ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Плышевской Светланы Петровны «Сценарии возникновения метаустойчивых структур в квазилинейных уравнениях параболического типа», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Актуальность темы диссертационного исследования.

Исследование динамики эволюционных уравнений с частными производными является чрезвычайно актуальной задачей современной теории дифференциальных уравнений. В диссертационной работе Плышевской С.П. исследуются пространственно неоднородные структуры одномерных краевых задач параболического типа. Одной из этих задач выступает хорошо известное вещественное уравнение Гинзбурга–Ландау дополненное краевыми условиями Неймана, а вторая возникает при изучении динамики разделения фаз в бинарных расплавах при заданной концентрации компонент. В диссертации изучается модель Кана–Хилларда, которая описывает процесс изотермического разделения фаз концентрации, причем неизвестная функция является концентрацией одной из компонент бинарной смеси. Обоим этим уравнениям посвящено огромное число работ, что говорит о несомненной актуальности их изучения. Нахождение условий возникновения и разрушения пространственно-неоднородных и, в частности, мета-устойчивых режимов данных задач представляет очевидный интерес, как для теоретических построений, так и для практических применений, тем самым, актуальность темы работы не вызывает сомнения.

Остановимся на основных результатах, полученных в диссертационной работе и их новизне. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, списка иллюстраций и одного приложения. Работа содержит 144 страницы, список литературы состоит из 91 наименования, в работе имеется 29 иллюстраций.

Введение содержит постановки задач и краткую историю вопроса для всех рассмотренных в работе проблем, в нем дается сжатый обзор литературы и анализ новизны и актуальности поставленных задач.

В первой главе изучаются неоднородные стационарные структуры хорошо известной модельной одномерной краевой задачи для уравнения Гинзбурга–Ландау, их спектральные свойства, в частности, первые бифуркации этих решений при изменении параметра диффузии, свойства их неустойчивых многообразий. При стремлении к нулю параметра диффузии неустойчивые (седловые) стационарные состояния обнаруживают свойства мета-устойчивости, т.е. решения с начальными условиями на неустойчивом многообразии очень долго остаются в его окрестности, а затем быстро переходят к другому стационарному состоянию. Основной результат главы сформулирован в теоремах 1.1 и 1.2, в которых доказывается существование у соответствующей краевой задачи метаустойчивых структур с одной и двумя точками перехода. Под метаустойчивой структурой уравнения с малой диффузией (сингулярно-возмущенное уравнение) понимается неустойчивое стационарное пространственно-неоднородное решение краевой задачи, для которого время ухода из его окрестности достаточно велико. В этой части работы также строятся галеркинские приближения решений, по которым приближенно найдены критические значения параметра диффузии и оценки первых собственных чисел спектра устойчивости задачи.

Во второй главе работы выполнен бифуркационный анализ уравнения Кана–Хилларда с условиями типа Неймана на отрезке, описаны условия существования и форма решений этих уравнений в зависимости от бифуркационного параметра, а также проанализирована устойчивость рождающихся пространственно-неоднородных структур. Как и в первой главе, основное внимание привлечено к метаустойчивым структурам. Выяснено, что метаустойчивые структуры этой краевой задачи могут иметь как две, так и три точки перехода, а в спектре устойчивости соответствующих решений может быть одно или два положительных значения. Основным результатом этой части работы следует считать бифуркационную теорему 2.1 и полученные на основе галеркинских аппроксимаций критические значения параметров, при которых появляются метаустойчивые структуры с двумя и тремя точками перехода. Отметим также приведенные в главе результаты численного счета, иллюстрирующие процесс разрушения метаустойчивых структур в данном уравнении.

Третья глава работы, в отличие от двух предыдущих глав, посвящена бифуркациям устойчивых решений в краевой задаче Кана–Хилларда. В теоремах 3.2, 3.3 на основе метода нормальных форм и интегральных многообразий рассматривается задача о потере устойчивости пространственно-однородных решений и ответвлении пространственно-неоднородных состояний равновесия. Следующим важным результатом, представленным в главе, является теорема 3.4, в которой обсуждается колебательная потеря устойчивости однородного решения и ответвление от него устойчивых пространственно-неоднородных периодических решений. Наконец, определенный интерес представляют вычисления, приводящие к теореме 3.5, приведенной в конце главы, которая касается бифуркаций, происходящих в краевой задаче при достаточно больших значениях бифуркационного параметра, имеющего физический смысл адвекции.

В заключении формулируются основные результаты диссертационной работы.

Приведем сводку новых результатов, полученных в диссертации.

1. Опираясь на метод центральных многообразий, доказаны теоремы о существовании пространственно-неоднородных стационарных решений параболического уравнения Гинзбурга–Ландау с краевыми условиями Неймана на отрезке (теоремы 1.1, 1.2). На основе метода Галеркина проведен анализ

формы и устойчивости пространственно-неоднородных стационарных решений, рождающихся в результате бифуркации типа «вилка». Исследованы условия и сценарии возникновения метаустойчивых структур, возникающих в результате седло-узловых бифуркаций.

2. На основе метода центральных многообразий доказана теорема о существовании пространственно-неоднородных стационарных решений параболического уравнения Кана–Хилларда с краевыми условиями типа Неймана на отрезке (теорема 2.1). Проведён анализ иерархии упрощенных моделей уравнения Кана–Хилларда – галеркинских аппроксимаций. Рассмотрены сценарии эволюции метаустойчивых структур с двумя и тремя точками перехода.

3. Исследовано поведение решений расширенной модели уравнения Кана–Хилларда в окрестностях всего континуального множества его состояний равновесия. Выделены критические случаи, приведён бифуркационный анализ. Построены асимптотики неоднородных состояний равновесия, и изучена их устойчивость (теоремы 3.1, 3.2, 3.3).

4. Для обобщенного уравнения Кана–Хилларда показано, что в некоторой области фазового пространства его локальная динамика определяется бифуркацией Андронова–Хопфа. Приведена соответствующая нормальная форма, которая определяет поведение решений в этой области фазового пространства (теорема 3.4).

Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации. Обоснованность научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, подтверждается их сопоставлением с классическими результатами; обсуждением на международных конференциях; 26 публикациями основных положений диссертационного исследования, семь из которых - в рецензируемых научных изданиях из перечня журналов, рекомендуемых ВАК РФ для публикации материалов по диссертациям.

Достоверность результатов исследования подтверждается строгими доказательствами теорем, обоснованными выводами уравнений, сравнением с известными ранее теоретическими результатами, а также подтверждается использованием в качестве теоретической и методической базы работ ведущих отечественных и зарубежных специалистов в области теории дифференциальных уравнений и теории динамических систем.

Тем не менее, диссертационная работа не лишена недостатков. Приведем некоторые замечания по работе.

1. Содержащиеся в приложении основные обозначения и определения лучше выглядели бы в начале работы.
2. Через всю работу проходит понятие стационарной структуры с конечным числом точек перехода, однако само понятие точки перехода нигде не определяется.
3. Работа недостаточно хорошо структурирована и описание часто ведется

на «зоологическом» уровне: дается перечисление без достаточных объяснений. Следовало бы лучше структурировать информацию о критических значениях параметров и точках спектра им соответствующих, поскольку их представление в главах 1,2 явно неудачно. Нигде не отмечено, что рассматриваемое в первой главе вещественное уравнение Гинзбурга-Ландау является градиентным, т.е. существует корректно определенный функционал в соответствующем функциональном пространстве, вариационная производная которого убывает вдоль решений, хотя отмечается, что галеркинские приближения дают градиентную систему. Заметим, что классическое уравнение Гинзбурга-Ландау относительно комплекснозначной функции не является градиентным. Градиентность и компактность рассматриваемого интервала приводит к тому, что глобальный аттрактор уравнения является компактным связным конечномерным множеством, состоящим из конечномерных неустойчивых многообразий стационарных решений, т.е. решений, не зависящих от времени. Не отмечено, что в изучаемом случае стационарные решения после нормировки пространственной переменной удовлетворяют дифференциальному уравнению типа Дюффинга, являющемуся гамильтоновым, обратимым, а его решения выражаются через эллиптические функции, т.е. его структура известна. В частности, при $\Lambda = 0$ любое решение краевой задачи является либо половиной симметричного периодического решения (на его полупериоде), либо чисто периодическим при нормировке периода на π. Отсюда ясно, что число таких стационарных решений зависит от вида функции периода, которая стремится к бесконечности при подходе периодического решения к сепаратрисному контуру, и величины параметра диффузии μ. Эта функция для такого уравнения Дюффинга является монотонно возрастающей, поэтому могут существовать только два периодических решения: у одного полупериод кратен отношению π к корню из μ, у второго сам период кратен этой величине. Из них первое дает решения с нечетным числом точек перехода, а второе – с четным. Поэтому изменение топологии аттрактора, т.е. бифуркация при стремлении μ к нулю, может происходить либо при рождении периодического решения с указанным периодом, либо при изменении размерности неустойчивого многообразия. Это явно не формулируется. Не указано, как меняется структура уравнения Дюффинга при $\Lambda \neq 0$.

4. Также не отмечено, что изучаемое в главе 2 уравнение Кана-Хилларда является уравнением градиентного типа относительно нестандартного скалярного произведения в функциональном пространстве. Это объясняет интерес к стационарным решениям и их спектрам. В отличие от этого случая, уравнение с добавлением градиентного члена, изучаемое в третьей главе, не обладает свойством градиентности и это служит причиной появления бифуркации Андронова-Хопфа: в градиентных

системах она невозможна.

5. Имеются неудачные формулировки теорем. Например, в теоремах 1.1, 1.2 утверждается о рождении пары стационарных неоднородных структур (состояний равновесия динамической системы в бесконечномерном функциональном пространстве) и размерности их неустойчивых многообразий (равных 1). При этом везде в выводах утверждается, что доказательство основано на теории центрального многообразия. Однако существование этих структур, т.е. существование решений стационарной задачи, следует из динамических свойств уравнения типа Дюффинга (гамильтоновости и обратимости), периодические решения которого выражаются через эллиптические функции. Одномерность же неустойчивого многообразия следует из двух фактов: свойств спектра соответствующей линеаризованной на нулевом решении задачи и использования теоремы о центральном многообразии.

6. На мой взгляд, утверждение, что в уравнении Кана-Хилларда имеется расслоение на инвариантные подмногообразия, соответствующее фиксации пространственного среднего значения решения, следовало либо доказать, либо привести точную ссылку.

Имеются также некоторые замечания технического характера:

1. В третьей главе имеется две теоремы с номером 3.4.
2. Ряд длинных формул сверстаны неаккуратно так, что некоторые их части выходят за границы листа, это затрудняет анализ этих формул.
3. Имеются неудачные термины и формулировки. Например, везде используется сочетание «инвариантное интегральное многообразие», это примерно как сказать «соленая соль».

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования.

Соответствие диссертации требованиям ВАК РФ.

Диссертационная работа «Сценарии возникновения метаустойчивых структур в квазилинейных уравнениях параболического типа» является законченным, самостоятельным исследованием, имеющим научную новизну, теоретическую и практическую значимость. Выводы и рекомендации, сформулированные в работе, достаточно аргументированы. Результаты диссертации опубликованы в полном объеме в статьях в ведущих научных изданиях (7 статей в списке рекомендованных ВАК изданий). Диссертация обладает внутренним единством и представляет собой научно-квалификационную работу, в которой содержится решение научной задачи, имеющей значение для дифференциальных уравнений. Автореферат диссертации правильно отражает ее содержание.

Работа удовлетворяет всем требованиям ВАК РФ, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор Плышевская Светлана Петровна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент:

Ученая степень, ученое звание — д.ф.-м.н., профессор,
профессор кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа
ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского"

Лерман Лев Михайлович

Подпись Лермана Л.М. заверяю. Ученый секретарь ННГУ
Л.Ю. Черноморская
Тел. 462-30-21

Контактные данные:

тел.: +7(831) 462-33-20, +7(831) 462-33-61, e-mail: lermanl@mm.unn.ru
Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:
01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Адрес места работы:

Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского", Институт информационных технологий, математики и механики:
Тел.: +7(831) 462-33-20, +7(831) 462-33-61; e-mail: lermanl@mm.unn.ru