«УТВЕРЖДАЮ

Директор Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук»

__________________ И.А.Соколов

« 30 » марта 2022 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

на диссертационную работу **Бенараб Сарры** «Теоремы об операторных неравенствах в исследовании краевых задач и задач управления для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности **«01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»**

Диссертационная работа Бенараб Сарры посвящена исследованию систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной, получению для них утверждений о существовании и оценках решений, аналогичных теореме Чаплыгина о дифференциальном неравенстве. Для доказательства таких теорем автор развивает методы анализа отображений, определенных на частично упорядоченных пространствах. В отличие от большинства исследований, в данной диссертации на множестве значений таких отображений не предполагается заданным отношение порядка. Это позволяет расширить область применения полученных результатов об операторных уравнениях. Традиционно подобные утверждения применялись к уравнениям с монотонными операторами. В диссертации же удалось получить утверждения о дифференциальных неравенствах для систем уравнений вида

$$f_i(t, x, \dot{x}, \dot{x}_i) = 0, \qquad i = 1, \dots, n,$$

без предположения монотонности функции f по последнему аргументу (а именно, функция f измерима по t, непрерывна справа и монотонна по каждой компоненте векторов x и $\dot{x}$, непрерывна по $\dot{x}_i$).

Изучение систем дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной, представляет теоретический и прикладной интерес и, в то же время, сопряжено со значительными трудностями. Классические результаты о неподвижных точках мало эффективны для исследования разрешимости таких уравнений. Важные результаты получены с использованием геометрических методов и теории особенностей. Основы таких подходов к исследованию дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, заложены А. Пуанкаре, основополагающие результаты получены В.И. Арнольдом. Современная теория динамических систем, определяемых не разрешенными относительно старшей производной уравнениями, создана благодаря работам Дж.В. Брюса, А.А. Давыдова, Л. Дара, В.М. Закалюкина, А.Д. Пилии, А.О. Ремизова, Ф. Токенса, В.И. Федорова и др. авторов. Результаты этой теории имеют многочисленные приложения в анализе, геометрии, теории управления, а также в приложениях к механике, физике, к техническим системам. Однако, за границами этой теории еще остаются многие важные вопросы. Одной из наиболее актуальных проблем является получение утверждений типа теоремы Чаплыгина о дифференциальном неравенстве.

В исследованиях различных вопросов теории дифференциальных уравнений широко используются оценки решений, получаемые на основании утверждений о дифференциальных неравенствах типа теоремы Чаплыгина. Теоремы о дифференциальных неравенствах востребованы в общей теории дифференциальных, интегральных, функционально-дифференциальных уравнений, в теории устойчивости, в решении задач управления и оптимизации, в приближенных методах. В этой связи напомним, что теорема о дифференциальном неравенстве получена С.А. Чаплыгиным для обоснования метода приближенного решения дифференциального уравнения с гарантированной точностью. Проблемам распространения теоремы Чаплыгина на различные классы уравнений, ослаблению ее условий, нахождению границ применимости таких утверждений посвящены многочисленные исследования. Обзоры результатов по этой тематике представлены в ряде монографий (в частности, авторов V. Lakshmikantham и S. Leela, R. Rabczuk, J. Szarski, W. Walter, Э. Беккенба и Р. Беллмана, Я.Д. Мамедова, С. Аширова, и С. Атдаева). Значительные результаты получили L. Berezansky, E. Braverman, A.G. Ramm, Н.В. Азбелев, А.Б. Васильева, М.А. Красносельский, Н.С. Курпель, Н.Н. Нефедов, А.И. Перов, З.Б. Цалюк, Б.А. Шувар и др. авторы. При достаточно полной изученности дифференциальных неравенств для уравнений нормального вида, в литературе практически отсутствуют аналогичные результаты для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной. Продвижения в этой области способствовали бы развитию ряда других разделов теории дифференциальных уравнений. Таким образом, тематика диссертационной работы Бенараб Сарры представляется актуальной, перспективной, безусловно востребованной теорией дифференциальных уравнений и ее приложениями.

В диссертации предлагаются аналоги теоремы Чаплыгина и связанные утверждения о существовании, оценках, структуре множества решений систем дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной. Эти результаты в диссертации основаны на исследовании операторных уравнений, порождаемых отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в произвольное множество. Соответствующие утверждения об операторных уравнениях представляют несомненный самостоятельный теоретический интерес, являются существенным развитием теорем об уравнениях с упорядоченно накрывающими отображениями и, в том числе, теорем о точках совпадения отображений частично упорядоченных пространств, полученных в работах А.В. Арутюнова, Е.С. Жуковского, С.Е Жуковского, Т.Н. Фоменко, Д.А. Подоприхина.

Опишем кратко структуру и основные положения диссертации.

Во введении описаны актуальность темы исследования, дан литературный обзор, поставлены цели и задачи, обоснованы новизна, достоверность, теоретическая и практическая значимость результатов, описаны выносимые на защиту положения, полнота их опубликования и обнародования на научных конференциях и семинарах.

В главе 1 получены условия существования и оценки решений абстрактных уравнений с отображениями, определенными на частично упорядоченном пространстве X. При этом область значений Y рассматриваемых отображений может быть либо алгебраической системой с рефлексивным бинарным отношением, либо просто множеством, на котором не определено никакое бинарное отношение. Если на Y определено бинарное отношение, автором распространяется определение упорядоченного накрывания, предложенное и исследованное А.В. Арутюновым, Е.С. Жуковским и С.Е. Жуковским в статьях, опубликованных в Докладах РАН и в Topology and its Applications в период 2013–2016 г.г. Если на Y не определено бинарное отношение, автором используется другой подход, позволяющий определить цепь последовательных приближений к искомому решению.

В параграфе 1.1 исследуются точки совпадения двух отображений, действующих из частично упорядоченного пространства $(X, \leq)$ в алгебраическую систему (Y, ϑ), где отношение ϑ рефлексивно. В теореме 1.1.1 рассматриваются отображения $\psi, \varphi: X \longrightarrow Y$, первое из которых обладает свойством, аналогичным упорядоченному накрывания, а второе – свойством, аналогичном изотонности. Показано, что при естественных предположениях из существования элемента $x_0 \in X$ такого, что $\psi(x_0)\, \vartheta\, \varphi(x_0)$, следует существование точки совпадения $x \in X$ отображений ψ, φ, удовлетворяющей неравенству $x \leq x_0$. Кроме того, показано, что в множестве точек совпадения есть минимальный элемент. В следующей теореме 1.2.1 рассматривается задача о точке совпадения отображений $\psi, \varphi: X \longrightarrow Y$ когда в Y не определены бинарные отношения. Вместо этого предполагается, что для элементов $x, x' \in X$ таких, что $x' \leq x$, $\psi(x') = \varphi(x)$ существуют элементы $u, u' \in X$, удовлетворяющие соотношениям $u' \leq u \leq x'$, $\psi(u') = \varphi(u)$. Из представленных в параграфе 1.1 утверждений выводятся теоремы о точках совпадения, полученные в цитированных выше работах А.В. Арутюнова, Е.С. Жуковского, С.Е. Жуковского, а также классические теоремы о неподвижных точках монотонных отображений. Приведены примеры отображений, для которых доказанные утверждения, в отличие от известных результатов, позволяют установить существование точек совпадения. Далее автор определяет понятие устойчивости точек совпадения к изменениям отображений ψ, φ и выводит условия такой устойчивости. Этот результат оригинален, его прямые аналоги даже для случая частично упорядоченных пространств X, Y не известны.

В параграфе 1.2 рассматривается уравнение

$$\Phi(x, x) = \tilde{y},$$

при заданном $\tilde{y} \in Y$ в ситуации, когда на Y определено рефлексивное бинарное отношение ϑ, отображение $\Phi: X \times X \to Y$ по первому аргументу является упорядоченно накрывающим, а по второму – антитонным. Установлено существование решения $x \in X$ такого, что $x \leq x_0$, где элемент $x_0 \in X$ удовлетворяет соотношению $\tilde{y}\, \vartheta\, \Phi(x_0, x_0)$.

В параграфе 1.3 рассматривается уравнение

$$F(x, x) = G(x, x),$$

порожденное отображениями $F, G: X \times X \to Y$, причем на множестве Y не предполагается заданным бинарное отношение. Это уравнение общего вида, частными случаями которого являются уравнение неподвижной точки, уравнение точки совпадения, уравнение с фиксированной правой частью. В теореме 1.2.3 получены условия существования решения, его оценка, также показано существование минимального решения.

Глава 2 посвящена исследованию существования и свойств решений функциональных и дифференциальных уравнений. Глава разбита на два параграфа. В параграфе 2.1 доказана теорема о разрешимости и оценках решений системы неявных функциональных уравнений вида $h(t, x(t)) = 0$ в пространстве измеримых функций, аналогичная теореме Чаплыгина. В этой теореме функция $h: [0,1] \times R^n \to R^n$ по первому аргументу предполагается измеримой, а по каждой компоненте второго аргумента – односторонне непрерывной. Соответственно, к рассматриваемому уравнению не применима лемма Филиппова об измеримом выборе. Тем не менее результаты первой главы позволяют установить существование решения, удовлетворяющего неравенству $u(t) \leq x(t) \leq v(t)$, где измеримые функции u, v отвечают условиям $u(t) \leq v(t)$, $h(t, u(t)) \geq 0$, $h(t, v(t)) \leq 0$. Кроме того, здесь показано существование не только минимального, но и наименьшего среди решений, принадлежащих отрезку $[u, v]$.

Параграф 2.2 посвящен изучению систем дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной. Исследование основано на полученных в главе 1 результатах об уравнениях с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в произвольное множество. Получены теоремы типа Чаплыгина о дифференциальных неравенствах для систем дифференциальных уравнений вида

$$f_i(t, x, \dot{x}, \dot{x}_i) = 0, \quad t \in [0,1], \text{ где } f_i \colon [0,1] \times R^n \times R^n \times R \to R, \ i = 1, \ldots, n.$$

Параграф содержит три пункта. В пункте 2.2.1 получена теорема 2.2.1 – аналог теоремы Чаплыгина для задачи Коши. А именно, в предположении существования двух измеримых функций u, v таких, что

$$\dot{u}(t) \leq \dot{v}(t), \qquad f_i\big(t, u(t), \dot{u}(t), \dot{u}_i(t)\big) \leq 0, \qquad f_i\big(t, u(t), \dot{u}(t), \dot{u}_i(t)\big) \geq 0,$$

доказано, что существует решение x задачи Коши, производная которого удовлетворяет неравенству $\dot{u}(t) \leq \dot{x}(t) \leq \dot{v}(t)$. Также установлено, что в множестве решений существует наименьшее решение. Из теоремы 2.2.1 выведены следствия о задаче Коши для скалярного уравнения n-го порядка, не разрешенного относительно старшей производной. В пункте 2.2.1 близкое теореме 2.2.1 утверждение получено для периодической краевой задачи, а в пункте 2.2.3 – для задач управления при начальном условии и периодическом краевом условии. Доказательства всех утверждений о дифференциальных неравенствах основаны на теореме 1.2.3, полученной в главе 1.

В заключении дается сводка основных результатов диссертации и намечаются пути дальнейших исследований. Автор отмечает, что методы и результаты диссертации в дальнейшем позволят исследовать абстрактные включения с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в произвольное множество, и на этой базе получить теоремы типа Чаплыгина для дифференциальных включений.

Представленные в диссертации Бенараб Сарры результаты являются новыми, оригинальными, значимыми для теории дифференциальных уравнений и ее приложений. Все утверждения доказаны, проиллюстрированы примерами, установлена их связь с известными теоремами. Результаты диссертации могут найти применения в исследованиях дифференциальных уравнений и включений, задач управления и задач оптимизации, ведущихся в Тамбовском государственном университете имени Г.Р. Державина, Федеральном исследовательском центре «Информатика и управление» Российской академии наук, Институте Математики и Механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Санкт-Петербургском государственном университете, Пермском государственном национальном исследовательском университете, Воронежском государственном университете, Воронежском государственном педагогическом университете, Владимирском государственном университете им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Удмуртском государственном университете, а также при чтении специальных курсов студентам и магистрам математических и естественно-научных направлений подготовки в Тамбовском государственном университете имени Г.Р. Державина.

Результаты диссертации в полном виде своевременно опубликованы в 12 работах, из которых 7 работ опубликовано в журналах из перечня ВАК (в том числе три работы в изданиях, входящих в системы цитирования Web of Science Core Collection и Scopus, и две работы в издании, индексирующемся в Web of Science Russian Science Citation Index). Результаты доложены на ряде научных конференций и семинаров.

Автореферат соответствует содержанию диссертации, полно, достоверно и достаточно подробно отражает все основные положения диссертации. В диссертации и автореферате не содержится некорректных заимствований, на все используемые источники даны соответствующие литературные ссылки.

К диссертации имеются следующие замечания.

1. Используемый в работе термин «система дифференциальных уравнений, не разрешённых относительно производной искомой функции» не совсем точен и не содержит всей нужной информации. Более точно употреблять словосочетание «система дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешённых относительно производной искомой функции».
2. Представленные в диссертации примеры достаточно подробно иллюстрируют полученные утверждения, показывают их эффективность в сравнении с результатами, ранее полученными другими авторами. Наиболее интересными представляются примеры 2.2.1 и 2.2.2 скалярных уравнений второго порядка, для которых доказывается существование решений задачи Коши и устанавливаются их оценки. Однако, утверждения о дифференциальном неравенстве для периодической краевой задачи и для системы управления не проиллюстрированы примерами. Автору следовало включить в диссертацию такие примеры.
3. Используется один символ ϑ и для бинарного отношения на множестве Y (в первой главе), и для измеримой функции, удовлетворяющей функциональному неравенству (во второй главе в теоремах 2.1.1 и 2.1.2), а затем и для абсолютно непрерывной функции, удовлетворяющей дифференциальному неравенству (стр. 80, 81).
4. Не определены функции $\tilde{h}_i,\ i = 1, \dots, n$ (см. Введение, стр. 23), не указано их действие. Для большей точности изложения следовало также привести условия, которым удовлетворяют эти функции.
5. Имеется следующие опечатки в формулах:
   страница 4, строка 10 снизу: $x \in x$ следует заменить на $x \in X$;
   страница 58, строка 12 сверху, в выносной формуле перепутаны символы;
   страница 77, строка 6 сверху, $w = N_h(w, v)$ необходимо исправить на $0 = N_h(w, v)$.

Сделанные замечания имеют рекомендательный либо редакционный характер, они не снижают высокую оценку полученных результатов, общее благоприятное впечатление о диссертационной работе Бенараб Сарры.

Диссертация представляет собой законченное научное исследование, выполненное на актуальную тему, в котором получены важные результаты по теории дифференциальных уравнений. Считаем, что диссертация Бенараб Сарры «Теоремы об операторных неравенствах в исследовании краевых задач и задач управления для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной» соответствует требованиям «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г., № 842, предъявляемых к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Отзыв составлен доктором физико-математических наук, профессором, ведущим научным сотрудником ФИЦ ИУ РАН Карамзиным Дмитрием Юрьевичем.

Отзыв на диссертацию и автореферат рассмотрены и одобрены на семинаре отдела 55 «Управление робото-техническими устройствами» ФИЦ ИУ РАН (протокол № 1 от «22» марта 2022 года).

Карамзин Дмитрий Юрьевич,
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник отдела 55 ФИЦ ИУ РАН

Полное наименование организации: Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук»

Адрес: 119333, Москва, Вавилова, д.44, корп. 2

Телефон: +7 499 135-62-60

Сайт организации: http://www.frccsc.ru

Электронная почта: frccsc@frccsc.ru