

«УТВЕРЖДАЮ»



Проректор по научной работе ФГБОУ ВО
«Воронежский государственный
педагогический университет»,
профессор

В.А. Хоник

29 января 2018 года

О Т З Ы В

ведущей организации о диссертации Лариной Яны Юрьевны
«Устойчивость по Ляпунову и статистические характеристики управляемых систем с импульсным воздействием», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Актуальность темы диссертации

В диссертации Я. Ю. Лариной рассмотрены задачи инвариантности, устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости множеств относительно управляемых систем с импульсным воздействием, исследуются статистические характеристики множества достижимости и статистически инвариантные множества управляемых систем и отвечающих им дифференциальных включений.

Большое прикладное значение, которое имеет исследование инвариантных множеств в теории управления и теории дифференциальных игр, породило поток научных публикаций. Итоги этих исследований подведены в работах Н. Н. Красовского, А. Б. Куржанского, Ж. П. Обена, А. И. Субботина, Е. Л. Тонкова, В. Н. Ушакова, Т. Ф. Филипповой, П. Хартмана и многих других авторов. Значительно меньше публикаций посвящено вопросам изучения множеств, не являющихся инвариантными (см. работы В. Н. Ушакова¹ и его учеников). В этих работах введено и исследовано понятие дефекта инвариантности для множеств, не обладающих свойством инвариантности. В работах Л. И. Родиной и Е. Л. Тонкова² также исследуются множества, не являющиеся инвариантными в «классическом» смысле и для таких множеств изучается естественное обобщение понятия инвариантности, которое названо статистической инвариантностью.

¹Ушаков В. Н., Латушкин Я. А. Дефект стабильности множеств в игровых задачах управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2006. — Т. 12, № 2. — С. 178–194.

Ушаков В. Н., Зимовец А. А. Дефект инвариантности множеств относительно дифференциального включения // Вестник Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2011. — № 2. — С. 98–111.

²Родина Л. И., Тонков Е. Л. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. — 2009. — Т. 5, № 2. — С. 265–288.

Родина Л. И., Тонков Е. Л. Статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2011. — Вып. 1. — С. 67–86.

В работе Я. Ю. Лариной исследования Л. И. Родиной и Е. Л. Тонкова распространяются на управляемые системы с импульсным воздействием. Автор диссертации также использует результаты Р. И. Гладиллиной, Н. А. Перестюка и А. М. Самойленко, относящиеся непосредственно к системам с импульсами, что позволяет получить утверждения об инвариантности и устойчивости множеств относительно данных систем.

Оценка содержания диссертации и ее завершенность

Целью диссертации является изучение положительно инвариантных, устойчивых по Ляпунову, асимптотически устойчивых и статистически инвариантных множеств относительно управляемой системы с импульсным воздействием; оценка статистических характеристик решений систем и уравнений с импульсами; исследование статистических характеристик, возникающих в различных прикладных задачах. Диссертация состоит из введения, трех глав, 8 параграфов, заключения и списка литературы, включающего 70 наименований. Полный объем диссертации 106 страниц текста с 6 рисунками.

Во введении обоснована актуальность темы исследования, дается общая характеристика рассматриваемого в диссертации круга вопросов, приведен обзор работ предшественников по данной проблеме, определена цель работы и сформулированы основные полученные результаты.

В первой главе исследуются статистические характеристики для непрерывных функций и статистически слабо инвариантные множества управляемой системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (t, x, u) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \quad (1)$$

Одна из этих характеристик — *относительная частота попадания графика функции $\varphi(t)$ в заданное множество $\mathfrak{M} \doteq \{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\}$* равна отношению меры Лебега тех t из отрезка $[t_0, \vartheta]$, при которых $\varphi(t) \in M(t)$, к длине данного отрезка:

$$\text{freq}(\varphi) \doteq \lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}\{t \in [t_0, \vartheta] : \varphi(t) \in M(t)\}}{\vartheta - t_0}. \quad (2)$$

Если предел (2) не существует, то рассматриваются верхняя и нижняя относительные частоты, в которых предел заменяется на верхний и нижний пределы соответственно.

Получены основные свойства данных характеристик и приведены условия, при которых эти характеристики можно оценить или вычислить. Также получено условие существования статистически слабо инвариантного множества управляемой системы (1). Приведены определения характеристик, которые целесообразно исследовать в различных прикладных задачах. Рассмотрен пример вычисления характеристики равномерности пребывания в заданном множестве численности популяции, динамика которой задана задачей Коши для уравнения Ферхюльста с почти периодическими коэффициентами.

Во второй главе исследуется устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость, слабая устойчивость и слабая асимптотическая устойчивость множеств относительно управляемых систем с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= g(x, w_i), \quad (t, x, u, w_i) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p. \end{aligned} \quad (3)$$

Основными результатами являются условия существования таких множеств. Автор также рассматривает примеры модели конкуренции двух видов и модели изменения численности популяции в условиях биологического контроля, которыми иллюстрирует полученные результаты. Используются как аналитические, так и численные методы.

В третьей главе получены теоремы сравнения для управляемых систем с импульсным воздействием, а также изучаются статистические характеристики данных систем. Доказаны теоремы сравнения, сформулированные в терминах функций А.М. Ляпунова и производной в силу дифференциального включения.

В целом диссертация Я. Ю. Лариной является вполне законченным исследованием по ряду вопросов, касающихся изучения устойчивости по Ляпунову и характеристик управляемых систем и дифференциальных включений, а также по связанным с этими характеристиками свойствами инвариантности и статистической инвариантности.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертантом рассмотрены новые характеристики функций и решений управляемых систем (1) и продолжено исследование множеств, устойчивых по Ляпунову относительно управляемой системы (3). Также показано, какую роль играет свойство инвариантности для решения различных задач математической теории управления. Несомненными достоинствами работы Я. Ю. Лариной являются следующие:

1. Исследованы основные свойства характеристики (2) для различных непрерывных функций и почти периодических функций определенного вида. Получены условия существования статистически слабо инвариантного множества относительно управляемой системы (1).

2. Для управляемых систем с импульсным воздействием получены условия существования положительно инвариантного, устойчивого по Ляпунову и асимптотически устойчивого множеств, а также условия существования слабо положительно инвариантного, слабо устойчивого по Ляпунову и слабо асимптотически устойчивого множеств.

3. Получены теоремы сравнения для решений систем и уравнений с импульсным воздействием, а также теоремы сравнения для статистических характеристик функций, являющихся решениями системы и уравнения с импульсным воздействием соответственно.

4. Приведено большое число примеров, иллюстрирующих основные результаты.

Работа имеет теоретический характер. Все основные утверждения сформулированы в виде теорем и строго доказаны. Результаты работы Я. Ю. Лариной и примененные методы могут быть использованы при проведении исследований по математической теории управления и при чтении специальных курсов для студентов и магистров в Институте математики и механики УрО РАН, в Институте динамики систем и теории управления СО РАН, в Московском, Владимирском, Воронежском педагогическом, Пермском, Удмуртском и Ярославском государственных университетах.

Критический анализ диссертации

Диссертация Я. Ю. Лариной не содержит серьезных недостатков, а изложенные замечания можно рассматривать как пожелания для дальнейших исследований.

1. В теореме 4.3 на с. 58 получены условия, при которых для каждого решения $x(t, x_0)$ управляемой системы существует момент времени $t^* > t_0$ такой, что точка $(t, x(t, x_0))$ принадлежит множеству \mathfrak{M} при всех $t \in [t^*, +\infty)$. В дальнейшем представляет интерес найти оценку для момента t^* .

2. В работе не рассмотрены примеры множеств, которые являются слабо асимптотически устойчивыми относительно управляемой системы, но не являются асимптотически устойчивыми.

Выводы

Диссертация Я. Ю. Лариной посвящена актуальным в приложениях задачам исследования устойчивости по Ляпунову и статистических характеристик управляемых систем с импульсным воздействием.

Основные результаты диссертации оформлены в виде теорем, доказательства которых отвечают современным требованиям математической строгости. Теоретические результаты иллюстрируются многочисленными примерами. Работа обладает внутренним единством и завершенностью. Оформление диссертации отвечает современным типографским требованиям. Результаты диссертации опубликованы в полном объеме в статьях в ведущих научных изданиях.

Автореферат диссертации полностью отражает ее содержание.

Диссертация Я. Ю. Лариной является законченным исследованием, содержащим ряд глубоких результатов по математической теории управления.

Считаю, что диссертация Я. Ю. Лариной «Устойчивость по Ляпунову и статистические характеристики управляемых систем с импульсным воздействием» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.02 (дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление), а Я. Ю. Ларина вполне заслуживает присвоения ей ученой степени кандидата физико-математических наук.

Отзыв утвержден 10 января 2018 года (протокол № 5 от 10 января 2018 года) на заседании кафедры высшей математики ВГПУ.

Отзыв составил
профессор кафедры высшей математики
доктор физико-математических наук, доцент

Корнев Сергей Викторович

Заведующий кафедрой высшей математики,
доктор физико-математических наук,
профессор

Обуховский Валерий Владимирович
29 января 2018 года



394043, г. Воронеж, ул. Ленина, 86, Воронежский государственный педагогический университет, кафедра высшей математики.

Тел. +7(473)255-36-63

E-mail: valerio-ob2000@mail.ru

