

ОТЗЫВ
официального оппонента на диссертацию
Пятницкого Андрея Львовича
"Усреднение и асимптотические свойства сингулярно возмущенных
дифференциальных операторов",
представленную к защите на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

На протяжении последнего столетия исследование задач многомерного усреднения является одним из актуальных и интенсивно развивающихся направлений современной теории дифференциальных уравнений в частных производных. Это связано с тем, что часто такие задачи описывают физические процессы в сложных неоднородных средах, а исследование асимптотического поведения их решений позволяет найти эффективные характеристики рассматриваемых процессов, что имеет важные приложения в различных разделах физики и техники.

В разработке методов теории многомерного усреднения, включающей исследование как уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами, так и уравнений в областях сложной структуры, весомый вклад принадлежит В.А. Марченко, Е.Я. Хруслову, Н.С. Бахвалову, В.В. Жикову, С.М. Козлову, О.А. Олейник, И.В. Скрыпнику, А. Бенсуссану, Ж.-Л. Лионсу, Дж. Папаниколау, Л. Тартару, Ф. Мюра, Д.Чиоранску, Э. Де Джорджи, Дж. Даль Мазо и многим другим математикам.

Исследование, представленное в диссертации А.Л. Пятницкого, также относится к теории многомерного усреднения. Особенностью работы является то, что в рассматриваемых автором задачах быстрая осцилляция коэффициентов соответствующих дифференциальных операторов сочетается с наличием у этих операторов больших младших членов.

Диссертация содержит пять глав. В первой главе изложены результаты по усреднению задачи Коши для линейных параболических уравнений второго порядка с быстро осциллирующими периодическими коэффициентами и большим параметром при членах первого и нулевого порядков. Основным результатом главы – теорема об асимптотическом представлении решения исходной задачи, из которого следует, что после определенной факторизации последовательность рассматриваемых решений сходится по соответствующей L^2 -норме к решению усредненной задачи с постоянными коэффициентами.

Во второй главе диссертационной работы подробно рассмотрен вопрос об усреднении начально-краевой задачи Дирихле для нестационарного уравнения конвекции-диффузии в ограниченной липшицевой области. Здесь, в отличие от первой главы, предполагается, что коэффициенты оператора конвекции-диффузии являются быстро осциллирующими периодическими функциями только по пространственной переменной и в операторе присутствуют асимптотически растущие члены только первого

порядка. Дано обоснование асимптотического поведения решения рассмотренной задачи и указана соответствующая усредненная дифференциальная задача для компоненты асимптотического представления решения, не зависящей от параметра. Показано, что коэффициенты усредненного оператора и начальное условие в усредненной задаче зависят от некоторого оптимального вектора в семействе вспомогательных спектральных эллиптических задач на ячейке периодичности. Отметим, что в отличие от предшествующего исследования других авторов в главе рассмотрен более сложный случай, когда так называемая эффективная конвекция не равна нулю.

В третьей главе диссертации изложены результаты по усреднению системы уравнений, состоящей из нестационарного уравнения конвекции-диффузии в периодически перфорированной области и обыкновенного дифференциального уравнения на границе перфорации, моделирующего наличие химической реакции на поверхности включений в пористой среде. Здесь в отличие от работ других авторов диссертант рассматривает случай, когда конвективные члены растут обратно пропорционально характерному размеру перфорации. Основным результатом главы является теорема об асимптотическом представлении семейства решений исследуемой задачи, включая описание соответствующей усредненной задачи. При этом показано, что эффективная диффузия и начальное условие в усредненной задаче зависят от параметров уравнения, заданного на границе перфорации.

В четвертой главе диссертации представлены результаты по усреднению некоторых нестационарных уравнений с быстро осциллирующими периодическими коэффициентами и большими нелинейными членами или нулевого, или первого порядка. Сначала здесь рассмотрена начально-краевая задача для уравнения реакции-диффузии с большим нелинейным членом нулевого порядка и показана L^2 -сходимость последовательности ее решений к единственному решению усредненной начально-краевой задачи. Отметим, что особенностью дифференциального уравнения в усредненной задаче является то, что оно, в отличие от исходного уравнения, содержит члены первого порядка. Эти члены являются нелинейными, причем они исчезают в случае, когда коэффициенты исходного уравнения не зависят от времени. В главе также рассмотрена задача Коши для уравнения конвекции-диффузии с большими нелинейными членами первого порядка и дано доказательство теоремы об асимптотическом поведении последовательности её решений с указанием соответствующей усредненной задачи.

Наконец, в пятой, наиболее обширной главе диссертации рассмотрены вопросы усреднения для параболических уравнений с коэффициентами, периодическими по пространственным переменным и случайными стационарными по времени. Здесь детально изучена сходимость решений начально-краевой задачи Дирихле для линейного уравнения с большим потенциалом и решений задачи Коши для уравнения с большим нелинейным потенциалом. При этом в случае первой из указанных задач предположено, что коэффициенты уравнения имеют диффузионное поведение по времени.

В целом диссертация производит хорошее впечатление. Работа написана на высоком научном уровне, в ней дан глубокий асимптотический анализ рассмотренных

задач и описаны интересные эффекты, возникающие в результате их усреднения. Диссертация содержит много новых актуальных результатов, достоверность которых подтверждается строгими доказательствами соответствующих теорем. Отметим также, что рассмотренные задачи тесно связаны с моделированием различных эволюционных процессов в неоднородных средах со сложной структурой.

В совокупности результаты, полученные диссертантом, и развитые им методы являются весомым вкладом в теорию многомерного усреднения. Они могут быть использованы при дальнейшей разработке вопросов этой теории и соответствующих приложений.

К диссертации есть несколько замечаний.

1. Во Введении при обзоре исследований по теории усреднения упоминание тех или иных авторов не всегда сопровождается соответствующими ссылками на их работы. Например, говоря о Γ -сходимости, прежде всего следовало упомянуть статью E. De Giorgi, T. Franzoni, Su un tipo di convergenza variazionale, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), 58 (1975), no. 6, 842–850. Кроме того, можно было упомянуть известные работы И.В. Скрышника по усреднению краевых задач для нелинейных уравнений в перфорированных областях и А.А. Панкова по G -сходимости и усреднению нелинейных операторов, в частности, монографию A. Pankov, G -Convergence and Homogenization of Nonlinear Partial Differential Operators, Mathematics and its Applications 422, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. В целом обзор можно было сделать более полным.

2. Список литературы содержит библиографические записи некоторых работ, которые в тексте диссертации не упоминаются (например, [15], [16], [44]). Кроме того, библиографические сведения об источниках в Списке не расположены ни в алфавитном порядке, ни в порядке упоминания, причем однообразие в записи сведений нет. Например, названия статей иногда записаны прямым шрифтом, а иногда курсивом.

3. В тексте диссертации нередко встречаются разного рода опiski (например, лишние, недостающие или неподходящие буквы в тех или иных словах).

Эти замечания не влияют на общую положительную оценку работы.

Считаю, что в целом рассматриваемая диссертация соответствует критериям, установленным действующим "Положением о присуждении ученых степеней", а ее автор А. Л. Пятницкий заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук.

Ведущий научный сотрудник
отдела уравнений математической физики
Федерального государственного бюджетного
учреждения науки Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН
доктор физ.-мат. наук, профессор

А. А. Ковалевский

Подпись заверяю
Ученый секретарь
ИММ УрО РАН



Ульянов О.Н.

06.10.2016г.