ОТЗЫВ

официального оппонента, кандидата физико-математических наук, старшего научного сотрудника Рыкова Юрия Германовича на диссертационную работу соискателя ученой степени кандидата физико-математических наук Гаргянц Лидии Владимировны, выполненную на тему «Разрывные энтропийные решения одномерных законов сохранения с неограниченными начальными условиями» по специальности 01.01.02 – «дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Актуальность темы диссертации

В общей теории уравнений с частными производными важную роль играет теория так называемых систем законов сохранения, которые представляют собой класс квазилинейных систем уравнений гиперболического типа, записанных в дивергентной форме. Этот класс уравнений имеет многочисленные практические приложения в области механики сплошных сред, разработанная теория используется, в том числе, для получения робастных и экономичных разностных схем, включая также алгоритмы расчетов на параллельных суперкомпьютерных системах.

Теория систем законов сохранения является популярной областью исследования с большим кругом практических приложений, но, тем не менее, можно сказать, что ее основные положения все еще нуждаются в существенном осмыслении и разработке. Так до сих пор не существует пока доказательств теорем существования и единственности обобщенных решений для систем уравнений даже с одной пространственной переменной при достаточно общих ограниченных начальных данных, см., например, П. Лакс (2006) – описанная там ситуация сохраняется и сегодня. Поэтому важно исследовать возможные нестандартные ситуации, связанные с обобщенными решениями, поскольку такие ситуации могут привести к большему пониманию природы препятствий, с которыми сталкивается общая теория систем законов сохранения. С этой точки зрения исследование обобщенных решений с особыми свойствами полезно начинать со случая одного закона сохранения, теория для этого случая для многих пространственных переменных и ограниченных начальных данных с достаточной полнотой построена С.Н. Кружковым (1970) в случае многих пространственных переменных. Наиболее значимый вклад в полученный в этой области результат внесли более ранние работы Е. Хопфа, П. Лакса, Дж. Глимма, О.А. Олейник, С.К. Годунова, И.М. Гельфанда, О.А. Ладыженской, Н.Д. Введенской, А.И.Вольперта.

С.Н. Кружков (1970) получил достаточно общую теорему существования и единственности энтропийных обобщенных решений в классе ограниченных, измеримых функций одного квазилинейного закона сохранения со многими пространственными переменными, при этом допускалось наличие и нетривиальной нелинейной правой части. Также было получено свойство монотонной зависимости решения от начальных данных.

Дальнейшее развитие теории заключалось в исследовании качественных свойств обобщенных решений и расширении класса начальных функций и допустимых функций потока, см., например, М.Г. Крандалл (1972), С.Н. Кружков, Ф. Хильдебранд (1974), С.Н. Кружков, П.А. Андреянов (1975), Вейнан И, Б. Энквист (1993), Ф. Бенилан, С.Н. Кружков (1994), П.Л. Лионс, Б.Пертам, Е.Тадмор (1991, 1994), Е.Ю. Панов (1990, 1996).

Отметим, что, с одной стороны, решения квазилинейных законов сохранения могут приводить к потере гладкости начальной функции и образованию разрывов, но с другой стороны, например, решение задачи Римана в виде волны разрежения, происходит улучшение свойств начальной функции. Также можно рассмотреть даже задачу, где начальной функцией будет дельта-функция; оказывается, что в этом случае решение регуляризуется и мгновенно превращается в разрывное решение. Поэтому также представляет теоретический интерес рассмотреть задачу Коши в случае, когда начальная функция является лишь локально ограниченной. Например, для невязкого уравнения Бюргерса при линейно растущей начальной функции решение перестает существовать за конечное время. В работах А.Ю. Горицкого и Е.Ю. Панова (1999, 2002, 2006) были построены примеры локально ограниченных энтропийных обобщенных решений, а также выделены классы корректности соответствующей задачи Коши в случае степенной функции потока и степенного роста начальной функции на бесконечности. В общем случае в классе локально ограниченных функций классические результаты, полученные С.Н. Кружковым, вообще говоря, не справедливы. Недавняя работа Д. Серр (2018) рассматривает неограниченные решения одного многомерного закона сохранения с точки зрения теории полугрупп.

Работа Л.В. Гаргянц находится в русле указанных исследований и посвящена вопросам, связанным с существованием и единственностью обобщенных энтропийных решений в классе локально ограниченных функций при степенной функции потока и экспоненциально растущих на бесконечности начальных данных. Экспоненциальный рост начальных данных выделяет эту работу из других исследований.

Структура и содержание работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 39 наименований. Объем работы – 71 страница.

Введение посвящено обоснованию актуальности проблем, изучаемых в диссертационной работе. Также в нем дан обзор работ других авторов по данной тематике, сформулированы основные задачи, рассматриваемые в диссертации, и описаны полученные результаты.

В первой главе автор исследует задачу Коши для одномерного квазилинейного уравнения первого порядка со степенной функцией потока и экспоненциальным начальным условием. Рассматривается обобщенное энтропийное решение в смысле определения С.Н.Кружкова. Основным результатом главы 1 является доказательство теоремы существования знакочередующегося односторонне периодического по пространственной переменной энтропийного решения для экспоненциально растущего начального условия. Теорема доказана на основе конструкции, использованной А.Ю. Горицким (1999), методом характеристик с использованием соотношений Гюгонио и преобразования Лежандра. В этой же главе на основе принципа сравнения для ограниченных обобщенных энтропийных суб- и суперрешений доказано несуществование положительного энтропийного решения у рассматриваемой задачи Коши. Начальное условие выбрано положительным, так что для решений рассматриваемого класса принцип максимума оказывается нарушенным.

Во второй главе приведены достаточные условия существования во всей полуплоскости $t > 0$ знакочередующегося разрывного энтропийного решения задачи Коши в случае более широкого класса начального условия, обуславливающего различный рост на бесконечности. Также расширен результат о несуществовании положительного энтропийного решения. Соответствующие теоремы получены на основании обобщения методов главы 1.

Третья глава посвящена использованию подхода, основанного на группе симметрий скалярного закона сохранения со степенной функцией потока. Вначале вновь доказывается основная теорема из главы 1, но уже на основе только что упомянутого методологического подхода. А именно, решение строится не методом характеристик, а сведением к обыкновенному дифференциальному уравнению. Далее строится пример неединственности энтропийного локально ограниченного решения с нулевым начальным условием, что не является удивительным, поскольку, как было показано ранее, для данного класса решений принцип максимума нарушается. Также в этой главе автор описывает все решения задачи Коши с экспоненциальным начальным условием, имеющие специальный вид, который соответствует форме решений в виде бегущей волны. Эти решения также оказываются знакопеременными, со счетным количеством ударных волн.

В Заключении кратко суммируется итог работы и намечаются направления дальнейших исследований.

Научная новизна диссертации

В диссертации представлены следующие новые научные результаты:

1. Построено разрывное энтропийное решение задачи Коши, определенное во всей полуплоскости $t > 0$, для закона сохранения со степенной функцией потока и экспоненциальным начальным условием. Ранее рассматривались только начальные функции со степенным ростом на бесконечности.
2. Интересным фактом, недостаточно подчеркнутом в диссертации, является свойство ограниченности обобщенного энтропийного решения при фиксированном времени в случае экспоненциально растущих начальных данных. При начальных данных степенного роста наблюдается лишь локальная ограниченность обобщенных энтропийных решений.
3. Доказано несуществование ограниченного в любой полосе $[0,T]$ энтропийного решения рассматриваемой задачи Коши.
4. Построен новый пример неединственности обобщенного энтропийного решения задачи Коши в классе локально ограниченных функций.
5. Описан класс всех энтропийных решений задачи Коши, имеющих специальное представление в виде бегущей волны, для закона сохранения со степенной функцией потока и экспоненциальным начальным условием.

Практическая значимость работы

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в исследованиях по теории квазилинейных законов сохранения. Они могут представлять интерес для научных сотрудников ИПМ им.М.В.Келдыша и других исследовательских институтов.

Замечания

Отметим, что в ряде мест доказаны более широкие результаты, чем это формулируется в соответствующих утверждениях. Например, в доказательствах Следствий 1.1, 1.2, фактически получена асимптотика для решения, а не только оценка по модулю, как формулируется. В доказательстве Теоремы 1.2 фактически получено несуществование ограниченного в полосе $[0,T]\times\mathbb{R}$ решения, а не только положительного.

Техника построения слабых ударных волн при помощи огибающей описана, например, в книге "D.Serr. System of conservation laws 1. Hyperbolicity, entropies, shock waves, Cambridge University Press 2003, 263 p.", стр. 62-63 (первое издание на французском языке вышло в 1996 г.). В диссертации нет ссылок на эти более ранние работы.

В работе имеется ряд опечаток и неточностей.

Стр. 19, строка перед уравнением (1.13): перед w пропущен знак минус.

Стр. 21, Замечание 1.6, второе значение w, по-видимому, подразумевается положительным.

Стр. 23, Следствие 1.1, соотношение (1.23) в доказательстве этого следствия дает более сильный результат, чем заявлено в (1.21) – а именно асимптотическое поведение $|u(t,x)|$. То же самое справедливо в отношении утверждения Следствия 1.2 на стр. 24.

Стр. 27, Теорема 1.2, фактически, в этой теореме доказана невозможность построить не только положительное, но и, возможно, отрицательное, ограниченное в полосе $[0,T]\times\mathbb{R}$ решение.

Стр. 44, соотношение (3.4) в формулировке Леммы 3.2, неясно, что в (3.4) обозначает f.

Стр. 46, Доказательство Теоремы 1.1, 10-я строка сверху, видимо имеется в виду Лемма 3.2, а не Лемма 2; 8-я строка снизу, не определено обозначение $\mathbb{R}_*$.

Стр. 55, 5-я строка снизу, по-видимому, имеется ввиду интервал $(-\infty,-1)$, а не $(-\infty,1)$.

Стр. 58, Определение 3.1, не достаточно ясен смысл введения терминов «разрыв типа A», «разрыв типа B», в соответствии с общей теорией систем законов сохранения разрыв типа A является контактным разрывом, а разрыв типа B – ударной волной; 3-я строка снизу, в приведенной формуле должен присутствовать знак минус, поскольку построенное решение меняет знак.

Выводы

Характеризуя диссертацию в целом, отметим, что, несмотря на указанные замечания, работа соискателя написана на высоком научном уровне, и квалификация соискателя не вызывает сомнений. Все полученные результаты четко сформулированы и снабжены доказательствами.

Основное содержание диссертации опубликовано в открытой печати. Автореферат правильно отражает результаты диссертации. Диссертация удовлетворяет требованиям пункта 9 Положения о порядке присуждения ученых степеней ВАК РФ, а ее автор, Гаргянц Лидия Владимировна, заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Официальный оппонент: кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В. Келдыша

125047, Москва, Миусская площадь, 4

E-mail: yu-rykov@yandex.ru

«07» марта 2019 г.

Ю. Г. Рыков

Подпись к.ф.-м.н. Ю.Г. Рыкова заверяю

Ученый секретарь

Института прикладной математики им. М.В.Келдыша

к.ф.-м.н. А.И.Маслов