Отзыв научного руководителя

на диссертацию Романа Николаевича Тихомирова

# Операторные оценки многомасштабного усреднения для эллиптических уравнений

представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02. – "Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление"

В теории усреднения, возникшей более 50 лет назад, с самого начала большое внимание уделяется оценкам погрешности усреднения в различных нормах, прежде всего в энергетических, а также лебеговых нормах, естественно связанных с изучаемой задачей. Подобные оценки вошли, например, в основные монографии по усреднению, такие, как A. Bensousan, J.-L. Lions , G. Papanicolaou. *Asymptotic Analysis for Periodic Structure*, North-Holland, Amsterdam, 1978; Н.С. Бахвалов, Г.П. Панасенко. *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М.: 1984; В.В. Жиков, С.М. Козлов, О.А. Олейник. *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М.: 1993; А.Л. Пятницкий, Г.А. Чечкин, А.С. Шамаев. *Усреднение. Методы и приложения*. Новосибирск. изд-во Тамары Рожковской, 2007.

Для линейных эллиптических уравнений второго порядка оценки погрешности усреднения даются в $H^1$- и $L^2$-нормах, для аналогичных параболических уравнений – ещё и в $L^\infty$- и $L^1$-нормах. Долгое время мажоранты в этих оценках имели такую зависимость от данных задачи (например, от правой части эллиптического уравнения или данного Коши для параболического уравнения), что оценкам нельзя было придать операторный смысл. А именно, переформулировать эти результаты как оценки в операторной норме для разности резольвент исходного и усредненного операторов в эллиптическом случае или для разности полугрупп (операторных экспонент) соответствующих операторов в параболическом случае.

По-видимому, одни из первых оценок усреднения операторного вида появились в работах В.В. Жикова в конце 80-ых годов (см. Жиков В.В., *Спектральный подход к асимптотическим задачам диффузии* // Дифференц. уравнения, **25**(1989), № 1). Это были оценки для параболических уравнений в $L^\infty$-нормах, они возникли для приложений к теории вероятностей и теории диффузии. Для доказательства оценок использовался спектральный подход, основанный на блоховском представлении фундаметального решения.

Повышенный интерес к операторным оценкам усреднения возник с выходом работы М.Ш. Бирмана, Т.А. Суслиной *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства усреднения* // Алгебра и анализ, **15**(2003), № 5, где были установлены $L^2$-оценки для широкого класса линейных эллиптических уравнений. Спектральным методом ими были изучены помимо скалярного эллиптического уравнения различные векторные уравнения, например, система теории упругости. Анализ векторных задач оказался существенно более сложным из-за проблем, связанных с теорией возмущений.

В.В. Жиков (см. "Об операторных оценках в теории усреднения" Доклады РАН, **403**(2005), № 3) предложил иной подход для вывода операторных оценок, основанный на специальном анализе первого приближения с привлечением дополнительного параметра интегрирования, который вводится с помощью сдвига в аргументы осциллирующих множителей. Метод получил существенное развитие в дальнейших работах В.В. Жикова и С.Е. Пастуховой, где рассматривались различные эллиптические и параболические уравнения, в том числе вырождающиеся, нелинейные, высокого порядка, система теории упругости и др. В основном это были уравнения с периодическими коэффициентами.

Для приложений важно было расширить границы применения метода Жикова для статистически однородных задач, но не чисто периодических. В диссертации Р.Н. Тихомирова расширение метода произведено для локально-периодических и многомасштабных уравнений. К последним относятся такие уравнения, коэффициенты которых ослиллируют по разным группам переменных с разными малыми периодами, причем порядки малости отделены друг от друга. Изучены скалярные эллиптические уравнения резольвентного типа во всём пространстве, а также краевые задачи для этих уравнений в ограниченной области с условием Неймана или Дирихле на границе области. Многомасштабные задачи общего вида, охватывающие, в частности, векторный эллиптический или параболический случаи, предполагают использование нескольких дополнительных параметром сдвига – по числу различных масштабов. Но для скалярных эллиптических задач была выдвинута концепция упрощенного сдвига. В двухмасштабном случае это означает, что сдвиг производится только по самой быстрой переменной. Из-за упрощения в сдвиге становится более простой структура первого приближения, то есть аппроксимации для точного решения в энергетической $H^1$-норме. Однако, вместе с тем усложняется обоснование возможности такого приближения. Например, для этого необходимо пользоваться тонкими результатами эллиптической теории и теорем вложения Соболева, применять различные варианты принципа максимума. Диссертант справился со всеми трудностями и представил интересное законченное исследование задач указанного круга.

Работа выполнена на высоком техническом уровне, четко и ясно написана. Изложение достаточно автономно. Результаты, вынесенные на защиту, полностью доказаны.

Считаю, что данная диссертационная работа удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК России к кандидатским диссертациям, а её автор Р.Н.Тихомиров заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02. "Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление".

Научный руководитель
профессор кафедры высшей математики-2
Московского технологического университета,
доктор физико-математических наук
**С. Е. Пастухова**

Пастухова

Подпись доктора физико-математических наук
С. Е. Пастуховой заверяю

Начальник
Управления кадров

Филатенко Л.Г.