

ОТЗЫВ

НАУЧНОГО КОНСУЛЬТАНТА ДОКТОРА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК,
ПРОФЕССОРА АЛХУТОВА ЮРИЯ АЛЕКСАНДРОВИЧА НА ДИССЕРТАЦИЮ
СУРНАЧЁВА МИХАИЛА ДМИТРИЕВИЧА «ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ И
ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА Р-ЛАПЛАСИАНА»,
ПРЕДСТАВЛЕННУЮ НА СОИСКАНИЕ УЧЁНОЙ СТЕПЕНИ ДОКТОРА
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ
01.01.02 — ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ
СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ.

Сурначёв Михаил Дмитриевич является выпускником кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета им. М.В. Ломоносова. Там же он защитил в 2009 году кандидатскую диссертацию «Асимптотическое поведение на бесконечности решений уравнений типа Эмдена-Фаулера» под руководством замечательного математика В.А. Кондратьева. После защиты кандидатской диссертации научные интересы М.Д. Сурначёва несколько изменились. Дальнейшее формирование его научных интересов прошло под влиянием В.А. Лискевича, В.В. Жикова и моим. Основным направлением исследовательской активности Сурначёва М.Д. на данный момент является теория нелинейных параболических и эллиптических уравнений типа p -Лапласиана.

М.Д. Сурначёв отличается широтой математического кругозора, он активно работает с литературой, владеет современными методами теории нелинейных уравнений в частных производных эллиптического и параболического типов, методами исследования регулярности, асимптотического поведения решений, методами теории пространств Соболева-Орлича с переменным показателем, теорией весов Макенхаупта, ВМО и др. Работал М.Д. Сурначёв и по тематике вычислительной аэроакустики (неотражающие граничные условия), а также по гиперболизации уравнения теплопроводности.

В представленной диссертации изложены результаты М.Д. Сурначёва по трём основным направлениям: регулярность решений нелинейных параболических уравнений типа p -Лапласиана с весами, асимптотическое поведение

решений уравнений типа параболического p -Лапласиана при неограниченном возрастании времени, вопросы единственности решений эллиптических уравнений с нестандартными условиями коэрцитивности и роста.

Уравнения, имеющие существенную неоднородность по пространственной и/или временной переменной являются одной из классических тем анализа. В случае эллиптических и параболических уравнений естественной интерпретацией служат модели теплопроводности или диффузионного характера в существенно неоднородной среде. При этом, коэффициенты в главной части могут иметь точки вырождения и/или сингулярности. Такого рода уравнения рассматривались с разных сторон. Например, хорошо известны результаты О.А. Олейник и Е.В. Радкевича по уравнениям с неотрицательной характеристической формой.

Для уравнений дивергентного типа активное исследование весового случая с весами «общего характера» началось с 1980х годов. Были найдены некоторые общие условия на вес, достаточные для того, чтобы проходила модификация метода Ю. Мозера или Э. ДиДжорджи (Ладыженской-Уральцевой). В частности, известным примером являются классы Макенхаупта или степени якобианов квазиконформных отображений. Стартовой в этом направлении в линейном случае послужила работа Ю. Фэйбса, К. Кенига и Р. Серрапиони 1982 года для эллиптического случая, далее эти исследования были продолжены в серии работа 1980х годов Ф. Чиаренца и Р. Серрапиони, в работах Гутиерреса и Уидена, и др.

Для нелинейных параболических уравнений типа p -Лапласиана и пористой среды развитие шло не так быстро. Причина — технические сложности, возникающие в нелинейном случае. Были работы И.И. Скрыпника 1996 года и С. Бонафедде, И.И. Скрыпника 1999 года, посвящённые доказательству гёльдеровской непрерывности решений для весов из классов Макенхаупта.

М.Д. Сурначёв использует иной подход, в котором центральным свойством служит неравенство Харнака в подходящей форме. Первые два раздела первой главы носят более классический характер, в них доказывается неравенство Харнака для уравнений с весами из класса Макенхаупта и p -допустимыми, соответственно. В третьем разделе этой главы приведён инте-

ресный результат об уравнении, вырождающемся по малому параметру на части области. В иных терминах, идёт речь о задаче, в которой нормальная производная имеет скачок на поверхности раздела. Рассмотрение здесь существенно отличается от случая p -допустимых или Макенхауптовских весов, так как на поверхности раздела нет привычных весовых неравенств Соболева, нужны иные аргументы. В линейном случае такого рода задачи изучали мы с В.А. Лискевичем. Задача, которую решил Сурначёв М.Д. достаточно сложная сама по себе. Однако, она служит лишь прологом к более подробным геометрическим рассмотрениям, где граница стыка фаз имеет более сложную природу, чем плоскость (шахматная доска, треугольники и т.д.).

Вторая глава диссертации М.Д. Сурначёва посвящена одному из краеугольных вопросов теории эволюционных уравнений — асимптотическому поведению решений при неограниченном возрастании времени. Тут рассматриваются два вопроса. Во-первых, доказан критерий равномерной стабилизации решений задачи для параболического p -Лапласиана. Этот критерий был получен М.Д. Сурначёвым в совместной с В.В. Жиковым работе, и обобщает на случай p -Лапласиана результат, доказанный для линейных дивергентных параболических уравнений В.В. Жиковым в 1976 году.

Затем, М.Д. Сурначёв доказал критерий стабилизации ограниченных решений задачи Дирихле уравнений типа параболического p -Лапласиана в цилиндрической области с неограниченным основанием. Кажется, что если на границе области поддерживается нулевое значение решения, то при стремлении времени к бесконечности решение обязательно будет стабилизироваться к нулю. Оказывается, это не так. В частности, если дополнение к области достаточно мало, то может существовать нетривиальное ограниченное стационарное решение. Устанавливаемый критерий фактически совпадает с критерием отсутствия нетривиальных ограниченных стационарных решений. Однако, доказательство не сводится к рассмотрению стационарного случая. Мерой «мощности» дополнения к области (то есть, «холодильника») служит ряд или интеграл типа Винеровского. Можно сказать, иными словами, что речь идёт о регулярности бесконечно удалённой точки. Для линейных дивергентных параболических уравнений такого рода результаты доказывал В.Н.

Денисов, для недивергентных линейных уравнений — это наш совместно с В.Н. Денисовым результат. Схема доказательства в нелинейном случае существенно иная.

Третья глава диссертации посвящена вопросам единственности решений стационарных эллиптических уравнений. Этот раздел работы М.Д. Сурначёва сформировался под влиянием В.В. Жикова. Первый раздел главы содержит изложение результатов совместной работы М.Д. Сурначёва и В.В. Жикова, посвящённой получению условия плотности гладких функций в весовом пространстве Соболева-Орлича с переменным показателем. Во второй главе М.Д. Сурначёв получает новые условия единственности решения стационарной задачи диффузии в несжимаемом потоке. Эти результаты уточняют условия, полученные В.В. Жиковым в работе 2004 года. Здесь идёт речь о дивергентном эллиптическом уравнении с соленоидальным сносом. Известно, что в этом случае снос можно перенести в главную часть оператора, что приводит к возникновению несимметрической части в матрице коэффициентов. Хорошо известным условием, которое гарантирует ограниченность оператора, и, как следствие, существование и единственность решения является принадлежность этой части матрицы пространству ВМО. М.Д. Сурначёв получил условие единственности решений, более широкое, чем ВМО. Такого рода результаты интересны как модели для математической теории вязкой несжимаемой жидкости.

В целом, диссертационная работа М.Д. Сурначёва является добротным разносторонним трудом, в котором доказаны непростые результаты.

Считаю, что работа М.Д. Сурначёва удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК при Минобрнауки РФ к докторским диссертациям по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, а её автор заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по этой специальности.

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа
ВлГУ им. А.Г. и Н.Г. Столетовых



Ю.А. Алхутов