О Т З Ы В

официального оппонента на диссертационную работу
Сурначева Михаила Дмитриевича
"Эллиптические и параболические уравнения типа p-лапласиана",
представленную на соискание учёной степени доктора
физико-математических наук по специальности 01.01.02 –
дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное
управление.

Актуальность темы. Основным объектом исследования в представленной диссертации служит нелинейное параболическое уравнение с p–Лапласианом, которое в модельном случае имеет вид

$$u_t = \mathrm{div}_x(\omega(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \quad p > 1, \tag{1}$$

а также различные его обобщения (включающие в себя также и уравнения пористой среды). Уравнения такого типа возникают в моделях нелинейной теплопроводности, нелинейной диффузии, движения газа в пористой среде и многих других. При этом, наличие положительной весовой функции $\omega(x)$ отражает неоднородность среды. В стационарном (эллиптическом) случае применима техника Мозера и ДиДжорджи (J. Moser, E. De Giorgi), с помощью которой выводится играющее ключевую роль неравенство Харнака. Метод Мозера-ДиДжорджи получил дальнейшее развитие в работах Э. Джусти, Г. Стампаккья, О.А. Ладыженской, Н.Н. Уральцевой, В.А. Солонникова, Дж. Серрина, Н. Трудингера, С.Н. Кружкова и других авторов. Неравенства Харнака для уравнений типа параболического p-лапласиана общего вида было получено сравнительно недавно в работах E. DiBenedetto, U. Gianazza, V. Vespri 2008-2010 гг.

Линейные параболические уравнения с весами из классов Макенхаупта исследовались в работах F. Chiarenza, M. Frasca, R. Serapioni, И.И. Скрыпника. Позднее, в работах Ю.А. Алхутова и В.В. Жикова была разработана техника анализа гёльдеровской регулярности решений эллиптических уравнений с частично макенхауптовым весом. Распространение этих результатов на параболический случай наталкивается на определенные трудности и является актуальной задачей. Актуальным является также исследование более общих уравнений, в которых участвуют операторы

$$\mathrm{div}(\nu(x)|u|^{m-1}|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \quad m \geq 1, \ p \geq 2.$$

Указанной выше проблематике посвящена первая глава диссертации, в которой изучается регулярность решений уравнений вида (1). В первом разделе доказано неравенство Харнака и гёльдеровская регулярность решений с весом из класса Макенхаупта $A_{1+p/n}$. Во втором разделе аналогичные результаты получены для уравнения

$$\nu(x)u_t = \mathrm{div}(\nu(x)A(x,t,u,\nabla u)), \tag{2}$$

в котором вес $\nu(x)$ удовлетворяет условию p-допустимости, а $A(x,t,u,\xi)$ является вектором Каратеодори со свойствами

$$|A(x,t,u,\xi)| \le C_0|u|^{m-1}|\xi|^{p-1} + C_u, \quad A(x,t,u,\xi)\cdot\xi \ge C_1|u|^{m-1}|\xi|^p - C_l,$$

$C_0, C_1, C_u, C_l = \text{const}$. В третьем разделе изучается уравнение (2) с оператором типа p-лапласиана ($m = 1$, $C_u = C_l = 0$) и кусочно-постоянным весом $\nu = \omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon \ , & x_n > 0, \\ 1 \ , & x_n < 0, \end{cases}$ зависящим от малого параметра $\varepsilon > 0$. Автором установлена равномерная по ε гёльдеровская непрерывность решений.

Одним из центральных вопросов теории параболических уравнений является асимптотическое поведение решений при неограниченном возрастании времени. Вопросы стабилизации решений линейных уравнений при больших временах достаточно хорошо изучены. В работе В.В. Жикова [Матем. сборник, 1977] были найдены критерии как равномерной так и поточечной стабилизации решений задачи Коши для линейных параболических уравнений дивергентного вида. Начально-краевые задачи в цилиндрических областях изучались Ф.Х. Мукминовым, Л.М. Кожевниковой, Р.Х. Каримовым и др., в том числе и для уравнений с p-лапласианом. В работах В.Н. Денисова для линейных дивергентных параболических уравнений установлен критерий стабилизации ограниченных решений задачи Дирихле в цилиндрической области с неограниченным основанием и с однородным краевым условием в терминах рядов Винера для бесконечно удалённой точки.

Актуальным является обобщение указанных результатов на случай нелинейных параболических уравнений типа p-лапласиана, чему посвящена вторая глава диссертации. В этой главе доказан критерий равномерной стабилизации при больших временах ограниченных решений задачи Коши, а также критерий поточечной стабилизации решений задачи Дирихле с однородным краевым условием в цилиндрической области с неограниченным основанием.

Кроме того, в первом разделе доказан интересный результат о монотонности нелинейных операторов вида $\xi \to |\xi|^{p-2}\mathcal{A}\xi$ на $\mathbb{R}^n$ с постоянной матрицей $\mathcal{A}$.

Фундаментальным вопросом в теории эллиптических краевых задач является вопрос о единственности решений. Тесно связан с этим вопросом так называемый эффект Лаврентьева, появляющийся в случае, когда гладкие функции не плотны в соответствующем энергетическом пространстве. Для p-лапласиана с переменным показателем суммируемости $p = p(x)$ соответствующие примеры были построены В.В. Жиковым, им же было предложено простое достаточное условие (логарифмической гёльдеровости) плотности гладких функций в энергетических классах (пространствах Соболева–Орлича). Как отмечено в работах В.В. Жикова, вопрос о плотности гладких функций оказывается нетривиальным также для весовых пространств Соболева.

В третьей главе диссертации (1-ый раздел) автор доказывает важный результат о плотности гладких функций в весовых классах Соболева-Орлича при требовании логарифмической непрерывности показателя $p(x)$ и условии Жикова на весовую функцию, известном для (линейного) случая $p = 2$.

Важной для приложений является задача о (стационарной) диффузии в несжимаемом потоке

$$-\mathrm{div}(\nabla u + au) = f, \tag{3}$$

где $a(x)$ – соленоидальное векторное поле. При достаточно общих предположениях уравнение (3) можно записать в виде

$$-\mathrm{div}(\nabla u + A\nabla u) = f \tag{4}$$

с кососимметричной матрицей $A = A(x)$. В общем случае единственность обобщенных решений однородной задачи Дирихле для уравнений (3), (4) может нарушаться. Поэтому, нахождение точных достаточных условий единственности является важной и актуальной задачей. Известно (В.В. Жиков), что условие $a \in L^2(\Omega)$ достаточно для единственности решения задачи (3). В.В. Жиков также установил, что при условии $A \in BMO(\Omega)$ верна единственность аппроксимационного решения задачи (4).

Во втором разделе третьей главы диссертации найдены новые условия единственности, которые значительно уточняют условия Жикова. При этих условиях также установлено энергетическое тождество $\|\nabla u\|_2^2 = (f, u)$. В случае, когда условия единственности нарушены, автором предложена процедура выделения единственного специального решения рассматриваемых задач.

Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций.

Основные результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Научные положения и выводы согласуются с полученными ранее результатами. Все утверждения корректно обоснованы и снабжены подробными доказательствами. Основные научные результаты диссертации опубликованы в 15 научных статьях в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК РФ для опубликования основных научных результатов диссертаций, или входящих в международные базы данных и системы цитирования Scopus, Web of Science. Полученные в диссертации результаты многократно докладывались на международных научных конференциях и научных семинарах и получили одобрение ведущих специалистов.

Общие замечания по диссертационной работе.

1. Во второй главе в формулировке Теоремы 1 в неравенствах (9)-(11) несколько раз встречается ошибочный член $|a|^{a-2}$ вместо $|a|^{p-2}$. В тексте диссертации содержится много и других опечаток;

2. Доказательства элементарных лемм 2,3 (стр. 128–130) усложнены. Например, утверждение Леммы 2 непосредственно следует из равенства

$$|a + t(b-a)|^2 = (1-t)^2|a|^2 + t^2|b|^2 + 2t(1-t)(a, b).$$

Утверждение Леммы 3 вытекает из более общего свойства квадратичных функционалов вида $Q(y) = (p, y)(q, y)$:

$$\max_{|y|=1} Q(y) = \frac{1}{2}[(p, q) + |p||q|], \quad \min_{|y|=1} Q(y) = \frac{1}{2}[(p, q) - |p||q|],$$

которое легко доказывается методом множителей Лагранжа;

3. В третьей главе в доказательстве Теоремы 1 на стр. 300 не ясно утверждение об эквивалентности единственности решений задач (1.1) с матрицами A и λA, где $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Это очевидно лишь при $\lambda > 0$, чего, впрочем, и достаточно для доказательства.

4. Утверждение о том, что $Mf \in BMO$ для функций $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, приведенное на стр. 302 неверно. На самом деле, результат Койфмана и Рохберга гласит, что $\ln Mf \in BMO$ для неотрицательных функций $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. В действительности, автор использует именно это свойство.

Отмеченные недостатки снижают качество диссертации, но они не влияют на общую положительную оценку работы.

Заключение. Диссертация является законченным научно-исследовательским трудом, выполненным автором самостоятельно на высоком научном уровне. В работе приведены научные результаты, позволяющие квалифицировать их как теоретические. Полученные автором результаты достоверны, выводы и заключения обоснованы.

Автореферат соответствует основному содержанию диссертации.

Диссертационная работа отвечает критериям Положения о порядке присуждения учёных степеней, а ее автор Сурначев Михаил Дмитриевич заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

ОТДЕЛ КАДРОВ

Подпись Панова Е.Ю.
Заверяю
Зам. начальника
Отдела кадров НовГУ Богарова З.Н.
« 20 » 11 2017 г.

Официальный оппонент:
главный научный сотрудник
научно-исследовательского центра
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого,
доктор физико-математических наук,
профессор / Е.Ю. Панов

Адрес: 173003 г. Великий Новгород, ул. Большая Санкт-Петербургская, 41, тел. +7-8162-627244 e-mail: Eugeny.Panov@novsu.ru

Учёный секретарь (Кондрушенко)