Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
(ПОМИ РАН)

191023 Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27
тел. (812) 312-40-58, факс (812) 310-53-77
e-mail: admin@pdmi.ras.ru

ИНН 7825351570 КПП 784101001

13.09.2018 **№ 11102/33/02-2171**

На **от**

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

академик РАН

С. В. Кисляков

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук на диссертационную работу Владимирова Антона Алексеевича «Некоторые вопросы теории обыкновенных дифференциальных операторов в тройках пространств Соболева», представленную к защите на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 — «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Обыкновенные дифференциальные операторы — классический объект изучения, история его разработки восходит к работам Штурма. Исследованию различных аспектов этой теории посвящена обширная литература. В этой области работали и работают как отечественные, так и зарубежные ученые — Дж. Биркгоф, Я.Д. Тамаркин, М.Г. Крейн, Ф.С. Рофе-Бекетов, А.А. Шкаликов, Ю.В. Егоров, В.А. Кондратьев, М.З. Соломяк, М. Левитин, J. Kigami, U. Freiberg и многие другие. В последние десятилетия в этой области произошла заметная активизация, связанная с распространением теории на операторы с коэффициентами (или весами) — обобщенными функциями. Поэтому тема диссертации А.А. Владимирова является актуальной.

В диссертации обсуждаются как вопросы общей теории, так и конкретные разделы — осцилляционные теоремы, экстремальные задачи на собственные значения, спектральные асимптотики. Автору удалось найти новые подходы во всех этих направлениях.

Диссертация состоит из введения, шести глав и приложения, иллюстрирующего связь между спектральными свойствами граничных задач для уравнения Штурма-Лиувилля с сингулярным незнакоопределённым весом и распределением отвечающих

указанному весу интегральных характеристик броуновского движения. Во введении определены цели работы, дается анализ имеющейся литературы и обзор результатов диссертации.

Первая глава посвящена абстрактному подходу к рассматриваемым операторам, что позволяет в едином ключе рассмотреть имеющиеся ранее результаты М. Лангера и других авторов. Эта глава представляет в основном методический интерес.

Во второй главе для введенного ранее в работе [74] (нумерация по списку цитируемой литературы) класса вполне регулярных граничных условий строится процедура приближения операторов с сингулярными коэффициентами гладкими. Далее на основе этой процедуры производится распространение теории Штурма об осцилляциях собственных функций на значительно более широкий класс операторов. Наиболее интересными здесь являются результаты параграфа 2.4, дающие критерий, а также простые достаточные условия (значительно менее ограничительные, чем известные ранее) знакорегулярности задачи с разделенными граничными условиями для оператора четвертого порядка. Представляет значительный интерес возможность распространения этих результатов на операторы произвольного четного порядка, которое в диссертации лишь намечено.

Заметим еще, что, как указано в работе [74], каждый вполне регулярный оператор является регулярным в смысле Биркгофа. Однако пока неясно соотношение между вполне регулярными и хорошо известным классом усиленно регулярных граничных условий.

В третьей главе рассмотрены экстремальные задачи для первого собственного числа задачи Штурма-Лиувилля с различными граничными условиями на отрезке, а также оператора Штурма-Лиувилля с условиями сопряжения на геометрическом графе. Оценки, полученные в этой главе, являются точными.

В главе 4 обсуждаются «грубые» асимптотики спектра оператора Штурма-Лиувилля со знакопеременным самоподобным весом. Эта глава имеет в основном методический характер, хотя не исключено, что полученное в ней обобщение классической теоремы восстановления является новым.

В пятой главе изучается тонкая структура спектра оператора произвольного четного порядка с дискретным самоподобным весом. Здесь автору удалось выявить асимптотическую организацию собственных чисел в геометрические прогрессии с одинаковым знаменателем, количество которых зависит от структуры веса.

Наконец, в последней главе также исследуется тонкая структура спектральной асимптотики для операторов второго и четвертого порядка с «ровной» самоподобной первообразной весовой функции. Использование введенного в работах автора и И.А. Шейпака понятия спектральной периодичности позволило получить представление периодической функции, входящей в асимптотику, через произведение экспоненты с известным показателем и чисто сингулярной возрастающей функции. Отдельный интерес представляет критерий сингулярности монотонной функции в терминах скорости приближения ее кусочно постоянными, который не только уже послужил основой обобщения результатов автора на более широкий класс самоподобных весов [56], но и наверняка найдет применение в конструктивной теории функций.

Теоретические результаты автора в главах 4-6 иллюстрируются численными примерами, в которых вычисления собственных чисел проведены по авторской методике.

К диссертации имеются следующие замечания:

1. Стиль изложения во многих местах переусложнен, что существенно затрудняет ее чтение. Не улучшают дело попытки в некоторых местах изложить доказательство на языке конструктивного анализа (параграфы 2.3, 3.1, 5.2, 6.4), представляющиеся неоправданными.

2. В связи с тем, что автор систематически рассматривает знакопеременные веса, для операторов высокого порядка естественным было бы рассматривать в качестве весов

более высокие производные самоподобных функций. Это замечание можно считать предложением по дальнейшему развитию результатов диссертации.

3. В тексте диссертации не указано, что полученные в параграфе 3.3 оценки собственных чисел оператора Штурма-Лиувилля на графе являются точными, это можно усмотреть лишь из доказательства.

4. В главе 4 при описании истории вопроса дается ссылка на работу [98], но почему-то не упоминается работа [86], в которой были получены аналогичные результаты.

5. В автореферате в Предложении 4 использованы обозначения u_1, u_2, которые нигде в автореферате не вводятся и не объясняются.

Имеются также некоторые опечатки (напр., в конце с.59, в конце формулировки теоремы 4.2 на с.64), но их число невелико.

Эти замечания не меняют благоприятной оценки диссертации.

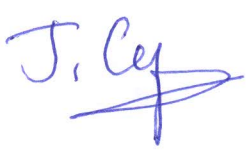
Оценивая работу в целом, можно сказать, что автором получены оригинальные результаты и разработаны принципиально новые методы, имеющие теоретическую ценность и вносящие существенный вклад в теорию обыкновенных дифференциальных операторов, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение.

Тема диссертации актуальна, а положения и выводы, содержащиеся в ней, являются новыми и полностью обоснованными. Результаты диссертации опубликованы в 15 статьях в журналах, включенных в перечень ведущих рецензируемых научных изданий ВАК. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

С диссертацией А.А. Владимирова рекомендуется ознакомиться в Математическом Институте им. В.А. Стеклова РАН, Московском, Санкт-Петербургском и Новосибирском государственных университетах, Российском университете Дружбы народов.

Диссертационная работа А.А. Владимирова «Некоторые вопросы теории обыкновенных дифференциальных операторов в тройках пространств Соболева» является завершенным научным исследованием и удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к докторским диссертациям по физико-математическим наукам, а её автор безусловно заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании Лаборатории математической физики ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук 11 сентября 2018 г.

Зав. Лабораторией математической физики
доктор физ.-мат. наук, профессор  Г. А. Серегин