Отзыв
официального оппонента Бобкова В.Е.
на диссертацию Устинова Никиты Сергеевича
«ПОЛУЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ЛАПЛАСИАНАМИ»
представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

1 Актуальность темы исследования

Теория существования решений дифференциальных уравнений в частных производных, а также соответствующая качественная теория, занимают одно из центральных мест в современных исследованиях по дифференциальным уравнениям и математической физике. В последние 10-15 лет наблюдается лавинообразный рост интереса к изучению задач, содержащих нелокальные операторы типа дробных Лапласов. Такие операторы возникают естественным образом, например, как инфинитезимальные генераторы симметричных устойчивых процессов Леви, а также в некоторых моделях физики, биологии, химии, и других областей. С другой стороны, операторы дробных порядков являются естественным обобщением классических дифференциальных операторов, и следовательно, представляют собой обоснованные объекты с точки зрения развития самой математики.

Рост интереса к изучению таких задач можно объяснить разработкой новых методов и техник, позволяющих работать с нелокальными операторами (см., в частности, продолжение Каффарелли-Сильвестра и вариационные подходы), а также тем фактом, что теория соответствующих функциональных пространств была независимо развита ранее (см., например, работы Бесова, Лизоркина, Трибеля, и др.). В свою очередь, вопросы, возникающие в современных исследованиях по нелокальным задачам сами мотивируют дальнейшую разработку методов исследования дифференциальных уравнений и развитие соответствующей функциональной теории. Таким образом, диссертационная работа Устинова Н.С., посвящённая этим вопросам, представляет собой актуальное и важное исследование по современной проблематике.

2 Научная новизна результатов исследования и их и практическая значимость

К основным результатам исследования можно отнести следующие:

1. Пусть $K_r^n \subset \mathbb{R}^n$ обозначает концентрический сферический слой $B_{r+1}^n \setminus \overline{B_r^n}$, $n \neq 3$. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ существует достаточно большое $r_N > 0$ такое, что любого $r > r_N$ задача Дирихле для уравнения $(-\Delta)^s u = |u|^{q-2}u$ имеет по крайней мере N различных положительных решений. Здесь $s \in (0,1)$ и $q \in (2, 2^*_{n,s})$ фиксированы. Оператор $(-\Delta)^s$ является либо суженным либо спектральным дробным оператором Лапласа-Дирихле. В случае классического (локального) оператора Лапласа, схожие результаты ранее были

получены в работах [Coffman, 1984], [Li, 1990], [Byeon, 1997]. В случае дробных операторов, родственный результат был получен в работе [Figueiredo, Pimenta, Siciliano, 2018]. В этой работе дана оценка снизу на количество неотрицательных решений задачи вида $(-\Delta)^s u + u = |u|^{q-2}u$ в расширяющихся областях общего вида (в зависимости от топологии области). Здесь $(-\Delta)^s$ является суженным дробным оператором Лапласа-Дирихле. В частном случае, когда область есть K_r^n, результат этой работы даёт по крайней мере два неотрицательных решения. Тем не менее, как цели, так и методы данной работы и работы Устинова принципиально отличаются.

2. Пусть Ω - ограниченная гладкая область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $s \in (1/2, 1)$, и $q \in (1, 2^*_{n,s}]$. Тогда уравнение $(-\Delta_\Omega^N)^s_{Sp} u + u = |u|^{q-2}u$ имеет ненулевое неотрицательное решение минимальной энергии. Более того, получены условия на область, гарантирующие, что постоянное решение является либо не является точкой глобального/локального минимума функционала энергии. Здесь $(-\Delta_\Omega^N)^s_{Sp}$ обозначает спектральный дробный Лаплас-Нейман. В случае локального Лапласа, вопрос существования для критического показателя q был исследован в работах [Adimurthi, Mancini, 1991] и [Wang, 1991], а вопрос о вариационных свойствах постоянного решения был изучен в работе [Назаров, Щеглова, 2004]. Близкие результаты для дробного Лапласа мне не известны.

3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ есть гладкая ограниченная область, $n \geq 2$ и $0 < \sigma < s < 1$. Пусть $0 \in \partial\Omega$. Найдены условия на область, гарантирующие, что задача Дирихле для уравнения $(-\Delta_\Omega^D)^s_{Sp} u = |u|^{2^*_{n,\sigma}-2}u/|x|^{(s-\sigma)2^*_{n,\sigma}}$, соответствующее обобщённому неравенству Харди-Соболева, имеет положительное решение с минимальной энергией. Вопрос существования такого решения в случае классического Лапласа был рассмотрен в работах [Ghoussoub, Kang, 2004] и [Демьянов, Назаров, 2006]. Некоторые результаты в нелокальном случае также известны, но относятся преимущественно к случаю неограниченных областей $\Omega = \mathbb{R}^n$ и $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ и не покрывают результатов Устинова Н.С. Также в диссертации доказано тождество Похожаева, применимое для задач с оператором $(-\Delta_\Omega^D)^s_{Sp}$. В случае суженного оператора Лапласа-Дирихле, тождество Похожаева было получено в работах [Ros-Oton, Serra, 2012, 2014].

Таким образом, результаты диссертации Устинова Н.С. являются оригинальными и научно значимыми. Полученные результаты имеют не только самостоятельный теоретический интерес, но также могут быть использованы в изучении других задач.

3 Степень обоснованности и достоверность научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации

Результаты, полученные Устиновым Н.С., представляют собой строго доказанные математические утверждения. Для доказательства данных утверждений автором были применены и развиты как вполне классические, так и современные методы, использовавшиеся при изучении родственных задач содержащих как линейные, так и нелинейные операторы локальной и нелокальной природы. В частности, отметим метод минимизации с ограничениями и метод симметричной критичности; продолжения Каффарелли-Сильвестра и Стинга-Торреа, позволяющие описывать нелокальный оператор через локальный в пространстве повышенной размерности; принцип концентрации-компактности Лионса и его модификации; а также группы методов и подходов, разработанные и развитые в работах Демьянова А.В., Колоницкого С.Б., Назарова А.И., Щегловой А.П., и др. Результаты диссертации докладывались автором на многих профильных семинарах и конференциях и не вызвали сомнений у экспертов. Ввиду вышесказанного, научные положения, выводы и рекомендации, сформулированные в рассматриваемой диссертации, считаю достоверными и полностью обоснованными.

4 Замечания по диссертации

- Константа в первом неравенстве Предложения 1.1 должна быть уменьшена, в силу комбинации Предложения 1.3 и второго неравенства в Предложении 1.1 на фукнции $\varphi_{D,1}$.
- В доказательстве Предложения 1.2 уместно привести ссылку на строгий принцип максимума для операторов типа $-\mathrm{div}(t^{1-2s}\nabla_X w(x,t))$.
- В Теореме 2.1, построенные решения не совмещаются не только поворотами, но и любыми действиями группы $O(n)$.
- В доказательстве Леммы 2.2 уместно привести подсказку либо ссылку на доказательство оценки $\lambda_{D,1} > 1$.
- Неравенство $2[u_r]^2_{R,\widetilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}^n_r)} \geq \|u_r\|^2_{\widetilde{\mathcal{H}}^s(\mathbb{K}^n_r)}$ на стр.39 тривиально ввиду определения квадратичной формы (стр.30) и нормы (стр.22).
- Ввиду нелокальности рассматриваемых задач, можно ли снять условие связности Ω в Главах 3, 4, 5?

Не смотря на приведённый выше список, замечаний принципиального характера в процессе оппонирования диссертации Устинова Н.С. у меня не возникло.

5 Соответствие диссертации критериям ВАК

Диссертация Устинова Н.С. представляет собой научно-квалификационную работу, в которой содержится решение описанных выше научных задач, имеющих важное значение для развития соответствующей отрасли знаний. Диссертация, ровно как и все публикации по теме диссертации, написаны автором самостоятельно, что свидетельствует о личном вкладе автора диссертации в науку. Работа обладает внутренним единством, и содержит новые научные результаты.

Основные научные результаты диссертации опубликованы в рецензируемых научных изданиях (5 публикаций), входящих в перечень ВАК либо удовлетворяющих достаточным условиям включения в перечень ВАК. Диссертация содержит ссылки как на работы с предшествующими и родственными результатами других авторов, так и на работы, методы которых были использованы в исследовании.

Таким образом, я считаю, что диссертационная работа Устинова Н.С. соответствует всем требованиям ВАК предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент,
к.ф.-м.н., научный сотрудник
отдела вычислительной математики
ИМВЦ УФИЦ РАН Бобков В.Е.

450008, г. Уфа, ул.Чернышевского, 112
Тел.: +79603837781
Email: bobkov@matem.anrb.ru

Подпись Бобкова В.Е. заверяю Мусин / Мусин И.Х.