О Т З Ы В

официального оппонента на диссертационную работу Левченко Ю.А.
"О топологической классификации диффеоморфизмов трехмерного многообразия
с поверхностными базисными множествами",
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 "дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление"

В начале 60-х годов прошлого века С. Смейлом были введены диффеоморфизмы, удовлетворяющие аксиоме А. Аксиома А означает, что если неблуждающее множество диффеоморфизма гиперболично и периодические точки плотны в множестве неблуждающих точек. Соответствующие диффеоморфизмы называются А-диффеоморфизмами. Было доказано, что множество неблуждающих точек представляется в виде конечного объединения замкнутых инвариантных (базисных) множеств, каждое из которых обладает всюду плотной траекторией. Введенный С. Смейлом класс диффеоморфизмов явился непосредственным обобщением динамических систем (как диффеоморфизмов, так и потоков), введенных Д.В. Аносовым и получивших позднее название систем Аносова. Замечательным свойством систем С. Смейла является то, что аксиома А вместе с условием строгой трансверсальности эквивалентна структурной устойчивости системы.

Обнаружение систем Д.В. Аносова и С. Смейла послужило толчком к интенсивному иследованию систем со сложной динамикой (в том числе, к решению проблем их топологической классификации). В общем виде задача классификации диффеоморфизмов С. Смейла представляется необозримой и далека от завершения. Поэтому представляют интерес задачи классификации отдельных классов систем С. Смейла.

Диссертация Ю.А. Левченко посвящена исследованию динамики А-диффеоморфизмов замкнутого трехмерного многообразия, неблуждающие множества которых содержат базисные множества размерности 1 и 2, принадлежащие замкнутым инвариантным поверхностям. В ней исследуется взаимосвязь динамики таких диффеоморфизмов с топологией объемлющего многообразия, а также решается задача их топологической классификации.

В силу результатов Р.В. Плыкина 1971-го года, базисные множества размерности два являются либо аттракторами, либо репеллерами. Кроме того, если двумерный аттрактор является растягивающимся (то есть размерность неустойчивого многообразия любой его точки равна двум), то он устроен локально как произведение канторовского множества на двумерный диск. Если же размерность неустойчивого многообразия любой точки двумерного аттрактора равна единице, то в силу работы Р. Брауна 2010 года, аттрактор принадлежит объединению конечного числа замкнутых инвариантных поверхностей (то есть является поверхностным). Аналогичные утверждения имеют место для двумерных репеллеров.

Случай, когда неблуждающее множество структурно устойчивого диффеоморфизма содержит растягивающийся аттрактор (сжимающийся репеллер), исчерпывающим образом изучен в работах В.З. Гринеса и Е.В. Жужомы, где получена полная топологическая классификация таких диффеоморфизмов и доказно, что фазовое пространство, допускающее такие диффеоморфизмы является трехмерным тором.

Топологическая классификация А-диффеоморфизмов в случае, когда все двумерные базисные множества лежат на поверхностях, составили предмет исследования глав 2 и 3 диссертации Ю.А. Левченко. Глава 2 посвещена изучению топологии несущего многообразия, а глава 3 — топологической классификации рассматриваемых диффеоморфизмов. В основу классификации легли результаты В.З. Гринеса, Е.В. Жужомы и В.С. Медведева, полученные в 2005 году, из которых следует, что каждый двумерный поверхностный аттрактор (репеллер) A-диффеоморфизма является объединением конечного числа ручно вложенных поверхностей, гомеоморфных двумерному тору, и ограничение некоторой степени диффеоморфизма на каждую поверхность топологически сопряжено с автоморфизмом Аносова.

В теореме 2.1 главы 2 установлено, что 3-многообразие, допускающее структурно устойчивый диффеоморфизм с двумерным поверхностным неблуждающим множеством, является локально тривиальным расслоением над окружностью со слоем, диффеоморфным двумерному тору. При этом дается полная топологическая классификация таких многообразий. В главе 3 строится класс модельных структурно устойчивых диффеоморфизмов на 3 многообразиях с неблуждающим множеством, состоящим из объединения двумерных базисных множеств (теорема 3.1) и находятся необходимые и достаточные условия топологической сопряженности двух модельных диффеоморфизмов (теорема 3.2). В теореме 3.6 устанавливается основной результат главы 3, утверждающий, что каждый структурно устойчивый диффеоморфизм с неблуждающим множеством, состоящим из двумерных поверхностных базисных множеств, топологически сопряжен некоторому модельному диффеоморфизму.

Следует отметить, что сопряженность А-диффеоморфизма с двумерными поверхностными базисными множествами некоторому модельному диффеоморфизму установлена в диссертации вначале при более слабых предположениях, чем структурная устойчивость. Для диффеоморфизмов из рассматриваемого класса автором диссертации введено понятие топологической когерентности, означающее существование одномерного инвариантного слоения со специальными свойствами. Наличие топологической когерентности для диффеоморфизма уже гарантирует сопряженность его некоторому модельному (теорема 3.4). В теореме 3.5 устанавливается, что структурно устойчивый диффеоморфизм с двумерными поверхностными базисными множествами является топологически когерентным, откуда следует выше упомянутая теорема 3.6. Таким образом, теорема 3.5 (доказательство которой оказалось весьма трудоемким и потребовало от автора тонкого исследования асимптотического поведения устойчивых и неустойчивых многообразий точек из базисных множеств) является ключевым техническим результатом, позволяющим получить топологическую классификацию структурно устойчивых диффеоморфизмов с двумерными поверхностными базисными множествами. Следует также отметить результат теоремы 3.3, утверждающий, что ограничение любого А-диффеоморфизма 3-многообразия на неблуждающее множество, состоящее из двумерных поверхностных базисных множеств, объемлюще сопряжено с ограничением на неблуждающее множество некоторого модельного диффеоморфизма.

В главе 4 диссертации рассматриваются A-диффеоморфизмы на 3-многообразиях, неблуждающее множество которых содержит одномерные поверхностные базисные множества. Основой для результатов этой главы явилась топологическая классификация А-диффеоморфизмов на поверхностях с одномерных базисными множествами, полученными в 70-х годах прошлого века в работах Р.В. Плыкина, В.З. Гринеса, А.Ю. Жирова, Х.Х. Калая, Х. Бонатти и Р. Ланжевена. В диссертации Левченко Ю.А. сделан важный шаг по использованию этих результатов для A-диффеоморфизмов трехмерных многообразий, базисные множества которых одномерны и принадлежат двумерным поверхностям (теорема 4.3). Более того, для класса структурно устойчивых диффеоморфизмов трехмерной сферы, неблуждающие множества которых состоят из одного одномерного поверхностного трансверсально притягивающего аттрактора, канонически вложенного в двумерную сферу, и конечного числа стоков и источников, найдены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности (теорема 4.4).

Из сказанного выше следует, что результаты диссертации Ю.А. Левченко являются значительным продвижением в топологической классификации каскадов с гиперболическим неблуждающим множеством на 3-многообразиях. Все результаты являются новыми и потребовали от автора владения методами качественной теории динамических систем и топологии. Вдиссертации использованы (и изучены) весьма нетривиальные результаты, полученные в период с начала 70-х годов по настоящее время. Результаты (особенно результаты главы 3) являются значительным вкладом теорию систем С. Смейла и будут изучаться как в России, так и за рубежом. Уровень работы значительно превышает обычный уровень лиссертаций.

Отметим некоторые недостатки диссертации. Недостатки имеют в основном оформительский характер и не влияют на общую оценку работы.

На стр. 36, строки 12, 13. По смыслу, p неподвижная точка, но об этом не сказано.

Стр. 37, определение сепаратрисы (определение 1.13). Надо было сказать, что $W^u(p)$ $(W^s(p))$ одномерное.

Следовало бы подправить утверждение 1.2 (стр. 42)

Имеется несколько опечаток, которые перечислять не будем.

Основные результаты диссертации опубликованы в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК. Автореферат адекватно отражает содержание диссертации. Считаю, что диссертационная работа Ю.А. Левченко удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, а автор заслуживает присуждения искомой степени.

Официальный оппонент,
доктор физ.-мат. наук, профессор,
зав. каф. высшей математики
ИАТЭ НИЯУ МИФИ,
249040, г. Обнинск, Студгородок, д.1,
тел. 8(484)393-69-31
E-mail: sataev@iate.obninsk.ru

Е.А. Сатаев

Подпись профессора Е.А. Сатаева заверяю
Ученый секретарь Ученого совета ИАТЭ НИЯУ МИФИ,
д.ф.-м.н., проф. В.Л. Шаблов