

УТВЕРЖДАЮ

И.о. первого проректора-проректора
по научной работе РУДН

к.т.н. доцент П.А. Докукин



2021 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов» на диссертацию Устинова Никиты Сергеевича «Полулинейные уравнения с дробными лапласианами», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Диссертационная работа Н.С. Устинова посвящена вариационным методам исследования разрешимости краевых задач для полулинейных уравнений с оператором Лапласа дробного порядка в главной части и младшим членом, моделирующим нелинейный источник.

Следует отметить, что полулинейные эллиптические уравнения с младшими членами типа нелинейного источника или нелинейной абсорбции (а также различными их комбинациями) являются одним из основных объектов в теории нелинейных уравнений с частными производными. Основные аспекты теории таких уравнений и краевых задач для них (условия разрешимости и несуществования решений, эффект множественности решений, качественные и асимптотические свойства решений) формировались в работах многих выдающихся математиков современности и недавнего прошлого, таких как О.А.Олейник, В.А.Кондратьев, Е.М.Ландис, С.И.Похожаев, L.Nirenberg, H.Brezis, J.Serrin, P.-L.Lions, L.Veron, B.Gidas, J.Spruck, N.Ghoussoub, R.S.Palais, M.Struwe и других.

В последние десятилетия при математическом моделировании различных современных проблем гидрологии, физики элементарных частиц, физики полупроводников, фазовых переходов, случайных процессов со скачками, финансовых моделей и других возникают уравнения с нелокальными операторами, являющимися дробными степенями дифференциальных операторов, в частности, с степенями оператора

Лапласа. Теория таких операторов и связанных с ними полулинейных уравнений развивается в последние годы работах L.Caffarelli, X.Cabre, E.Valdinoci, K.Bogdan, B.Barríos, G.Grubb, X.Ross-Oton, B.Duda, E.DiNezza, J.Serra, L.Silvestre, R.Musina, D-P.Covei, W.Chen, Y.Fan, R.Yang, А.И.Назарова, Е.И.Галахова и многих других математиков. Ряд интересных трудных и существенных результатов о разрешимости и качественных свойствах решений полулинейных уравнений с дробным оператором Лапласа с граничными условиями Дирихле и Неймана установлен в рассматриваемой диссертационной работе. Всё выше сказанное говорит о безусловной актуальности темы и результатов диссертации Н.С.Устинова.

Перейдём к краткому изложению результатов диссертации.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, разбитых на параграфы, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 120 страниц.

Во введении дан достаточно полный исторический обзор развития теории операторов дробного порядка, приведены некоторые классические результаты о полулинейных эллиптических дифференциальных уравнениях, обобщаемые в диссертации на уравнения с дробным лапласианом, полностью обоснованы цель диссертационного исследования, его актуальность и представлены вынесенные на защиту научные положения.

В первой главе приведены необходимые предварительные сведения: определения различных дробных лапласианов, используемых в диссертации, определения продолжений Каффарелли-Сильвестра, Стинга-Торреа, естественно связанных с дробными лапласианами, приводятся аналоги неравенства Фридрихса и принципа максимума для дробных лапласианов.

Во второй главе изучается разрешимость и эффект множественности решений краевых задач для полулинейных уравнений с дробным лапласианом Дирихле в областях-кольцах. Вариационным методом устанавливается существование положительного радиального решения при докритическом значении параметра нелинейности уравнения. В случае размерности области не меньше чем 4 и соответствующего докритического значения параметра нелинейности уравнения установлено существование так называемого (m,k) -радиального решения в кольцах достаточно большого радиуса и единичной ширины. Установлено также, что для любого натурального N существует такое $r(N)$, что при любом радиусе $R > r(N)$ кольца существует не менее N существенно различных решений (множественность решений).

В третьей главе изучена полулинейная задача Неймана с критическим показателем нелинейности. Устанавливается существование решения с минимальной энергией в случае гладкой ограниченной области. Доказательство состоит в развитии подхода из работ Адимурти-Манчини, Ванга, Демьянова-Назарова с модификацией предельного принципа концентрации-компактности П.-Л.Лионса.

В четвертой главе исследуются качественные свойства решений полулинейной задачи Неймана в ограниченной n -мерной области с липшицевой границей. Эта задача имеет тривиальное решение $u=1$. Основной вопрос, который анализируется в главе 4: является ли указанное тривиальное решение $u=1$ решением с минимальной энергией или нет? В локальном случае (то есть $s=1$) полный ответ дан в работе Назарова и Щегловой: постоянство решения с минимальной энергией определяется формой и размерами области. Если параметр нелинейности уравнения q не больше, чем 2, то $u=1$ является решением с минимальной энергией, если же q больше двух, то постоянное решение является решением с минимальной энергией только для достаточно малых областей (при точных условиях на величину и характер этой малости). В рассматриваемой диссертации получены аналогичные точные результаты о постоянстве минимального решения в случае полулинейной задачи Неймана с дробным оператором Лапласа.

В пятой главе исследуется вопрос о достижимости точной константы в дробном неравенстве Харди-Соболева в гладкой ограниченной n -мерной ($n < 3$) области. Устанавливаются точные условия на границу области, гарантирующие недостижимость этой константы, а также другие точные условия, обеспечивающие и её достижимость.

Заключение подводит итог диссертационной работы, описывает ее результаты, содержит выводы и направление дальнейшего развития.

Основные результаты диссертации своевременно опубликованы в 5 статьях в центральных математических изданиях, включенных в список ВАК, а также в 6 тезисах докладов Международных конференций. Из совместных статей в диссертацию вошли результаты, полученные лично автором. Содержание диссертации автор неоднократно докладывал на многих Российских и международных научных конференциях, на ряде ведущих научных семинаров. Все приведенные в диссертации результаты являются новыми, обоснованы строгими и подробными доказательствами и прошли солидную апробацию, что подтверждает их достоверность. Таким образом, диссертация Устинова Н.С. «Полулинейные уравнения с дробным лапласианом» является законченным исследованием, написанным на

высоком научном уровне. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.


Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в теории полулинейных эллиптических уравнений, полулинейных уравнений с дробными степенями линейных эллиптических операторов, в прикладных задачах, приводящих к таким уравнениям.

Полученные автором результаты могут быть использованы в исследованиях, проводимых в МГУ имени М.В. Ломоносова, СПбГУ, РУДН, в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, в Белорусском, Воронежском государственных университетах, в Южном федеральном университете, в других научно-исследовательских центрах России и за рубежом.

Закключаем, что диссертация Устинова Н.С. «Полулинейные уравнения с дробными лапласианами» является завершённым научным исследованием и полностью соответствует всем требованиям Положения о присуждении ученых степеней ВАК РФ, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор, Устинов Никита Сергеевич, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Отзыв составлен доктором физико-математических наук по специальности 01.01.03, профессором, директором Научного центра нелинейных задач математической физики РУДН, Шишковым Андреем Евгеньевичем (тел.: +79150982510, e-mail: aeshkv@yahoo.com).

Отзыв обсужден и одобрен на заседании Научного центра нелинейных задач математической физики РУДН; протокол №_3_ от «_11_»_мая_____2021 года.

Директор Научного центра нелинейных задач математической физики РУДН, д.ф.-м.н., проф.  А. Е. Шишков

Подпись директора Научного центра нелинейных задач математической физики РУДН, д.ф.-м.н. А.Е. Шишкова заверяю

Учёный секретарь Учёного совета факультета физико-математических и естественных наук РУДН,
к.ф.-м.н., доцент

