

Отзыв
научного руководителя на диссертационную работу
Тельновой Марии Юрьевны
”Оценки первого собственного значения
задачи Штурма – Лиувилля с условиями Дирихле
и весовым интегральным условием”,
представленной к защите на соискание ученой степени кандидата
физико – математических наук по специальности
01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Представленная на отзыв работа состоит из введения, трех глав и списка литературы.

Актуальность темы диссертации

Диссертация посвящена изучению задачи Штурма – Лиувилля с весовым интегральным условием на потенциал. Основная проблема, которой посвящена работа, - найти оценки минимального собственного значения этой задачи. Источником подобных постановок и их исследования послужила задача Лагранжа о нахождении формы наиболее прочной колонны заданного объема и критической нагрузки, которую может выдерживать колонна. Задачи подобного типа изучались в работах многих математиков. Среди наиболее известных исследований можно выделить работы Дж. Келлера (Keller J.V. // Arch. Rat. Mech. Anal., 1960, V.5, №4, P. 275–285.), И. Таджбахша (Tadjbakhsh I., Keller J.V. // Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1962, V. 29, №1, P. 159–164.), А. С. Братуся (Братусь А.С. // Журнал Вычисл. Матем. и Мат. Физики, 1986, Т.26, с. 1–7.; Братусь А.С., Сейранян А.П. // Прикл. Мат. Мех., 1983, Т. 47, С. 451–457.), А. П. Сейраняна (Сейранян А.П. // Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, 2000, Препринт №60, 64 с.; Сейранян А.П. // Инж. Журнал, Механика твердого тела, 1984, Т. 19, С. 101–111.), Ю. В. Егорова и В. А. Кондратьева (Егоров Ю.В., Кондратьев В.А. // Успехи математических наук, 1996, Т. 51(3), С. 73–144., см. также их монографию в серии "Operator theory: Advances and Applications", Birkhauser, Basel, 1996, V. 89, P. 1–325.) и В.А. Винокурова, В.А. Садовниченко (Винокуров В.А., Садовнический В.А. // Доклады Академии наук, 2003, Т. 392, №5, С. 592-597.)

Исторический обзор известных результатов, связанных с темой диссертации, приводится во введении. Подобные задачи для уравнения второго порядка и сейчас являются предметом исследования многих математиков. Данная работа – еще одно продвижение в направлении общности рассматриваемой задачи.

Основные результаты исследований и их новизна

В диссертации исследуется зависимость первого собственного значения задачи Штурма – Лиувилля

$$y'' - Q(x)y + \lambda y = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

$$y(0) = y(1) = 0, \quad (2)$$

где $Q(x)$ – действительная неотрицательная локально интегрируемая на интервале $(0, 1)$ функция, для которой выполняется интегральное условие

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta Q^\gamma(x) dx = 1, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \gamma \neq 0, \quad (3)$$

от потенциала Q при различных значениях параметров α, β, γ интегрального условия (3).

Для задачи Штурма – Лиувилля (1), (2) с интегральным условием (3) при всех значениях параметров α, β, γ интегрального условия получены оценки первого собственного значения.

При $\gamma > 1$ для всех значений параметров α, β интегрального условия получены точные оценки сверху $M_{\alpha, \beta, \gamma}$ первого собственного значения и доказана их достижимость. При $\gamma < 0$ и при $0 < \gamma < 1$ доказано, что $M_{\alpha, \beta, \gamma} = \infty$.

Для всех значений параметров α, β, γ интегрального условия получены точные оценки снизу $m_{\alpha, \beta, \gamma}$ первого собственного значения поставленной задачи.

Основные методы исследования

Задача оценивания первого собственного значения задачи для уравнения (1) с краевыми условиями (2) и интегральным условием (3) сводится вариационным методом (глава 1) к задаче оценивания в описанном выше классе функций точной нижней грани соответствующего функционала. Этот функционал в свою очередь оценивается при помощи нелинейного функционала, не зависящего от потенциала. Исследование этого нелинейного функционала приводит к получению связанной с ним нелинейной краевой задачи с параметром, которой удовлетворяет функция, доставляющая минимум функционалу. Данный метод исследования использовался в работах Ю.В. Егорова и В.А. Кондратьева и модифицировался в работах К. Куралбаевой, О. Мурышкиной, С. Ежак, Е. Карулиной применительно к изучению задачи Штурма – Лиувилля для другого уравнения, других краевых условий или другого интегрального условия, однако его применение в данной работе имеет существенные отличия, и автору работы пришлось преодолевать дополнительные трудности, в частности, для $\gamma = 1$ для $M_{\alpha, \beta, \gamma}$ удалось получить только неточные оценки, а при $\gamma < 0$ не доказана достижимость точных оценок для $m_{\alpha, \beta, \gamma}$. Однако для всех остальных значений параметров автору удалось получить точные оценки и доказать их достижимость в рассматриваемых классах функций. Результаты для наглядности проиллюстрированы таблицами и рисунками.

В работе приводятся оценки снизу первого собственного значения (глава 2) и оценки сверху первого собственного значения (глава 3) при всех значениях параметров α, β, γ , причем для разных промежутков изменения γ используются разные методы исследования. Для доказательства отсутствия конечной оценки первого собственного значения сверху (случай $\gamma < 0$ и $0 < \gamma < 1$), а также в случае, когда точная оценка снизу первого собственного значения не достигается на функции из описанного класса, а достигается на δ – функции (случай $\gamma > 0$), строятся соответствующие последовательности потенциалов.

Апробация результатов диссертации и возможности их использования

Основные результаты, изложенные в диссертации Тельновой М.Ю., опубликованы в 25-и работах автора, докладывались на 4-х научных семинарах и 19-и конференциях как общероссийского, так и международного уровня. Некоторые результаты опубликованы в монографии. Автореферат точно отражает содержание диссертации.

Работа носит теоретический характер. Результаты, изложенные в работе, могут быть использованы специалистами по качественной теории дифференциальных уравнений и теории спектральных задач во Владимирском, Воронежском, Московском, Новосибирском, Самарском, Санкт-Петербургском, Саратовском, Тбилисском университетах, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Московском государственном университете экономики, статистики и информатики (МЭСИ), ИПМех им. А.Ю.Ишлинского.

Оценка работы.

Диссертация Тельновой М.Ю. является законченной научно-исследовательской работой, в которой содержатся новые результаты по актуальной задаче. Автором проделана серьезная самостоятельная аналитическая работа и диссертация выполнена на должном научном уровне. Подробная библиография достаточно полно отражает исследуемую проблематику и ее приложения.

Диссертация Тельновой М.Ю. "Оценки первого собственного значения задачи Штурма – Лиувилля с условиями Дирихле и весовым интегральным условием" удовлетворяет требованиям "Положения о порядке присуждения ученых степеней" ВАК Министерства образования России, а автор М.Ю. Тельнова заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Доктор физико-математических наук
(специальность 01.01.02), профессор

И.В. Астахова

31 марта 2015 г.

Подпись заверяю

Л.И. Гац

