

О Т З Ы В
официального оппонента

на диссертацию Платова Антона Сергеевича
«Оптимизация структурированных по размеру популяций
на стационарных состояниях»
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление»

В диссертационной работе А.С. Платова проводится исследование стационарных состояний популяции (также группы из нескольких популяций), структурированной по размеру индивидуумов популяции. В качестве модели динамики популяции выбрано модифицированное уравнение МакКендрика — фон Фёрстера (McKendrick — von Foerster) с билинейной управляющей функцией. Уравнение дополнено нелинейным интегральным уравнением, описывающим механизм возобновления популяции, а также интегральным уравнением, описывающим механизм конкуренции. В работе в рамках рассматриваемой модели динамики популяции доказаны существование и единственность нетривиального стационарного решения для задачи с одной и двумя популяциями. Также для системы из произвольного числа популяций доказано существование оптимального решения при использовании критерия суммарной выгоды, предложены два алгоритма численного построения оптимального решения.

Исследование популяционных моделей имеет очевидные практические приложения в экологии и природо-хозяйственной деятельности. Популяции могут структурироваться по разным характеристикам: по возрасту, по размеру, по пространственному расположению. В частности, при исследовании лесных популяций выяснено, что размер деревьев — более значимый фактор, чем их возраст, так что в моделях, описывающих эксплуатацию лесных ресурсов, используют структурирование по размеру. Теме исследования структурированных популяционных моделей посвящено значительное число научных работ. Это указывает на актуальность научного исследования, проведенного в диссертации.

Математические модели, описываемые интегро-дифференциальными уравнениями, к которым относится модель системы популяций, рассматриваемая в диссертации, сложны как для численных расчетов, так и для качественного анализа. Общих подходов к решению подобных задач, как в случае системы обыкновенных дифференциальных уравнений, здесь нет. Особенностью рассматриваемой модели является то, что интегральные соотношения фактически являются скалярными ограничениями типа равенства на пара-

метры системы дифференциальных уравнений. Это позволяет провести декомпозицию исходной модели, выделив в ней систему дифференциальных уравнений и систему нелинейных алгебраических уравнений: зафиксировав параметры системы, можно решить систему дифференциальных уравнений, это решение будет представлять собой функцию от параметров, с помощью которой уравнения возобновления и конкуренции превращаются в систему нелинейных алгебраических уравнений. Описанная декомпозиция и стала основным методом исследования рассматриваемой популяционной модели.

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего 67 наименований (в том числе 13 публикаций автора по теме диссертации).

Введение посвящено постановке проблемы, обоснованию ее актуальности и научной ценности, приведен краткий обзор состояния проблемы, сформулированы основные научные результаты работы.

В первой главе дано детальное описание модели динамики группы популяций с разъяснением содержательного смысла уравнений модели. В задаче для модели одной популяции доказано, что при любом допустимом управлении динамическая система имеет нетривиальное (т.е. ненулевое) стационарное решение, причем такое решение единственno. Далее рассмотрена модель для группы из двух популяций, в которой конкуренция описывается векторной функцией. Для этой модели также установлены существование и единственность нетривиального стационарного решения.

Роль управления в рассматриваемых моделях является изъятая для индивидуумов по каждому размеру в популяции, все индивидуумы, имеющие размер выше некоторого предельного, изымаются полностью. С точки зрения эксплуатации природных ресурсов интересны такие уровни изъятия, которые, с одной стороны, сохраняют устойчивую динамику популяций, а с другой стороны, дают максимальный хозяйственный эффект. Это приводит к постановке задачи оптимизации, которой посвящена **вторая глава**. В этой главе вводится критерий максимальной выгоды, представляющий собой интегральный функционал, учитывающий как доход от изъятой части популяции, так и расходы на промышленное воспроизводство популяционной системы. Установлено, что существует оптимальное решение задачи для группы из произвольного количества популяций в случае скалярного условия конкуренции. Также установлено существование оптимального решения для группы из двух популяций в случае векторного условия конкуренции.

В третьей главе диссертации представлены два алгоритма для решения оптимизационной задачи, поставленной во второй главе. Первый алгоритм вариационный и исходит из необходимого условия экстремума, достижимого функционалом. Выясняется, что оптимальное управление имеет спе-

циальный вид переключения с минимума на максимум в диапазоне возможных значений, а точка переключения определяется как решение соответствующего уравнения. Второй алгоритм основан фактически на методе стрельбы: рассматривая уровень конкуренции E как параметр, можем решать оптимизационную задачу с помощью принципа максимума Понтрягина. В результате получаем управление и, следовательно, значение функционала как функцию параметра E . При этом управление будет обладать при фиксированном значении E свойством оптимальности. Остается выбрать те значения, которые удовлетворяют ограничению, связывающему уровень конкуренции с решением оптимальной задачи. Это можно сделать с помощью равноверной сетки по параметру.

В диссертации представлены следующие **новые результаты**:

- 1) теорема существования и единственности нетривиального стационарного состояния в модели управления структурированной по размеру популяцией с внутривидовой конкуренцией в симметричной форме;
- 2) теорема существования нетривиального стационарного состояния в модели управления совокупностью двух структурированных популяций с векторной симметричной формой конкуренции и единственность этого состояния при «маргинальном» превосходстве по влиянию на развитие внутривидовой конкуренции над межвидовой;
- 3) теорема существования оптимального среди стационарных состояния в модели управления структурированной по размеру популяцией с внутривидовой конкуренцией в симметричной форме и найдено необходимое условие оптимальности;
- 4) теорема существования оптимального среди стационарных состояния в модели управления совокупностью двух структурированных популяций с векторной симметричной формой конкуренции;
- 5) теорема существования оптимального среди стационарных состояния для модели управления совокупностью нескольких структурированных популяций со скалярной симметричной формой конкуренции.

Достоверность полученных научных результатов и выводов диссертации обоснована с помощью строгих математических доказательств.

Практическая ценность диссертации состоит в получении результатов, которые могут быть использованы в решении прикладных задач оптимизационного характера, возникающих в ряде экологических и технологических процессов.

Автореферат диссертации полностью отражает содержание и выводы диссертационной работы.

Теоретическая и практическая значимость диссертационной работы не вызывает сомнений, ее выводы полностью обоснованы, прошли апробацию

на ряде научных конференций. Результаты диссертации опубликованы в научных журналах, входящих в список ВАК (Journal of Mathematical Sciences, Moscow Mathematical Journal, Труды института математики и механики УРО РАН). Однако имеются замечания.

1. В формулировках утверждений не всегда аккуратно прописаны важные условия, а в самих формулировках присутствует определенный разнобой. Так понятие допустимого управления определено во введении, а в первой главе при детальном описании модели не дано. Это понятие использовано в теореме 1, а в теореме 2 нет (приведены условия, эквивалентные понятию допустимого управления). Используется понятие «нетривиальный», но оно разъясняется гораздо позже первого упоминания. В лемме 1 (с. 31) в формулировке заявлена непрерывность функций c_i на полуинтервале, а используется непрерывность на отрезке.

2. В доказательствах теорем не всегда отмечаются ключевые моменты, что затрудняет чтение. Так, например, в следствии 1 следовало бы отметить, что $f(f(0)) \leq f(0)$, в изложении второго алгоритма опять-таки важно отметить, что параметр $x(0)$ в силу однородности уравнения на $x(s)$ является решением алгебраического уравнения, для получения которого достаточно вычислить решение $x(s)$ при каком-либо определенном начальном условии.

3. Условие (31) слабого «маргинального» влияния конкуренции дано по отношению к решению, а не к параметрам системы. Это условие следовало бы обсудить и привести хотя бы достаточные условия на исходные данные, при которых условие имеет место.

4. Условия на коэффициенты системы и на допустимое управление следовало бы тщательнее продумать. Поскольку управление u идет в сумме с функцией μ , отражающей в модели уровень смертности, то использовать для этих двух функций разные условия гладкости нет особого смысла.

5. В замечании 4 (с. 23) пропущено важное условие $p > 0$.

6. Рис. 3 (с. 27) неверен. Кривые ϕ_1 и ϕ_2 обе оси координат пересекать не могут. При этом фрагмент доказательства на с. 28 лишний.

7. По смыслу цены $c_{S,i}$ в (34) могут быть отрицательными: отбор больших размеров может не иметь коммерческого смысла, а затраты на это необходимы. Следовало бы обсудить эту возможность и явно оговорить, что $c_{S,i} \geq 0$.

8. В тексте работы довольно много опечаток.

В заключение отмечу, что диссертация А.С. Платова представляет собой самостоятельную законченную научно-квалификационную работу, содержащую новые научные результаты, полученные с помощью методов тео-

рии дифференциальных уравнений, функционального анализа, теории оптимального управления. Основные результаты диссертации опубликованы в научной печати и апробированы на научных конференциях и научных семинарах. Все теоретические утверждения снабжены строгими доказательствами.

По актуальности, научному уровню и содержанию диссертационная работа А.С. Платова удовлетворяет всем требованиям ВАК РФ, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление», а ее автор А.С. Платов заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по указанной специальности.

Официальный оппонент

профессор кафедры математического моделирования
Федерального государственного бюджетного

образовательного учреждения высшего

образования «Московский государственный
технический университет имени Н.Э. Баумана

(национальный исследовательский университет)
(МГТУ им. Н.Э. Баумана),

доктор физико-математических наук, доцент

Тел. (499) 263 63 91,

E-mail: bauman@bmstu.ru

А.Н. Канатников

dkn
06.12.2016

