Отзыв

официального оппонента на диссертацию Тихомирова Романа Николаевича «Операторные оценки многомасштабного усреднения для эллиптических уравнений», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02–дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Тема рецензируемой работы относится к доказательству ряда оценок теории усреднения применительно к линейным эллиптическим операторам с быстроосциллирующими коэффициентами. Эта тема стала активно развиваться с 70-х годов в связи с уравнением вида $(I + A^\varepsilon)u^\varepsilon \equiv u^\varepsilon - \nabla \cdot a(x/\varepsilon)\nabla u^\varepsilon = f(x)$ с периодической матрицей коэффициентов $a(\cdot)$, а также его вариантами, включающими ммладшие члены. Первоначально основная задача заключалась в доказательстве сходимости при $\varepsilon \to 0$ решений u^ε к предельной функции u, а проблема построения оценок для разности $u^\varepsilon - u$ рассматривалась как вспомогательная. Первые оценки не были оптимальны в том смысле, что не являлись точными по отношении порядка нормы $u^\varepsilon - u$ по ε и/или требовали повышенной регулярности $a(\cdot)$ и $f(\cdot)$. Неулучшаемая оценка вида $\|u^\varepsilon - u\| \le \varepsilon \cdot Const \cdot \|f\|$, где $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(R^d)$, была получена М.Ш.Бирманом и Т.Ф.Суслиной в 2003г. методом, опирающимся на спектральные свойства операторов с периодическими коэффициентами. Эту оценку можно трактовать как оценку операторной нормы разности резольвент исходного оператора A^ε и его предельного, рассматриваемых как отображения $f \to u^\varepsilon$ и $f \to u$ из $L_2(R^d)$ в $L_2(R^d)$. В дальнейшем В.В.Жиковым и С.Е.Пастуховой был разработан альтернативный способ построения операторных оценок для операторов с периодическими коэффициентами, названный ими методом сдвига. По сравнению со спектральным методом этот подход оказался более универсальным, так как позволяет рассмотреть операторы с более сложной о структурой коэффициентов, чем чисто периодическая. В рассматриваемой диссертационной работе соискателем разрабатывается обобщение результатов В.В.Жикова и С.Е.Пастуховой в отношении локально-периодических структур, то есть эллиптических операторов с коэффициентами вида

$a = a(x, x/\varepsilon)$, периодическими только по d-мерному аргументу x/ε, а также для случая двоякопериодических осцилляций коэффициентов вида $a = a(x/\varepsilon, x/\delta)$, $\delta = \delta(\varepsilon) << \varepsilon$. Локально-периодические и многомасштабные структуры существенно ближе к случаю общего положения и чаще встречаются в практических приложениях, чем чисто периодические. Структуры с иерархией масштабов возникают во многих задачах оптимального дизайна и при проектировании композитов с заданными эффективными свойствами. Этим обусловлена потребность в развитии математических методов и подходов к построению точных операторных оценок в теории усреднения. Таким образом, **актуальность** выбранной соискателем темы диссертации не вызывает никаких сомнений.

Основной **целью** рецензируемой работы является построение оценок вида $\|u^\varepsilon - u\| \le \varepsilon \cdot Const \cdot \|f\|$ и $\|u^\varepsilon - u\| \le \max\{\varepsilon, \delta/\varepsilon\} \cdot Const \cdot \|f\|$ в локально-периодическом и двухмасштабном случаях соответственно. Для этого требуется сравнивать точное решение u^ε не с первым приближением теории усреднения u, а со вторым, включающим некоторый корректор. При этом корректор, формально имеющий порядок ε, не обладает достаточной регулярностью, чтобы получить требуемую операторную оценку. Метод сдвига позволил соискателю обойти эту трудность, регуляризуя корректор. Более сильные точные оценки в $L_2(R^d)$ для градиентов исходного и усредненного решения с учетом регуляризованного корректора в диссертации также получены. Их можно трактовать как операторные оценки соответствующих операторов из L_2 в $W^{1,2}$. Помимо этого в диссертации рассмотрены задачи об аналогичных операторных оценках для краевых задач Дирихле и Неймана в ограниченных областях, а также для операторов с младшими членами, в том числе неограниченными. Неулучшаемость построенных оценок проиллюстрирована конкретными примерами.

Таким образом, полученные соискателем результаты основаны на высококвалифицированных теоретических подходах и прошли апробацию в форме публикаций в печати и обсуждений на семинарах и конференциях. **Достоверность** получаемых этими методами результатов представляется в достаточной мере обоснованной.

Диссертационная работа выполнена весьма качественно, и принципиальных претензий по ее содержанию у меня нет. Имеющиеся отдельные **замечания** можно отнести не к изложению основной темы, а к ряду пояснений или их отсутствию. Имеется также ряд описок в формулах, появившихся, по-видимому, на этапе оформления текста. Ниже приведен перечень замеченных неточностей.

1. Во введении соискатель достаточно подробно изложил результаты своих непосредственных предшественников, В.В.Жикова и С.Е.Пастуховой, а в отношении многочисленных работ по усреднению многомасштабных и локально-периодических структур ограничился перечислением имен авторов на стр. 6. Введение выглядело бы более обстоятельным, если бы в нем хотя бы в двух словах были обозначены результаты некоторых из них.

2. Во всех рассмотренных задачах соискатель требует для коэффициентов вида $a = a(x, x/\varepsilon)$ и $a = a(x/\varepsilon, x/\delta)$ выполнения условия Липшица по первому аргументу. Это обеспечивает, во-первых, измеримость указанных функций по x и, во-вторых, достаточную регулярность решения усредненного уравнения. Диссертацию сильно украсило бы обсуждение возможности ослабить это условие, снабженное примерами или контрпримерами. В отношении измеримости функций вида $a = a(x, x/\varepsilon)$, периодических по одному из аргументов, могу порекомендовать работу G.Allaire (1992) SIAM J. Math. Anal. 23(6), 1482-1518, где этому вопросу уделяется значительное внимание.

3. Работа написана весьма аккуратно, и количество опечаток в тексте, учитывая большое количество формул и выкладок, весьма умеренное. Замеченные опечатки таковы:

а) стр.23 уравнение 4.8 должно быть c_0^2 вместо c_0;

б) стр. 11 формула 0.9 лишний квадрат нормы;

в) стр. 57 формула 8.3 неверная формула для $N(y)$, т.к. $\langle N(\cdot)\rangle \neq 0$;

г) стр. 58 формула 8.5 пропущен квадрат у нормы;

д) стр. 63-64 Лемма 2.1 по-видимому должно быть Q_δ вместо Q_ε;

е) стр.62 область Ω должна быть связной;

ж) стр. 66 формула 3.5 должно быть u^ε вместо v^ε;

з) стр. 77 равенство 6.16 пропущен знак z^ε в выражении $A^\varepsilon z^\varepsilon$;

и) там же пропущен знак ∇ в формуле

Сделанные замечания не умаляют ни значения выводов, ни хорошего впечатления от всей работы.

Диссертация представляет высококвалифицированное научное исследование, имеющее большую практическую значимость и перспективы развития. Автор продемонстрировал хорошее владение предметом, позволяющее формулировать и решать новые проблемы. Автореферат диссертации полностью соответствует содержанию диссертации и правильно отражает суть защищаемых положений. Основываясь на

вышесказанном можно с уверенностью заявить, что работа соответствует требованиям, предъявляемым ВАК РФ к кандидатским диссертациям, а ее автор Тихомиров Роман Николаевич заслуживает присвоения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент
старший научный сотрудник
Института водных проблем РАН,
кандидат физико-математических наук А.Ю.Беляев

119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 3
Тел. +7 (499) 135-54-56
E-mail: beliaev@iwp.ru

Подпись Беляева А.Ю. удостоверяю

18.05.2017