

## О Т З Ы В

официального оппонента Глызина С. Д. о диссертации  
Лариной Яны Юрьевны «Устойчивость по Ляпунову и статистические  
характеристики управляемых систем с импульсным воздействием»,  
представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических  
наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения,  
динамические системы и оптимальное управление.

### Актуальность темы диссертации

Вопросы существования инвариантных и асимптотически устойчивых множеств имеют важное значение в теории управления и теории дифференциальных игр; они также часто возникают и во многих прикладных задачах управления, появляющихся в экономике, биологии, экологии, физике и других науках. Исследованию инвариантных множеств относительно различных управляемых систем посвящены работы таких известных ученых, как Н. Н. Красовский, А. Б. Куржанский, Ж. П. Обен, А. И. Субботин, Н. Н. Субботина, Е. Л. Тонков, В. Н. Ушакова, П. Хартман. В последнее время появились также работы, связанные с исследованием множеств, не обладающих свойством инвариантности, среди которых работы В. Н. Ушакова, Е. Л. Тонкова, Е. А. Панасенко и Л. И. Родиной. Для таких множеств рассматривается вопрос о том, в какой степени заданное множество не является инвариантным относительно дифференциального включения, порожденного управляемой системой. Е. Л. Тонковым предложен новый подход к исследованию свойства инвариантности, который заключается в определении статистически инвариантного множества относительно управляемой системы и связан с изучением статистических характеристик множества достижимости системы. В работе Лариной Я. Ю. исследование данных характеристик распространяется на системы с импульсным воздействием.

Другой важной частью диссертации Я. Ю. Лариной является исследование свойств положительной инвариантности, устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости множеств относительно систем с импульсами. Отметим, что подобные вопросы для решений уравнений и систем с импульсным воздействием рассматривались в работах Р. И. Гладиллиной, А. Д. Мышкиса, Н. А. Перестюка, А. М. Самойленко. Все основные результаты работы автор иллюстрирует прикладными задачами, в которых исследуются свойства инвариантности и устойчивости множеств относительно различных управляемых систем. Поэтому можно утверждать, что диссертация Я. Ю. Лариной является актуальным исследованием и с точки зрения математической теории управления, и с точки зрения прикладных задач, возникающих в различных областях естествознания.

Перейдем к обзору **основных результатов диссертации.**

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, 8 параграфов (нумерация параграфов сквозная), заключения и списка цитируемой литературы, содержащего 70 наименований. Общий объем работы составляет 106 страниц.

Во введении обоснована актуальность темы исследования, приведен обзор работ предшественников и сформулированы основные полученные результаты.

В первой главе изучаются статистически слабо инвариантные множества управляемой системы и статистические характеристики непрерывных функций, такие как верхняя и нижняя относительные частоты попадания графика функции в заданное множество. Получены условия, при которых статистические характеристики двух различных асимптотически эквивалентных функций совпадают, тогда по значению одной из них можно вычислить величину другой. В случае, когда расстояние от графика одной из функций до заданного множества является периодической функцией, приведено равенство для нахождения относительных частот попадания функций в данное множество. Следствием этих утверждений являются условия статистически слабой инвариантности множества относительно управляемой системы. Получены формулы, с помощью которых можно вычислять статистические характеристики и средние значения для некоторых почти периодических функций. Рассматривается также следующая задача. Пусть задано число  $\lambda_0 \in [0, 1]$ . Необходимо найти значение  $c(\lambda_0)$  такое, чтобы верхнее решение  $z(t)$  задачи Коши не превышало  $c(\lambda_0)$  с относительной частотой, равной  $\lambda_0$ . В зависимости от постановки задачи значение  $z(t)$  можно интерпретировать как размер популяции, энергию частицы, концентрацию вещества, величину производства или цену на продукцию.

Во второй главе рассматривается вопрос об устойчивости множеств относительно управляемой системы с импульсным воздействием. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости и слабой асимптотической устойчивости заданного множества  $\mathcal{M} = \{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\}$  относительно управляемой системы с импульсным воздействием в предположении, что функция  $t \mapsto M(t)$  непрерывна в метрике Хаусдорфа и для каждого  $t \in [t_0, +\infty)$  множество  $M(t)$  непусто и замкнуто. Также получены условия, при которых для каждого решения  $x(t, x_0)$  управляемой системы, выходящего из достаточно малой окрестности множества  $M(t_0)$ , найдется момент времени  $t^*$  такой, что точка  $(t, x(t, x_0))$  принадлежит  $\mathcal{M}$  при всех  $t \in [t^*, +\infty)$ . Некоторые из представленных здесь утверждений являются аналогами результатов Е. А. Панасенко и Е. Л. Тонкова для систем с импульсами, в других утверждениях существенно используется специфика импульсного воздействия.

Последний параграф главы посвящен практическому применению полученных результатов. Рассматривается модель конкуренции двух видов и модель «вредитель-биоагент» с импульсным управлением в предположении, что вбросы биоагентов (природных врагов данных вредителей) происходят в фиксированные моменты времени и количество вредителей, потребляемых в среднем одним биоагентом за единицу времени, задается трофической функцией Холлинга. Получены условия асимптотической устойчивости множества  $\mathcal{M} = \{(t, x) \in \mathbb{R}_+^3 : x_1 \leq C_1\}$ , где  $x_1 = y_1/K$ ,  $y_1$  — размер популяции вредителей,  $K$  — емкость среды.

В третьей главе получены теоремы сравнения для систем с импульсным воздействием, позволяющие оценить статистические характеристики данных систем и получить условия статистической инвариантности заданного множества.

В целом диссертация Лариной Я. Ю. представляет вполне законченное исследование по циклу вопросов, относящихся к математической теории управления.

Среди наиболее интересных результатов, полученных в диссертации Лариной Я. Ю., необходимо выделить следующие **новые результаты**:

1. В первой главе исследуются свойства различных статистических характеристик непрерывных функций. В теореме 1.1 получены условия равенства этих характеристик для двух непрерывных асимптотически эквивалентных функций. В теореме 1.2 доказано существование статистически слабо инвариантного множества относительно управляемой системы. В теореме 2.1 приведена формула для вычисления среднего значения функций, почти периодических в смысле Бора. В третьем параграфе изучены статистические характеристики, возникающие в различных прикладных задачах естествознания. Подробно рассмотрено уравнение Ферхюльста.

2. Во второй главе новыми результатами являются теоремы 4.1, 4.2, 4.3, в которых получены условия существования асимптотически устойчивого множества относительно управляемой системы с импульсным воздействием, а также теоремы 5.1, 5.2, 5.3 об условиях существования слабо асимптотически устойчивого множества. Оригинальными результатами можно считать леммы 4.1 и 5.1 о существовании устойчивого по Ляпунову и слабо устойчивого по Ляпунову множества относительно управляемой системы с импульсами. Рассматривается практическое применение этих теорем на модели конкуренции двух видов и модели изменения численности популяции в условиях биологического контроля. Используются аналитические и численные методы.

3. В третьей главе основными результатами являются теоремы сравнения для управляемых систем с импульсным воздействием (теоремы 7.1 и 7.2). Также следует отметить теоремы 8.1 и 8.2 об оценках статистических характеристик управляемых систем с импульсами.

### Критический анализ диссертации

Существенных замечаний по диссертации нет, при чтении работы замечены только следующие неточности: на с. 39 приведена не совсем верная формулировка леммы 3.1, которая не совпадает с формулировкой леммы из работы Л.И. Родиной, цитируемой автором диссертации; на с. 65 в первой строке вместо множества  $\mathcal{M}$  должно быть множество  $\mathcal{M}^r$ .

Кроме того, есть небольшое замечание к автореферату. Автор диссертации рассматривает много интересных прикладных задач, связанных с вычислением статистических характеристик и исследованием асимптотической устойчивости множеств относительно систем с импульсным воздействием. Мне кажется, что в автореферате нужно было бы более подробно описать результаты, полученные в этих задачах.

### Выводы

Диссертация Лариной Я. Ю. посвящена актуальным проблемам математической теории управления. В диссертации получены глубокие результаты, относящиеся к теории инвариантности и теории управляемости системами с импульсным воздействием. Основные утверждения диссертации четко сформулированы и доказаны. Новизна полученных результатов проявляется как в методах исследований, так и в содержании доказанных теорем.

Оформление диссертации отвечает современным требованиям. Диссертация снабжена рисунками, которые иллюстрируют основные определения и существенные моменты в доказательстве утверждений.

Результаты диссертации опубликованы в полном объеме в статьях в ведущих научных изданиях.

Автореферат диссертации полностью отражает ее содержание.

Считаю, что совокупность результатов диссертации Лариной Я. Ю. «Устойчивость по Ляпунову и статистические характеристики управляемых систем с импульсным воздействием» можно квалифицировать как оригинальную научную работу, результаты которой представляют новое достижение в развитии математической теории управления.

В связи со сказанным полагаю, что диссертационная работа удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 (дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление), а Ларина Яна Юрьевна заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук.


Доктор физико-математических наук по специальности 01.01.02,  
профессор, заведующий кафедрой компьютерных сетей  
факультета информатики и вычислительной техники  
ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет  
им. П.Г. Демидова»

Глызин Сергей Дмитриевич

2 марта 2018 г.

150003, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14, ЯрГУ,  
кафедра компьютерных сетей факультета информатики и вычислительной техники;  
E-mail: glyzin.s@gmail.com; тел. +7 (4852) 79-77-02



Подпись заверяю:  
Заместитель начальника управления  
директор центра кадровой политики  
 Л.Н. Куфирина