Отзыв на диссертацию **Сурначева Михаила Дмитриевича Эллиптические и параболические уравнения типа p-лапласиана**, представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Диссертация посвящена исследованию некоторых нерешенных проблем в теории эллиптических и параболических уравнений. Работа состоит из введения и трех глав, которые состоят из разделов, разбитых на параграфы.

Большая часть работы посвящена рассмотрению следующих трех уравнений параболического типа с весами, модельные варианты которых имеют вид:

$$u_t = \operatorname{div}(\nu(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \tag{1}$$

с весом ν из класса Макенхаупта $A_{1+p/n}$,

$$\nu(x)u_t = \operatorname{div}(\nu(x)\, u|^{m-1}|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \tag{2}$$

где ν принадлежит классу так называемых p-допустимых весов, и

$$\omega_\varepsilon(x)u_t = \operatorname{div}(\omega_\varepsilon(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \tag{3}$$

где вес $\omega_\varepsilon(x)$ равен единице по одну сторону разделяющей гипреплоскости и принимает значение ε по другую сторону этой гиперплоскости.

В первой главе доказано неравенство Харнака для неотрицательных решений уравнения типа (1):

$$u_t = \operatorname{div}(A(x,t,u,\nabla u)) + B(x,t,u,\nabla u).$$

Этот результат является новым. Ранее были известны неравенства Харнака для уравнения (1) с весом $\nu = 1$ (Э.Ди-Бенедето 1988, p>2) и для уравнений типа параболического p-лапласиана с общими структурными условиями и с весом $\nu = 1$ (DiBenedetto E., Gianazza U., Vespri V. 2008 p>2 и 2010 для других значений p). Результаты по линейным неравномерно параболическим уравнениям с весами из классов Макенхаупта получены в работе Chiarenza F., Serapioni R. 1984.

Другим результатом первой главы является неравенство Харнака и гельдеровская непрерывность решений вырождающегося уравнения типа (2) с двойной нелинейностью:

$$\nu(x)u_t = \operatorname{div}(\nu(x)A(x,t,u,\nabla u)).$$

Ранее гельдеровская непрерывность решений уравнения с двойной нелинейностью в случае отсутствия веса была установлена в серии работ А.В.Иванова. Для уравнения с двойной нелинейностью и макенхауптовским весом гельдеровская непрерывность решений изучалась в работе Bonafede S., Skrypnik I.I. 1999.

Интересным третьим результатом первой главы является неравенство Харнака в специальной форме и гельдеровская непрерывность (равномерная по ε)решений уравнения (3) с нерегулярным весом. Этот результат является обобщением результатов работ Ю.А.Алхутова и В.Лискевича 2012 для линейного параболического уравнения с аналогичным весом.

Во второй главе рассматривается задача Коши для уравнения (без веса)

$$u_t = \operatorname{div}(A(x, t, \nabla u)) \tag{4}$$

с обычными условиями роста, коэрцитивности и монотонности и локально суммируемой начальной функцией. Основное исследование направлено на определение условий, при которых происходит равномерная или поточечная стабилизация решений задачи Коши. Предварительно решаются вопросы о корректности задачи Коши. Показано, что при $\frac{2n}{n+2} < p < 2$ решение задачи Коши с начальной функцией из $L_{2,loc}$ существует и единственно. Для $p > 2$ существует критический показатель роста $|x|^{\frac{p}{p-2}}$ при $|x| \to \infty$: если начальная функция "в среднем"не превышает этот рост, то решение существует глобально. Доказана также соответствующая теорема единственности.

Одним из основных результатов второй главы является следующий критерий равномерной стабилизации, установленный для ограниченных решений задачи Коши. Решение $u(x, t)$ равномерно стремится к нулю при $t \to \infty$ тогда и только тогда, когда начальная функция имеет равномерное нулевое среднее. Это утверждение является прямым обобщением критерия равномерной стабилизации для линейного равномерно параболического уравнения, установленного независимо В.В.Жиковым 1977 и S.Kamin 1976. Для уравнения пористой среды аналог такого критерия был установлен Н.Аликакосом и Р.Ростамианом 1984.

Во второй главе получен также критерий поточечной стабилизации решений задачи Коши-Дирихле для уравнения (4). При $p > n$, как нетрудно установить с помощью теоремы вложения $W^{1,p}$ в C^{α}, ограниченное решение уравнения (4), равное нулю на непустой боковой границе цилиндра, стремится к нулю в каждой точке при $t \to \infty$ со степенной скоростью. Если $2n/(n+1) < p \leq n$, то достаточное условие поточечной стабилизации дается дается в терминах p-емкости компакта $\overline{B}_r(x_0) \setminus \Omega$ относительно шара $B_{2r}(x_0)$. А именно, ограниченное решение задачи Коши-Дирихле для уравнения (4) стремится к нулю в каждой точке, если расходится интеграл

$$\int^{\infty}(r^{p-n}C_p(\overline{B}_r(x_0)\setminus\Omega, B_{2r}(x_0)))^{\frac{1}{p-1}}\frac{dr}{r}$$

(в этом условии x_0 — произвольная точка.) Если поток не зависит от времени, то это условие является необходимым для поточечной стабилизации. Доказательство стремления решения к нулю основано на лемме 11 стр. 238 о возрастании (в терминологии Е.М.Ландиса).

Ранее вопрос о стабилизации решений задачи Коши во всем пространстве изучался при достаточно быстром убывании решения к нулю при $|x|\to\infty$. Для уравнения параболического p-лапласиана с начальной функцией из $L_1(R^n)\cap L_2(R^n)$ при $2n/(n+1) < p$ известна степенная оценка скорости стремления решения к нулю (Н.Аликакос, Р.Ростамиан 1982, М.Херреро, Х.Вазкез 1981). При $2n/(n+2) \le p < 2n/(n-1)$ решение обращается в 0 за конечное время. Отметим еще результат S.Kamin, J.L.Vazques 1988 о стремлении неотрицательного решения параболического p-лапласиана с конечной массой к автомодельному баренблаттовскому решению.

В третьей главе исследуются две малосвязанные задачи. Первая - о плотности гладких финитных функций в соответствующем соболевском пространстве $W^{1,p(x)}(\Omega,\rho dx)$. Для постоянного p и макенхауптовского веса этот факт известен давно. Для соболевского пространства с переменным показателем при отсутствии веса $\rho=1$ известен результат В.В.Жикова 1995 и X.L.Fan 1996 о плотности гладких функций, если переменный показатель удовлетворяет log-условию. Недавно В.В.Жиков 2013 для показателя p=2 и веса, представимого в виде $\rho=\omega\omega_0,\ \omega_0\in A_2$, нашел достаточное условие для плотности гладких функций:

$$\liminf_{t\to\infty} t^{-2}\Big(\int_\Omega \omega^t\omega_0 dx\Big)^{1/t}\Big(\int_\Omega \omega^{-t}\omega_0 dx\Big)^{1/t}<\infty.$$

В третьей главе этот результат обобщается на пространства с переменным показателем. Сначала вводится класс Макенхаупта для переменного показателя $A_{p(\cdot)}(\Omega)$ и доказывается, что при выполнении log-условия он содержит класс $A_{p(\cdot)-\varepsilon}(\Omega)$. Достаточным условием для плотности гладких функций является представимость веса в виде $\rho=\omega\omega_0,\ \omega_0\in A_{p(\cdot)}(\Omega)$, и

$$\liminf_{t\to\infty}\Big(\int_\Omega \omega^{-t}\omega_0 dx\Big)^{1/t}\Big(\int_\Omega (t^{-p(x)}\omega)^t\omega_0 dx\Big)^{1/t}<\infty.$$

Другая задача третьей главы касается вопросов существования и единственности решения задачи Дирихле

$$\operatorname{div}(\nabla u + A\nabla u)=f,\ u\in H_0(\Omega),$$

с кососимметрической матрицей A. Доказано, что если

$$\lim_{p\to\infty} p^{-1}\|A\|_{L^p(\Omega)} < \infty,$$

то решение задачи Дирихле единственно. Это обобщает результат В.В.Жикова 2004 с нулевым пределом.

Из вышеизложенного следует, что Сурначевым Михаилом Дмитриевичем получены новые результаты, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение.

Актуальность избранной темы диссертации подтверждается, во-первых, тем, что изучаемые уравнения являются моделями физических процессов, таких как течение жидкостей в пористой среде, модели неньютоновской упругой фильтрации, модели композитных материалов, используются при обработке изображений и т.д. Другим подтверждением актуальности является многочисленный поток исследований математиков, посвященных этим уравнениям.

Приведенные выше основные результаты диссертации полностью обоснованы, являются новыми и достоверными.

В тексте диссертации имеются недостатки.

1) Фамилия автора ДиДжорджи на страницах 38 и 73 написана с ошибкой.

2) Имеются ошибки в окончаниях слов, например, ...третьей главе... на стр.24, вместо ...третьей главы...; ...дифференцирумую... на стр.145 и т.д.

3) Имеются пропуски слов в формулировках утверждений. Например, в Теореме 1 на странице 165 ... f имеет (нулевое) равномерное среднее... пропущено слово (нулевое). На стр.292 вверху ...равенство (нулю) на границе... пропущено (нулю). На той же странице ...задач сходных задач... лишнее слово.

4) Имеются описки в формулах. Например, на стр. 45 в доказательстве следствия 13 в одном из неравенств вместо $t < \theta_*\dots$ должно быть $t < t_1+\theta_*\dots$; теорема Морри о вложении в C^α на стр. 236 приведена с неверным $\alpha = (p-n)/n$; на стр.224 есть странная формула $2n/(n+2) \le p < 2n/(n+2)$; на стр.266 два обозначения φ_ε и ρ_ε для одной функции.

5) На стр. 267 присутствует необоснованное неравенство

$$\|u - \sum v_j\|_{W(\Omega)} \le \sum \|u_j - v_j\|_{W(D_j)} < \varepsilon.$$

Дело в том, что ряд $\sum u_j$, возникший из разбиения единицы, сходится поточечно, но как правило, расходится по норме. Также обстоит дело с рядом $\sum v_j$. Поэтому манипуляции с нормами не обоснованы.

Приведенные недостатки снижают качество текста работы, но не влияют на обоснованность и достоверность основных результатов диссертации.

На основании вышеизложенного заключаю, что диссертация Сурначева Михаила Дмитриевича, представленная на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление — полностью соответствует всем критериям, установленным в Положении О ПОРЯДКЕ ПРИСУЖДЕНИЯ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ, а ее автор, несомненно, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук.

ПОДПИСЬ Мукминова Ф.Х.
ЗАВЕРЯЮ
СПЕЦИАЛИСТ ПО КАДРАМ
ПОДПИСЬ Л.Ф. САБИРОВА
20.11.2017 г.

Официальный оппонент:
ведущий научный сотрудник отдела
теории функций и функционального анализа
Института математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра
Российской академии наук,
доктор физико-математических наук,
профессор /Мукминов Ф.Х./

Адрес: 450008, г.Уфа, ул. Чернышевкого 112,
Тел. +7-347273-3342, E-mail: mfkh@rambler.ru

Ученый секретарь /Шайгарданов Ю.З./