, если определять этот оператор на всем  $\mathbb{R}^n$ ). Это совершенно естественно, поскольку оператор Лапласа является одним из основных операторов математической физики, а значит, именно его содержательные обобщения могут оказаться наиболее полезными.

В своей диссертации Н. С. Устинов исследует полулинейные уравнения с дробными лапласианами трех следующих (основных) видов: суженный лапласиан Дирихле, спектральный лапласиан Дирихле и спектральный лапласиан Неймана. На мой взгляд, самым впечатляющим достижением работы является установление эффекта множественности решений, который заслуживает отдельного описания — он гораздо тоньше и интереснее, чем простая констатация того факта, что задача имеет более одного решения. В линейном случае этот эффект не возникает вообще, однако, как только правая часть уравнения Пуассона начинает зависеть от неизвестной функции (т. е. уравнение становится полулинейным), задача Дирихле в круговом кольце может иметь сколь угодно много решений, причем количество решений зависит от размера области: для любого натурального  $m$  существует такое (достаточно большое)  $R$ , что, если радиус кольца превосходит  $R$ , то задача имеет не менее  $m$  решений (не совмещающихся поворотом). Для оператора Лапласа это явление известно с 1984. Позднее эти результаты были обобщены на случай  $p$ -лапласиана. Вопрос об операторах Лапласа *дробного* порядка до последнего времени оставался полностью открытым. Н. С. Устинов закрыл его для случаев суженного и спектрального лапласианов

Дирихле порядка  $s \in (0, 1)$ .

Рецензируемая диссертация отнюдь не исчерпывается эффектом множественности решений. Следует отметить другие существенные достижения Н. С. Устинова, а именно:

1. Доказано существование неотрицательного нетривиального решения с минимальной энергией для случая спектрального лапласиана Неймана в ограниченной области.
2. Для того же случая, что и выше, изучен вопрос о существовании *постоянных* решений с минимальной энергией. Доказано, что ответ зависит от размера области: если  $\{\varepsilon D\}$  — семейство областей, то при малых значениях коэффициента гомотетии  $\varepsilon$  такие решения существуют, а при больших — нет.
3. Для случая спектрального лапласиана Дирихле исследована разрешимость задачи с особенностью типа Харди—Соболева (т. е.  $|x|^{\alpha}u^{\beta}$ ) в правой части уравнения.

Ни одна из указанных задач в дробно-дифференциальном случае ранее не изучалась. Более того, во второй и третьей задачах предшественники диссертанта остановились на случае оператора Лапласа. Это подтверждает принципиальную новизну представленных в диссертации результатов.

К работе имеются следующие замечания:

- Эффект множественности решений достаточно хорошо описан в теореме 2.1. Но вот во Введении (раздел «Степень разработанности темы исследования») его описание совершенно невнятное — «задача имеет любое наперед заданное число решений для достаточно больших  $r$ » (страница 6, строки 4–6 сверху).
- Стоило бы дать формальное определение такому ключевому (и нетривиальному) понятию, как «решение с минимальной энергией».
- В разделе «Цели и задачи» после слова «множественности» надо вставить слово «решений» (страница 7, строка 6 сверху).

Однако ни один из перечисленных недостатков (равно как и все они в совокупности) не снижает ценности полученных результатов и не меняет безусловно положительной оценки диссертации.

В целом рецензируемая диссертация представляет собой обширное научное исследование, важное для теории уравнений в частных производных и смежных областей анализа. Тема диссертации является актуальной, методы исследования — современными, результаты — новыми и существенными. Результаты диссертации своевременно опубликованы (в

том числе — 5 публикаций в журналах, входящих в перечень рецензируемых журналов и изданий, рекомендованных ВАК РФ) и многократно докладывались на международных научных конференциях и на научных семинарах. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

На основании изложенного считаю, что диссертационная работа Устинова Никиты Сергеевича «Полулинейные уравнения с дробными лапласианами» полностью удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 (дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление), а ее автор, Устинов Никита Сергеевич, безусловно заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по указанной специальности.

Официальный оппонент — Муравник Андрей Борисович,  
доктор физико-математических наук по специальности  
01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление  
руководитель проекта аппарата научного руководителя  
АО «Концерн «Созвездие»  
394018, Воронеж, ул. Плехановская, 14  
тел.: 8(473)2525252 (доб. 131-38)  
email: amuravnik@yandex.ru

Подпись Муравника А. Б. удостоверяю:  
Ученый секретарь диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук



23.04.2021

А. Б. Муравник

Д. В. Костин