О Т З Ы В
официального оппонента на диссертационную работу
Гаргянц Лидии Владимировны
"Разрывные энтропийные решения одномерных законов сохранения с неограниченными начальными условиями",
представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Актуальность темы диссертации.

В диссертационной работе изучаются локально ограниченные энтропийные решения скалярного закона сохранения

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{1.1}$$

в случае одной пространственной переменной $x \in \mathbb{R}$. Такие уравнения возникают в многочисленных приложениях (в газовой динамике, гидродинамике, теории дорожного движения и других областях). Как показано в работах [36,14,28] (из списка литературы в диссертации), постановка задачи Коши для уравнения (1.1) в классе неограниченных решений некорректна, ни один из положительных результатов, известных для ограниченных энтропийных решений (существование, единственность, принципы максимума и сравнения) не верен для локально ограниченных решений. Классы корректности таких решений выделяются с помощью ограничений на рост по пространственным переменным, см., например, [28], а также более общие результаты работы

> Лысухо П.В., Панов Е.Ю. О существовании и единственности неограниченных энтропийных решений задачи Коши для квазилинейных законов сохранения первого порядка// Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 1. С. 103–111.

Актуальна проблема построения и классификации энтропийных решений, не лежащих в классах корректности, исследованию которой и посвящена диссертационная работа Лидии Владимировны Гаргянц.

Структура и содержание работы.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 39 наименований. Объем диссертации – 71 страница.

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, приводится обзор соответствующей литературы, указываются цель и методы исследования, описываются полученные результаты.

В основном в диссертационной работе рассматривается случай степенной функции потока $f(u) = |u|^{\alpha-1}u/\alpha$, $\alpha > 1$, когда уравнение (1.1) имеет вид

$$u_t + |u|^{\alpha-1}u_x = 0. \tag{1.8}$$

Первая глава диссертации посвящена построению энтропийного решения задачи Коши для уравнения (1.8) с экспоненциальной начальной функцией

$$u(0,x) = u_0(x) = \exp(-x/(\alpha-1)). \tag{1.9}$$

В основе построения лежит предложенная А. Ю. Горицким индуктивная процедура продолжения решения, определенного до огибающей $x = \gamma(t)$ семейства характеристик, за фронт ударной волны $x = \gamma(t)$. Ранее эта процедура применялась в [36,14] в случае степенной начальной функции. Оказалось, что в экспоненциальном случае построенное решение $u(t,x)$ ограничено в любой полуплоскости $t > \delta > 0$, причем оно равномерно стремится к нулю при $t \to +\infty$ (с оценкой $|u(t,x)| \leq wt^{-1/(\alpha-1)}$, $w > 1$). Показано, что $u(t,x)$ является односторонне периодической функцией с некоторым периодом $C > 0$: $u(t, x-C) = u(t,x)$ при $x < 1 + \ln t$. Переходя к пределу последовательности сдвигов $u(t, x-nC)$, автор получает энтропийное решение уравнения (1.1) с неожиданными свойствами: оно периодично по пространственной переменной, ограничено в любой полуплоскости $t > \delta > 0$ и удовлетворяет двусторонней оценке

$$t^{-1/(\alpha-1)} \leq |u(t,x)| \leq wt^{-1/(\alpha-1)} \tag{1.23}$$

(в частности это решение не принимает никаких начальных данных при $t = 0$). Указанное выше энтропийное решение задачи Коши с начальным условием (1.9) меняет знак при переходе через любую линию разрыва. Так как начальная функция положительна, это решение не удовлетворяет принципу сравнения, известному для ограниченных энтропийных решений. В последнем параграфе 1.3 показано, что неотрицательных энтропийных решений рассматриваемой задачи и не существует, что вытекает из более общего результата Теоремы 1.2, полученного для общего уравнения (1.1).

Во второй главе предложено обобщение индуктивной процедуры Горицкого построения глобального энтропийного решения уравнения (1.8) на случай общих начальных данных $u_0(x) = ((-g_0)^{-1}(x))^{1/(\alpha-1)}$. Показано, что семейства характеристик подходящих к линии разрыва $x = \gamma_n(t)$ сверху и снизу задаются равенствами $x = kt - g_n(k)$ и $x = kt - g_{n+1}(k)$, соответственно, в которых предполагается, что все функции g_n, $n \geq 0$, – возрастающие, сюръективные и строго выпуклые вверх и что линия разрыва $x = \gamma_n(t)$ – огибающая верхнего семейства $x = kt - g_n(k)$, то есть

$$\gamma_n(t) = \inf_{k>0}(kt - g_n(k))$$

– преобразование Лежандра функции g_n. Установлено рекуррентное соотношение

$$g_{n+1}(w^{\alpha-1}k) = g_n(k) + g_n'(k)(w^{\alpha-1}-1)k, \tag{2.2}$$

позволяющее однозначно определить все функции g_n и в результате построить глобальное энтропийное решение задачи. Приведены примеры построения таких решений.

В третьей главе использован другой метод нахождения энтропийных решений уравнения (1.8), основанный на наличии у уравнения однопараметрической группы симметрий $x \to x - s$, $t \to e^{-s}t$, $u \to e^{s/(\alpha-1)}u$, $s \in \mathbb{R}$. Инвариантные относительно этой группы решения имеют вид

$$u(t,x) = t^{-1/(\alpha-1)}v(x - \ln t). \qquad (3.2)$$

На интервалах гладкости $v(\xi)$ удовлетворяет ОДУ, допускающему явное интегрирование

$$\xi = |v|^{\alpha-1} - (\alpha - 1)\ln|v| + C, \quad C = \text{const}.$$

В точках же разрыва $\bar{\xi}$ функция $v(\xi)$ должна удовлетворять простым условиям, соответствующим условиям Ранкина-Гюгонио и условию допустимости Олейник на линии разрыва $x - \ln t = \bar{\xi}$. Поскольку $v(\xi)$ – функция одной переменной, процедура построения решения значительно упрощается. В частности, с помощью представления (3.2) в параграфе 3.2 предложено другое доказательство существования решения задачи (1.8), (1.9). В следующем параграфе 3.3 предложено неограниченное энтропийное решение уравнения (1.8), имеющее вид (3.2) и принимающее нулевые начальные данные. Ясно, что единственным ограниченным энтропийным решением этой задачи Коши является нулевая функция. Тем самым, построен еще один пример неединственности энтропийного решения в классе локально ограниченных функций. В заключительном параграфе третьей главы установлен впечатляющий результат, содержащий полную классификацию энтропийных решений уравнения (1.8) вида (3.2).

Научная новизна диссертации.

Основные результаты диссертации являются новыми. К ним относятся:

1) Построение глобального локально ограниченного энтропийного решения задачи (1.8), (1.9), качественные свойства этого решения;

2) Пример периодического энтропийного решения, удовлетворяющего двусторонним оценкам (1.23);

3) Условие несуществования положительного энтропийного решения задачи Коши для уравнения (1.1);

4) Индуктивная процедура построения глобального энтропийного решения со счетным множеством линий разрыва;

5) Новые примеры неединственности локально ограниченных энтропийных решений;

6) Классификация инвариантных энтропийных решений уравнения (1.8), имеющих представление (3.2).

Достоверность полученных результатов обоснована их сопоставлениям с результатами других авторов, обсуждением результатов на многочисленных международных конференциях и семинарах. Основные положения диссертации опубликованы в рецензируемых научных изданиях, в том числе - из перечня рекомендуемых ВАК журналов (3 статьи).

Теоретическая и практическая значимость.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в нелокальной теории энтропийных решений задачи Коши для квазилинейных уравнений первого порядка, а также в практических задачах, описываемых такими уравнениями.

Замечания по диссертационной работе.

Работа содержит ряд опечаток и неточностей, список которых приведен ниже:

1) В формулировке *принципа максимума/минимума* на стр. 6 допущена опечатка. Именно, в неравенствах $a \le |u_0| \le b$, $a \le |u| \le b$ следует убрать знак модуля, заменив эти неравенства на, соответственно, $a \le u_0 \le b$, $a \le u \le b$;

2) В формулировке Леммы 1.1 на стр. 19 опечатка. Верным является утверждение, что $-w$ – корень уравнения (1.13), отличный от 1;

3) Рисунок 1.4 соответствует частному случаю $\alpha = 3$, о чем следовало бы упомянуть. Заметим, что в этом случае $w = 2$, $C = 3 - \ln 4$;

4) На стр. 32 (7 строка сверху) равенство $u_n^-(t) = -w^{\alpha-1}u_n^+(t)$ следует заменить на $u_n^-(t) = -wu_n^+(t)$;

5) Условия Теоремы 2.1, вообще говоря, не достаточны для существования глобального решения. Например, возьмем $g_0(k) = k - k^{-\theta}$, где $0 < \theta < 1/(\lambda - 1)$, а $\lambda = w^{\alpha-1} > 1$. Нетрудно посчитать, что при любом целом n

$$g_n(k) = k - c_n k^{-\theta},$$

где $c_n = \beta^n$, $\beta = (1-\theta(\lambda-1))\lambda^\theta < 1$. Последнее следует из строгой выпуклости функции $p(\lambda) = \lambda^{-\theta}$, ввиду которой $p(\lambda) > p(1) + p'(1)(\lambda - 1)$, что эквивалентно требуемому неравенству $(1 - \theta(\lambda - 1))\lambda^\theta < 1$. Ясно, что все функции $g_n(k)$ гладкие, возрастающие, строго выпуклые вверх и сюръективные. Простые вычисления показывают, что при $t \ge 1$

$$\gamma_n(t) = \mathcal{L}(g_n)(t) = c_n^{\frac{1}{1+\theta}}\theta^{-\frac{\theta}{1+\theta}}(1+\theta)(t-1)^{\frac{\theta}{1+\theta}}$$

(и $\gamma_n(t) = -\infty$ при $t < 1$). В частности, $\gamma_n(t) \ge 0 = \lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n(t)$ при $t \ge 1$ и области D_n не заполняют все полупространство. Кроме того, решение, построенное в области D_0 с помощью метода характеристик не лежит в классе L^∞_{loc} (оно не ограничено ни в какой окрестности точки $(1, 0)$).

Поэтому, формулировку Теоремы 2.1 следует снабдить некоторыми дополнительными требованиями (в частности, условием $\gamma_n(t) \underset{n\to\infty}{\to} -\infty$). Впрочем, в рассматриваемых ниже, в параграфе 2.2 примерах утверждение Теоремы 2.1 оказывается выполненным;

6) Наверное, в формулировке Леммы 2.3 имелось ввиду, что если $g_n(k) = A_n k^m$, то $g_{n+1}(k) = A_{n+1}k^m$, где $A_{n+1} > A_n$. Нестрогое неравенство $A_{n+1} \ge A_n$

выглядит странно, поскольку отношение A_{n+1}/A_n это конкретная константа $(1 + m(w^{\alpha-1} - 1))w^{-m(\alpha-1)} > 1$ (так как $w^{\alpha-1} > 1$). При этом, неравенство $g_{n+1}(k) > g_n(k)$ при $k > 0$ следует именно из строгого неравенства $A_{n+1} > A_n$;

7) Утверждение о том, что функция $g_0(k) = k^m$ удовлетворяет условиям Теоремы 2.1 не точно - эта функция не сюръективна (впрочем, как и все последующие функции $g_n(k)$). Однако эти функции все же пригодны для построения глобального энтропийного решения. В результате как раз получатся решения, рассматриваемые в работах [36,14];

8) При доказательстве Теоремы 3.1, п. 4, нужно рассматривать $\xi_1(v)$ на интервале строгого убывания $(-\infty, -1]$. Соответствующая обратная функция $\tilde{v}_1$ задана на интервале $[1 - C, +\infty)$ и принимает значения в $(-\infty, -1]$. Тогда $v_1(\xi)$ это сужение $\tilde{v}_1$ на $[1 - C, S)$, как и утверждается в диссертации. В п. 6 доказательства перепутаны четные и нечетные n. На самом деле $v_n : [1 - nC, 1 - (n - 1)C) \to [1, w)$ для каждого **четного** $n \geq 2$, а $v_n : [1 - nC, 1 - (n - 1)C) \to (-w, -1]$ для **нечетного** $n > 2$;

9) На стр. 54 (9-10 строки сверху) и стр. 58 (4 строка снизу) выражение для полупериода S содержит опечатку: вместо $S = |w|^{\alpha-1} - (\alpha - 1)\ln|w| + 1$ должно быть $S = |w|^{\alpha-1} - (\alpha - 1)\ln|w| - 1$. Заметим также, что w положительно и значит $|w| = w$. В 3-й строке снизу на стр. 58 вместо равенства $v(\xi + S) = v(\xi)$ должно быть $v(\xi + S) = -v(\xi)$;

10) На стр. 59 фразу

"до пересечения с прямой $v = 1$" следует исправить на "до пересечения с одной из прямых $v = \pm 1$" (или на "до пересечения с множеством $|v| = 1$"), а фразу

"В точке $\xi = \mu_0$ с абсциссой $v = 1$ происходит скачок в точку $(-w, \mu_0)$ ..."

следует исправить на

"В точке $\xi = \mu_0$ с абсциссой $v = \pm 1$ происходит скачок в точку $(\mp w, \mu_0)$ ...";

11) Поведение решения при $\xi > \mu_0$ на стр. 60 (пункт 3) описано не полно. Кроме решений вида $v = \pm v_C(\xi)$ возможно также нулевое решение $v \equiv 0$ (которое можно получить в пределе при $C \to +\infty$). В случае же, когда $(v_0, \xi_0) \in Q^-$ и решение задается одной из функций $\pm w_C$, приведенное дважды (стр. 61, 11 строка сверху и 5 строка снизу) выражение $\mu_0 = |w|^{\alpha-1} - (\alpha - 1)\ln|w| - C$ ошибочно, на самом деле $\mu_0 = 1 - C$;

12) Условие на разрыве $|v^-| < 1 \leq |v^+|$, указанное на стр 61, п. 4 и на стр. 63 в конце доказательства Следствия 3.3, ошибочно. Правильное условие: $|v^+| \leq 1 < |v^-|$ (см. Лемму 3.4).

Указанные выше недостатки хотя и снижают качество диссертационной работы, легко устраняются и не оказывают существенного влияния на несомненную научную ценность работы и ее общую положительную оценку.

Заключение. Диссертация является законченным научно-исследовательским трудом, выполненным автором самостоятельно на высоком научном уровне. В работе приведены научные результаты, позволяющие квалифицировать их как теоретические. Полученные автором результаты достоверны, выводы и заключения обоснованы.

Автореферат соответствует основному содержанию диссертации.

Диссертационная работа отвечает критериям Положения о порядке присуждения учёных степеней, а ее автор Гаргянц Лидия Владимировна заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент:
главный научный сотрудник
научно-исследовательского центра
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого,
доктор физико-математических наук,
профессор / Е.Ю. Панов

Адрес: 173003 г. Великий Новгород, ул. Большая Санкт-Петербургская, 41, тел. +7-8162-627244 e-mail: Eugeny.Panov@novsu.ru

Подпись Панова Е.Ю.
Заверяю
Вед. специалист
Отдела кадров НовГУ
«22» марта 2019 г.

ОТДЕЛ КАДРОВ

Проректор по НРИ А.Б. Ефременков